Amirkabir University of Technology
(Tehran Polytechnic)

بررسی تبدیل ملین: ویژگی‌ها، مثال‌ها و کاربردها

نویسنده: محمد مهدی الیاسی

استاد: دکتر مرادی

درس: ریاضیات مهندسی پیشرفته

دانشکده مهندسی برق

۸ بهمن ۱۴۰۳

فهرست مطالب

۱ مقدمه

تبدیل ملین یک ابزار ریاضی انعطاف‌پذیر است که نقش حیاتی در حل مسائل مختلف در ریاضیات، فیزیک و مهندسی ایفا می‌کند[۱]. این تبدیل به عنوان یک تبدیل انتگرالی، روشی منحصربه‌فرد برای تحلیل توابع از طریق نگاشت آن‌ها به حوزه مختلط فراهم می‌کند. این تبدیل به‌ویژه در مطالعه رفتارهای مجانبی ارزشمند است و در زمینه‌هایی مانند تحلیل مجانبی، نظریه اعداد و مکانیک کوانتوم ضروری است. در مهندسی، این تبدیل در پردازش سیگنال و تحلیل تصاویر کاربرد دارد، جایی که تکنیک‌های حوزه فرکانس برای تفسیر داده‌ها ضروری هستند.

اهمیت تبدیل ملین در توانایی آن برای ساده‌سازی پردازش‌های ضربی و رفتارهای قانون توان نهفته است. با تبدیل توابع تعریف‌شده در دامنه واقعی مثبت به فرمی ساده‌تر، تحلیل و محاسبه آن‌ها راحت‌تر می‌شود.

این گزارش قصد دارد ویژگی‌های تبدیل ملین را بررسی کرده و مبانی نظری آن را از طریق مثال‌های عملی تأیید کند. با استفاده از پایتون به عنوان یک ابزار محاسباتی، تبدیل‌ها به صورت عددی محاسبه می‌شوند، هویت‌های ریاضی تأیید می‌شوند و نتایج به صورت گرافیکی نمایش داده می‌شوند. جنبه‌های کلیدی مانند ویژگی‌های مقیاس‌بندی، انتقال و کاربردهای خاص به منظور ارائه یک درک جامع از این ابزار قدرتمند ریاضی نشان داده خواهند شد.

۲ پیش‌زمینه ریاضی

تبدیل ملین یک تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{M}\{f(x)\}(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x)\, dx, \qquad (۱)$$

که در آن $s = \sigma + i\omega$ یک متغیر مختلط است. این تبدیل یک تابع $f(x)$ تعریف‌شده در دامنه مثبت واقعی را به صفحه مختلط نگاشت می‌کند و برای تحلیل مسائل شامل ویژگی‌های مقیاس‌ناپذیر و ساختارهای ضربی مفید است.

یک حالت خاص از تبدیل ملین زمانی است که $f(x) = e^{-x}$ باشد، که منجر به تابع گاما می‌شود:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\, dx. \qquad (۲)$$

تابع گاما نقش حیاتی در تبدیل ملین ایفا می‌کند زیرا راه‌حل‌های بسته برای توابع خاص فراهم می‌آورد و به عنوان یک بلوک سازنده برای بسیاری از نتایج تحلیلی استفاده می‌شود. این تابع در نظریه احتمالات، ترکیبیات و تحلیل مختلط به طور گسترده‌ای استفاده می‌شود.
تبدیل ملین ویژگی‌های مهمی دارد:

- **ویژگی انتقال:** اگر $f(x)$ به صورت $x^a f(x)$ تبدیل شود، آنگاه:

$$\mathcal{M}\{x^a f(x)\}(s) = \mathcal{M}\{f(x)\}(s+a). \qquad (۳)$$

- **ویژگی مقیاس‌بندی:** اگر $f(x)$ به صورت $f(ax)$ مقیاس‌بندی شود، آنگاه:

$$\mathcal{M}\{f(ax)\}(s) = a^{-s}\mathcal{M}\{f(x)\}(s). \qquad (۴)$$

- **ارتباط با تابع گاما:** برای توابعی مانند e^{-x}، تبدیل ملین مستقیماً به تابع گاما تبدیل می‌شود.

این ویژگی‌ها تبدیل ملین را به ابزاری قدرتمند برای حل مسائل شامل معادلات دیفرانسیل، رفتارهای مجانبی و انتگرال‌ها تبدیل می‌کند. بخش‌های بعدی گزارش این ویژگی‌ها و کاربردهای آن‌ها را از طریق محاسبات عددی نشان می‌دهند.

۳ اثبات تبدیل ملین برای $f(x) = e^{-x}$

تبدیل ملین تابع نمایی $f(x) = e^{-x}$ یک مثال کلاسیک است که ارتباط آن با تابع گاما را نشان می‌دهد. به صورت ریاضی، این تبدیل عبارت است از:

$$\mathcal{M}\{e^{-x}\}(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\, dx = \Gamma(s). \qquad (۵)$$

این انتگرال برای $\Re(s) > 0$ همگرا است، جایی که $\Gamma(s)$ نشان‌دهنده تابع گاما است که به طور گسترده در ریاضیات و علوم استفاده می‌شود.
برای تأیید این نتیجه، از پایتون برای محاسبه عددی تبدیل ملین و مقایسه آن با تابع گامای تحلیلی استفاده کردیم[۲].

۱.۳ پیاده‌سازی در پایتون

کد پایتون زیر برای محاسبه عددی تبدیل ملین $f(x) = e^{-x}$ استفاده شد:

```
np as numpy import
integrate as scipy.integrate import
gamma import scipy.special from
plt as matplotlib.pyplot import

-x)e^( = f(x) for transform Mellin Define #
p): ,mellin_transform(f def
np.inf)[0] ,0 ,f(x) * (1-x**(p x: integrate.quad(lambda return

function exponential the Define #
f(x): def
-x)np.exp( return

values p Generate #
100) ,5 ,np.linspace(0.1 = p_values

values Compute #
gamma(p_values) = gamma_vals
p_values] in p for p) ,[mellin_transform(f = mt_vals

results Plot #
6)) ,plt.figure(figsize=(10
')Function Gamma 'Analyticallabel= ,'-'b ,gamma_vals ,plt.plot(p_values
')Transform Mellin 'Numericallabel= ,'--'r ,mt_vals ,plt.plot(p_values
')'pplt.xlabel(
')'Valueplt.ylabel(
')-x}$e^{ = $f(x) of Transform 'Mellinplt.title(
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

۲.۳ نتایج و مقایسه

نتایج محاسبات عددی در کنار تابع گامای تحلیلی ترسیم شدند، همانطور که در زیر نشان داده شده است:

این نمودار تطابق عالی بین نتایج عددی و تحلیلی را نشان می‌دهد و ارتباط بین

تبدیل ملین برای $f(x) = e^{-x}$ و تابع گاما را تأیید می‌کند.

۴ تأیید تبدیل ملین برای $f(x) = \frac{1}{x+1}$

تابع $f(x) = \frac{1}{x+1}$ به عنوان یک مثال دیگر برای بررسی تبدیل ملین عمل می‌کند. تبدیل ملین مربوط به این تابع به صورت زیر است:

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{x+1}\,dx = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}. \tag{۶}$$

این هویت انتگرالی ارتباط بین تبدیل ملین و توابع مثلثاتی را نشان می‌دهد.

۱.۴ ارتباط با توابع گاما

هویت فوق همچنین می‌تواند با استفاده از تابع گاما به صورت زیر بیان شود:

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}. \tag{۷}$$

این رابطه تعامل بین تبدیل ملین و تابع گاما را نشان می‌دهد و اهمیت تحلیلی آن را تقویت می‌کند.

۲.۴ پیاده‌سازی در پایتون

کد پایتون زیر برای محاسبه عددی تبدیل ملین، ارزیابی حاصل‌ضرب گاما و مقایسه نتایج با راه‌حل تحلیلی استفاده شد:

```
np as numpy import
gamma import scipy.special from
plt as matplotlib.pyplot import
quad import scipy.integrate from

function the Define #
1) + (x / 1 x: lambda = f

f(x) for Transform Mellin Define #
p): ,mellin_transform(f def
np.inf) ,0 ,f(x) * (1-x**(p x: quad(lambda = _ ,result
```

```
result return

values p Generate #
100) ,9.0 ,np.linspace(0.1 = p_values

values Compute #
p_values] in p for p) ,[mellin_transform(f = mt_values
p_values] in p for p) - gamma(1 * [gamma(p) = gamma_product
p_values] in p for p) * np.sin(np.pi / [np.pi = analytical

results Plot #
6)) ,plt.figure(figsize=(10
')Transform Mellin 'Numericallabel= ,'-'b ,mt_values ,plt.plot(p_values
')Product 'Gammalabel= ,'--'g ,gamma_product ,plt.plot(p_values
')Solution 'Analyticallabel= ,''r: ,analytical ,plt.plot(p_values
')'pplt.xlabel(
')'Valueplt.ylabel(
')\\frac{1}{x+1}$ = $f(x) for Transform Mellin of 'Verificationplt.title(
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

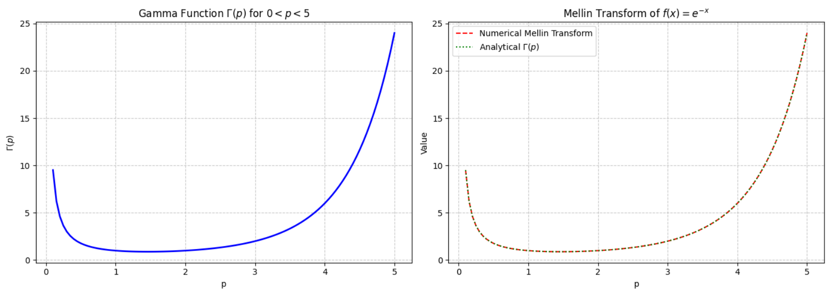
۳.۴ نتایج و بصری‌سازی

نتایج حاصل از محاسبه عددی، حاصل‌ضرب گاما و راه‌حل تحلیلی ترسیم و مقایسه شدند. نمودار زیر نشان می‌دهد که این مقادیر تا چه اندازه با هم مطابقت دارند:

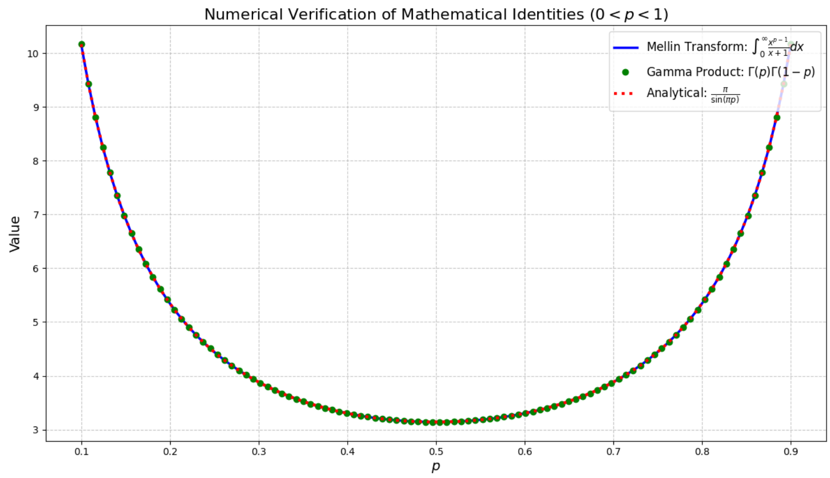
تطابق بین نتایج عددی، حاصل‌ضرب گاما و راه‌حل تحلیلی هویت نظری را تأیید می‌کند. این مثال بر کاربرد تبدیل ملین در تحلیل توابع و تأیید هویت‌های ریاضی تأکید می‌کند.

۵ بررسی ویژگی‌های مقیاس‌بندی و انتقال

ویژگی‌های مقیاس‌بندی و انتقال در تبدیل ملین اطلاعاتی درباره رفتار توابع تحت تبدیل‌ها ارائه می‌دهند. این ویژگی‌ها در ادامه تعریف شده و به صورت عددی بررسی می‌شوند.



شکل ۱: مقایسه تبدیل ملین عددی و تابع گامای تحلیلی برای $f(x) = e^{-x}$.



شکل ۲: تأیید عددی هویت‌های ریاضی برای $f(x) = \frac{1}{x+1}$ $(0 < p < 1)$.

۱.۵ ویژگی مقیاس‌بندی

ویژگی مقیاس‌بندی تبدیل ملین بیان می‌کند:

$$\mathcal{M}\{f(ax)\}(s) = a^{-s}\mathcal{M}\{f(x)\}(s), \quad (۸)$$

که در آن $a > 0$ است. این ویژگی نشان می‌دهد که مقیاس‌بندی آرگومان تابع منجر به یک ضریب ضربی در دامنه تبدیل می‌شود.

۲.۵ ویژگی انتقال

ویژگی انتقال تبدیل ملین به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{M}\{x^a f(x)\}(s) = \mathcal{M}\{f(x)\}(s+a). \quad (۹)$$

این ویژگی توصیف می‌کند که چگونه ضرب تابع در یک توان از x باعث انتقال آرگومان تبدیل می‌شود.

۳.۵ پیاده‌سازی در پایتون

کد پایتون زیر تأیید عددی هر دو ویژگی را نشان می‌دهد:

```
np as numpy import
quad import scipy.integrate from
gamma import scipy.special from
plt as matplotlib.pyplot import

function transform Mellin Define #
p): ,mellin_transform(f def
np.inf) ,0 ,f(x) * (1-x**(p x: quad(lambda = _ ,result
result return

functions transformed and original Define #
f(x): def
-x)np.exp( return

a): ,scaled_f(x def
x) * f(a return

a): ,shifted_f(x def
```

```
f(x) * x**a return

Parameters #
2 = a
100) ,5 ,np.linspace(0.1 = p_values

scaling for values Compute #
... x: [mellin_transform(lambda = scaling_numerical
p_values] in p for p) ,a) ,scaled_f(x
p)... ,mellin_transform(f * -p[a** = scaling_analytical
p_values] in p for

shifting for values Compute #
... x: [mellin_transform(lambda = shifting_numerical
p_values] in p for p) ,a) ,shifted_f(x
a)... + p ,[mellin_transform(f = shifting_analytical
p_values] in p for

results Plot #
6)) ,plt.figure(figsize=(12

Scaling #
1) ,2 ,plt.subplot(1
... ,''bo ,scaling_numerical ,plt.plot(p_values
')Scaling 'Numericallabel=
... ,'--'r ,scaling_analytical ,plt.plot(p_values
')Scaling 'Analyticallabel=
'){a}$ = $a ,$f(ax)$ Property: 'Scalingplt.title(f
')'$s$plt.xlabel(
')'Valueplt.ylabel(
plt.legend()

Shifting #
2) ,2 ,plt.subplot(1
... ,''mo ,shifting_numerical ,plt.plot(p_values
')Shifting 'Numericallabel=
... ,'--'g ,shifting_analytical ,plt.plot(p_values
')Shifting 'Analyticallabel=
'){a}$ = $a ,f(x)$ $x^a Property: 'Shiftingplt.title(f
')'$s$plt.xlabel(
')'Valueplt.ylabel(
```

```
plt.legend()

plt.tight_layout()
plt.show()
```

۴.۵ نتایج و بصری‌سازی

نتایج تأیید عددی هر دو ویژگی در زیر نشان داده شده است:
نمودارها تطابق بین نتایج عددی و عبارات تحلیلی را تأیید می‌کنند و ویژگی‌های مقیاس‌بندی و انتقال تبدیل ملین را معتبر می‌سازند.

۶ بصری‌سازی $\phi(r,\theta)$

تابع $\phi(r,\theta)$ با استفاده از یک روش کانولوشنی محاسبه می‌شود که در آن انتگرالی بر روی تابع $f(\xi)$ با وزنده تابع دیگری $h(r/\xi,\theta)$ انجام می‌گیرد. این به صورت ریاضی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\phi(r,\theta) = \int_0^\infty f(\xi)\frac{h(r/\xi,\theta)}{\xi}\,d\xi. \tag{۱۰}$$

۱.۶ نقش $h(r,\theta)$ و $f(\xi)$

- تابع $h(r,\theta)$ به عنوان یک هسته عمل می‌کند که تابع ورودی $f(\xi)$ را بر اساس پارامترهای r و θ مدوله می‌کند. این تابع اطلاعاتی درباره رابطه بین مقیاس r و زاویه θ کدگذاری می‌کند. - تابع $f(\xi)$ سیگنال یا داده ورودی را نمایش می‌دهد که با هسته $h(r,\theta)$ کانولوشن شده و خروجی $\phi(r,\theta)$ را تولید می‌کند.

۲.۶ پیاده‌سازی در پایتون

کد پایتون زیر محاسبه $\phi(r,\theta)$ را نشان می‌دهد:

```
np as numpy import
quad import scipy.integrate from
plt as matplotlib.pyplot import

theta) ,h(r Define #
alpha): ,theta ,h_function(r def
```

```
alpha) * (2 / np.pi = n
theta) * np.cos(n * n)) * r**(2 + (1 * (r**n) = term1
... theta) * n * np.cos(2 * n) * r**(2 * 2 + 1 = term2
n) * r**(4 +
term2 / term1 return

theta) ,phi(r Define #
f): ,alpha ,theta ,phi_function(r def
integrand(xi): def
alpha) ,theta ,xi / h_function(r = h_val
xi / h_val * f(xi) return
limit=50)[0] ,np.inf ,0 ,quad(integrand return

f(xi) Example #
f_function(xi): def
-xi)np.exp( return

r and theta for range Define #
4 / np.pi = alpha
50) ,alpha ,-alphanp.linspace( = theta_values
50) ,5 ,np.linspace(0.1 = r_values

theta) ,phi(r Compute #
len(theta_values))) ,np.zeros((len(r_values) = phi_values
enumerate(r_values): in r ,i for
enumerate(theta_values): in theta ,j for
... ,theta ,phi_function(r = j] ,phi_values[i
f_function) ,alpha

results Plot #
theta_values) ,np.meshgrid(r_values = THETA ,R
6)) ,plt.figure(figsize=(10
')'viridiscmap= ,levels=50 ,phi_values.T ,THETA ,plt.contourf(R
')\\theta)$ ,'$\\phi(rplt.colorbar(label=
... \\in $\\theta for \\theta)$ ,'$\\phi(rplt.title(
')5]$ ,1.0] \\in $r and \\pi/4]$ ,-\\pi/4[
')'rplt.xlabel(
')'$\\theta$plt.ylabel(
plt.show()
```

۳.۶ نتایج و بصری‌سازی

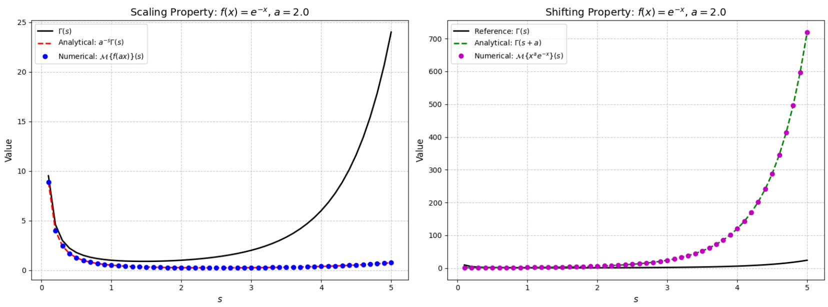
نمودار کانتور $\phi(r,\theta)$ در زیر نشان داده شده است:
این بصری‌سازی تغییرات $\phi(r,\theta)$ را نسبت به پارامترهای r و θ نشان می‌دهد. نتایج تأثیر هسته $h(r,\theta)$ و تابع ورودی $f(\xi)$ بر خروجی را برجسته می‌کند.

۷ نتیجه‌گیری

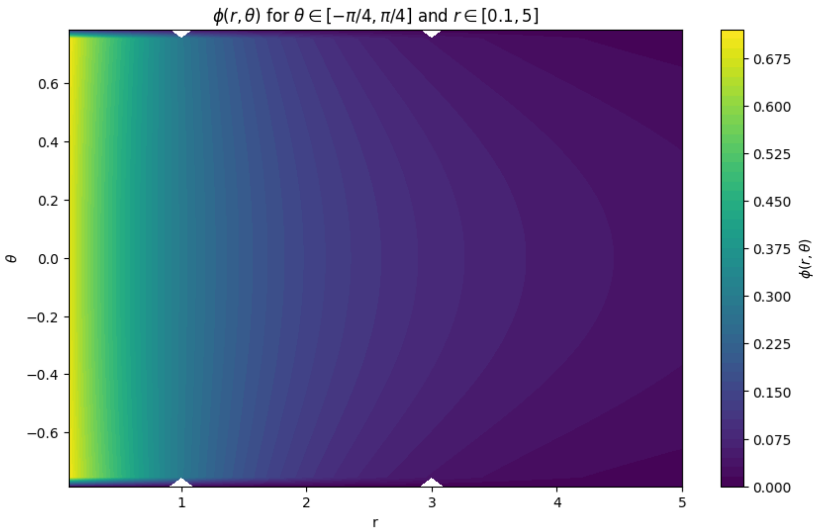
تبدیل ملین به عنوان ابزاری قدرتمند برای تحلیل توابع نشان داده شده است که راهی منحصربه‌فرد برای مطالعه ویژگی‌های مقیاس‌ناپذیر و فرایندهای ضربی ارائه می‌دهد. این گزارش هویت‌ها و ویژگی‌های کلیدی مانند مقیاس‌بندی، انتقال و محاسبات مبتنی بر کانولوشن را تأیید کرد. پیاده‌سازی‌های عددی و تطابق آن‌ها با نتایج تحلیلی قابلیت اطمینان پایتون را برای تحلیل ریاضی نشان می‌دهند.

پیشنهادات برای گسترش این کار شامل موارد زیر است:

- بررسی تبدیل ملین در ابعاد بالاتر برای تحلیل توابع چندمتغیره.
- استفاده از تبدیل ملین در علم داده، مانند استخراج ویژگی‌ها و تجزیه سیگنال.
- بررسی نقش آن در حل معادلات دیفرانسیل پیشرفته و معادلات انتگرالی.



شکل ۳: تأیید عددی ویژگی‌های مقیاس‌بندی و انتقال برای $f(x) = e^{-x}$.



شکل ۴: نمودار کانتور $\phi(r, \theta)$ برای $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$ و $r \in [0.1, 5]$.

۸ مراجع

مراجع

[۱] Debnath، Lokenath and Dambaru Bhatta. *I and Transforms Their Applications.* ۲*nd ed.* CRC، Press، ۱۹۹۵.

[۲] Github، link *Mellin-transform* at `https://github.com/MohammadMahdiElyasi/Mellin-transform`.