Amirkabir University of Technology
(Tehran Polytechnic)

بررسی تبدیل ملین: ویژگی‌ها، مثال‌ها و کاربردها

نویسنده: محمد مهدی الیاسی

استاد: دکتر مرادی

درس: ریاضیات مهندسی پیشرفته

دانشکده مهندسی برق

۹ بهمن ۱۴۰۳

فهرست مطالب

۱ مقدمه

تبدیل ملین یک ابزار ریاضی انعطاف‌پذیر است که نقش حیاتی در حل مسائل مختلف در ریاضیات، فیزیک و مهندسی ایفا می‌کند[۱]. این تبدیل به عنوان یک تبدیل انتگرالی، روشی منحصربه‌فرد برای تحلیل توابع از طریق نگاشت آن‌ها به حوزه مختلط فراهم می‌کند. این تبدیل به‌ویژه در مطالعه رفتارهای مجانبی ارزشمند است و در زمینه‌هایی مانند تحلیل مجانبی، نظریه اعداد و مکانیک کوانتوم ضروری است.
در مهندسی، این تبدیل در پردازش سیگنال و تحلیل تصاویر کاربرد دارد، جایی که تکنیک‌های حوزه فرکانس برای تفسیر داده‌ها ضروری هستند.

اهمیت تبدیل ملین در توانایی آن برای ساده‌سازی پردازش‌های ضربی و رفتارهای قانون توان نهفته است. با تبدیل توابع تعریف‌شده در دامنه واقعی مثبت به فرمی ساده‌تر، تحلیل و محاسبه آن‌ها راحت‌تر می‌شود.

این گزارش قصد دارد ویژگی‌های تبدیل ملین را بررسی کرده و مبانی نظری آن را از طریق مثال‌های عملی تأیید کند. با استفاده از پایتون به عنوان یک ابزار محاسباتی، تبدیل‌ها به صورت عددی محاسبه می‌شوند، هویت‌های ریاضی تأیید می‌شوند و نتایج به صورت گرافیکی نمایش داده می‌شوند. جنبه‌های کلیدی مانند ویژگی‌های مقیاس‌بندی، انتقال و کاربردهای خاص به منظور ارائه یک درک جامع از این ابزار قدرتمند ریاضی نشان داده خواهند شد.

۲ پیش‌زمینه ریاضی

تبدیل ملین یک تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{M}\{f(x)\}(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x)\, dx, \tag{۱}$$

که در آن $s = \sigma + i\omega$ یک متغیر مختلط است. این تبدیل یک تابع $f(x)$ تعریف‌شده در دامنه مثبت واقعی را به صفحه مختلط نگاشت می‌کند و برای تحلیل مسائل شامل ویژگی‌های مقیاس‌ناپذیر و ساختارهای ضربی مفید است.

یک حالت خاص از تبدیل ملین زمانی است که $f(x) = e^{-x}$ باشد، که منجر به تابع گاما می‌شود:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\, dx. \tag{۲}$$

تابع گاما نقش حیاتی در تبدیل ملین ایفا می‌کند زیرا راه‌حل‌های بسته برای توابع خاص فراهم می‌آورد و به عنوان یک بلوک سازنده برای بسیاری از نتایج تحلیلی استفاده می‌شود. این تابع در نظریه احتمالات، ترکیبیات و تحلیل مختلط به طور گسترده‌ای استفاده می‌شود.

تبدیل ملین ویژگی‌های مهمی دارد:

- **ویژگی انتقال:** اگر $f(x)$ به صورت $x^a f(x)$ تبدیل شود، آنگاه:

$$\mathcal{M}\{x^a f(x)\}(s) = \mathcal{M}\{f(x)\}(s+a). \tag{۳}$$

- **ویژگی مقیاس‌بندی:** اگر $f(x)$ به صورت $f(ax)$ مقیاس‌بندی شود، آنگاه:

$$\mathcal{M}\{f(ax)\}(s) = a^{-s}\mathcal{M}\{f(x)\}(s). \tag{۴}$$

- **ارتباط با تابع گاما:** برای توابعی مانند e^{-x}، تبدیل ملین مستقیماً به تابع گاما تبدیل می‌شود.

این ویژگی‌ها تبدیل ملین را به ابزاری قدرتمند برای حل مسائل شامل معادلات دیفرانسیل، رفتارهای مجانبی و انتگرال‌ها تبدیل می‌کند. بخش‌های بعدی گزارش این ویژگی‌ها و کاربردهای آن‌ها را از طریق محاسبات عددی نشان می‌دهند.

۳ اثبات تبدیل ملین برای $f(x) = e^{-x}$

تبدیل ملین تابع نمایی $f(x) = e^{-x}$ یک مثال کلاسیک است که ارتباط آن با تابع گاما را نشان می‌دهد. به صورت ریاضی، این تبدیل عبارت است از:

$$\mathcal{M}\{e^{-x}\}(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx = \Gamma(s). \tag{۵}$$

این انتگرال برای $\Re(s) > 0$ همگرا است، جایی که $\Gamma(s)$ نشان‌دهنده تابع گاما است که به طور گسترده در ریاضیات و علوم استفاده می‌شود.

برای تأیید این نتیجه، از پایتون برای محاسبه عددی تبدیل ملین و مقایسه آن با تابع گامای تحلیلی استفاده کردیم[۲].

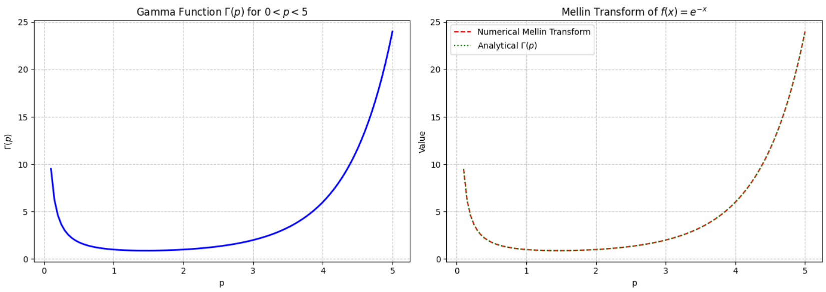
۱.۳ پیاده‌سازی در پایتون

کد پایتون زیر برای محاسبه عددی تبدیل ملین $f(x) = e^{-x}$ استفاده شد:

```
tropmi numpy sa np
tropmi scipy.integrate sa integrate
morf scipy.special tropmi gamma
tropmi matplotlib.pyplot sa plt

# enifeD nilleM mrofsnart rof f(x) = e-(^x)
fed mellin_transform(f, p):
    nruter integrate.quad(adbmal x: x**(p-1) * f(x), 0,
        np.inf)[0]

# enifeD eht laitnenopxe noitcnuf
fed f(x):
    nruter np.exp(-x)

# etareneG p seulav
p_values = np.linspace(0.1, 5, 100)

# etupmoC seulav
gamma_vals = gamma(p_values)
mt_vals = [mellin_transform(f, p) rof p ni p_values]

# tolP stluser
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(p_values, gamma_vals, 'b-', label='lacitylanA ammaG
    noitcnuF')
plt.plot(p_values, mt_vals, 'r--', label='laciremuN nilleM
    mrofsnarT')
plt.xlabel('p')
plt.ylabel('eulaV')
plt.title('nilleM mrofsnarT fo f$(x) = e-{^x}$')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

۲.۳ نتایج و مقایسه

نتایج محاسبات عددی در کنار تابع گامای تحلیلی ترسیم شدند، همانطور که در زیر نشان داده شده است:



شکل ۱: مقایسه تبدیل ملین عددی و تابع گامای تحلیلی برای $f(x) = e^{-x}$.

این نمودار تطابق عالی بین نتایج عددی و تحلیلی را نشان می‌دهد و ارتباط بین تبدیل ملین برای $f(x) = e^{-x}$ و تابع گاما را تأیید می‌کند.

۴ تأیید تبدیل ملین برای $f(x) = \frac{1}{x+1}$

تابع $f(x) = \frac{1}{x+1}$ به عنوان یک مثال دیگر برای بررسی تبدیل ملین عمل می‌کند. تبدیل ملین مربوط به این تابع به صورت زیر است:

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{x+1}\,dx = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}. \tag{۶}$$

این هویت انتگرالی ارتباط بین تبدیل ملین و توابع مثلثاتی را نشان می‌دهد.

۱.۴ ارتباط با توابع گاما

هویت فوق همچنین می‌تواند با استفاده از تابع گاما به صورت زیر بیان شود:

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}. \tag{۷}$$

این رابطه تعامل بین تبدیل ملین و تابع گاما را نشان می‌دهد و اهمیت تحلیلی آن را تقویت می‌کند.

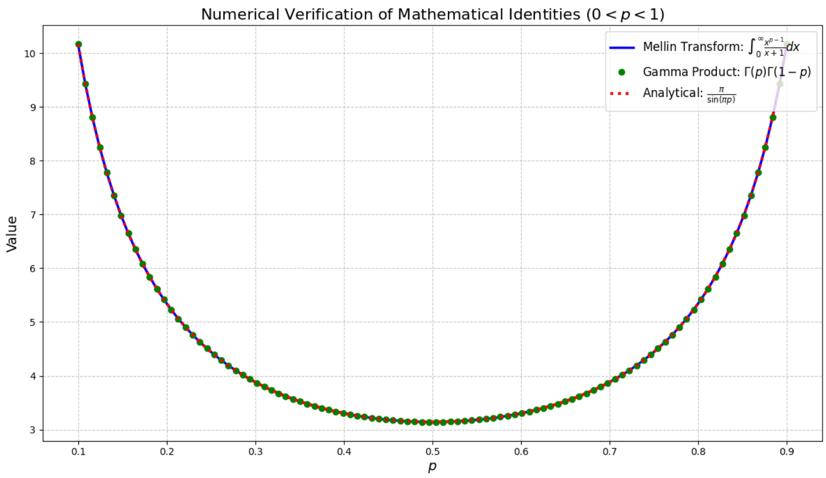
۲.۴ پیاده‌سازی در پایتون

کد پایتون زیر برای محاسبه عددی تبدیل ملین، ارزیابی حاصل‌ضرب گاما و مقایسه نتایج با راه‌حل تحلیلی استفاده شد:

```
tropmi numpy sa np
morf scipy.special tropmi gamma
tropmi matplotlib.pyplot sa plt
morf scipy.integrate tropmi quad

# senifeD eht noitcnuf
f = adbmal x: 1 / (x + 1)

# senifeD nilleM mrofsnarT rof f(x)
fed mellin_transform(f, p):
    result, _ = quad(adbmal x: x**(p-1) * f(x), 0, np.inf)
    nruter result

# etareneG p seulav
p_values = np.linspace(0.1, 0.9, 100)

# etupmoC seulav
mt_values = [mellin_transform(f, p) rof p ni p_values]
gamma_product = [gamma(p) * gamma(1 - p) rof p ni p_values]
analytical = [np.pi / np.sin(np.pi * p) rof p ni p_values]

# tolP stluser
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(p_values, mt_values, 'b-', label='laciremuN nilleM
   mrofsnarT')
plt.plot(p_values, gamma_product, 'g--', label='ammaG tcudorP')
plt.plot(p_values, analytical, 'r:', label='lacitylanA
   noituloS')
plt.xlabel('p')
plt.ylabel('eulaV')
plt.title('noitacifireV fo nilleM mrofsnarT rof f$(x) =
   \\carf{}1{x}1+$')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

۳.۴ نتایج و بصری‌سازی

نتایج حاصل از محاسبه عددی، حاصل‌ضرب گاما و راه‌حل تحلیلی ترسیم و مقایسه شدند. نمودار زیر نشان می‌دهد که این مقادیر تا چه اندازه با هم مطابقت دارند:



شکل ۲: تأیید عددی هویت‌های ریاضی برای $f(x) = \frac{1}{x+1}$ $(0 < p < 1)$.

تطابق بین نتایج عددی، حاصل‌ضرب گاما و راه‌حل تحلیلی هویت نظری را تأیید می‌کند. این مثال بر کاربرد تبدیل ملین در تحلیل توابع و تأیید هویت‌های ریاضی تأکید می‌کند.

۵ بررسی ویژگی‌های مقیاس‌بندی و انتقال

ویژگی‌های مقیاس‌بندی و انتقال در تبدیل ملین اطلاعاتی درباره رفتار توابع تحت تبدیل‌ها ارائه می‌دهند. این ویژگی‌ها در ادامه تعریف شده و به صورت عددی بررسی می‌شوند.

۱.۵ ویژگی مقیاس‌بندی

ویژگی مقیاس‌بندی تبدیل ملین بیان می‌کند:

$$\mathcal{M}\{f(ax)\}(s) = a^{-s}\mathcal{M}\{f(x)\}(s), \tag{۸}$$

که در آن $a > 0$ است. این ویژگی نشان می‌دهد که مقیاس‌بندی آرگومان تابع منجر به یک ضریب ضربی در دامنه تبدیل می‌شود.

۲.۵ ویژگی انتقال

ویژگی انتقال تبدیل ملین به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{M}\{x^a f(x)\}(s) = \mathcal{M}\{f(x)\}(s+a). \tag{۹}$$

این ویژگی توصیف می‌کند که چگونه ضرب تابع در یک توان از x باعث انتقال آرگومان تبدیل می‌شود.

۳.۵ پیاده‌سازی در پایتون

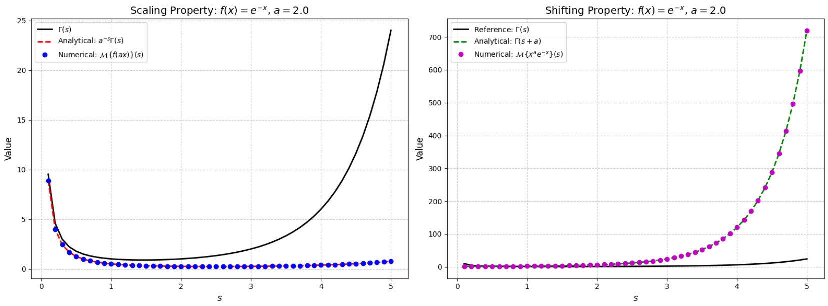
کد پایتون زیر تأیید عددی هر دو ویژگی را نشان می‌دهد:

```
tropmi numpy sa np
morf scipy.integrate tropmi quad
morf scipy.special tropmi gamma
tropmi matplotlib.pyplot sa plt

# enifeD nilleM mrofsnart noitcnuf
fed mellin_transform(f, p):
    result, _ = quad(adbmal x: x**(p-1) * f(x), 0, np.inf)
    nruter result

# enifeD lanigiro dna demrofsnart snoitcnuf
fed f(x):
    nruter np.exp(-x)

fed scaled_f(x, a):
    nruter f(a * x)

fed shifted_f(x, a):
    nruter x**a * f(x)

# sretemaraP
a = 2
p_values = np.linspace(0.1, 5, 100)

# etupmoC seulav rof gnilacs
scaling_numerical = [mellin_transform(adbmal x: ...
scaled_f(x, a), p) rof p ni p_values]
scaling_analytical = [a**-p * mellin_transform(f, p)...
rof p ni p_values]

# etupmoC seulav rof gnitfihs
shifting_numerical = [mellin_transform(adbmal x: ...
shifted_f(x, a), p) rof p ni p_values]
shifting_analytical = [mellin_transform(f, p + a)...
rof p ni p_values]

# tolP stluser
plt.figure(figsize=(12, 6))

# gnilacS
plt.subplot(1, 2, 1)
```

```
plt.plot(p_values, scaling_numerical, 'ob', ...
label='laciremuN gnilacS')
plt.plot(p_values, scaling_analytical, 'r--', ...
label='lacitylanA gnilacS')
plt.title(f'gnilacS ytreporP: f$(xa)$, a$ = {a}$')
plt.xlabel('$s$')
plt.ylabel('eulaV')
plt.legend()

# gnitfihS
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.plot(p_values, shifting_numerical, 'om', ...
label='laciremuN gnitfihS')
plt.plot(p_values, shifting_analytical, 'g--', ...
label='lacitylanA gnitfihS')
plt.title(f'gnitfihS ytreporP: x$^a f(x)$, a$ = {a}$')
plt.xlabel('$s$')
plt.ylabel('eulaV')
plt.legend()

plt.tight_layout()
plt.show()
```

۴.۵ نتایج و بصری‌سازی

نتایج تأیید عددی هر دو ویژگی در زیر نشان داده شده است:



شکل ۳: تأیید عددی ویژگی‌های مقیاس‌بندی و انتقال برای $f(x) = e^{-x}$.

نمودارها تطابق بین نتایج عددی و عبارات تحلیلی را تأیید می‌کنند و ویژگی‌های مقیاس‌بندی و انتقال تبدیل ملین را معتبر می‌سازند.

۶ بصری‌سازی $\phi(r, \theta)$

تابع $\phi(r, \theta)$ با استفاده از یک روش کانولوشنی محاسبه می‌شود که در آن انتگرالی بر روی تابع $f(\xi)$ با وزنده تابع دیگری $h(r/\xi, \theta)$ انجام می‌گیرد. این به صورت ریاضی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\phi(r, \theta) = \int_0^\infty f(\xi) \frac{h(r/\xi, \theta)}{\xi} \, d\xi. \tag{۱۰}$$

۱.۶ نقش $h(r, \theta)$ و $f(\xi)$

– تابع $h(r, \theta)$ به عنوان یک هسته عمل می‌کند که تابع ورودی $f(\xi)$ را بر اساس پارامترهای r و θ مدوله می‌کند. این تابع اطلاعاتی درباره رابطه بین مقیاس r و زاویه θ کدگذاری می‌کند. – تابع $f(\xi)$ سیگنال یا داده ورودی را نمایش می‌دهد که با هسته $h(r, \theta)$ کانولوشن شده و خروجی $\phi(r, \theta)$ را تولید می‌کند.

۲.۶ پیاده‌سازی در پایتون

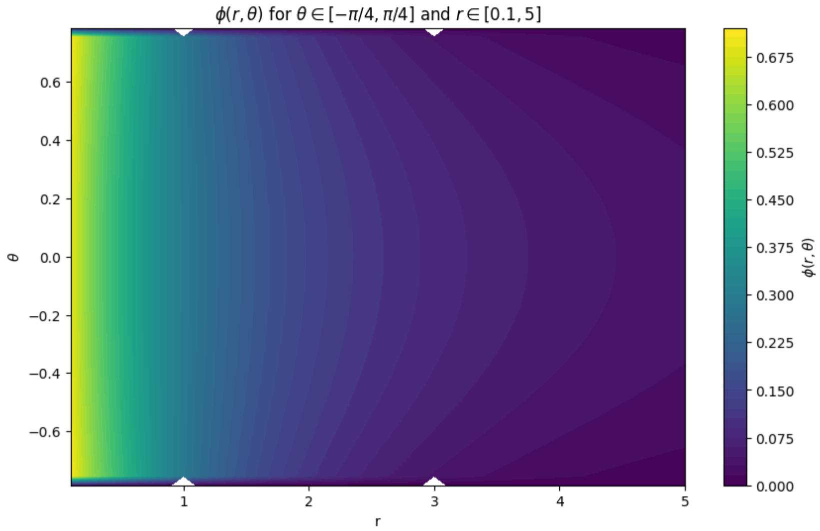
کد پایتون زیر محاسبه $\phi(r, \theta)$ را نشان می‌دهد:

```
tropmi numpy sa np
morf scipy.integrate tropmi quad
tropmi matplotlib.pyplot sa plt

# denifeD h(r, ateht)
fed h_function(r, theta, alpha):
    n = np.pi / (2 * alpha)
    term1 = (r**n) * (1 + r**(2 * n)) * np.cos(n * theta)
    term2 = 1 + 2 * r**(2 * n) * np.cos(2 * n * theta) ...
    + r**(4 * n)
    nruter term1 / term2

# denifeD ihp(r, ateht)
fed phi_function(r, theta, alpha, f):
    fed integrand(xi):
        h_val = h_function(r / xi, theta, alpha)
        nruter f(xi) * h_val / xi
    nruter quad(integrand, 0, np.inf, limit=50)[0]

# elpmaxE f(ix)
fed f_function(xi):
    nruter np.exp(-xi)

```

```
# renifeD egnar rof ateht dna r
alpha = np.pi / 4
theta_values = np.linspace(-alpha, alpha, 50)
r_values = np.linspace(0.1, 5, 50)

# etupmoC ihp(r, ateht)
phi_values = np.zeros((nel(r_values), nel(theta_values)))
rof i, r ni etaremune(r_values):
    rof j, theta ni etaremune(theta_values):
        phi_values[i, j] = phi_function(r, theta, ...
        alpha, f_function)

# tolP stluser
R, THETA = np.meshgrid(r_values, theta_values)
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.contourf(R, THETA, phi_values.T, levels=50, cmap='sidiriv')
plt.colorbar(label='$\\ihp(r, \\ateht)$')
plt.title('$\\ihp(r, \\ateht)$ rof $\\ateht \\ni ...
\\[ip,4/ \\ip]4/$ dna r$ \\ni ,1.0[ ]5$')
plt.xlabel('r')
plt.ylabel('$\\$ateht')
plt.show()
```

۳.۶ نتایج و بصری‌سازی

نمودار کانتور $\phi(r, \theta)$ در زیر نشان داده شده است:



شکل ۴: نمودار کانتور $\phi(r,\theta)$ برای $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$ و $r \in [0.1, 5]$.

این بصری‌سازی تغییرات $\phi(r,\theta)$ را نسبت به پارامترهای r و θ نشان می‌دهد. نتایج تأثیر هسته $h(r,\theta)$ و تابع ورودی $f(\xi)$ بر خروجی را برجسته می‌کند.

۷ نتیجه‌گیری

تبدیل ملین به عنوان ابزاری قدرتمند برای تحلیل توابع نشان داده شده است که راهی منحصربه‌فرد برای مطالعه ویژگی‌های مقیاس‌ناپذیر و فرایندهای ضربی ارائه می‌دهد. این گزارش هویت‌ها و ویژگی‌های کلیدی مانند مقیاس‌بندی، انتقال و محاسبات مبتنی بر کانولوشن را تأیید کرد. پیاده‌سازی‌های عددی و تطابق آن‌ها با نتایج تحلیلی قابلیت اطمینان پایتون را برای تحلیل ریاضی نشان می‌دهند.

پیشنهادات برای گسترش این کار شامل موارد زیر است:

- بررسی تبدیل ملین در ابعاد بالاتر برای تحلیل توابع چندمتغیره.
- استفاده از تبدیل ملین در علم داده، مانند استخراج ویژگی‌ها و تجزیه سیگنال.
- بررسی نقش آن در حل معادلات دیفرانسیل پیشرفته و معادلات انتگرالی.

۸ مراجع

مراجع

[۱] Debnath، Lokenath and Dambaru. Bhatta*I* *and Transforms* *Their Applications.* ۲*nd* *ed.* CRC، Press، ۱۹۹۵.

[۲] Github، link*Mellin-transform* at `https://github.com/MohammadMahdiElyasi/Mellin-transform`.