

۴۰۱۱۰۴۱۰۲

۴۰۱۱۰۴۱۴۶

۴۰۱۱۰۴۴۷۹

سونیا دباغ تفرشی  
غزال زلفی موصلو  
محمد مهدی منتظری هدش

تحقیق در عملیات ۲ - دکتر رادمان



گزارش فاز دوم پروژه

بهار ۱۴۰۴

## فهرست

۲	گزارش کدنویسی ..
۲	کدنویسی با Pyomo
۵	کدنویسی با Gurobipy
۷	پرسش‌ها ..
۷	پرسش ۱ ..
۷	پرسش ۲ ..
۷	پرسش ۳ ..
۸	پرسش ۴ ..
۹	پرسش ۵ ..
۹	پرسش ۶ ..
۱۱	نتایج تحلیل حساسیت ..
۱۲	تحلیل حساسیت ۱ ..
۱۳	تحلیل حساسیت ۲ ..
۱۳	تحلیل حساسیت ۳ ..
۱۵	تحلیل حساسیت ۴ ..
۱۷	تحلیل حساسیت ۵ ..

## ❖ گزارش کدنویسی

► کدنویسی با Pyomo

### ۱. آماده‌سازی و بارگذاری داده‌ها

در ابتدا، تمام داده‌های مورد نیاز به صورت مستقیم در کد و با استفاده از پکیج pandas در قالب DataFrame تعریف شده‌اند. این داده‌ها شامل موارد زیر هستند:

- زمان ورود هر کشتی به بندر (Arrival\_Time)
- تعداد کانتینرها برای هر کشتی (Containers)
- طول هر کشتی (Length)
- اولویت تخلیه هر کشتی (عددی بین ۰ تا ۱)
- ظرفیت پایه و مازاد مجاز هر اسکله
- هزینه استفاده از ظرفیت مازاد
- حداکثر طول مجاز اسکله برای پهلو گرفتن کشتی‌ها
- زمان آماده‌سازی بین دو عملیات تخلیه در یک اسکله

در مرحله بعد، این داده‌ها به دیکشنری تبدیل شده و به عنوان پارامترهای اولیه در مدل Pyomo مقداردهی شده‌اند.

### ۲. تعریف مدل ریاضی: مجموعه‌ها، پارامترها و متغیرها

#### مجموعه‌ها

سه مجموعه‌ی اصلی مدل عبارت‌اند از:

- I: مجموعه کشتی‌ها
- J: مجموعه اسکله‌ها
- R: مجموعه بازه‌های تابع پله‌ای هزینه توقف

#### پارامترها

پارامترهای اصلی مدل در Pyomo به صورت Param تعریف شده‌اند. برخی از آن‌ها عبارت‌اند از:

- A[i]: زمان ورود کشتی i
- Q[i]: بار (تعداد کانتینر) کشتی i
- L[i]: طول کشتی i
- P[i]: اولویت کشتی i
- T[i, j]: زمان تخلیه کشتی i در اسکله j
- W\_max[i] = 80 × (1 - P[i]): حداکثر زمان انتظار مجاز
- m[i, k]: مقایسه اولویت بین کشتی‌ها

همچنین برای اسکله‌ها، ظرفیت پایه، ظرفیت اضافه، هزینه، حداکثر طول، و زمان آماده‌سازی با پارامترهای D[j], D\_bar[j], h[j], K[j], δ[j] تعریف شده‌اند.

## متغیرها

مدل دارای متغیرهای زیر است:

- $x_{j,i}$ : باینری، تخصیص کشتی  $i$  به اسکله  $j$
- $S_{[i]}$ : زمان شروع تخلیه
- $W_{[i]}$ : زمان انتظار کشتی
- $u_{[j]}$ : ظرفیت مازاد مصرف شده در اسکله  $j$
- $y_{[i,k,j]}$ : ترتیب تخلیه در اسکله  $j$  بین کشتی  $i$  و  $k$
- $b_{[i,r]}$  و  $g_{[i,r]}$ : متغیرهای مدل سازی تابع قطعه‌ای هزینه توافق
- $C_{[i]}$ : هزینه توافق نهایی برای کشتی  $i$

## ۳. تابع هدف و محدودیت‌ها

### تابع هدف

تابع هدف مدل، مینیمم‌سازی سه مؤلفه است:

۱. مجموع زمان‌های تخلیه (با ضریب ۵)
۲. مجموع هزینه‌های ظرفیت اضافه اسکله‌ها
۳. مجموع هزینه‌های توافق کشتی‌ها (مدل شده به صورت پله‌ای)

### محدودیت‌ها

مدل شامل محدودیت‌های زیر است:

- تخصیص دقیق هر کشتی به یک اسکله
- محدودیت ظرفیت و طول اسکله‌ها
- محدودیت تعداد کشتی‌ها در اسکله‌های خاص
- ترتیب تخلیه کشتی‌ها بر اساس اولویت با استفاده از  $y_{ikj}$
- محدودیت زمانی شروع تخلیه
- مدل سازی تابع هزینه توافق در سه بازه با استفاده از  $b_{[i,r]}$  و  $g_{[i,r]}$
- پیاده‌سازی  $M$  بزرگ برای محدودیت‌های منطقی زمان‌بندی

## ۴. حل مدل و نمایش نتایج

مدل با solver گوروبی حل شده است. پس از حل، مقادیر متغیرهای تصمیم و تابع هدف استخراج و چاپ شده‌اند. نتایج شامل تخصیص کشتی‌ها به اسکله، زمان شروع و انتظار، ظرفیت مازاد استفاده شده، و هزینه‌های نهایی هستند.

## ۵. تحلیل‌های تکمیلی

### ذخیره‌سازی خروجی و مصورسازی (سوال سوم بخش پرسش‌ها)

نتایج در قالب یک DataFrame ذخیره شده و با نمودار Gantt (با استفاده از matplotlib) تخصیص کشتی‌ها به اسکله‌ها به صورت بصری نمایش داده شده‌اند.

**تحلیل سناریو (سوال چهارم بخش پرسش‌ها)**

در این بخش، محدودیت تخصیص سه کشتی به اسکله شماره ۳ ریلکس شده و مدل مجدداً حل شده است. اثر این تغییر بر تابع هدف و زمان انتظار بررسی شده و مقایسه‌ای بین نتایج قبل و بعد انجام شده است.

**تحلیل حساسیت (سوال ششم بخش پرسش‌ها)**

تحلیل حساسیت بر روی پارامترهایی نظیر فاصله آماده‌سازی، زمان تخلیه، ظرفیت اسکله و زمان ورود کشتی‌ها انجام شده است. در هر سناریو، مدل با مقدار جدید حل شده و اثر آن بر تابع هدف و سایر متغیرهای کلیدی بررسی شده است. نتایج به صورت عددی و گرافیکی ارائه شده‌اند.

## ► کدنویسی با Gurobipy

### ۱. آماده‌سازی و بارگذاری داده‌ها

داده‌ها مشابه بخش DataFrame به صورت Pyomo تعریف شده‌اند. پس از آن، داده‌ها به دیکشنری‌های لازم برای استفاده در ساخت مدل Gurobipy تبدیل شده‌اند. پردازش‌های اولیه شامل محاسبه پارامترهای  $m[i, k]$  و  $W_{\max}[i]$  با استفاده از حلقه‌ها انجام شده است.

### ۲. تعریف مدل ریاضی: مجموعه‌ها، پارامترها و متغیرها

#### مجموعه‌ها و پارامترها

مجموعه‌ها به صورت لیست و پارامترها به صورت دیکشنری تعریف شده‌اند. مقداردهی اولیه دقیقاً مطابق با داده‌های مسئله و اصلاحیه انجام شده است.

#### متغیرها

با استفاده از `addVars()`، متغیرهای زیر در مدل تعریف شده‌اند:

- متغیرهای باینری  $x[i, j], y[i, k, j], g[i, r]$

- متغیرهای پیوسته  $s[i], W[i], u[j], b[i, r], c[i]$

دامنه هر متغیر با پارامترهایی مثل `vtype` و `lb` به صورت صریح مشخص شده است.

### ۳. تابع هدف و محدودیت‌ها

#### تابع هدف

تابع هدف از سه بخش تشکیل شده است:

- مجموع زمان‌های تخلیه کشتی‌ها
- مجموع هزینه استفاده از ظرفیت اضافه اسکله‌ها
- هزینه توقف کشتی‌ها (قطعه‌ای)

محاسبات با `quicksum()` انجام شده و به مدل با `setObjective()` اضافه شده است.

#### محدودیت‌ها

محدودیت‌ها شامل موارد زیر هستند:

- تخصیص یکتای کشتی به اسکله
- محدودیت حداقل ظرفیت و طول در اسکله
- تعداد مجاز کشتی‌ها در اسکله‌های خاص
- ترتیب تخلیه بر اساس متغیرهای `y` و پارامتر `m`

- مدل‌سازی زمان شروع تخلیه و انتظار
  - مدل‌سازیتابع هزینه توقف در سه بازه با استفاده از متغیرهای  $b[i,r], g[i,r]$
- تمامی محدودیت‌ها با `addConstr()` و با استفاده از حلقه‌های تو در تو اضافه شده‌اند.

#### ۴. حل مدل و نمایش نتایج

پس از حل مدل با استفاده از Gurobi Optimizer از طریق رابط Gurobipy، مقدار تابع هدف و متغیرهای کلیدی چاپ شده‌اند. سپس، خروجی‌ها در قالب DataFrame ذخیره شده‌اند و برای تحلیل گرافیکی آماده‌سازی شده‌اند.

#### ۵. تحلیل‌های تکمیلی

##### ذخیره‌سازی خروجی و مصورسازی (سوال سوم بخش پرسش‌ها)

تخصیص کشتی‌ها به اسکله‌ها و زمان‌های تخلیه به صورت نمودار Gantt ترسیم شده است. رنگ‌بندی و چیدمان گرافیکی مشابه نسخه Pyomo رعایت شده است.

##### تحلیل سناریو (سوال چهارم بخش پرسش‌ها)

محدودیت مربوط به اسکله شماره ۳ ریلکس شده و مدل مجدداً اجرا شده است. نتایج جدید با وضعیت قبلی مقایسه و بررسی شده‌اند.

##### تحلیل حساسیت (سوال ششم بخش پرسش‌ها)

تأثیر تغییر پارامترهای کلیدی بر تابع هدف و سایر متغیرهای تصمیم بررسی شده است. برای هر مقدار جدید از پارامتر، مدل حل و نتایج ثبت شده است. این بخش شامل نمودارها و جداول مقایسه‌ای نیز می‌شود.

## ❖ پرسش‌ها

### ► پرسش ۱

این مسئله را به صورت یک مسئله MILP (Mixed Integer Linear Programming) مدلسازی کنید.  
این بخش از پروژه در فاز ۱ انجام شده است، مدلسازی اولیه ارائه شده دارای یک ایراد جزئی بود که در این فاز اصلاح شد و توضیحات مبسوط این اصلاحیه به همراه مدل بازنویسی شده به صورت کامل با نام [model.v2.pdf](#) به پیوست این گزارش، در فایل تحویلی تقدیم شده است.

### ► پرسش ۲

مدل را با استفاده از پایتون و در کتابخانه‌های Gurobipy یا Pyomo کدنویسی و حل کنید (پارامترهای مسئله از فایل اکسل فراخوانی شود).

کدنویسی با کتابخانه‌های Pyomo و Gurobipy انجام شد، گزارش نحوه کدنویسی در بخش قبل ارائه گردید و فایل کدها و حل مدل با نام‌های [401104146\\_Gurobipy.ipynb](#) و [401104146\\_Pyomo.ipynb](#) در پیوست این گزارش، در فایل تحویلی تقدیم شده است.

### ► پرسش ۳

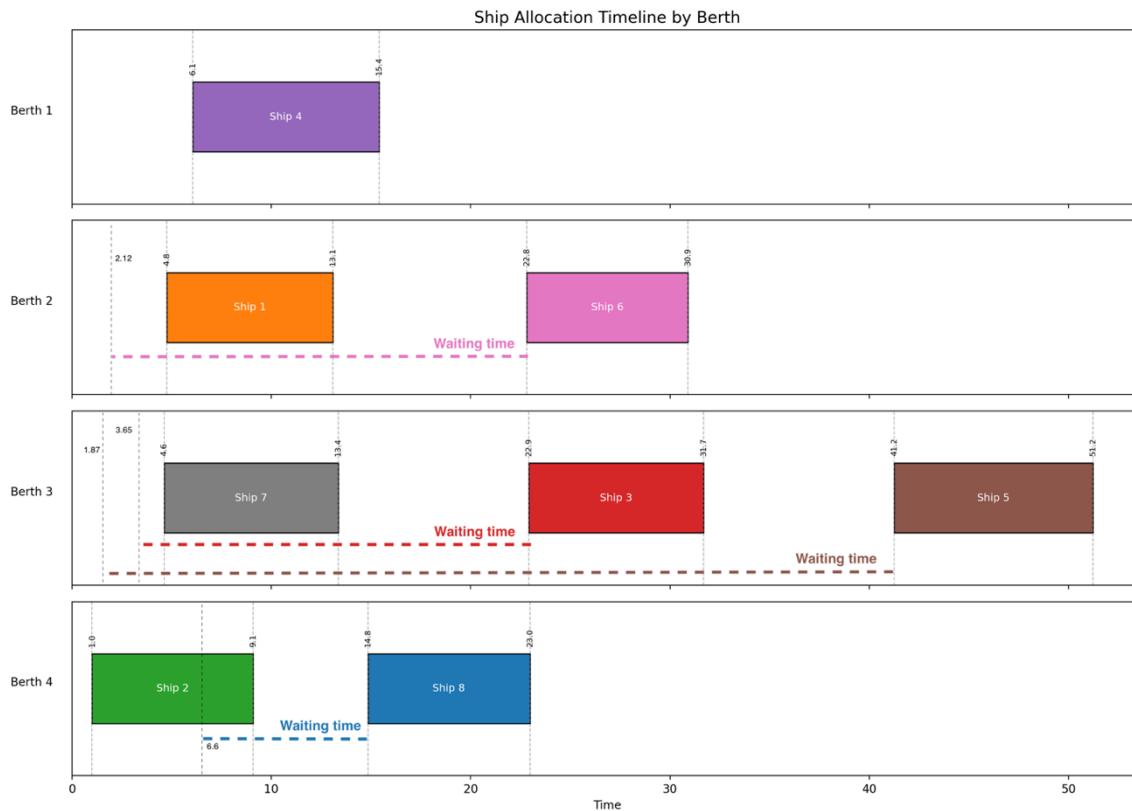
نتایج حاصل از حل مدل را در یک data frame ذخیره کنید و همچنین در پایان نمایش بصری از نحوه تخصیص کشتی‌ها به اسکله ارائه دهید.

مورد نظر ایجاد شد و در نوتبوک‌ها قابل مشاهده است، همچنین برای دسترسی بهتر، خروجی این data frame گزارش قرار داده خواهد شد:

	Ship	Berth	Start Time	Unload Time	Stop Time	Waiting Time
0	1	2	4.765527	8.320459	13.085986	0.000000
1	2	4	1.004593	8.089113	9.093705	0.000000
2	3	3	22.920056	8.763212	31.683268	19.267057
3	4	1	6.054178	9.349930	15.404108	0.000000
4	5	3	41.248081	9.964826	51.212907	39.378891
5	6	2	22.813811	8.088521	30.902333	20.695821
6	7	3	4.622952	8.732291	13.355243	0.000000
7	8	4	14.842014	8.129988	22.972002	8.240835

شکل ۱) خروجی مدل پایه

همچنین نمایش بصری از نحوه تخصیص کشتی‌ها در مدل پایه به صورت زیر است:



شکل ۲) نحوه تخصیص و مدت زمان انتظار هرکشتی در مدل پایه

در مدل پایه:

- کشتی ۴ به اسکله ۱،
- کشتی‌های ۱ و ۶ به اسکله ۲،
- کشتی‌های ۷ و ۳ و ۵ به اسکله ۳ و
- کشتی‌های ۲ و ۸ به اسکله ۴ تخصیص پیدا می‌کنند.

#### ▶ پرسش ۴

در صورتی که محدودیت روی اسکله‌ی شماره ۳ ریلکس شود (نیازی به تخصیص دقیقاً ۳ کشتی به آن نباشد) چه تغییری درتابع هدف و میزان توقف کشتی‌ها ایجاد می‌شود.

با ریلکس کردن محدودیت تعداد کشتی در اسکله شماره ۳، نحوه برنامه‌ریزی کشتی‌ها به این صورت تغییر می‌کند:

- کشتی‌های ۴ و ۵ به اسکله ۱،
- کشتی‌های ۱ و ۶ به اسکله ۲،
- کشتی‌های ۷ و ۳ به اسکله ۳ و
- کشتی‌های ۲ و ۸ به اسکله ۴ تخصیص پیدا می‌کنند.

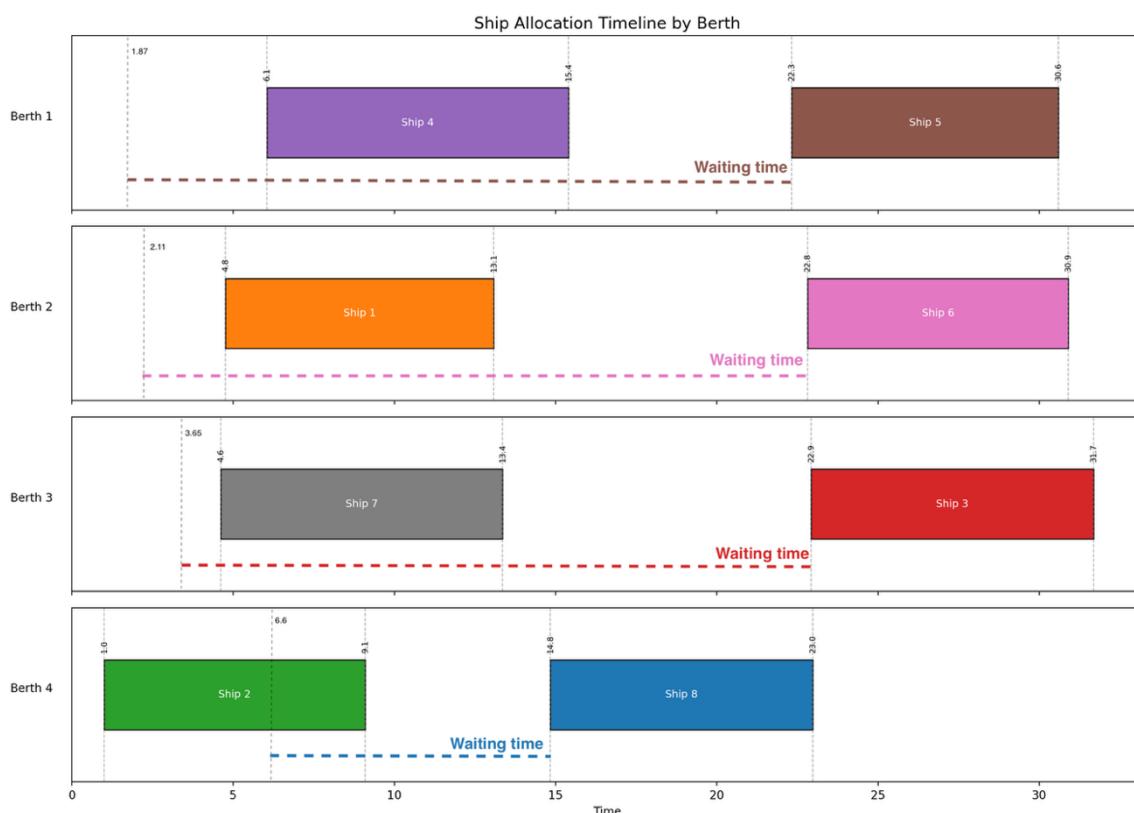
در مدل پایه مقدار تابع هدف  $1803/2$  بود که پس از ریلکس کردن محدودیت مذکور به  $1605/5$  کاهش یافت؛ همچنین مجموع زمان‌های توقف در مدل پایه  $87/58$  بود که در حالت جدید به  $68/66$  کاهش پیدا می‌کند.

پس به طور خلاصه  $197.7$  واحد تابع هدف و به میزان  $19.92$  واحد مجموع زمان انتظار کاهش پیدا می‌کند.

در ادامه data frame و نمایش بصری این بخش را ارائه خواهیم کرد:

Ship	Berth	Start Time	Unload Time	Stop Time	Waiting Time
0	1	2	4.765527	8.320459	13.085986
1	2	4	1.004593	8.089113	9.093705
2	3	3	22.920056	8.763212	31.683268
3	4	1	6.054178	9.349930	15.404108
4	5	1	22.326202	8.265956	30.592158
5	6	2	22.813811	8.088521	30.902333
6	7	3	4.622952	8.732291	13.355243
7	8	4	14.842014	8.129988	22.972002

شکل ۳) خروجی مدل ریلکس شده



شکل ۴) نحوه تخصیص و مدت زمان انتظار هرکشتی در مدل ریلکس شده

## ▶ پرسش ۵

مدل را با استفاده از نرم افزار گمز کدنویسی و حل کنید.

این پرسش در فاز بعد پاسخ داده خواهد شد.

## ▶ پرسش ۶

برای پارامترهای موجود در جدول ۱ تحلیل حساسیت انجام دهید و نتایج و نظرات خود را از آن بیان کنید (بررسی تغییرات تابع هدف و جواب بهینه و مصورسازی نتایج).

جدول ۱

ردیف	پارامتر مورد نظر جهت انجام تحلیل حساسیت	تحلیل حساسیت
۱	زمان بین تخلیه دو کشتی در اسکله ۲	تحلیل حساسیت از مقدار ۵ دقیقه تا ۱۰ با گام ۰/۵
۲	زمان تخلیه کشتی شماره ۷ روی اسکله شماره ۳	تحلیل حساسیت از مقدار ۵ دقیقه تا ۱۵ با گام ۰/۵
۳	ظرفیت اسکله شماره ۲	تحلیل حساسیت از مقدار ۵ کانتینر تا ۴۰ با گام ۱
۴	ظرفیت اسکله شماره ۳	تحلیل حساسیت از مقدار ۵ کانتینر تا ۴۰ با گام ۱
۵	زمان رسیدن کشتی شماره ۶	تحلیل حساسیت از مقدار ۱ دقیقه تا ۵ با گام ۰.۱

\* مواردی که با قرمز مشخص شده‌اند ایراد منطقی داشتند و با مشورت با دستیار آموزشی مسئول این فاز تغییر کردند.

برای تفکیک پذیری بیشتر و بخش‌بندی بهتر، پاسخ این سوال در بخش بعدی «نتایج تحلیل حساسیت» آورده شده است.

## ❖ نتایج تحلیل حساسیت

در هر بخش از تحلیل حساسیت، برای درک بهتر تأثیر تغییرات پارامترها بر عملکرد مدل، دو نوع نمودار ارائه می‌شود که هر یک نقش مشخصی در تحلیل دارند:

### نمودار اول: تحلیل تغییرات تابع هدف و مجموع زمان انتظار

این نمودار به صورت دوبعدی و با دو محور عمودی ترسیم شده است. محور افقی مقدار پارامتر تحلیل شونده (مثلاً فاصله زمانی آماده‌سازی بین تخلیه‌ها) را نشان می‌دهد. دو منحنی در این نمودار وجود دارد:

- **منحنی آبی:** نمایش‌دهنده مقدار تابع هدف برای هر مقدار از پارامتر.
- **منحنی خاکستری (با خط‌چین):** نمایش‌دهنده مجموع زمان انتظار کشته‌ها.

این نمودار کمک می‌کند تا رابطه بین تغییرات پارامتر ورودی و دو معیار کلیدی مدل (هزینه کلی و زمان انتظار) بررسی شود. رفتار صعودی یا نزولی منحنی‌ها نشان‌دهنده حساسیت بالای مدل نسبت به آن پارامتر است.

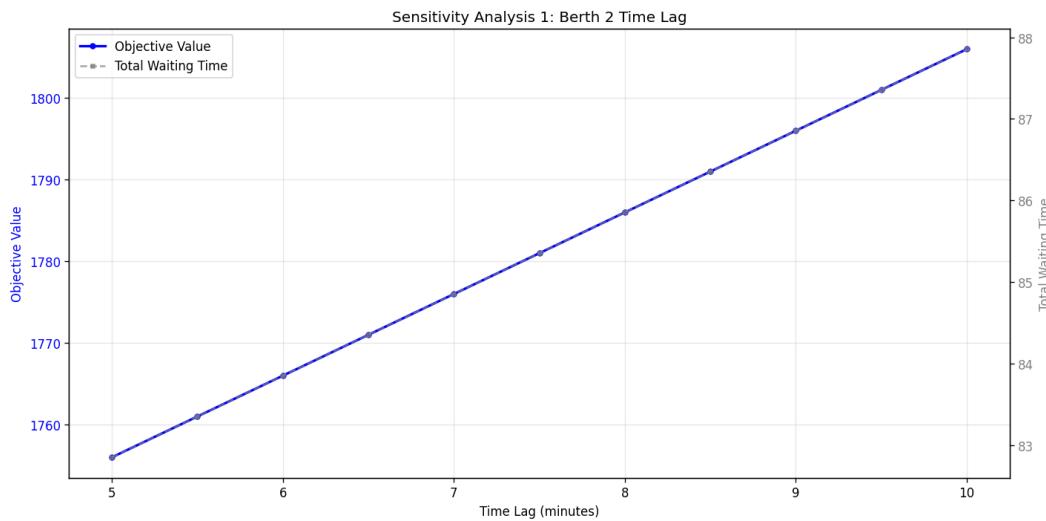
### نمودار دوم: بررسی تغییرات تخصیص کشته‌ها به اسکله‌ها

در این نمودار، تخصیص کشته‌ها به اسکله‌ها برای مقادیر مختلف پارامتر نمایش داده می‌شود. در اینجا:

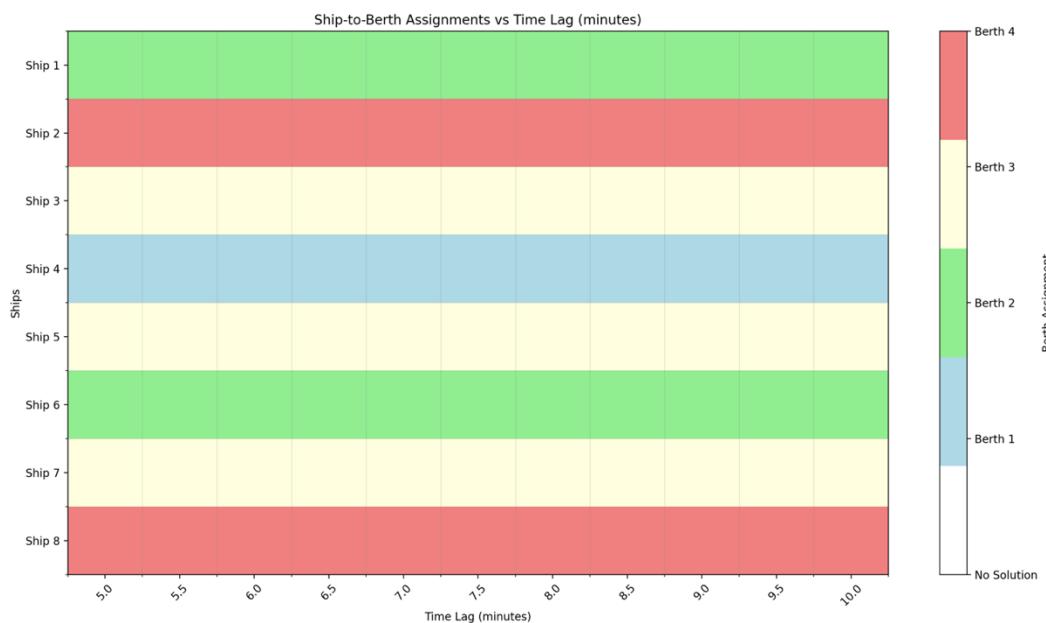
- محور افقی تغییرات پارامتر (مثلاً مقدار جدید فاصله زمانی یا ظرفیت)
- محور عمودی کشته‌ها
- رنگ هر خانه بیانگر اسکله‌ای است که کشته به آن تخصیص داده شده

این نمودار به وضوح نشان می‌دهد که آیا تغییر پارامتر باعث تغییر در تخصیص بهینه شده است یا نه. اگر رنگ‌های یک ردیف (یک کشته) در طول محور افقی ثابت باشند، تخصیص آن کشته در برابر آن پارامتر مقاوم بوده است.

## ➤ تحلیل حساسیت ۱



شکل ۵) تحلیل حساسیت تابع هدف و مجموع زمان انتظار



شکل ۶) مقایسه نحوه تخصیص کشتی‌ها با حالت پایه

در این بخش، lag اسکله ۲ از ۵ تا ۱۰ دقیقه تغییر داده شده و تأثیر آن بر تابع هدف و تخصیص کشتی‌ها بررسی شده است.

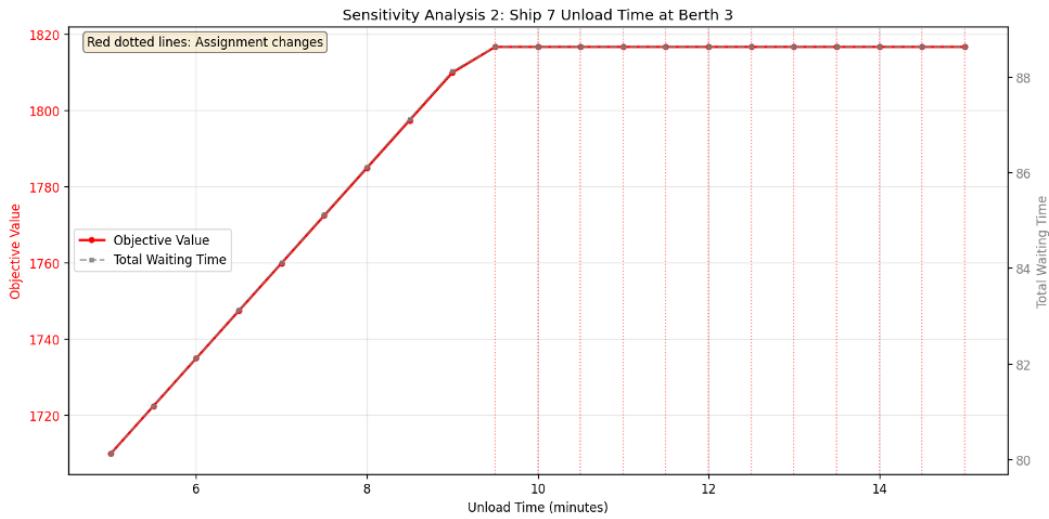
### نمودار اول: تابع هدف و مجموع زمان انتظار

با افزایش lag، هر دو مقدار تابع هدف و مجموع زمان انتظار به صورت خطی افزایش یافته‌اند. این نشان می‌دهد که مدل نسبت به این پارامتر حساس است و افزایش وقفه در اسکله ۲ باعث تأخیر در زمان‌بندی کل سیستم شده است.

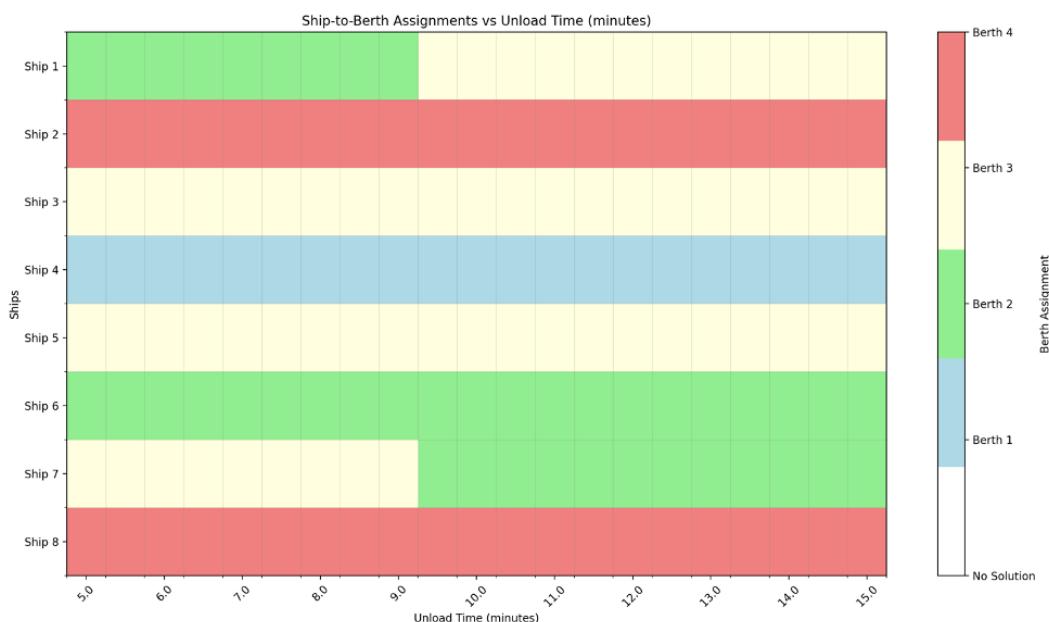
### نمودار دوم: تخصیص کشتی‌ها به اسکله‌ها

تخصیص‌ها در تمام سناریوها ثابت باقی مانده‌اند. این نشان می‌دهد که مدل برای کاهش هزینه ترجیح داده زمان‌بندی را تغییر دهد، نه اسکله‌دهی را.

## ➤ تحلیل حساسیت ۲



شکل ۷) تحلیل حساسیت تابع هدف و مجموع زمان انتظار



شکل ۸) مقایسه نحوه تخصیص کشتی‌ها با حالت پایه

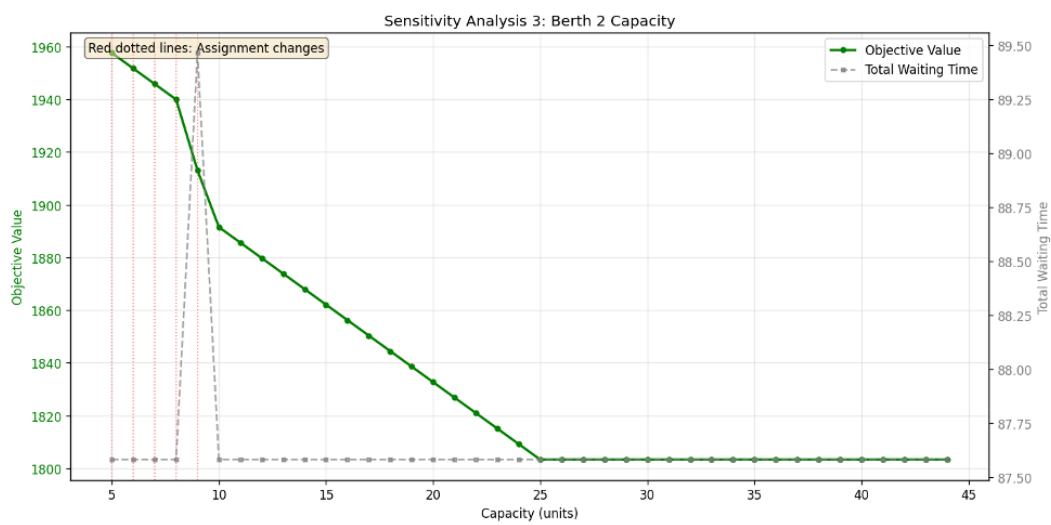
### نمودار اول: تابع هدف و مجموع زمان انتظار

با افزایش زمان تخلیه، مقدار تابع هدف و مجموع زمان انتظار نیز افزایش یافته‌اند. از مقدار حدود ۱۰ دقیقه به بعد، تابع هدف به حالت اشباع می‌رسد و تغییر چندانی نمی‌کند. خطوط قرمز عمودی نشان‌دهنده نقاطی هستند که تخصیص کشتی‌ها تغییر کرده است.

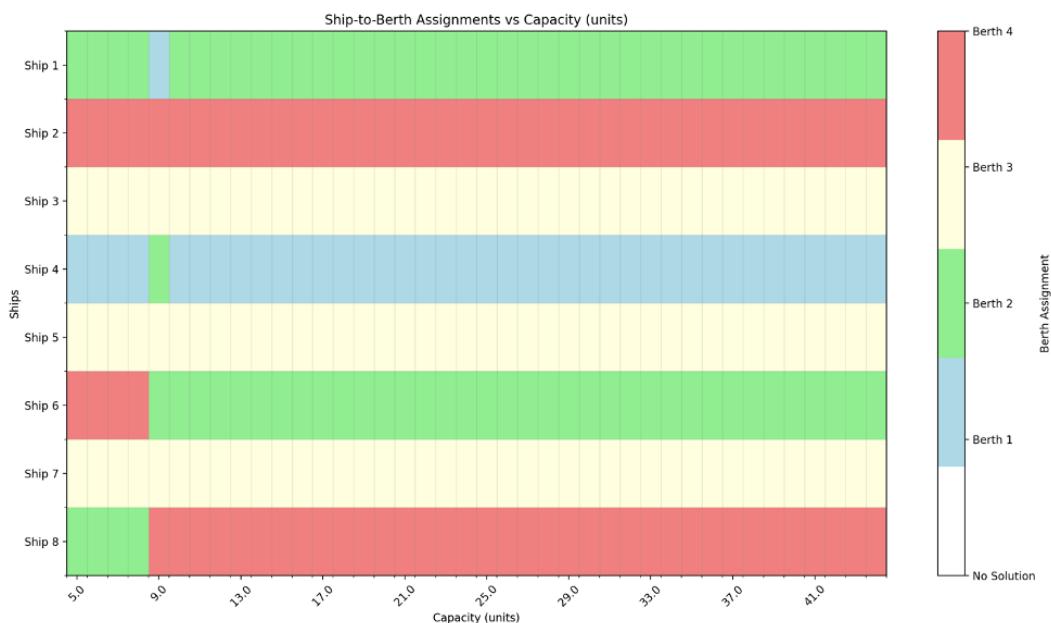
### نمودار دوم: تخصیص کشتی‌ها به اسکله‌ها

در مقدارهای پایین‌تر، کشتی ۷ در اسکله ۳ تخلیه می‌شود. اما با افزایش زمان تخلیه، از یک نقطه به بعد کشتی ۷ به اسکله ۲ منتقل می‌شود. این انتقال باعث جابجایی کشتی ۱ نیز می‌شود و در نتیجه چند تخصیص دیگر هم تغییر می‌کند.

### ► تحلیل حساسیت ۳



شکل ۹) تحلیل حساسیت تابع هدف و مجموع زمان انتظار



شکل ۱۰) مقایسه نحوه تخصیص کشتی‌ها با حالت پایه

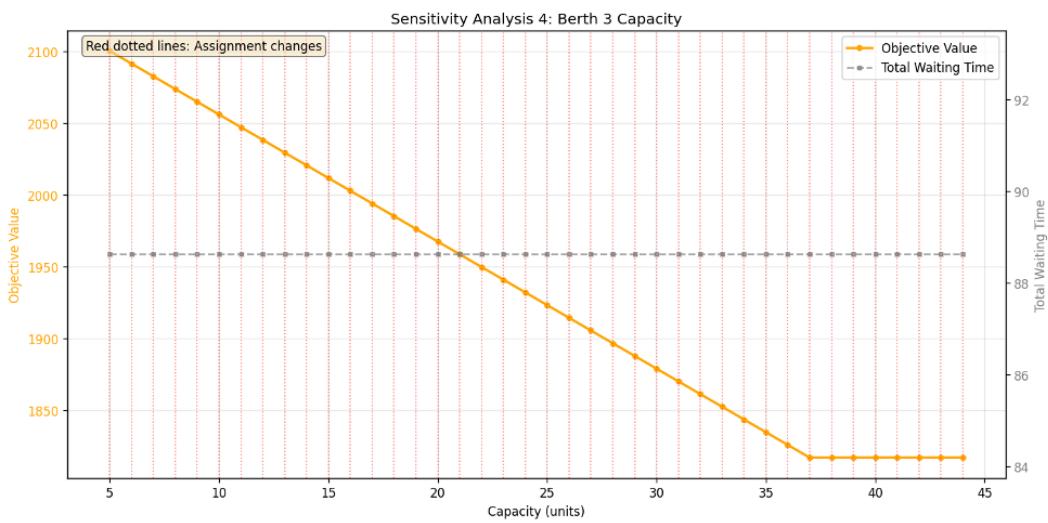
### نمودار اول: تابع هدف و مجموع زمان انتظار

با افزایش ظرفیت، مقدار تابع هدف به طور پیوسته کاهش یافته و در حوالی ظرفیت ۲۵ به حالت پایدار می‌رسد. مجموع زمان انتظار نیز ابتدا کاهش محسوس دارد و سپس ثابت می‌ماند. خطوط قرمز عمودی، نقاطی را نشان می‌دهند که تخصیص کشتی‌ها تغییر کرده‌اند.

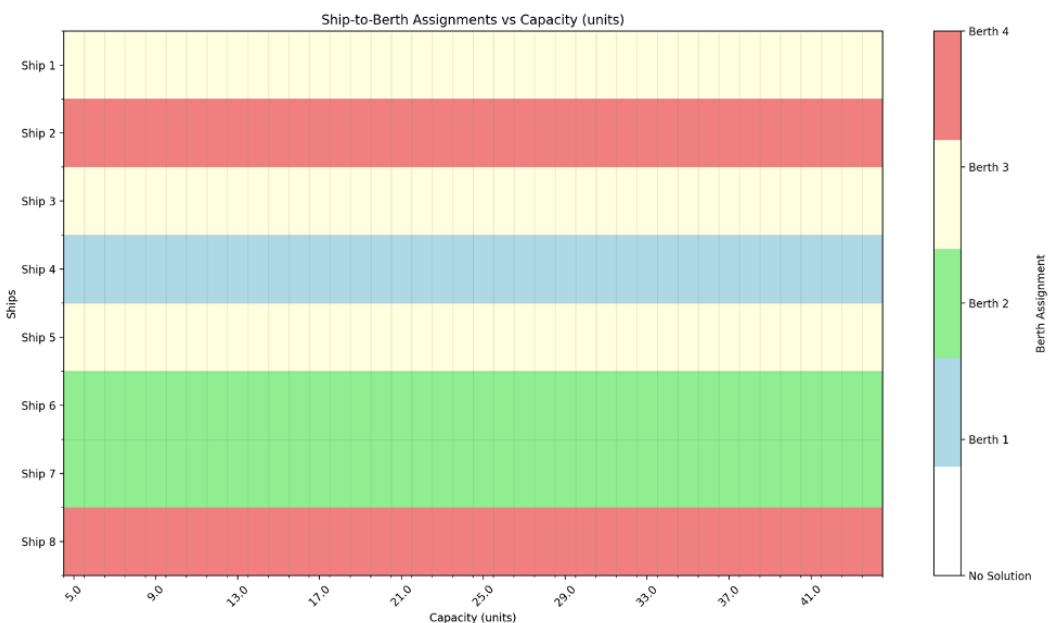
### نمودار دوم: تخصیص کشتی‌ها به اسکله‌ها

در ظرفیت‌های پایین، محدودیت ظرفیت مانع استفاده از اسکله ۲ برای برخی کشتی‌ها شده است. با افزایش ظرفیت، کشتی‌های بیشتری به اسکله ۲ منتقل شده و در نتیجه تخصیص بهینه تغییر کرده است. پس از یک مقدار آستانه، ساختار تخصیص نیز ثابت باقی مانده است.

## ➤ تحلیل حساسیت ۴



شکل ۱۱) تحلیل حساسیت تابع هدف و مجموع زمان انتظار



شکل ۱۲) مقایسه نحوه تخصیص کشتی‌ها با حالت پایه

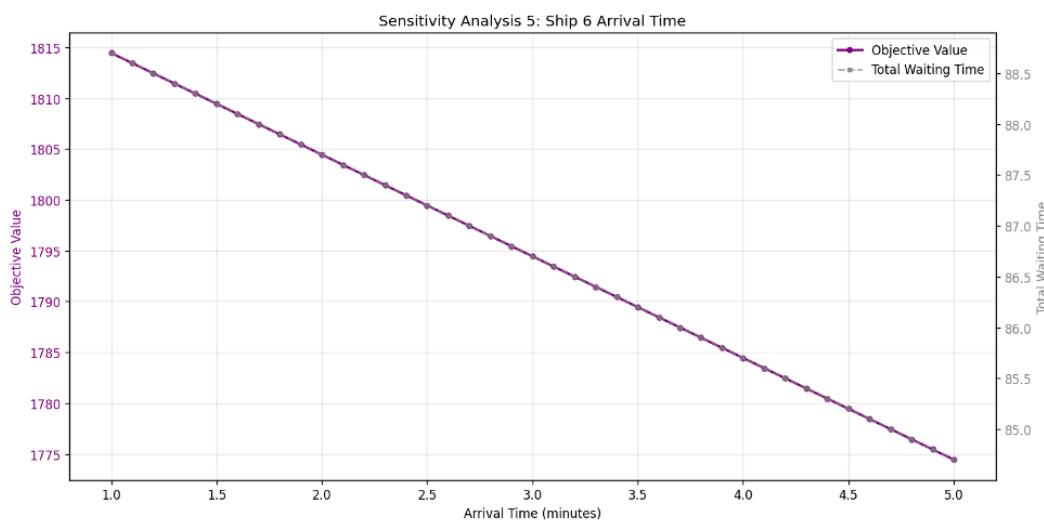
### نمودار اول: تابع هدف و مجموع زمان انتظار

تابع هدف با افزایش ظرفیت به صورت یکنواخت کاهش یافته و پس از حدود ظرفیت ۳۷ به مقدار ثابت می‌رسد. مجموع زمان انتظار تغییری نکرده و ثابت باقی مانده است. خطوط قرمز عمودی نشان‌دهنده نقاطی هستند که در آن‌ها تخصیص کشتی‌ها تغییر کرده‌اند.

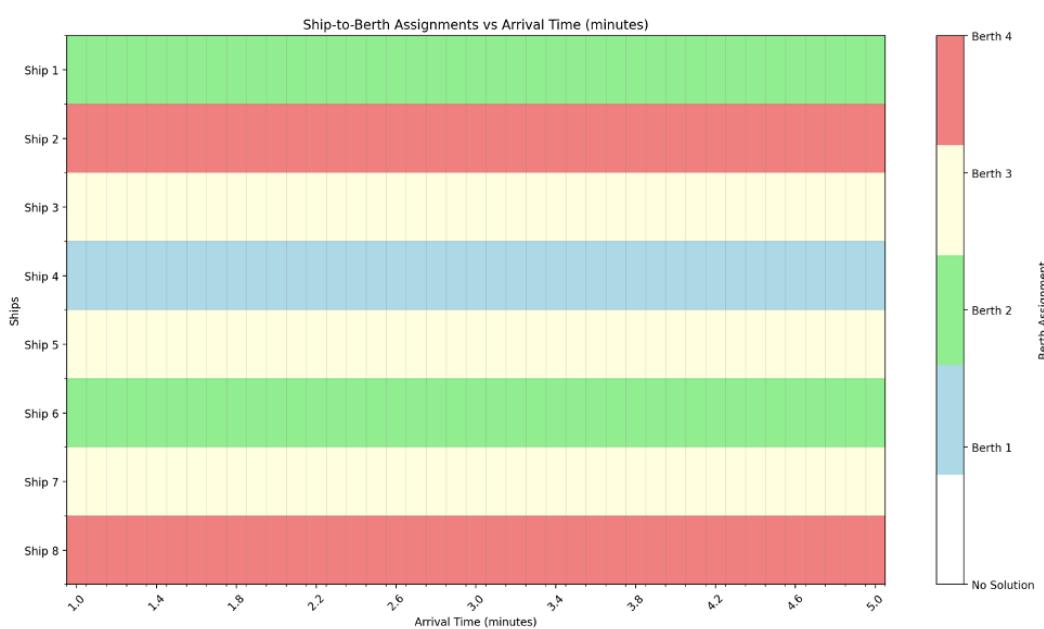
### نمودار دوم: تخصیص کشتی‌ها به اسکله‌ها

با افزایش ظرفیت، کشتی‌های بیشتری به اسکله ۳ منتقل شده‌اند. با رسیدن به ظرفیت مناسب، تخصیص کشتی‌ها تثبیت شده و در مقادیر بالاتر تغییری در تخصیص مشاهده نمی‌شود.

## ➤ تحلیل حساسیت ۵



شکل ۱۳) تحلیل حساسیت تابع هدف و مجموع زمان انتظار



شکل ۱۴) مقایسه نحوه تخصیص کشتی‌ها با حالت پایه

### نمودار اول: تابع هدف و مجموع زمان انتظار

با کاهش زمان ورود، تابع هدف و مجموع زمان انتظار هر دو به صورت یکنواخت کاهش یافته‌اند. این رفتار نشان‌دهنده اثر مستقیم ورود زودتر بر بهبود عملکرد مدل است. مدل از این فرصت برای کاهش توقف‌ها و بهبود زمان‌بندی استفاده کرده است.

### نمودار دوم: تخصیص کشتی‌ها به اسکله‌ها

در تمام سناریوهای تخصیص کشتی ۶ (و سایر کشتی‌ها) بدون تغییر باقی مانده است. یعنی ورود زودتر تنها باعث بهبود زمان‌بندی شده و ساختار تخصیص را تحت تأثیر قرار نداده است.