بسمه‌تعالی

دانشکده‌ی مهندسی برق

حسگری فشرده

مدرس: دکتر امینی

تمرین سری اول

سوال اول

الف) نامساوی یانگ را به هر روشی که دوست دارید اثبات کنید. برای $a,b \geq 0$ و $p,q > 1$ که $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ثابت کنید

نشان دهید

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

ب) نامساوی هولدر را با استفاده از الف اثبات کنید. متغیرهای تصادفی نامنفی X,Y را درنظر بگیرید. $p,q \in \mathbb{R}$ که $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

(۱) برای $p>1$

$$\mathbb{E}[XY] \leq \mathbb{E}[X^p]^{1/p}\mathbb{E}[Y^q]^{1/q}$$

(۲) برای $0<p<1$ و به صورت $Y \overset{a.s.}{\neq} 0$

$$\mathbb{E}[XY] \geq \mathbb{E}[X^p]^{1/p}\mathbb{E}[Y^q]^{1/q}$$

سوال دوم

الف) برای $0<p<1$ ثابت کنید توانهای p شبه نرمهای اقلیدسی l_p در نامساوی مثلث صدق می‌کند.

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p^p \leq \|\mathbf{x}\|_p^p+\|\mathbf{y}\|_p^p, \quad \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{C}^N$$

ب) برای $0<p<\infty$ نامساوی زیر را تحقیق کنید.

$$\|\mathbf{x}_1+\cdots,\mathbf{x}_k\|_p \leq k^{\max\{0,1/p-1\}}\left(\|\mathbf{x}_1\|_p+\cdots,\|\mathbf{x}_k\|_p\right), \quad \mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_k\in\mathbb{C}^N$$

سوال سوم

فرض کنید ماتریس $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times N}$ ، $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m$ ، $\eta>0$ باشد. نشان دهید برای یک نرم دلخواه $\|.\|$ در $\mathbb{R}^m$ پاسخ مسئله بهینه‌سازی:

$$\mathbf{x}^* = \arg\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^N} \quad \|\mathbf{x}\|_1 \ \text{ s.t. } \ \|A\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \leq \eta$$

در صورت یکتایی، پاسخ حداکثر m تنک خواهد بود.

راهنمایی: نشان دهید که مجموعه $\{a_j : j \in supp(x^*)\}$ مستقل خطی است. $a_1, ..., a_N$ ستون‌های ماتریس A هستند. استفاده کنید.

سوال چهارم

ماتریس $\{a_{ij}\}_{n\times 2020}$ را که $n \geq 2020$ با درایه های حقیقی که در رابطه‌ی زیر صدق می کند، در نظر بگیرید.

$$a_{i,j} = a_{i-1,j} + ja_{i-2,j},\ 3 \leq i \leq 2020, 1 \leq j \leq 2020$$

$$a_{2,l} = 1, a_{1,l} = 2, \forall 1 \leq l \leq 2020$$

اسپارک این ماتریس را محاسبه کنید.

سوال پنجم

الف) فرض کنید $p > 1$ و A یک ماتریس $m \times n$ است که $m < n$ نشان دهید یک بردار ۱–تنک x_0 وجود دارد که مساله بهینه سازی $\mathbb{P}_p$ زیر در بازیابی آن موفق نیست.

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{C}^n} \quad & ||x||_p \\ s.t. \quad & Ax = Ax_0. \end{aligned} \qquad (۱)$$

ب) فرض کنید $0 < p < q \leq 1$ و $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ اگر هر بردار s–تنک جواب یکتای مساله بهینه سازی $\mathbb{P}_q$ باشد آنگاه هر بردار s–تنک نیز جواب یکتای مساله بهینه سازی $\mathbb{P}_p$ است.