بسمه‌تعالی

دانشکده‌ی مهندسی برق

حسگری فشرده

مدرس: دکتر امینی

تمرین سری چهارم

سوال اول

الف) یک متغیر تصادفی X و ثابتهای مثبت c_1 و c_2 را درنظر بگیرید که در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$\mathbb{P}[|X-\mathbb{E}X|\ge t]\le c_1 e^{-c_2 t^2} \qquad \forall t\ge 0$$

۱) ثابت کنید $var(X)\le \frac{c_1}{c_2}$

۲) یک میانه هر عددی است که $\mathbb{P}[X\ge m_X]\ge \frac{1}{2}$ و $\mathbb{P}[X\le m_X]\ge \frac{1}{2}$ برقرار باشد. نشان دهید اگر رابطه‌ی قسمت الف برقرار باشد آنگاه برای هر میانه‌ی m_X داریم:

$$\mathbb{P}[|X-m_X|\ge t]\le c_3 e^{-c_4 t^2} \qquad \forall t\ge 0$$

که $c_3=2c_1$ و $c_4=\frac{c_2}{4}$ است. ۳) برعکس نشان دهید اگر رابطه بخش ب برقرار باشد، آنگاه رابطه الف برای $c_1=1+2c_3$ و $c_2=\frac{c_4}{4}$ برقرار است.

ب) در قضیه تجمع اندازه ی توابع، با استفاده از لم $Tails$ که معادل بودن سه گزاره درباره یک متغیر نامنفی را مطرح می کرد، نشان دهید که یرای توابع $1-lipschitz$ مانند f، استفاده از تکانه های دیگر به جای $median$ تابع (مانند میانگین)، تنها باعث تغییر در ضریب عبارت نمایی c_2 میشود:

$$P\left(\left|f-Mf\right|>t\right)\le c_1 e^{-c_2 t^2/2}$$

سوال دوم

متغیر تصادفی X را زیرگاوسی با متوسط صفر می‌نامند اگر:

$$\forall s\in\mathbb{R}: \quad \mathbb{E}\left[e^{sX}\right]\le e^{\sigma^2 s^2/2}$$

ثابت کنید:

الف) $\mathbb{E}[X]=0$. (راهنمایی: می‌توانید از نامساوی $1+sx\le e^{sx}$ حول $s=0$ استفاده کنید.)

ب) $\mathbb{P}[|X|>t]\le 2e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$.

ج) $\forall\ s\in[0,1) \quad \mathbb{E}\left[e^{\frac{sX^2}{2\sigma^2}}\right]\le \frac{1}{\sqrt{1-s}}$.

د) ترکیب خطی تعدادی متغیر زیرگاوسی و مستقل از هم نیز زیرگاوسی است.

ه) اگر $||\vec{x}||_2 = 1$ و درایه‌های A زیرگاوسی استاندارد (با ثابت σ یکسان) و مستقل از هم باشند، آنگاه:

$$\begin{cases} \mathbb{P}\left[||A\vec{x}||_2^2 > a\right] \leq & \dfrac{e^{-sa}}{(1-2\sigma^2 s)^{\frac{m}{2}}} \qquad \frac{1}{2\sigma^2} > s > 0 \\ \mathbb{P}\left[||A\vec{x}||_2^2 \leq a\right] \leq & \dfrac{e^{sa}}{(1+2\sigma^2 s)^{\frac{m}{2}}} \qquad s > 0 \end{cases}$$

و) $m(n,\varepsilon)$ از چه مقداری بیشتر باشد تا با احتمال ۱ در حد، ماتریسی به شکل $\frac{1}{\sqrt{m}}A$ وجود داشته باشد که در شرط $\varepsilon-\text{embedding}$ صدق کند؟

سوال سوم

متغیر تصادفی X را σ-زیرگوسی می‌گوییم، اگر به ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ ،

$$\mathbb{E}(e^{\lambda X}) \leq e^{\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}}$$

برقرار باشد.

الف) متغیرهای تصادفی (نه لزوما مستقل) $X_1, X_2, \cdots, X_N$ را در نظر بگیرید که هر کدام از آنها σ-زیرگوسی هستند. دو نامساوی زیر را ثابت کنید.

$$\mathbb{E}[\max_{1\leq i\leq n} X_i] \leq \sigma\sqrt{2\log N}$$

ب) فرض کنید $\mathbf{P}$ یک چند وجهی با N راس $v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(N)}$ در فضای $\mathbb{R}^d$ باشد و بردار تصادفی $X \in R^d$ را چنان درنظر بگیرید که متغیرهای تصادفی $[v^{(i)}]^T X$ به ازای $i = 1, \cdots, N$، σ-زیرگوسی باشند. نشان دهید

$$\mathbb{E}[\max_{\theta\in\mathbf{P}} \theta^T X] \leq \sigma\sqrt{2\log N}$$

ج) متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \cdots, X_N$ با توزیع $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ و مستقل از هم را درنظر بگیرید. نشان دهید

$$\mathbb{E}[\max_{1\leq i\leq n} X_i] \geq \frac{\sigma}{\sqrt{\pi\log 2}}\sqrt{\log N}$$

د)(امتیازی) فرض کنید متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \cdots$ یک دنباله نامتناهی از متغیرهای تصادفی زیرگوسی است که X_i یک متغیر $\sigma_i(\log(i+1))^{-\frac{1}{2}}$-زیرگوسی است. نشان دهید :

$$\mathbb{E}[\max_{1\leq i} X_i] < C\max_i \sigma_i$$

سوال چهارم

فضای مکعب همینگ $\{0,1\}^n$ که مجهز به متر $d_H(x,x') = \sum_{i=1}^n 1[x_i \neq x'_i]$ را درنظر بگیرید. فرض کنید توزیع یکنواخت μ را روی مکعب همینگ قرار دارد، ثابت کنید به ازای هر تابع $L-lipschitz$ مانند $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ داریم:

$$\mathbb{P}_\mu[|f(X) - m_f| \geq t] \leq 2e^{\frac{-2t^2}{nL^2}}$$

سوال پنجم

از جبرخطی می‌دانیم که هر مجموعه‌ای از بردارهای عمود برهم در $\mathbb{R}^n$ حداکثر n بردار را در بردارد. با این حال اگر اجازه دهیم که بردارها تقریبا

بر هم عمو باشند، مجموعه‌ای با اندازه $O(e^{cn})$ از بردارهای تقریبا عمود برهم وجود دارد! به طور دقیق، فرض کنید $\varepsilon \in (0,1)$. نشان دهید یک مجموعه بردارهای $\{x_1,\cdots,x_N\}$ از بردارهای یکه وجود دارد که در $\mathbb{R}^n$ دو به دو تقریبا عمود هستند:

$$|\langle x_i,x_j\rangle| \leq \varepsilon \quad \forall i \neq j \in [N]$$

و

$$N \geq \exp(c(\varepsilon)n)$$

که $c(\varepsilon)$ تابعی از ε است.

سوال ششم

از نامساوی $Brunn-Minkowski$ که به شکل زیر است، برای اثبات لم لوی استفاده خواهیم کرد. برای هر دو شی فشرده و غیر تهی C,D در فضای $\mathbb{R}^n$ داریم:

$$[vol(\lambda C+(1-\lambda)D)]^{\frac{1}{n}} \geq \lambda[vol(C)]^{\frac{1}{n}}+(1-\lambda)[vol(D)]^{\frac{1}{n}} \quad \forall\lambda \in [0,1]$$

که $\lambda C+(1-\lambda)D = \{\lambda c+(1-\lambda)c | c\in C, d\in D\}$. همچنین صورت معادلی نیز که معروف به نامساوی حسابی هندسی است، دارد که به شکل زیر است:

$$vol(\lambda C+(1-\lambda)D) \geq [vol(C)]^{\lambda}[vol(D)]^{1-\lambda} \quad \forall\lambda \in [0,1]$$

الف) گوی اقلیدسی در فضای $\mathbb{R}^n$ ، به صورت $\mathbb{B}_2^n = \{x\in\mathbb{R}^n | \|x\|_2 \leq 1\}$ تعریف می‌شود. برای هر مجموعه $A \subset \mathbb{R}^n$ و $\varepsilon \geq 0$، که $vol(A) = vol(\mathbb{B}_2^n)$، نشان دهید:

$$vol(A^{\varepsilon}) \geq vol([\mathbb{B}_2^n]^{\varepsilon})$$

که $X^{\varepsilon} = X+\varepsilon\mathbb{B}_2^n$

ب) برای هر زیرمجموعه $A \subset \mathbb{B}_2^n$ نشان دهید که

$$\frac{1}{2}\|a+b\|_2 \leq 1-\frac{\varepsilon^2}{8} \quad \forall a\in A, b\in (A^{\varepsilon})^c$$

که $(A^{\varepsilon})^c = \mathbb{B}_2^n \setminus A^{\varepsilon}$.

ج) اگر $\mathbb{P}$ یک توزیع (نه لزوما با جمع ۱) یکنواخت روی کره $\mathbb{B}_2^n$ باشد، نشان دهید $\mathbb{P}[A](1-\mathbb{P}[A^{\varepsilon}]) \leq (1-\frac{\varepsilon^2}{8})^{2n}$

د) حال این نامساوی را اثبات کنید $\sup_{A\subset\mathbb{B}_2^n}\{1-\mathbb{P}(A^{\varepsilon}) | \mathbb{P}(A) \geq 1/2\} \leq 2e^{-n\frac{\varepsilon^2}{4}}$ و چه نتیجه‌ای می‌گیرید.

قسمتهای بعدی سوال امتیازی هستند.

ه) حال عبارت زیر را برای یک فضای متریک $(\mathbb{X},d)$ و اندازه احتمال μ ، یک نامساوی ایزوپرمتریک [1] می‌گوییم.

$$\mu(A^{\varepsilon}) \geq 1-Ce^{\frac{-\varepsilon^2}{2\sigma^2}} \quad \forall\varepsilon \geq 0, A\subset\mathbb{X}\ s.t.\ \mu(A) \geq \frac{1}{2}$$

[1] *isoperimetric inequality*

که μ یک اندازه‌ی احتمال [۲] دلخواه روی فضای متریک $(\mathbb{X},d)$ است. نشان دهید اگر μ در نامساوی ایزوپرمتریک صدق کند، آنگاه

$$\mathbf{P}_\mu[f-med(f)\geq t]\leq Ce^{\frac{-t^2}{\sigma^2}}\quad \forall t\geq 0,\ f\in Lip(\mathbb{X})$$

و) عکس قسمت و را اثبات کنید یعنی نامساوی ایزوپرمتریک را با فرض برقراری حکم قسمت و، بدست آورید.

ز) نشان دهید اگر μ در نامساوی ایزوپرمتریک صدق کند، آنگاه برای هر تابع $f\in Lip(\mathbb{X})$

$$med(f)\leq \mathbf{E}_\mu f+C\sigma\sqrt{\pi/2}$$

و نتیجه بگیرید

$$\mathbf{P}_\mu[f-\mathbf{E}_\mu(f)\geq t]\leq e^{C^2\pi/4}e^{\frac{-t^2}{8\sigma^2}}\quad \forall t\geq 0$$

ح) عکس قسمت ح یعنی اگر برای هر تابع $f\in Lip(\mathbb{X})$ (که $Lip(\mathbb{X})$ مجموعه تمام توابع لیپشیتز با ضریب ۱ است که روی فضای متریک مورد نظر تعریف شده‌اند.)داشته باشیم:

$$\mathbf{P}_\mu[f-\mathbf{E}_\mu(f)\geq t]\leq Ce^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}\quad \forall t\geq 0$$

نشان دهید

$$\mathbf{E}_\mu f\leq med(f)+C\sigma\sqrt{2\log 2C}$$

و نتیجه بگیرید

$$\mathbf{P}_\mu[f-med(f)\geq t]\leq 2Ce^{\frac{-t^2}{8\sigma^2}}\quad \forall t\geq 0$$

ت) $W_1(\mu,\nu)=\sup_{f:\|f\|_{lip}\leq 1}\{\mathbb{E}_\mu[f(X)]-\mathbb{E}_\nu[f(X)]\}$ فاصله‌ی واسراشتاین و $D(\nu,\mu)=\mathbb{E}_\nu\left[\log(d\nu/d\mu)\right]$ فاصله $kullback-leibler$ از مشهورترین فاصله‌های توزیع در نظریه احتمال هستند(میتوانید جهت کسب اطلاعات بیشتر از ویکی پدیا استفاده کنید). هدف از این بخش ارایه شرط کافی برای برقراری لم $blow-up$ در یک فضای متریک و برای اندازه احتمال μ است.

فرض کنید $W_1(\nu,\mu)\leq\sqrt{2\sigma^2D(\nu,\mu)}$. آنگاه ثابت کنید

$$d(A,B)\leq W_1(\mu(.|A),\mu(.|B))\leq\sqrt{2\sigma^2\log(1/\mu(A))}+\sqrt{2\sigma^2\log(1/\mu(B))}$$

برای هر دو مجموعه $A,B\subset\mathbb{X}$، تعریف می‌کنیم $d(A,B)=\min(d(x,y)|x\in A,y\in B)$.

ی) نتیجه قسمت قبل را برای $B=\mathbb{X}\setminus A^\varepsilon$ اعمال کنید و نتیجه بگیرید

$$\mu(A^\varepsilon)\geq 1-2e^{\frac{-\varepsilon^2}{8\sigma^2}}\quad \forall\varepsilon\geq 0, A\subset\mathbb{X}\ s.t.\ \mu(A)\geq\frac{1}{2}$$

سوال هفتم

با استفاده از به تمرکز اندازه در مورد گوی اقلیدسی n-بعدی و هم چنین در مورد سطح کره اقلیدسی n- بعدی که در کلاس مطرح شد، مساله زیر را حل نمایید.

---

[۲] *probability measure*

فرض کنید m نقطه در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ به صورت $i.i.d$ از توزیع $\mathcal{N}(0, I_{n\times n})$ بدست آمده است. همچنین فرض کنید $m \geq \exp(Cn)$ که C یک ضریب ثابت به اندازه کافی بزرگ است. نشان دهید با احتمال بالا، پوشش محدب این نقاط، تقریبا برابر یک گوی اقلیدسی n-بعدی با شعاع $\log n$ است. به طور دقیق $(1-\varepsilon)B_2^n(\log n) \subseteq Convh(A) \subseteq (1+\varepsilon)B_2^n(\log n)$ که $B_2^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\|_2 \leq r\}$ تعریف یک گوی اقلیدسی n-بعدی است و ε مقدار مثبت کوچکی است.

منظور از پوشش محدب یا $convex-hull$ نقاط $A = \{x_1, \cdots, x_m\}$ یعنی:

$$Convh(A) = \{y \in \mathbb{R}^n : \ \exists a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{R} \ s.t. \ y = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i\}$$

سوال هشتم

الف) با استفاده از معادل بودن تمرکز اندازه حول میانگین و میانه و لم لوی نشان دهید که اگر برای هر تابع L-لیپشیتز روی سطح کره اقلیدسی n- بعدی S_2^{n-1} تحت توزیع یکنواخت تمرکز اندازه حول میانه را داشته باشیم، یعنی

$$\mathbb{P}[|f(X) - m_f| \geq \varepsilon] \leq 2e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2L^2}} \qquad \forall t \geq 0$$

آنگاه تمرکز اندازه به مفهوم زیر را برای هر زیرمجموعه $A \subset S_2^{n-1}$ را نیز داریم.

$$\mu(A^{\varepsilon}) \geq 1 - e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2L^2}}$$

ب) (امتیازی) با توجه به قسمتهای امتیازی سوال ۶ نشان دهید حکم الف برای هر فضای متریک $(\mathbb{X}, d)$ و توزیع احتمال μ درست است. بنابراین تمرکز اندازه برای توابع لیپشتیز حول میانه و تمرکز اندازه به مفهوم هندسی باهم معادلند.