بسمه‌تعالی

دانشکده‌ی مهندسی برق

حسگری فشرده

مدرس: دکتر امینی

تمرین سری سوم

سوال اول

فرض کنید $\vec{y}=\Phi\vec{x}+\vec{v}$ باشد که در آن $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ سیگنال $k-$ تُنُک ورودی، $\Phi\in\mathbb{R}^{m\times n}$ ماتریس اندازه‌گیری و $\vec{v}\in\mathbb{R}^m$ نمایش‌گر نویز است. همچنین فرض کنید $\Omega=\{1,2,\ldots,n\}$ و $\Gamma=\{i|i\in\Omega,\ x_i\neq 0\}$ بوده و ماتریس Φ شرط $\mathrm{RIP}(k+1,\ \delta_{k+1})$ را اقناع کند.

الف) اگر $\vec{\phi}_i$ نمایش‌گر ستونی با اندیس i از ماتریس Φ باشد، ثابت کنید

$$\max_{i\in\Omega}\left|\langle\vec{\phi}_i,\vec{y}\rangle\right|\geq\frac{1}{\sqrt{k}}\Big((1-\delta_{k+1})\|\vec{x}\|_2-\sqrt{1+\delta_{k+1}}\|\vec{v}\|_2\Big)$$

ب) اگر اندیس t^1 عضو Γ نباشد، آنگاه ثابت کنید

$$\left|\langle\vec{\phi}_{t^1},\vec{y}\rangle\right|\leq\delta_{k+1}\|\vec{x}\|_2+\sqrt{1+\delta_{k+1}}\|\vec{v}\|_2$$

ج) فرض کنید $\mathrm{SNR}=\dfrac{\|\Phi\vec{x}\|_2^2}{\|\vec{v}\|_2^2}$. ثابت کنید در صورت برقراری رابطه‌ی

$$\sqrt{\mathrm{SNR}}>\frac{(\sqrt{k}+1)(1+\delta_{k+1})}{1-(\sqrt{k}+1)\delta_{k+1}}$$

در اولین گام (iteration) از بازسازی به روش OMP ، اندیس به دست آمده حتما عضو Γ خواهد بود.

سوال دوم

برای مساله بهینه سازی زیر حکمهای زیر را ثابت کنید:

$$z_{opt}=\underset{z_{n\times 1}}{\arg\min}\|y_{m\times 1}-A_{m\times n}z_{n\times 1}\|_2^2+\lambda\|z_{n\times 1}\|_1$$

الف) نشان دهید کوچک ترین λ که درایه‌های z_{opt} همگی صفر شوند، برابر است با

$$\lambda_{max}=\max_j\left|\langle z_j,y\rangle\right|$$

ب) فرض کنید برای مقدار مشخصی از $0\leq\lambda$ مساله بهینه سازی بالا منجر به دو جواب $\hat{z}_1,\hat{z}_2$ شود. نشان دهید باید $A\hat{z}_1=A\hat{z}_2$

ج) با توجه به مفروضات قسمت ب، اگر $0<\lambda$ نشان دهید $\|\hat{z}_1\|_1=\|\hat{z}_2\|_1$

سوال سوم

برای یک ماتریس $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ با ستونهای نرمال توسط متر l_2، $(a_1,\cdots,a_n)$ و برای $s \in [n-1]$ تعریف کنید:

$$\mu_1(s) := \max_{i\in[n]} \max\left\{\sum_{j\in S} \left|\langle a_i, a_j\rangle\right|, S\subseteq[n], |S|=s, i\notin S\right\}$$

الف) اگر $\mu_1(s)+\mu_1(s-1) < 1$ ، آنگاه هر بردار s–تنک $x\in\mathbb{C}^n$ ، از بردار $y=Ax$ توسط الگریتم orthogonal matching pursuit بعد از حداکثر s مرحله، به صورت دقیق بازیابی می‌شود.

ب) اگر $\mu_1(s)+\mu_1(s-1) < 1$ ، آنگاه هر بردار s–تنک $x\in\mathbb{C}^n$ ، از بردار $y=Ax$ توسط الگریتم basis pursuit. به صورت دقیق بازیابی می‌شود.

سوال چهارم

مساله بهینه سازی زیر را برای $\gamma > 1$ حل نمایید.

$$\min_{\beta\in\mathbb{R}}\left\{\frac{1}{2}(\beta-\hat{\beta})+\lambda\int_0^{|\beta|}\left(1-\frac{x}{\lambda\gamma}\right)_+ dx\right\}$$

که $(t)_+ := \max\{t,0\}$ است.

سوال پنجم

اگر ابعاد ماتریس حسگری (m,n) باشد و همبستگی ستون های آن به ترتیب بزرگی عبارت باشند از:

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \cdots \geq \mu_{n(n-1)/2}$$

، با این ماتریس، بردارهای حداکثر چند–تنک را میتوان بازسازی نمود؟

سوال ششم

فرض کنید ماتریس $\Phi_{m\times N}$ دارای RIP از مرتبه $2K$ و ثابت δ_{2K} است. فرض کنید Λ_0 یک زیرمجموعه دلخواه از $\{0,1,\cdots,N\}$ است که $|\Lambda_0|\leq K$ و $h\in\mathbb{R}^N$ یک بردار دلخواه است. Λ_1 را به عنوان مجموعه اندیسهای مربوط به K بزرگترین درایه‌ی $h_{\Lambda_0^c}$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید $\Lambda=\Lambda_0\cup\Lambda_1$ آنگاه ثابت کنید

$$\|h_\Lambda\|_2 \leq \alpha\frac{\|h_{\Lambda_0^c}\|_2}{\sqrt{K}}+\beta\frac{\left|\langle\Phi h_\Lambda,\Phi h\rangle\right|}{\|h_\Lambda\|_2}$$

که $\alpha=\frac{\sqrt{2}\delta_{2K}}{1-\delta_{2K}}$ و $\beta=\frac{1}{1-\delta_{2K}}$ هستند.

سوال هفتم

فرض کنید $y_{m\times1}=A_{m\times n}x^*_{n\times1}+\varepsilon_{m\times1}$ یک بردار اندازه‌گیری است که $\varepsilon_{m\times1}$ یک بردار نویز است.

الف) اگر $\varepsilon_i\sim N(0,\sigma^2)$ ها دارای توزیع گوسی و i.i.d باشند. نشان دهید تخمینگر ML بردار x^* برابر با جواب مساله کمینه سازی زیر است.

$$x_{ml}=\min_x\|y-Ax\|_2^2$$

ب) اگر ε_i ها دارای توزیع لاپلاس به عبارت دیگر $p_{\varepsilon_i}(z) = \frac{1}{2a}e^{-\frac{|z|}{a}}$ و i.i.d باشند. نشان دهید تخمینگر ML بردار x^* برابر با جواب مساله کمینه سازی زیر است.

$$x_{ml} = \min_x ||y - Ax||_1$$

ج) اگر ε_i ها دارای توزیع یکنواخت روی $[-a, a]$ و i.i.d باشند. نشان دهید تخمینگر ML بردار x^* برابر با هر x که در $||y - Ax||_\infty \leq a$ صدق کند.

د) با توجه به قسمت ج اگر مقدار a را ندانیم آنگاه نمی‌توانیم تخمینگر ML بردار x^* را بیابیم. نشان دهید تخمین گرهای ML هر دوی x^* و a با حل کردن مساله بهینه سازی زیر پیدا می‌شود.

$$\min_x ||y - Ax||_\infty$$