باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

پردازش سیگنال‌های گرافی

استاد: دکتر امینی

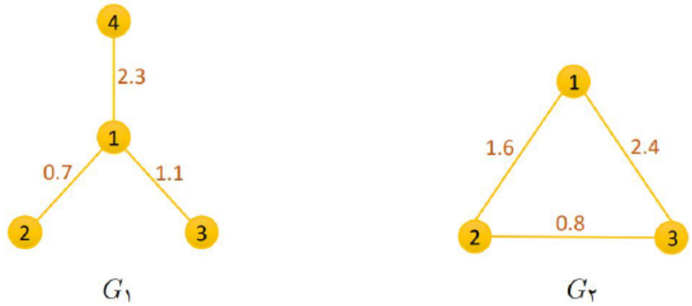
تمرین سری دوم

۱ آشنایی با GSPBOX

در این سؤال قصد داریم با یکی از تولباکس های حوزه ی پردازش سیگنال های گرافی در MATLAB با نام GSPBOX آشنا شویم و مفاهیم معرفی شده در کلاس را به کمک آن پیاده سازی کنیم.

الف) ابتدا به کمک این لینک تولباکس موردنظر رادانلود کرده و در متلب آن را نصب کنید. از بخش Documentation این سایت میتوانید جهت آشنایی با این تولباکس استفاده کنید.

ب) دو گراف زیر را در برنامه خود با نام های G_1 و G_2 تعریف و رسم کنید.



پ) ضرب تانسوری (کرونکر) و دکارتی دو گراف بالا را به دست آورید و به ترتیب G_t و G_s بنامید. هر دو گراف را با استفاده از تولباکس مورد بحث رسم کنید و ماتریس های $\mathbf{W}$ و $\mathbf{A}$ آنها را مشاهده کنید.

ت) یکی از دو ماتریس G_t یا G_s را به دلخواه انتخاب کنید و آن را $\mathbf{H}$ بنامید. یک سیگنال رندوم در باره $[-10, 10]$ تولید کرده و بر روی گراف $\mathbf{H}$ نمایش دهید

ث) مقادیر ویژه و بردار های ویژه ماتریس لاپلاسین گراف $\mathbf{H}$ را به دست آورید و طیف گراف آن را رسم کنید.

ج) بردار ویژه ها را به ترتیب افزایش مقدار ویژه در نظر بگیرید. دو بردار ویژه ابتدایی و دو بردار ویژه انتهایی را بر روی گراف به شکل یک سیگنال نمایش دهید و تفاوت آنها را توضیح دهید.

۲ تشخیص گروه بندی در گراف ها و رسم گراف

برای مدل کردن شبکه های دوستی در شبکه های اجتماعی از یک مدل گراف تصادفی به نام مدل بلوکی تصادفی [1] استفاده می شود. فرض کنید در یک اجتماع دو گروه دوستی وجود دارد، میخواهیم گراف دوستی ای برای این اجتماع تشکیل دهیم به طوریکه یال های گراف نشانگر وجود ارتباط دوستی بین دو فرد باشد. انتظار داریم احتمال وجود رابطه دوستی بین دو فرد از دو گروه مختلف کمتر از احتمال وجود رابطه بین دو فرد از یک گروه باشد. طبق آنچه که گفته شد، مدل

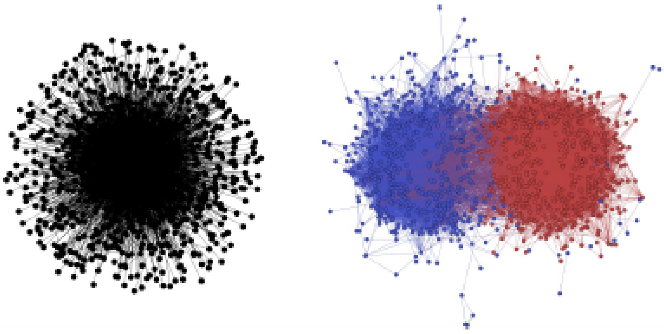
[1] Stochastic Block Model

تصادفی بلوکی به صورت زیر تعریف میشود.

ابتدا یک بردار برچسب برای رئوس تعیین میشود. بردار برچسب های رئوس را به صورت $\sigma \in \{\pm 1\}^n$ که در آن σ_i ها متغیر های تصادفی مستقل با توزیع یکسان هستند به طوریکه $\mathbb{P}\{\sigma_i = 1\} = \mathbb{P}\{\sigma_i = -1\} = 1/2$ در نظر می گیریم. این بردار نشان میدهد که هر راس در کدام گروه دوستی قرار دارد. حال اگر A ماتریس مجاورت گراف مدنظر باشد، توزیع آن به فرم زیر است.

$$\mathbb{P}[A_{ij} = 1] \sim \begin{cases} p & \sigma_i = \sigma_j \\ q & \sigma_i \neq \sigma_j \end{cases}$$

این مدل تصادفی را با $SBM(\mathrm{n,p,q})$ نمایش میدهیم.



الف) یک نمونه از گراف تصادفی $G \sim SBM(1000, 0.5, 0.2)$ را رد صفحه دو بعدی رسم کنید. برای رسم این گراف از بردار های ویژه ی متناظر با دومین و سومین کوچکترین مقدار ویژه استفاده کنید به این صورت که مختصات راس i متناظر با زوج مرتب $(\psi_2(i), \psi_3(i))$ باشند که در آن $\psi(j)$ بردار ویژه متناظر با j امین مقدار ویژه کوچک لاپلاسین گراف است. راس های مربوط به هر گروه را به رنگ متفاوتی درآورید تا مشخص باشند. حال بر اساس مشاهدات خود یک روش برای بازیابی گروه های دوستی تنها با استفاده از مشاهده گراف ارائه دهید.

ب) دقت کنید که در بازیابی گروه های دوستی بهترین کاری که میتوان انجام داد جدا کردن این دو گروه راس از یکدیگر میباشد و نمیتوان برچسب رئوس را بدست آورد. در حقیقت همواره ابهام علامت برای برچسب ها باقی خواهد ماند. میتوان ثابت کرد که برای گراف تولید شده از مدل $SBM(n, \alpha\frac{\log n}{n}, \beta\frac{\log n}{n})$ بازیابی بدون خطای دو گروه با استفاده از گراف مشاهده شده در $n \to \infty$ ممکن است و در غیر این صورت ناممکن است. با استفاده از راه حلی که در بخش قبل پیشنهاد کردید درستی این گزاره را با چند نمونه آزمایش نشان دهید.

(گزارش تنها یک یا دو نمونه از هر حالت از پارامتر ها کافی است، به کامپیوتر خود فشار نیاورید!!)