باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

پردازش سیگنال‌های گرافی

استاد: دکتر امینی

تمرین سری چهارم

---

۱ تخمین بیشینه‌گر احتمال پسین برای مساله جداسازی سیگنال‌های گرافی

گراف‌های N راسی $G_1,\dots,G_k$ را در نظر بگیرید. برای گراف G_i با ماتریس لاپلاسین $\mathbf{L}_i=\mathbf{V}_i\mathbf{\Lambda}_i\mathbf{V}_i^T$ سیگنالی تصادفی و هموار به شکل زیر در نظر بگیرید (برای خود می‌توانید تحلیل کنید که چرا این سیگنال‌ها هموار خواهند بود):

$$\mathbf{x}_i=\mathbf{V}_i\mathbf{h}_i,\quad \mathbf{h}_i\sim\mathcal{N}(0,\mathbf{\Lambda}_i^{\dagger}).$$

حال فرض کنید این سیگنال‌ها با هم ترکیب شده و سیگنال (نویزی) زیر را تولید کنند:

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{K}\mathbf{x}_i+\mathbf{n},\quad \mathbf{n}\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2\mathbf{I}).$$

نشان دهید تخمین بیشینه‌گر احتمال پسین MAP برای جداسازی سیگنال‌ها که به صورت زیر است

$$\max_{\mathbf{h}_1,\dots,\mathbf{h}_K}\mathbb{P}\{\mathbf{h}_1,\dots,\mathbf{h}_K\mid\mathbf{x}\}$$

معادل مسئله زیر است:

$$\min_{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_K}\|\mathbf{x}-\sum_{i=1}^{K}\mathbf{x}_i\|_2^2+\sigma^2\sum_{i=1}^{K}\mathbf{x}_i^T\mathbf{L}_i\mathbf{x}_i.$$

۲ سوال ۲: سیگنال‌های گرافی تصادفی

سیگنال گرافی تصادفی $\mathbf{x}_i\in\{0,1\}^N$ را در نظر بگیرید که مقادیر آن به صورت $\mathrm{i.i.d}$ از توزیع برنولی با پارامتر p تولید می‌شوند. با فرض داشتن M سیگنال تصادفی و مستقل $\mathbf{x}_1,\dots\mathbf{x}_M$، گراف بدون طوقه G را به این صورت در نظر بگیرید که عناصر ماتریس مجاورت آن به شرح زیر هستند:

$$w_{ij}=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{M}[(x_k)_i-(x_k)_j]^2},\quad i\neq j.$$

۱. فرض کنید سیگنال تصادفی y مستقل از سیگنال‌های قبل بوده و با توزیع $\mathcal{N}(0,\sigma^2\mathbf{I})$ تولید شده باشد. عبارت زیر را محاسبه کنید:

$$\mathbb{E}[\mathbf{y}^T\mathbf{L}\mathbf{y}].$$

۲. مقادیر ویژه ماتریس وزن گراف را به صورت $\lambda_1,\dots,\lambda_N$ در نظر بگیرید. عبارت زیر را محاسبه کنید (نیازی به محاسبه فرم بسته نیست).

$$\mathbb{E}\left[\sum_{1\leq i\neq j\leq N}\lambda_i\lambda_j\right].$$

۳. (امتیازی): یک حد بالا برای عبارت مذکور بیابید. می‌توانید از نتایج مرتبط در حوزه آمار و احتمال استفاده کنید.

۳ قدم زدن تصادفی بر روی گراف

یک قدم زدن تصادفی تنبل! بر روی گراف را به این صورت تعریف می‌کنیم که در هر مرحله، با احتمال $1/2$ در همان رأس باقی می‌مانیم و با احتمال $1/2$ به یکی از رئوس مجاور حرکت می‌کنیم، که احتمال رفتن به هرکدام از رئوس مجاور متناسب با وزن یال متصل به آن رأس است. در مرحله اولیه قدم زدن تصادفی از یک بردار مانند $\mathbf{p}_0$ شروع می‌کنیم که نشانگر احتمال حضور در هر رأس است. برای مثال اگر بخواهیم قدم‌زدن را از راس a آغاز کنیم داریم $\mathbf{p}_0 = \delta_a$. اگر $\mathbf{p}_t$ بردار توزیع احتمال در مرحله t قدم‌زدن تصادفی باشد، فرض کنید ماتریس $\tilde{W}$، ماتریس انتقال این قدم‌زدن تصادفی باشد، یعنی $\mathbf{p}_{t+1} = \tilde{W}\mathbf{p}_t$. همینطور فرض کنید $\omega_1 \geq \omega_2 \geq \cdots \geq \omega_n$ مقادیر ویژه این ماتریس و $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ بردارهای ویژه این ماتریس باشند.

۱. ارتباط مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس $\widetilde{W}$ را با مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس مجاورت نرمالیزه $A = D^{-1/2}WD^{-1/2}$ مشخص کنید (منظور از W ماتریس وزن و D ماتریس درجه است).

۲. ثابت کنید $\omega_1 = 1$ و $0 \leq w_i < 1$. همینطور بردار ویژه ψ_1 را به دست آورید.
راهنمایی: از قضیه پرون-فروبنیوس استفاده کنید.

۳. ثابت کنید با شروع از هر بردار احتمال اولیه $\mathbf{p}_0$ در نهایت به یک بردار احتمال مشخص π همگرا می‌شویم، و مقدار π را به‌دست آورید.
راهنمایی: از بسط $D^{-1/2}\mathbf{p}_0$ در پایه $\psi_1, \ldots, \psi_n$ استفاده کنید.

۴. ثابت کنید اگر قدم زدن از رأس a شروع شود، داریم:

$$|\mathbf{p}_t(b) - \pi(b)| \leq \sqrt{\frac{d(b)}{d(a)}}\omega_2^t,$$

که $d(b)$ درجه رأس b و $d(a)$ درجه رأس a است.

۴ مقاومت معادل در گراف

یکی از مترهایی که روی رئوس گراف تعریف می‌شود مقاومت معادل بین دو راس است. در گراف وزن‌دار همبند $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{W})$ با وزن‌های مثبت، به‌جای هر یال e_{ij} یک مقاومت با مقدار $\frac{1}{w_{ij}}$ قرار می‌دهیم. و مقاومت معادل بین دو راس u, v را با $R_{eff}(u, v)$ نمایش می‌دهیم. در این سوال قصد داریم ثابت کنیم R_{eff} تمام خواص یک متر را دارد.

۱. ثابت کنید داریم $R_{eff}(u, v) = (\delta_u - \delta_v)^T L_G^{\dagger}(\delta_u - \delta_v)$.

۲. ب) فرض کنید در شبکه مقاومتی معرفی شده، ولتاژهای دلخواهی روی مجموعه رئوس $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ می‌گذاریم. حال می‌خواهیم این شبکه مقاومتی را حل کنیم و ولتاژ رئوس دیگر را بدست آوریم. ثابت کنید تابع ولتاژ بدست آمده روی رئوس خارج از B هارمونیک است، یعنی داریم

$$v(u) = \frac{1}{d(u)} \sum_{s:(s,u) \in E(\mathcal{G})} w_{su} v(s), \quad \forall u \in V \setminus B.$$

همینطور ثابت کنید می‌توان ولتاژهای دیگر رئوس را از کمینه کردن انرژی کل شبکه به‌دست آورد؛ یعنی کافیست تابع $\min v^T L_G v$ را کمینه کنیم.

۳. ثابت کنید ماتریس L_B ماتریس لاپلاسین یک گراف است. راهنمایی: ابتدا یک راس را حذف کنید و سپس با استقرا حکم را نتیجه بگیرید.

۴. ثابت کنید مقاومت معادل روی رئوس گراف یک متر است. راهنمایی: با توجه به قسمت های قبل کافیست نامساوی مثلث را تنها برای گرافی با سه راس ثابت کنید.

۵ تبدیل موجک کلاسیک

۱. ثابت کنید اگر ψ تابعی زوج و حقیقی باشد، رابطه زیر برقرار است:

$$f(t) = \frac{1}{C}\int_0^{\infty} \frac{1}{s^{3/2}} W_f(s,t)\mathrm{d}s, \quad C = \int_0^{\infty} \frac{\hat{\psi(\omega)}}{\omega}\mathrm{d}\omega$$

۲. رابطه پارسوال را برای تبدیل موجک کلاسیک به‌دست آورید. به عبارت دیگر، ثابت کنید

$$C_\psi \langle f, g \rangle = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_f(u,s)W_g^*(u,s)\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}s}{s^2}, \quad C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi(\omega)}|^2}{\omega}\mathrm{d}\omega$$

و سپس نتیجه بگیرید

$$f = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty W_f(u,s)\psi_{s,u} \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}s}{s^2}$$

۶ خاصیت محلی بودن موجک گرافی

قصد داریم ثابت کنیم موجک‌های گرافی، در راس‌های به حد کافی دور، مقدار ناچیزی دارند. در بخش‌های سوال، این مفاهیم را به طور دقیق‌تر بررسی خواهیم کرد.

۱. ابتدا ثابت کنید به ازای هر دو راس i,j با فاصله $d(i,j)$ ، به ازای $s < d(i,j)$، مشابه آنچه در کلاس برای ماتریس مجاورت اثبات شد، داریم $(L^s)_{ij} = 0$.

۲. دو موجک گرافی $\psi_{s,n}, \tilde{\psi}_{s,n}$ را در نظر بگیرید که به ترتیب متناظر با توابع $g(x), \tilde{g}(x)$ هستند. فرض کنید نامساوی $|g(t\lambda) - \tilde{g}(t\lambda)| \leq M(t)$ همواره برقرار است. ثابت کنید در هر راس i، $|\psi_{s,n}(i) - \tilde{\psi}_{s,n}(i)| \leq \sqrt{s}M(t)$. همچنین، $\|\psi_{s,n}(i) - \tilde{\psi}_{s,n}(i)\|_2 \leq \sqrt{Ns}M(t)$.

۳. فرض کنید تابع g، $K+1$ بار در صفر مشتق‌پذیر است و $g^{(r)}(0) = 0, r < K$، و $C := g^{(K)}(0) \neq 0$. فرض کنید عدد مثبتی مانند t' وجود دارد که $|g^{(K+1)}(\lambda)| \leq B, \forall\lambda \in [0, t'\lambda_N]$. حال تقریب تابع g را $\tilde{g}(\lambda) := \frac{C(t\lambda)^K}{K!}$ در نظر بگیرید. ثابت کنید داریم

$$M(t) := \sup_{\lambda\in[0,t'\lambda_N]} |g(t\lambda) - \tilde{g}(t\lambda)| \leq \frac{B(t\lambda_N)^{K+1}}{(K+1)!}.$$

۴. فرض کنید در یک گراف مانند G با ماتریس لاپلاسین L ، دو راس i,j داشته باشیم که $d(i,j) > K$. با استفاده از نتایج و مفروضات بخش‌های قبل، ثابت کنید ثوابتی مانند D, t'' وجود دارند که

$$\frac{\psi_{i,s}(j)}{\|\psi_{i,s}\|_2} \leq Dt, \quad \forall t < \min(t', t'').$$

راهنمایی: ابتدا ثابت کنید $\tilde{\psi}_{i,s}(j) = 0$ و سپس از بخش‌های قبل و نامساوی مثلث بهره بگیرید.