باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

پردازش سیگنال‌های گرافی

استاد: دکتر امینی

تمرین سری سوم

---

۱ گراف‌های قویاً منظم

گراف بدون وزن و بدون جهت G را قویا منظم با پارامترهای (r, s, k) می‌گویند اگر:

۱. G k-منظم است.

۲. هر دو رأس همسایه r همسایه مشترک دارند.

۳. هر دو رأس غیرهمسایه s همسایه مشترک دارند.

(الف) نشان دهید ماتریس لاپلاسین G، L، دقیقاً سه مقدار ویژه متمایز دارد که به صورت زیر هستند:

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \frac{2k - r + s + \sqrt{(r-s)^2 + 4(k-s)}}{2}, \quad \theta_3 = \frac{2k - r + s - \sqrt{(r-s)^2 + 4(k-s)}}{2}.$$

(ب) فرض کنید G قویاً منظم است و $\|x\|_2 = 1$ و سیگنال x میانگین صفر دارد. یک فیلتر به صورت $H = f(L) = \sum_{i=0}^{M-1} \alpha_i L^i$ تعریف کنید. اگر خروجی y شرط $y^\top x = 0$ را ارضا کند، اندازه سیگنال خروجی، $\|y\|_2$، را بر حسب $f(\theta_2), f(\theta_3)$ به دست آورید.

۲ شیفت رأسی و میانگین

گراف همبند G با مجموعه رئوس $\{1, \ldots, n\}$ را در نظر بگیرید. در مرحله i ام، سیگنال قبلی نسبت به راس i ام شیفت راسی داده شده و در $\sqrt{n}$ ضرب می‌شود:

$$y_i = \sqrt{n} \cdot y_{i-1} *_G \delta_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

مقدار میانگین سیگنال y_n را بر حسب مقدار میانگین y_0 بدست آورید.

۳ ضرب دکارتی و شیفت رأسی

گراف $\mathcal{H}$ با $n \times m$ راس را بدین صورت می‌سازیم. ابتدا m گراف کامل K_n در نظر بگیرید. شماره رئوس گراف کامل اول را $1, \ldots, n$ و شمراه رئوس گراف کامل دوم را $1, \ldots, 2n$ می‌گیریم و به همین صورت بقیه رئوس را شماره‌گذاری می‌کنیم. حال همه‌ی رئوس i, j را که $i \equiv j \pmod m$ به هم متصل می‌کنیم. سیگنال δ_k را روی گراف $\mathcal{H}$ نسبت به راس l شیفت دهید. ماتریس شیفت را لاپلاسین در نظر بگیرید، همچنین در انتخاب بردارویژه‌ها اختیار دارید هر پایه‌ای که محاسبه شیفت در آن راحت‌تر است انتخاب کنید. مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین $\mathcal{H}$ را نیز به دست آورید.

۴ بانک فیلتر و اتحاد نوبل

عملگر نمونه‌برداری نرخ پایین D را به صورت زیر در نظر بگیرید که در آن O ماتریس تمام صفر است.

$$D = \begin{bmatrix} I_{N/M} & O & \cdots & O \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(n/M) \times N}.$$

آنگاه سیگنال نمونه‌برداری شده به صورت Dx خواهد بود. اگر A ماتریس مجاورت گراف ساده G باشد و قرار دهیم

$$A^M = \begin{bmatrix} (A^M)_{1,1} & O \\ (A^M)_{2,1} & (A^M)_{2,2} \end{bmatrix}.$$

که در آن $(A^M)_{1,1}$ زیرماتریس مربعی $N/M \times N/M$ حاصل از در نظر گرفتن N/M سطر و ستون اول A^M است. همینطور قرار دهیم

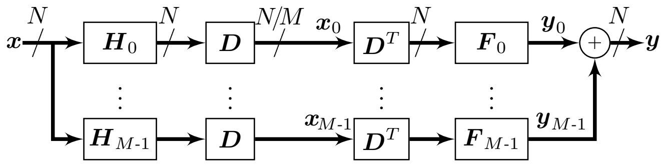
$$\bar{A} = DB_M D^T,$$

۱. نشان دهید اتحاد نوبل برای هر فیلتر چندجمله‌ای به صورت $H(A) = \sum_{k=0}^{L} h_k A^k$، برقرار است ، یعنی داریم

$$DH(A^M) = H(\bar{A})D.$$

$$\boldsymbol{x} \xrightarrow{\mathcal{C}^N} \boxed{H(\boldsymbol{A}^M)} \xrightarrow{\mathcal{C}^N} \boxed{\boldsymbol{D}} \xrightarrow{\mathcal{C}^{\frac{N}{M}}} \boldsymbol{y} \equiv \boldsymbol{x} \xrightarrow{\mathcal{C}^N} \boxed{\boldsymbol{D}} \xrightarrow{\mathcal{C}^{\frac{N}{M}}} \boxed{H(\bar{\boldsymbol{A}})} \xrightarrow{\mathcal{C}^{\frac{N}{M}}} \boldsymbol{y}$$

۲. فیلتربانک M تایی زیر را در نظر بگیرید، که F_i و H_i ها همگی چندجمله‌ای هستند و D عملگر نمونه‌برداری است. آیا این فیلتربانک گرافی GSI است؟



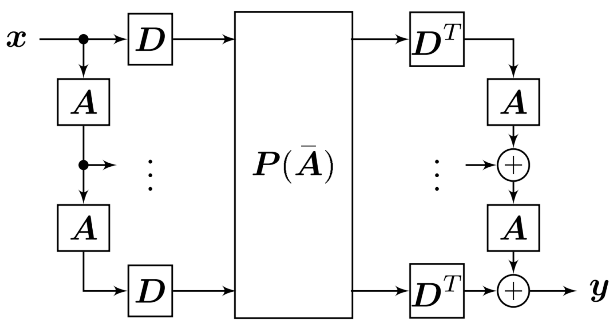
۳. یک فیلتر خطی S را با دوره تناوب M نامتغیر با شیفت گوییم هرگاه $A^M S = SA^M$. نشان دهید باند فیلتر بالا برای تمام چندجمله‌ای‌های H_i, F_i با دوره تناوب M نامتغیر با شیفت است اگر و تنها اگر A^M به صورت زیر باشد:

$$\begin{bmatrix} (A^M)_{1,1} & O \\ O & (A^M)_{2,2} \end{bmatrix}$$

۴. فرض کنید هریک از فیلترهای H_i, F_i تجزیه‌ای به شکل زیر دارند:

$$H_i(A) = \sum_{r=0}^{M-1} A^r E_{i,r}(A^M), \quad F_i(A) = \sum_{r=0}^{M-1} A^{M-r-1} R_{i,r}(A^M),$$

که E_{ir}, R_{ir} توابع چندجمله‌ای هستند. با تعریف $\bar{A} = DB_M D^T$ شرطی پیدا کنید به طوری که بتوان فیلتر بانک قسمت قبل را بهشکل زیر پیاده‌سازی کرد. همچنین عناصر بلوکی ماتریس $P(\bar{P})$ را (که هر بلوک از مرتبه $N/M \times N/M$ است) برحسب چندجمله‌ای‌های $E_{ir,}, R_{i,r}$ بیابید.



۵ یادگیری گراف

در این سوال فرض می‌کنیم که سیگنال گراف در یک ماتریس $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ داده شده است. همینطور ماتریس $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ را به صورت

$$Z_{ij} = \|x_i - x_j\|_2^2$$

تعریف می‌کنیم.

۱. فرض کنید برای یادگیری گراف از مسئله بهینه‌سازی زیر استفاده می‌کنیم که در آن W ماتریس وزن‌های گراف است:

$$\min_{W \in W_n} \|Z \circ W\|_{1,1} + \gamma\sigma \sum_{i,j} W_{ij}(\log(W_{ij}) - \nu)$$

که در آن منظور از $Z \circ W$ ضرب درایه به درایه است. مجموعه $\mathcal{W}\backslash$ مجموعه تمام ماتریس‌های وزن برای گراف‌های n راسی با وزن‌های نامنفی است. همچنین در رابطه بالا از تعریف رو به رو استفاده شده است: $\|A\|_{1,1} = \sum_{i,j} |A_{ij}|$

ثابت کنید جواب این بهینه‌سازی به صورت زیر است:

$$w_{ij} = \exp\left(-\frac{\|x_i - x_j\|^T}{\gamma\sigma}\right)$$

۲. فرض کنید که برای یادگیری گراف از مسئله بهینه‌سازی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\min_{W \in W_n} \|Z \circ W\|_{1,1} - \alpha 1^T \log(W) + \beta\|W\|_F^2$$

که در آن لگاریتم بردار، به صورت لگاریتم درایه به درایه تعریف شده است. اگر جواب بهینه را با $F(Z, \alpha, \beta)$ نمایش دهیم، ثابت کنید.

$$F(Z, \alpha, \beta) = \gamma F\left(Z, \frac{\alpha}{\gamma}, \beta\right) = \alpha F(Z, 1, \alpha\beta)$$

۳. ثابت کنید

$$F(Z, \alpha, \beta)_{ij} \leq \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

.

۶ تعمیم ایستان بودن به حوزه زمان-رأس

گراف دلخواه $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathbf{W_G})$ را در نظر بگیرید. در تمام سوال، عملگر شیفت را ماتریس لاپلاسین در نظر بگیرید. قصد داریم فرایندهای تصادفی این گراف را در طول زمان بررسی کنیم. بنابراین، فرض کنید $\mathbf{X} = \begin{bmatrix}\mathbf{x}_1, \dots \mathbf{x}_T\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times T}$ نمونه‌های مختلف سیگنال در زمان‌های مختلف هستند. ستون شماره t این ماتریس را $\mathbf{x}_t$ می‌نامیم. در گام اول، تبدیل فوریه مشترک (Joint Fourier Transform (JWT)) را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{JWT}(\mathbf{X}) \coloneqq \mathrm{GFT}(\mathrm{DFT}(\mathbf{X})) = \mathbf{U}_G^H \mathbf{X} \mathbf{U}_T,$$

و با برداری کردن $\mathbf{X}$ تعریف می‌کنیم $\hat{\mathbf{x}} = \mathrm{JFT}(\mathbf{x}) \coloneqq \mathbf{U}_J^H \mathbf{x}$. مشخص است که تبدیل فوریه مشترک، همان ماتریس تبدیل فوریه ضرب دکارتی گراف اصلی و گراف حلقوی برای حوزه زمان است. فیلتر حوزه مشترک را نیز به فرم $h(\mathbf{L}_G, \mathbf{L}_T)\mathbf{x} \coloneqq \mathbf{U}_J h(\boldsymbol{\lambda}_G, \boldsymbol{\Omega}_T)\mathbf{U}_J^H \mathbf{x}$ تعریف می‌کنیم که $h(\boldsymbol{\lambda}_G, \boldsymbol{\Omega}_T)$ در آن یک ماتریس قطری است. حال به بیان تعریف سیگنال ایستان حوزه مشترک می‌پردازیم:

تعریف: سیگنال $\mathbf{x}$ به صورت مشترک ایستان (JWSS) است اگر

- $\mathbb{E}(\mathbf{x}) = c\mathbf{1}_{NT}$
- ماتریس کوواریانس فرایند، یک فیلتر گرافی با تعریف فوق است.

۱. ابتدا به این سوال پاسخ دهید که چرا از ابتدا تعریف ایستان بودن را مستقیما برای گراف ضرب دکارتی استفاده نکردیم؟ راهنمایی: به طیف گراف حاصل از ضرب دکارتی دقت کنید.

۲. ابتدا ثابت کنید ماتریس کوواریانس را برحسب h به صورت زیر می‌توان بیان کرد:

$$h(\mathbf{L}_G, \mathbf{L}_T) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,1} & \dots & \mathbf{H}_{1,T} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{H}_{T,1} & \dots & \mathbf{H}_{T,T} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{t_1,t_2} = \frac{1}{T}\sum_{\tau=1}^{T} h_{\omega_\tau}(\mathbf{L}_G) e^{j\omega_\tau(t_1 - t_2 + 1)}$$

۳. حال دو تعریف دیگر را در نظر بگیرید: **تعریف:** سیگنال $\mathbf{x}$ به صورت چندمتغیره زمانی ایستان TWSS است اگر:

- $\mathbb{E}(\mathbf{x}_t) = c\mathbf{1},\ \forall t$

- به ازای هر t_1, t_2، بلوک‌های ماتریس کوواریانس از خاصیت رو به رو تبعیت می‌کنند: $\mathbf{\Sigma}_{t_1,t_2} = \mathbf{\Sigma}_{t_1-t_2+1,1}$

تعریف: سیگنال $\mathbf{x}$ به صورت چندمتغیره راسی ایستان VWSS است اگر:

- $\mathbb{E}(\mathbf{x}_t) = c\mathbf{1}\forall t$
- به ازای هر t_1, t_2، بلوک‌های ماتریس کوواریانس هر کدام یک فیلتر گرافی روی گراف اولیه هستند: $\mathbf{\Sigma}_{t_1,t_2} = \gamma_{t_1,t_2}(\mathbf{L}_G)$

۴. ثابت کنید شرط JWSS با برقراری همزمان TWSS و VWSS معادل است.

۵. ثابت کنید تعریف JWSS با مجموعه شرایط زیر معادل است:

- $\mathbb{E}(\hat{\mathbf{X}}[n,t]) = 0, \; \forall\lambda_n \neq 0, \omega_t \neq 0$
- $\mathbb{E}(\hat{\mathbf{X}}[n_1,t_1]\hat{\mathbf{X}}[n_2,t_2]) = 0, \; \forall t_1 \neq t_2$ □□ $n_1 \neq n_2$
- تابع نامنفی $h(\lambda_n, \omega_t)$ وجود دارد که $\mathbb{E}(|\hat{\mathbf{X}}[n,t]|^2) - |\mathbb{E}(\hat{\mathbf{X}}[n,t]|^2 = h(\lambda_n, \omega_t), \; \forall n, t$