باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

پردازش سیگنال‌های گرافی

استاد: دکتر امینی

تمرین سری دوم

۱ پرون-فروبینیوس

در این سوال قصد داریم قضیه پرون-فروبینیوس [1] را در حالت متقارن اثبات کنیم.

قضیه: فرض کنید G گراف ساده بدون جهت، وزن‌دار و همبند با ماتریس مجاورت M باشد و $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_n$ مقادیر ویژه M باشند. در این صورت داریم:

(۱) بردار ویژه متناظر با μ_1 دارای درایه‌های اکیدا مثبت است.

(۲) $\mu_1 \geq -\mu_n$

(۳) $\mu_1 > \mu_2$

الف) اگر $\mathbf{u}$ بردار ویژه M باشد و بدانیم $\mathbf{u}(i) \geq 0 \;\; \forall i = 1, \ldots, n$، نتیجه بگیرید $\mathbf{u}(i) > 0 \;\; \forall i = 1, \ldots, n$.

راهنمایی: فرض کنید برخی درایه‌های $\mathbf{u}$ صفر هستند. یال e_{ij} را پیدا کنید که $\mathbf{u}(j) \neq 0, \mathbf{u}(i) = 0$. با نوشتن رابطه $\mu \mathbf{u}(i) = (M\mathbf{u})(i)$ به تناقض برسید.

ب) فرض کنید $\mathbf{u}_1$ بردار ویژه متناظر با μ_1 است و قرار دهید $\mathbf{x}(i) = |\mathbf{u}_1(i)| \;\; \forall i = 1, \ldots, n$. نشان دهید $\mathbf{x}$ هم یک بردار ویژه متناظر با μ_1 است. سپس (۱) را نتیجه بگیرید.

پ) قسمت (۲) را ثابت کنید. (دقت کنید در این قسمت نیازی به استفاده از همبند بودن گراف نیست)

راهنمایی: اگر $\mathbf{u}_n$ بردار ویژه متناظر با μ_n باشد قرار دهید $\mathbf{y}(i) = |\mathbf{u}_n(i)| \;\; \forall i = 1, \ldots, n$ و از $|\mu_n| = |\mathbf{u}_n^T M \mathbf{u}_n| / \|\mathbf{u}_n\|^2$ استفاده کنید.

ت) اگر $\mathbf{u}_2$ بردار ویژه متناظر با μ_2 باشد، ثابت کنید دارای مقادیر مثبت و منفی است.

ث) قرار دهید $\mathbf{y}(i) = |\mathbf{u}_2(i)|$. سپس از نامساوی $\mathbf{u}_2^T M \mathbf{u}_2 \leq \mathbf{y}^T M \mathbf{y}$ استفاده کنید و نشان دهید $\mu_1 = \mu_2$ ممکن نیست.

ج) نشان دهید اگر G همبند باشد و $\mu_1 = -\mu_n$، آنگاه G دوبخشی است.

راهنمایی: از اثبات قسمت (پ) استفاده کنید.

۲ طیف گراف های معروف!

در این سوال قصد داریم طیف لاپلاسین برخی گراف ای مشهور را بدست آوریم. برای حل سوالات به شکل ۱ توجه کنید، گاهی کمک کننده است!

الف) ثابت کنید طیف لاپلاسین گراف کامل K_n به فرم $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = n$ است.

ب) فرض کنید در گراف G رئوس u, v درجه یک داشته باشند و هر دو به رأس w متصل باشند. ثابت کنید طیف لاپلاسین گراف G یک مقدار ویژه ی 1 دارد، بردار ویژه متناظر آنرا بدست آورید.

[1] Perron-Frobenius

پ) با توجه به قسمت قبل ثابت کنید گراف ستاره n رأسی که آنرا با S_n نمایش می‌دهیم طیف لاپلاسین به فرم $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 1, \lambda_n = n$ دارد. بردار های ویژه متناظر را بیابید.

ت) اگر R_n گراف دور n رأسی باشد، رئوس آنرا با اعداد در پیمانه n نام‌گذاری می‌کنیم به طوری که یال‌های گراف به فرم $(x, x+1)$ باشند. در این حالت ثابت کنید بردار های x_k, y_k برای $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$ که به فرم زیر تعریف می‌شوند، بردار های ویژه‌ی این گراف هستند.

$$x_k(i) = \cos(\frac{2\pi ki}{n}), \tag{۱}$$

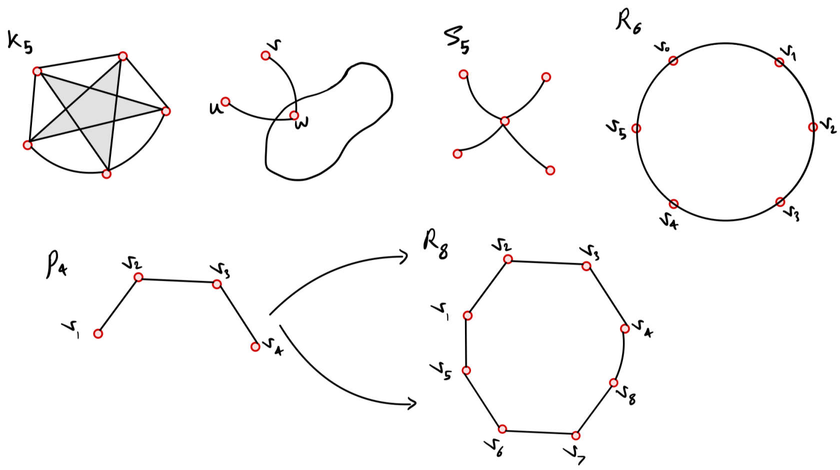
$$y_k(i) = \sin(\frac{2\pi ki}{n}). \tag{۲}$$

در فرم بالا بردار y_0 که تماما صفر است را درنظر نمی‌گیریم. همینطور بردار $y_{n/2}$ را برای n زوج در نظر نمی‌گیریم. همینطور ثابت کنید مقادیر ویژه‌ی متناظر به فرم $2(1 - \cos(\frac{2\pi k}{n}))$ هستند.

ث) گراف مسیر n رأسی را با P_n نمایش می‌دهیم. می‌خواهیم طیف این گراف را با استفاده از طیف گراف R_{2n} بدست آوریم. ابتدا نشان دهید نمایشی از لاپلاسین این دو گراف وجود دارد که معادله‌ی زیر برقرار شود.

$$\begin{pmatrix} I_n & I_n \end{pmatrix} L(R_{2n}) \begin{pmatrix} I_n \\ I_n \end{pmatrix} = 2L(P_n) \tag{۳}$$

که در آن I_n ماتریس همانی است. حال دقت کنید که اگر گراف R_{2n} بردار ویژه‌ای به شکل $\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \phi \end{pmatrix}$ داشته باشد که $\phi \in \mathbb{R}^n$، بردار ϕ بردار ویژه ی $L(P_n)$ نیز هست. نشان دهید به ازای هر مقدار ویژه ی متمایز گراف R_{2n} چنین بردار ویژه ای در فضای ویژه‌ی متناظر (که دو بعدی است) وجود دارد وبدین ترتیب بردار ها و مقادیر ویژه‌ی گراف P_n را بیابید.



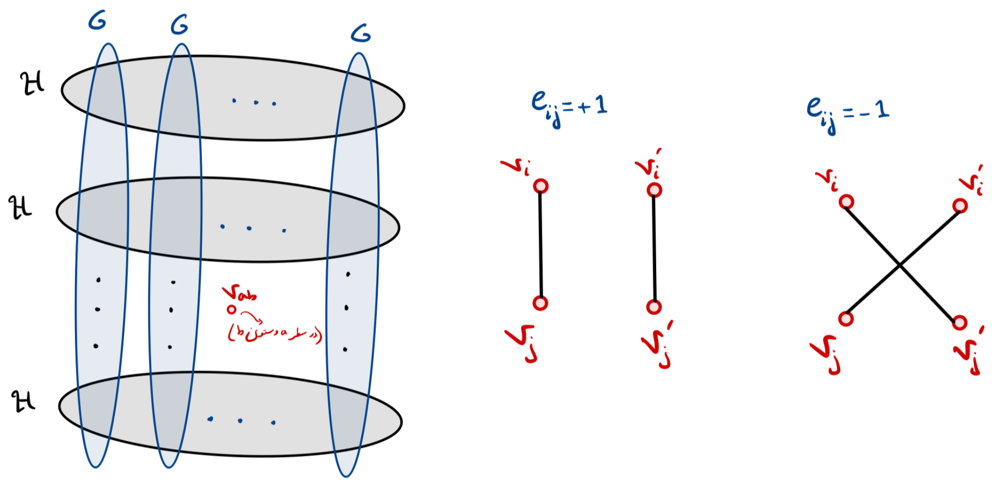
شکل ۱: چند گراف معروف!

۳ ساخت گراف‌های جدید

در این سوال با دو روش ساخت گراف های جدید از روی گراف های داده شده آشنا می‌شویم و طیف آنها را بررسی می‌کنیم.

الف) اگر G گرافی n رأسی و H گرافی m رأسی باشد، فرض کنید $\psi_1, \ldots, \psi_n$ بردار های ویژه و $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ مقادیر ویژه L_G باشند. همینطور $\phi_1, \ldots, \phi_m$ بردار های ویژه و $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ مقادیر ویژه‌ی L_H باشند. ثابت کنید لاپلاسین گراف $G \times H$ (ضرب دکارتی دو گراف) مقادیر ویژه به فرم $\alpha_{i,j} = \lambda_i + \gamma_j$ برای $i \in [n]$ و $j \in [m]$ دارد. همینطور بردار های ویژه‌ی متناظر به فرم $\beta_{ij}(a, b) = \psi_i(a)\phi_j(b)$ هستند که در آن بردار ویژه به فرم تابعی بر روی رئوس گراف نمایش داده شده‌است، یعنی برای هر $a \in [n], b \in [m]$ یک مقدار برمی‌گرداند.
راهنمایی: از نحوه ی نمایش گراف $G \times H$ که در شکل ۲ آمده استفاده کنید.

ب) فرض کنید گراف بدون وزن G را در اختیار داریم. برای ساختن گراف جدید از روی G ابتدا به ازای هر رأس v_i در G یک رأس v'_i اضافه می‌کنیم. فرض کنید A_G ماتریس مجاورت گراف G باشد. یک علامت دهی دلخواه برای یالهای G درنظر بگیرید به این صورت که هر یال علامت ± 1 داشته باشد. فرض کنید A_S همان ماتریس مجاورت G باشد، با این تفاوت که یال‌ها علامت‌دار هستند. حال در گراف جدید H که مجموعه رئوس آن $\{v_1, v'_1, \ldots, v_n, v'_n\}$ است اگر $e_{ij} \in E(G)$ رئوس $\{v_i, v'_i\}$ و $\{v_j, v'_j\}$ را به یکی از دو روش مستقیم و یا ضربدری به یکدیگر وصل می‌کنیم. اینکه چطور آنها را به هم متصل کنیم به علامت یال e_{ij} بستگی دارد. اگر علامت یال e_{ij} مثبت باشد آنها را به طور مستقیم متصل می‌کنیم و اگر این علامت منفی باشد آنها را به طور ضربدری متصل می‌کنیم (شکل ۲ را ببینید). به گراف H که به این صورت از گراف G بدست آید یک ۲-ترفیع گراف G می‌گویند. ثابت کنید اگر A_H ماتریس مجاورت گراف H باشد، مقادیر ویژه‌ی آن اجتماع مقادیر ویژه‌ی A_G و A_S است. بردار های ویژه‌ی متناظر را نیز بدست آورید.



شکل ۲: ۲-ترفیع یک گراف (سمت راست) و حاصل‌ضرب دکارتی دو گراف (سمت چپ)

۴ رابطه طیف گراف و درجه رئوس

در این سوال قصد داریم چند نامساوی میان مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین و درجه رئوس گراف اثبات کنیم. فرض کنید G گراف بدون جهت با ماتریس لاپلاسین L باشد و $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ مقادیر ویژه L باشند. همچنین درجه راس i را d_i در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید رابطه زیر میان بیشینه درجه رئوس d_{max} و λ_n برقرار است:

$$\lambda_n \leq 2d_{max}$$

راهنمایی: از قضیه دایره گرشگورین [2] استفاده کنید.

ب) فرض کنید i و j دو راس از گراف G هستند که به یکدیگر متصل نیستند. نشان دهید:

$$\lambda_2 \leq \frac{d_i + d_j}{2}$$

پ) فرض کنید d_{min} و d_{max} حداقل و حداکثر درجات رئوس گراف باشند. نشان دهید:

$$\lambda_2 \leq \frac{n}{n-1} d_{min}$$

$$\lambda_n \geq \frac{n}{n-1} d_{max}$$

ت) در این قسمت قصد داریم یک حکم در حالت کلی اثبات کنیم.

فرض کنید S یک ماتریس حقیقی متقارن باشد و مقادیر ویژه آن $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_n$ و اعضای قطر اصلی آن $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ باشد. نشان دهید:

$$\sum_{i=1}^{t} d_i \leq \sum_{i=1}^{t} \mu_i \quad \forall t = 1, \ldots, n$$

[2] Gershgorin Circle Theorem

۵ عدد رنگی گراف

در این سوال قصد داریم باند بالا و باند پایین برای عدد رنگی گراف بدست بیاوریم. ابتدا چند مفهوم را تعریف می کنیم.

رنگ آمیزی گراف: رنگ آمیزی گراف اختصاص دادن رنگ به رئوس یک گراف است به گونه‌ای که رئوس مجاور رنگ‌های متمایز داشته باشند.
گراف k-رنگ‌پذیر: یک گراف را k-رنگ‌پذیر می گوییم اگر بتوان آن را با k رنگ متمامیز رنگ آمیزی کرد.
عدد رنگی گراف: کوچکترین k ممکن که با آن گراف k-رنگ‌پذیر است را عدد رنگی گراف می گویند و با $\chi(G)$ نشان می‌دهند.

الف) فرض کنید M ماتریس مجاورت گراف بدون جهت G باشد. نشان دهید:

$$d_{avg} \leq \lambda_{max}(M) \leq d_{max}$$

که در آن d_{avg} و d_{max} میانگین و بیشینه درجه رئوس گراف هستند.

ب) با استقرا روی تعداد رئوس گراف نشان دهید:

$$\chi(G) \leq \lfloor \lambda_{max}(M) \rfloor + 1$$

راهنمایی: از نامساوی سمت چپ قسمت قبل و قضیه درهم‌تنیدگی در تمرین سری قبل استفاده کنید.

پ) نشان دهید:

$$\chi(G) \geq 1 + \frac{\lambda_{max}(M)}{-\lambda_{min}(M)}$$

راهنمایی: از حکم سوال ۴ تمرین سری قبل استفاده کنید.