به نام خدا

آنالیز احتمالاتی در ابعاد بالا (۱-۲۵۸۴۱)

تمرین سری اوّل

ترم پاییز ۰۴-۱۴۰۳

دانشکده‌ی مهندسی برق

دانشگاه صنعتی شریف

استاد: دکتر محمّدحسین یاسائی میبدی

مهلت تحویل: جمعه ۲۵ آبان ساعت ۲۳:۵۹

($*$) مسائلی که با ستاره مشخّص شده‌اند امتیازی هستند و حل‌کردن آن‌ها نمره‌ی امتیازی خواهد داشت!

۱ خواصّ متغیّرهای تصادفی زیرگوسی

در این تمرین تلاش می‌کنیم تعدادی گزاره که معادل زیرگوسی بودن هستند را اثبات کنیم.

۱. فرض کنید $\Phi : \mathbb{R}^{\geq ۰} \mapsto \mathbb{R}$ تابعی صعودی و مشتق‌پذیر باشد. ثابت کنید:

$$\mathbb{E}\left[\Phi(|X|)\right] = \Phi(۰) + \int_{۰}^{\infty} \Phi'(t)\, \mathbb{P}\left[|X| \geq t\right] dt.$$

۲. ثابت کنید اگر X یک متغیّر تصادفی زیرگوسی با پارامتر σ و میانگین صفر باشد، آن‌گاه:

$$\mathbb{P}\left[|X| \geq t\right] \leq ۲e^{\frac{-t^{۲}}{۲\sigma^{۲}}}.$$

۳. ثابت کنید اگر X یک متغیّر تصادفی زیرگوسی با پارامتر σ و میانگین صفر باشد، آن‌گاه:

$$\mathbb{E}\left[e^{\frac{X^{۲}}{۶\sigma^{۲}}}\right] \leq ۲.$$

راهنمایی: از قسمت ۱ استفاده کنید.

۴. ثابت کنید اگر $\mathbb{E}\left[e^{\frac{X^{۲}}{۶\sigma^{۲}}}\right] \leq ۲$ آن‌گاه X یک متغسّر تصادفی زیرگوسی با پارامتر $\sigma\sqrt{۱۸}$ است.

۵. ثابت کنید اگر X یک متغیّر تصادفی زیرگوسی با پارامتر σ و میانگین صفر باشد، آن‌گاه به ازای هر $q \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}\left[X^{۲q}\right] \leq ۲(۲\sigma^{۲})^{q} q!.$$

راهنمایی: از قسمت ۱ استفاده کنید.

۶. ثابت کنید اگر X یک متغیّر تصادفی زیرگوسی با پارامتر σ و میانگین صفر باشد، آن‌گاه به ازای هر s که در شرط $|s| \leq \frac{۱}{۸\sigma^{۲}}$ صدق کند، داریم:

$$\mathbb{E}\left[e^{s(X^{۲} - \mathbb{E}[X^{۲}])}\right] \leq \exp\left(\frac{۳۲s^{۲}\sigma^{۴}}{۱ - ۴|s|\sigma^{۲}}\right),$$

و نتیجه بگیرید که $X^{۲}$ یک متغیّر تصادفی زیرنمایی است.

۲ متغیرهای تصادفی χ^2

متغیّرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع $\{Z_i\}_{i=1}^{n}$ که همگی نرمال استاندارد هستند را در نظر بگیرید. متغیّر تصادفی X که به صورت زیر تعریف می‌شود را یک متغیّر تصادفی $\chi^2(n)$ می‌نامیم:

$$X = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2.$$

۱. فرض کنید متغیّر تصادفی Z یک متغیّر تصادفی نرمال استاندارد باشد، نشان دهید تابع مولد گشتاور متغیّر تصادفی $Y = Z^2 - 1$ برابر است با:

$$\varphi(s) = \mathbb{E}\left[e^{sY}\right] = \begin{cases} \frac{e^{-s}}{\sqrt{1-2s}} & s < \frac{1}{2} \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}.$$

۲. نشان دهید که برای هر $0 < s < \frac{1}{2}$:

$$\varphi(s) \leq \exp\left(\frac{s^2}{1-2s}\right).$$

۳. به کمک بخش قبل، نشان دهید:

$$\mathbb{P}\left[Y > 2t + 2\sqrt{t}\right] \leq e^{-t}.$$

راهنمایی: نشان دهید $\sqrt{1+u} \leq 1 + \frac{u}{2}$ است.

۴. نشان دهید به ازای هر $\delta \in (0, 1)$ داریم:

$$\mathbb{P}\left[X \geq n + 2\sqrt{n \log\left(\frac{1}{\delta}\right)} + 2\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right] \leq \delta.$$

۳ بیضی‌گون!

۱. ابتدا یک بیضی‌گون d بُعدی را تعریف کنید. یک بیضی‌گون با چه پارامترهایی مشخّص می‌شود؟

۲. در کلاس گزاره‌هایی در مورد پوسته و استوای کره‌ی واحد d بُعدی بیان شد. مشابهاً گزارش‌هایی که فکر می‌کنید در مورد بیضی‌گون درست است را بنویسید و اثبات کنید.

۳. اگر از یک ببیضی‌گون که مرکز ثقلش روی مبدأ است، به طور یک‌نواخت و مستقل دو نقطه انتخاب کنیم و بردارهایی که از مبدأ به این دو نقطه وصل می‌شوند را در نظر بگیریم، زاویه‌ی این دو بردار چقدر خواهد بود؟ آیا می‌توانید گزاره‌ی دقیقی در مورد آن بگویید؟ در مورد متوسط طول پاره‌خطی که دو نقطه‌ی تصادفی را به هم متّصل می‌کند چه می‌توان گفت؟ اگر دو بردار تصادفی به این شکل انتخاب کنیم، مشابه خاصیتی که در کلاس برای کره اثبات شد و زاویه‌های دو به دو کنترل شدند آیا می‌توان در مورد بیضی‌گون زد؟

۴ تقویت الگوریتم‌های تصادفی

تصوّر کنید که الگوریتمی برای حلّ یک مسئله‌ی تصمیم‌گیری در اختیار داریم (به طور مثال این مسئله که عدد داده شده اول است یا خیر). فرض کنید که الگوریتم ما به طور تصادفی تصمیم می‌گیرد و با احتمال $\frac{1}{2} + \delta$ پاسخ صحیح می‌دهد، که تنها کمی بهتر از حدس زدن کاملاً تصادفی است. برای بهبود عملکرد الگوریتم، آن را N بار اجرا می‌کنیم و رأی اکثریت می‌گیریم. نشان دهید برای هر $\varepsilon \in (0, 1)$، پاسخ با احتمال حداقل $1 - \varepsilon$ درست است، به شرطی که داشته باشیم:

$$N \geq \frac{1}{2}\delta^{-2} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

۵ ماکسیمم متغیّرهای تصادفی زیرگوسی

فرض کنید $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ متغیّرهای تصادفی زیرگوسی با پارامتر مشترک σ باشند. توجّه کنید که این متغیّرهای تصادفی الزاما از هم مستقل نیستند. نشان دهید برای هر $\varepsilon > ۰$ داریم:

$$\mathbb{P}\left[\max_{i\le n}\left\{X_i - \mathbb{E}[X_i]\right\} \ge (۱+\varepsilon)\sigma\sqrt{۲\log(n)}\right] \xrightarrow{n\to\infty} ۰.$$

راهنمایی: از کران اجتماع استفاده کنید:

$$\mathbb{P}\left[\max\{X,Y\}\ge t\right] = \mathbb{P}\left[X\ge t \vee Y \ge t\right] \le \mathbb{P}[X\ge t] + \mathbb{P}[Y\ge t].$$

این مسئله نشان می‌دهد که ماکسیمم $\max_{i\le n}\left\{X_i - \mathbb{E}[X_i]\right\}$ از متغیّرهای تصادفی زیربرگوسی با پارامتر σ در بیشترین حالت از مرتبه‌ی $\sigma\sqrt{۲\log(n)}$ است. این مثال ساده‌ترین نمونه از نقش اساسی کران‌های دنباله‌ای در تخمین اندازه‌ی ماکسیمم متغیّرهای تصادفی است.

۶ نامساوی Khintchine

فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ متغیّرهای تصادفی زیرگوسی مستقل با میانگین صفر و پارامتر واحد باشند. تعریف می‌کنیم $\mathbf{X} = (X_۱, \ldots, X_n)^\top$ اثبات کنید که برای هر بردار $\mathbf{a} = (a_۱, \ldots, a_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ و هر $p \in [۲, \infty)$ داریم:

$$\sqrt{\mathbf{a}^\top\mathbf{a}} \le \left(\mathbb{E}\left[|\mathbf{a}^\top\mathbf{X}|^p\right]\right)^{\frac{۱}{p}} \le CK\sqrt{p}\sqrt{\mathbf{a}^\top\mathbf{a}}.$$

که در آن:

$$K = \max_i \|X_i\|_{\psi_۲} = \max_i\left\{\inf\left\{t > ۰ : \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{X_i^۲}{t^۲}\right)\right] < ۲\right\}\right\}$$

و C یک ثابت مطلق است.

۷ $(*)$ نامساوی Khintchine برای $p = ۱$

نشان دهید با همان شرایط سوال قبل، داریم:

$$c(K\sqrt{\mathbf{a}^\top\mathbf{a}} \le \mathbb{E}\left[|\mathbf{a}^\top\mathbf{X}|\right] \le \sqrt{\mathbf{a}^\top\mathbf{a}}.$$

در اینجا $K = \max_i \|X_i\|_{\psi_۲}$ و $c(K) > ۰$ مقداری است که ممکن است فقط به K بستگی داشته باشد.

۸ $(*)$ گراف‌های تنک تقریبا منظم نیستند!

یک گراف تصادفی $G \sim \mathcal{G}(n,p)$ را در نظر بگیرید که درجات مورد انتظار $d = o(\log n)$ دارد. نشان دهید که با احتمال بالا (مثلا دست‌کم ۰.۹) G راسی با درجه $۱۰d$ دارد.