I

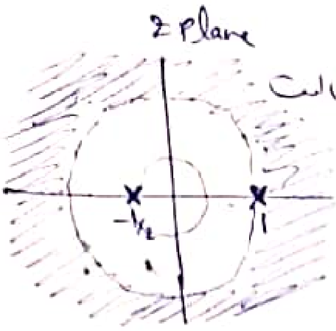
محمد پارسا دینی 400101204

تمرین سری 2 DSP

سوال 1 (18:1)

$$H(z)=\frac{2(1+2z^{-1}+z^{-2})}{(2+z^{-1})(1-z^{-1})}=\frac{2z^{-2}+4z^{-1}+2}{-z^{-2}-z^{-1}+2}=-2+\frac{A}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{B}{1-z^{-1}}$$

$$=-2+\frac{5z^{-1}+3}{2z^{-2}-z^{-1}-1}=1+\frac{5z+3}{(2z^{-1}+1)(z^{-1}-1)}=1+\frac{-1/3}{2z^{-1}+1}+\frac{8/3}{z^{-1}-1}=1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{1}{2}z^{-1})}+\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}$$



حال برای مشخص کردن سیگنال باید ROC آن را با سیستم علی و LTI است. چون سیستم علی است $h(n)$ باید سمت راستی باشد و بنابراین ROC آن باید $ROC=\{z \mid |z|>1\}$ باشد.

$$h(n)=-2\delta(n)-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)+\frac{8}{3}u(n)$$

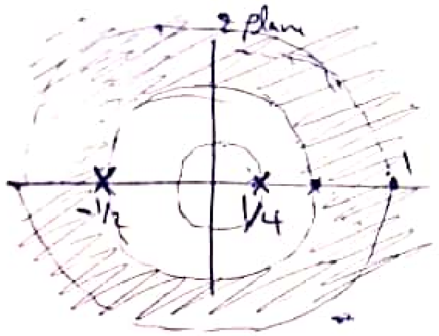
II می‌دانیم که خروجی سیستم به ورودی z^n برابر $H(z)z^n$ در سیستم‌های LTI است.

$$2^n \longrightarrow H(z)\big|_{z=2}\cdot 2^n=\frac{18}{5}\times 2^n$$

سوال 2 (21:2)

$$H(z)=\frac{4+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})}=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

a) سیستم LTI علی است و قطب‌ها $z=-\frac{1}{2}$ و $z=\frac{1}{4}$ هستند. چون سیستم علی است $h(n)$ باید سمت راستی باشد. در نتیجه ROC می‌شود: $ROC=\{z \mid |z|>\frac{1}{2}\}$.



b) پایداری سیستم معادل دربرداشتن دایره $|z|=1$ در صفحه z است که این دایره جزو ROC تابع تبدیل سیستم است و در نتیجه سیستم پایدار است.

c) برای این منظور ابتدا باید $h(n)$ را بیابیم و یا از خود $H(z)$ استفاده کنیم:

$$H(z)X(z)=Y(z)\rightarrow X(z)\left(4+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}\right)=Y(z)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}\right)$$

معادله دیفرانسیل سیستم:

$$\Rightarrow 4x(n)+\frac{1}{4}x(n-1)-\frac{1}{2}x(n-2)=y(n)+\frac{1}{4}y(n-1)-\frac{1}{8}y(n-2)$$

d) چون که ROC را می‌دانیم، این کار ممکن است.

$$H(z)=\frac{4+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{4+\frac{3}{4}z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{A}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{B}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+4$$

$$A=H(z)(1-\tfrac{1}{4}z^{-1})\big|_{z=\frac{1}{4}}=-1$$

$$B=H(z)(1+\tfrac{1}{2}z^{-1})\big|_{z=-\frac{1}{2}}=+1$$

$$H(z)=\frac{-1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+4$$

$$\Rightarrow \boxed{h(n)=4\delta(n)-\left(\tfrac{1}{4}\right)^n u(n)+\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n u(n)}$$

✓ اولین سوال 21+2 :

(e) $x(n) = u(-n-1) \rightarrow X(z) = \frac{-1}{1-z^{-1}}$ $(ROC_X: |z|<1)$

$\rightarrow H(z) = 4 - \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$ $(ROC_H: \frac{1}{2}<|z|)$

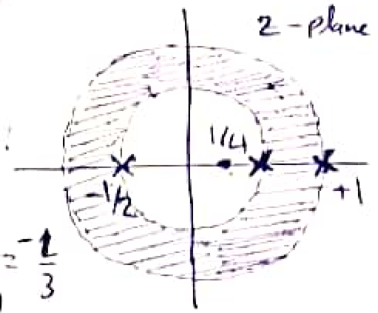
$D = ROC_X \cap ROC_H$

$(ROC_Y: \frac{1}{2}<|z|<1)$

$\rightarrow Y(z) = H(z)X(z) = \frac{-4}{1-z^{-1}} + \frac{1}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-z^{-1})} - \frac{1}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})}$

(f)

$$Y(z) = \frac{-4}{1-z^{-1}} + \frac{A}{1-z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{C}{1-z^{-1}} + \frac{D}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$



$A = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$; $B = \frac{1}{1-4} = \frac{-1}{3}$; $C = \frac{-1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{-2}{3}$; $D = \frac{1}{1-(\frac{-1}{2})} = \frac{-1}{3}$

$$Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}\left(-4+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right) + \frac{-1/3}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{-1/3}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

خروجی به ورودی $x(n) = u(-n-1)$

$y(n) = \frac{10}{3}u(-n-1) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) + \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n u(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$

سوال 3 : 35

(a) using the power series and differentiation

let $x = 2z$, $|z|<\frac{1}{2}$: $\log(1-2z) = -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2z)^m}{m}$

$|z|<1$: $\log(1-z) = -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^m}{m} \Rightarrow \hat{X}(z)$

$\frac{d}{dz}\hat{X}(z) = -\sum_{m=0}^{\infty} z^m = -\frac{1}{1-z}$

$\frac{dX(z)}{dz} \leftrightarrow n x(n)$

$X(az) \leftrightarrow a^{-n}x(n)$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{d\hat{X}(z)}{dz}\right\} = -\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1-z}\right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}\right\} = n\hat{x}(n)$$

$n\hat{x}(n) = u(n-1)$

$x(n) = 2^{-n}\hat{x}(n)$

$$\boxed{x(n) = \frac{2^{-n}}{n}u(n-1)}$$

ROC نتیجه می‌دهد که $\hat{x}(n)$ سیگنال سمت راست است.

(b) حل اگر $X(z)$ را به صورتی بنویسیم که $X(z) = \sum_k a_k z^{-k}$ در این صورت $\forall k: a_k = x(k)$. پس داریم:

$$X(z) = \log(1-2z) = -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2z)^m}{m} = -\sum_{m=-\infty}^{-1}\frac{(2z)^{-m}}{-m} = \sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{1}{k}2^{-k}z^{-k}$$

$\hookrightarrow \forall n: x(n) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$

سوال ۴: 39 : می دانیم که برای s(n) و h(n) داریم: $h(n) = s(n) - s(n-1)$ که نتیجه می دهد

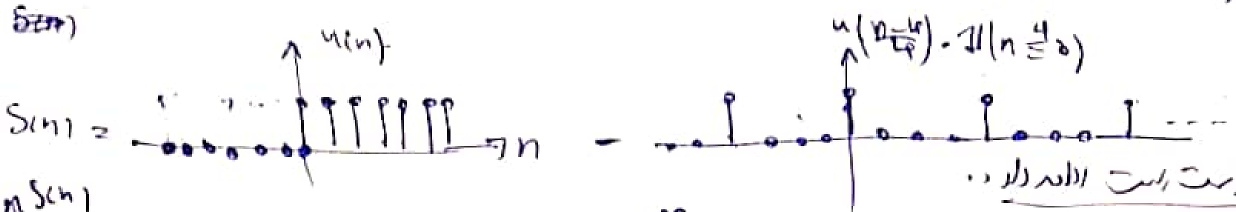
$$\frac{H(z)}{1-z^{-1}} = S(z)$$

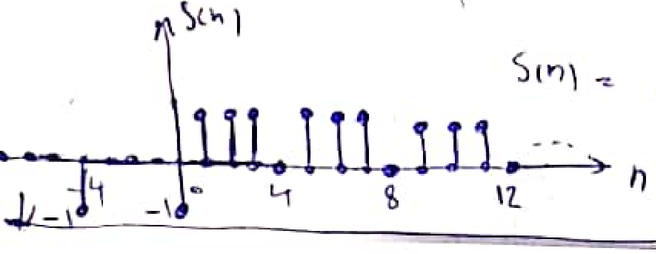
$$\hookrightarrow S(z) = \frac{1-z^{3}}{1-z^{4}} \times \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z^{-1}(1-z^{-3})}{1-z^{-4}} \times \frac{1}{-1+z^{-1}} = \frac{Az^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{Bz^{-4}}{1-z^{-4}}$$

$$= \frac{(A+B) + Az^{-1} + Bz^{-4} - (A+B)z^{-5}}{(1-z^{-1})(1-z^{-4})} \to \begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

ضرایب A و B این باشند.

$$S(z) = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{z^{-4}}{1-z^{-4}} \longleftrightarrow s(n) = u(n-1) - u\left(\frac{n-4}{4}\right) \cdot \mathbb{1}(n \overset{4}{\equiv} 0)$$

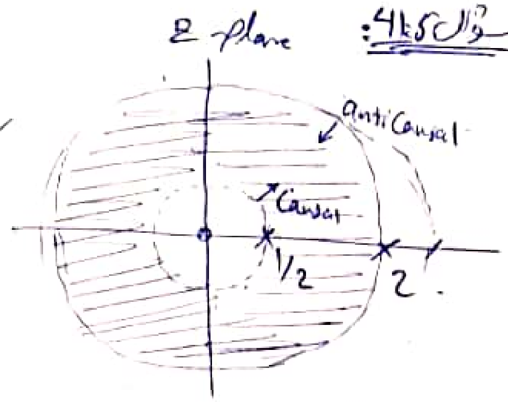




$$s(n) = u(n-1) - \sum_{k=-1}^{\infty} \delta(n-4k) = u(n-1)\left(1 - \mathbb{1}(n \overset{4}{\equiv} 0)\right) + \delta(n+4) - \delta(n)$$

سوال 5: 41

$$X(z) = \frac{1/3}{1-\frac12 z^{-1}} + \frac{1/4}{1-2z^{-1}} \quad \left(\frac12 < |z| < 2\right)$$



ROC: $\{z \mid \frac12 < |z| < 2\}$ در ROC ما شکل حلقه داریم که در این صورت

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty} \overbrace{\frac{1/3}{(1-\frac12 z^{-1})}}^{Causal} + \lim_{z\to 0} \overbrace{\frac{\frac14 z}{z-2}}^{anti-causal}$$

اگر دقت کنیم خواهیم دید که سیگنال X(z) حاصل جمع دو بخش می باشد $\frac13\left(\frac12\right)^n u(n) \longleftrightarrow \frac{1/3}{1-\frac12 z^{-1}}$ و یک بخش ضد علی است $\frac14(2)^n u(-n-1) \longleftrightarrow \frac{1/4}{1-2z^{-1}}$. پس x(n) حاصل جمع از قضیه مقدار اولیه برای دو حالت علی و ضد علی است.

$$x(0) = \frac13 + 0 = \boxed{1/3}$$

سوال 44:6

$$\left.\begin{array}{l}\text{Causal}\\ \text{Stable}\\ \text{LTI}\end{array}\right\} \quad y(n)+\sum_{k=1}^{10} a_k\, y(n-k) = x(n)+\beta x(n-1)$$

(a) از آنجا که سیستم علی و LTI است می‌توان به کمک قضیه مقدار اولیه مقدار $h(0)$ را یافت:

راه اول:

$$Y(z)\left(1+\sum_{k=1}^{10} a_k z^{-k}\right) = X(z)\left(1+\beta z^{-1}\right) \rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+\beta z^{-1}}{1+\sum_{k=1}^{10} a_k z^{-k}}$$

$$h(0)=\lim_{z\to\infty}\frac{1+\beta z^{-1}}{1+\sum_{k=1}^{10} a_k z^{-k}} = 1 \neq 0$$

راه دوم: معادله $h(n)$ پاسخ ضربه است، از طرف دیگر $h(n)$ علی است و $\forall n<0:\ h(n)=0$

let $x(n)=\delta(n) \rightarrow$ then $y(n)=h(n)$

$$h(n)+\sum_{k=1}^{10} a_k h(n-k) \xrightarrow{\text{Causality: } h(-k)=0} h(n)\Big|_{n=0} = \delta(n)+\beta\delta(n-1) \rightarrow h(0)=1$$

(b)

$$\Rightarrow \left[h(n)+\sum_{k=1}^{10} a_k h(n-k)\right]\Bigg|_{n=1} = h(1)+a_1 h(0)+0 = \delta(1)+\beta\delta(0)=\beta$$

$$\Rightarrow h(1)+a_1 h(0)=\beta \Rightarrow a_1=\frac{\beta-h(1)}{h(0)}=\beta-h(1)$$

با داشتن $\beta, h(0), h(1)$ ، a_1 را می‌توانیم محاسبه کنیم

(c)

ادامه در صفحه بعدی

Scanned by CamScanner

ادامه سوال 6

c) برای $n=0$ تا $n=10$ می‌توان با داشتن $h(n)$ از $n=0$ تا $n=10$ مقادیر a_i و β را مشخص نمود. چرا که با 10 معادله و 10 مجهول داریم:

$$h(0)+0=\delta(0)+\beta\delta(-1)=1 \longrightarrow \text{جواب بدیهی}$$

$$\left.\begin{aligned}
&h(1)+a_1h(0)=\delta(1)+\beta\delta(0)=\beta\\
a_2h(0)+\ &h(2)+a_1h(1)=\delta(2)+\beta\delta(1)=0\\
&h(3)+a_1h(2)+a_2h(1)+a_3h(0)=0\\
&\vdots\\
&h(10)+\sum_{k=1}^{10}a_k h(10-k)=0
\end{aligned}\right\}
\quad
\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\ a_1&1&0&\cdots&0\\ a_2&a_1&1&\cdots&0\\ \vdots&&&\ddots&\vdots\\ a_9&a_8&\cdots&&1\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}h(0)\\ h(1)\\ h(2)\\ \vdots\\ h(10)\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}1\\ \beta\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

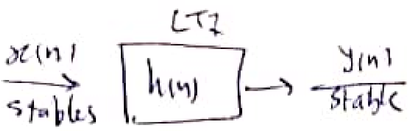
پس معادلات فوق یک جواب یکتا دارند. در نتیجه از معادله $y(n)+\sum_{k=1}^{10}a_k y(n-k)=x(n)+\beta x(n-1)$ نتیجه می‌دهد که جواب معادله یکتاست. پس اگر $H(z)$ ای بیابیم که شرایط مسأله (معادله فوق دیفرانسیلی؟ و نوع صفر و قطب‌های $H(z)$) را ارضا کند، جواب مسأله است. نشان می‌دهیم که $h'(n)=0.9^n\cos(\frac{\pi n}{4})u(n)$ می‌تواند جواب مسأله باشد و در نتیجه جواب یکتا است.

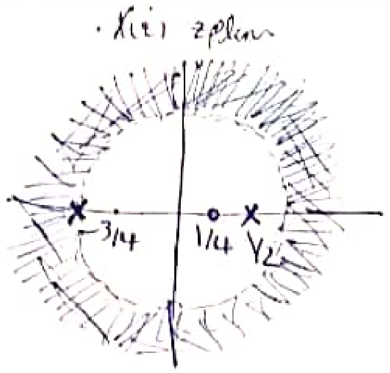
$$\left\{\begin{aligned}
&h'(n)=\alpha^n\cos(\Omega n)u(n)\\
&H'(z)=\frac{1-\alpha z^{-1}\cos(\Omega)}{1-2\alpha z^{-1}\cos(\Omega)+\alpha^2 z^{-2}}=\frac{1+\beta z^{-1}}{1+\sum_{k=1}^{10}a_k z^{-k}}
\end{aligned}\right.$$

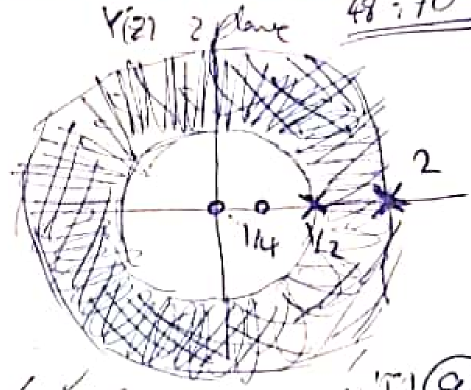
حال می‌بینیم که $H'(z)$ شبیه فرم $H(n)$ است در نتیجه معادلات را ارضا می‌کند. پس $H'(z)=H(z)$

$$\hookrightarrow \beta=-\alpha\cos(\Omega)=-0.9\cos(\tfrac{\pi}{4})=\frac{-9\sqrt{2}}{20}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&a_0=1\\
&a_1=-2\alpha\cos(\Omega)=-2(\tfrac{9}{10})\cos(\tfrac{\pi}{4})=\frac{-18\sqrt{2}}{20}\\
&a_2=\alpha^2=0.81\\
&a_3=a_4=a_5=a_6=a_7=a_8=a_9=a_{10}=0
\end{aligned}\right.$$







a) از آنجایی که y(n) پایدار است نتیجه می‌گیریم که دایره واحد درون ROC آن است. در نتیجه داریم:

$$ROC_Y = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 > |z| > \tfrac{1}{2}\}$$

b) از آنجا که ROC سیگنال y(n) اشتراک دو ROC علی و ضدعلی است (یک حلقه است محدود به دو قطب است) در نتیجه y(n) یک سیگنال two sided

c) از آنجا که x(n) سیگنال پایدار است، ROC آن باید شامل دایره واحد باشد. پس داریم:

$$ROC_X = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 3/4\}$$

d) از آنجا که ROC_X به صورت فوق است نتیجه می‌گیریم که سیگنال x(n) سیگنال سمت راستی است و چون در $z=0$ قطبی ندارد، نتیجه می‌گیریم که نمی‌تواند در مقدارهای منفی مقدار داشته باشد چرا که عامل z^{-k} ندارد که سیگنال علی را شیفت بدهد. در نتیجه x(n) علی خواهد بود.

e) طبق نمودار صفر و قطب X(z) به صورت

$$X(z) = \frac{A\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}{\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

است و چون x(n) علی است طبق قضیه مقدار اولیه داریم:

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z) = \cdot$$

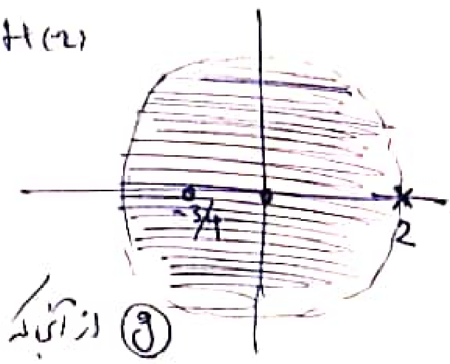
f) طبق نمودار صفر و قطب‌های X(z) و Y(z) در می‌یابیم که

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\dfrac{B\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)(z)}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}}{\dfrac{A\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}{\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}} = K\,\frac{z\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)}{1-2z^{-1}}$$

یک صفر در $z=0$
یک صفر در $z=-\frac{3}{4}$
یک قطب در $z=2$

g) اگر ROC_H خارج از دایره $2<|z|$ باشد، در این صورت هیچ اشتراکی با ROC_Y نخواهد داشت. پس باید داشته باشیم:

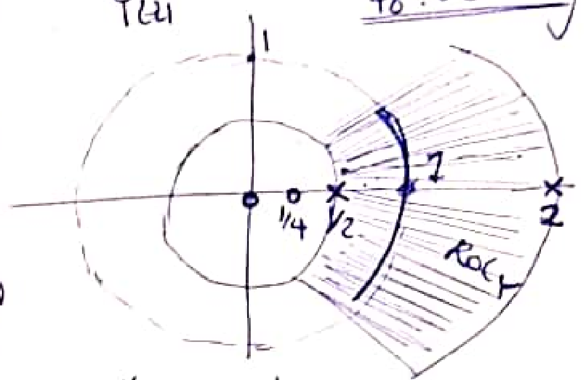
H(z)



$$ROC_H = \{z \in \mathbb{C} : 2 > |z|\}$$

g) از آنجایی که در فرمول فوق توان‌های منفی نداریم از z^k و ROC آن نیز به صورت فوق است پس سیگنال ضدعلی است (anti causal) x(n), y(n) are stable

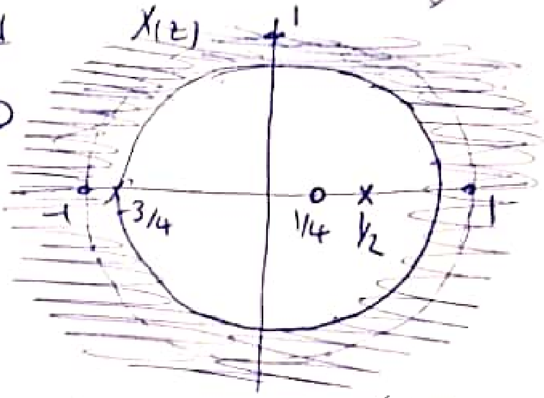
سوال 8 : 48



(a) از آنجا که y(n) پایدار است نتیجه می‌گیریم که دایره واحد درون ROC آن است.
درنتیجه

$$ROC_Y=\{z\in\mathbb{C} : \tfrac{1}{2}<|z|<2\}$$

(b) از آنجا که ROC بصورت یک ring است و به عبارت دیگر حاصل جمع یک سیگنال سمت راستی و یک سیگنال سمت چپی است، نتیجه می‌گیریم که دوطرفه یا two-sided است.



(c) از آنجا که x(n) پایدار است، نتیجه می‌گیریم که دایره واحد درون ROC آن می‌بایست باشد.
درنتیجه

$$ROC_X=\{z\in\mathbb{C} : \tfrac{3}{4}<|z|\}$$

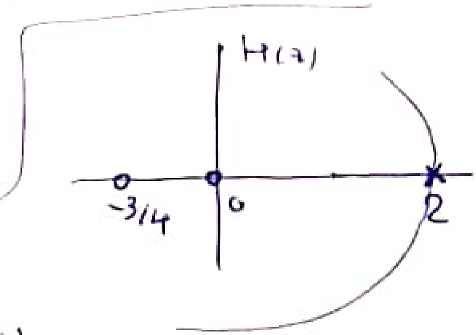
(d) با توجه به موقعیت صفر و قطب‌ها داریم:

$$X(z)=\frac{A\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)z^{-1}}{\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}=\frac{A\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}{\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

از طرف دیگر X(z) چون دو صفر هم ندارد باید در $z=\infty$ یک قطب داشته باشد.

و نیز برای این می‌تواند توان منفی از z^k عامل آن باشد. پس نتیجه می‌گیریم که چون سیگنال X(z) سمت راستی است و در حقیقت عامل z^{-k} ای $(k>0)$ دارد که سیگنال $z^{-1}\left\{\frac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{(1+\frac{3}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}\right\}$ را به سمت n های مثبت شیفت دهد که سیگنال x(n) علی است.

$$\forall n<0 \Rightarrow x(n)=0$$



(e)
$$x(0)=\lim_{\substack{z\to\infty\\ z^{-1}\to 0}} X(z)\big|_{z=\infty}=\lim_{z\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}{\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}=0$$

(f)
$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=A\,\frac{\dfrac{z\cancel{(z-1/4)}}{\cancel{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}(1-2z^{-1})}}{\dfrac{\cancel{(z-1/4)}}{\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)\cancel{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}}}=\frac{\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)z}{\left(1-2z^{-1}\right)}$$

X(z) و Y(z) هر دو در $z=1/4$ صفر و در $z=\frac{1}{2}$ قطب دارند که یکدیگر را کنسل می‌کنند. درنهایت H(z) یک قطب در $(z=2 ,\ z=+\infty)$ و یک صفر در $(z=0 \text{ و } z=\frac{-3}{4})$ دارد.

از آنجا که ROC_H باید با ROC_X ، ROC_Y اشتراک داشته باشد و باید داشته باشیم:
درغیر این صورت $ROC_Y \cap ROC_H=\phi$.

$$ROC_H=\{z\in\mathbb{C} : |z|<2\}$$

(g) چون که ROC_H بصورت فوق است یک سیگنال سمت چپی است که نمی‌تواند علی باشد. از طرف دیگر z^k با توان‌های مثبت عاملی از H(z) است که نشان می‌دهد h(n) یک سیگنال علی شیفت یافته به سمت n های منفی است که درنهایت نتیجه می‌گیریم که h(n) ضد علی است.

$$\forall n>0 \rightarrow h(n)=0$$