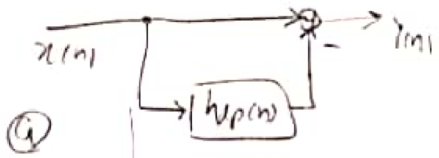
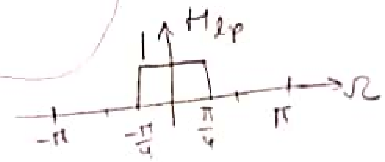
تمرین سری 5 DSP — محمد[illegible] ۴۰۰۱۰۱۲۰۴ — سوالات ۱-۲:

(a)

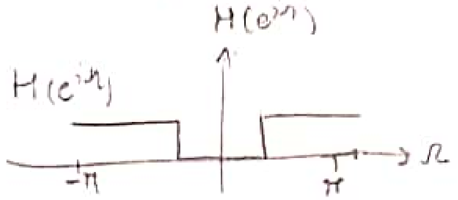


$$Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega})\left(1 - H_{lp}(e^{j\Omega})\right)$$

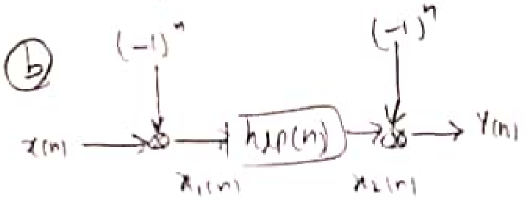
a) رفتار highpass دارد.



$\Rightarrow$



(b)

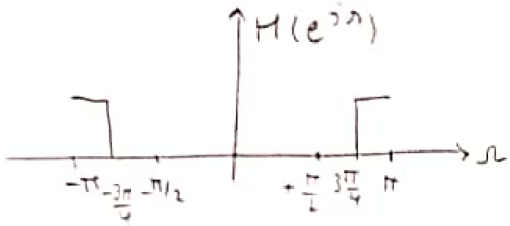


$$x_1(n) = x(n)(e^{j\pi n}) \to X_1(e^{j\Omega}) = X(e^{j(\Omega-\pi)})$$

$$X_2(e^{j\Omega}) = X_1(e^{j\Omega})\,\Pi\left(\frac{\Omega}{\pi/2}\right) = X(e^{j(\Omega-\pi)})\,\Pi\left(\frac{\Omega}{\pi/2}\right)$$

$$Y(e^{j\Omega}) = X_2(e^{j(\Omega-\pi)}) = X(e^{j\Omega})\,\underbrace{\Pi\left(\frac{\Omega-\pi}{\pi/2}\right)}_{H(e^{j\Omega})}$$

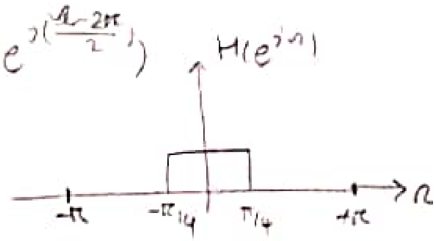
b) فیلتر رفتار high pass دارد.



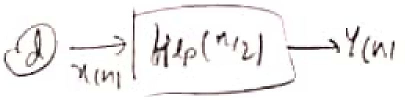
(c)

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2}H(e^{j(\frac{\Omega}{2})}) + \frac{1}{2}H(e^{j(\frac{\Omega-2\pi}{2})})$$

c) فیلتر پایین‌گذر است

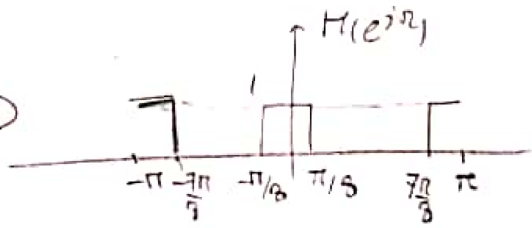


(d)

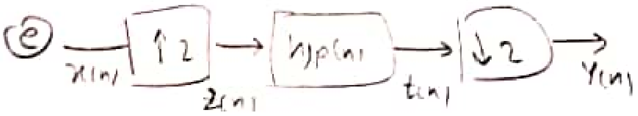


$$H(e^{j\Omega}) = H_{lp}(e^{j2\Omega})$$

d) فیلتر میان‌گذر است



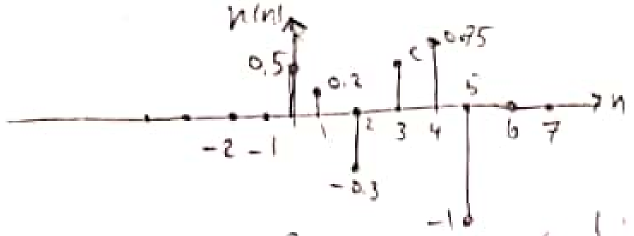
(e)



$$Z(e^{j\Omega}) = X(e^{j2\Omega}) \to T(e^{j\Omega}) = \Pi\left(\frac{\Omega}{\pi/2}\right)X(e^{j2\Omega})$$

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{\Omega}{\pi/4}\right)X(e^{j2\frac{\Omega}{2}}) + \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{\Omega-2\pi}{\pi/4}\right)X(e^{j(2\frac{\Omega-2\pi}{2})})$$

سوال 2: 32



$$H(z) = 0.5 + 0.2z^{-1} + 0.3z^{-2} + cz^{-3} + \frac{3}{4}z^{-4} - z^{-5}$$

در حالی شرط $h(n)=0$ است که شرط لازم است و همچنین باید صفرها/قطب ها داخل دایره واحد باشند.

سوال 3: 37

$$H(z) = a + bz^{-1} + cz^{-2} \rightarrow h(n) = a\delta(n) + b\delta(n-1) + c\delta(n-2)$$

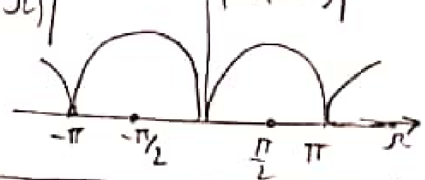
$$E(h^2(n)) = a^2 + b^2 + c^2 = 1 \xrightarrow{(1)} a = -c = 1/\sqrt{2}$$

$$H(e^{j\Omega}) = H(1) = a+b+c = 0$$
$$H(e^{+j\pi}) = H(-1) = a-b+c = 0$$
$$b = 0,\quad a = -c$$

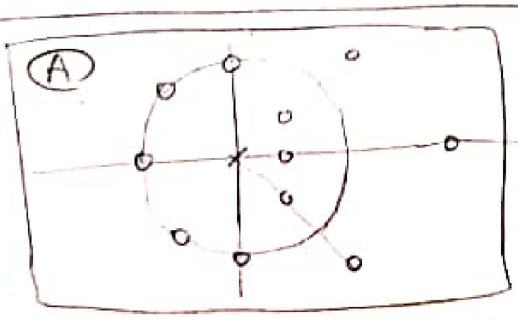
$$\Rightarrow \boxed{h(n) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\delta(n) - \delta(n-2)\right)}$$

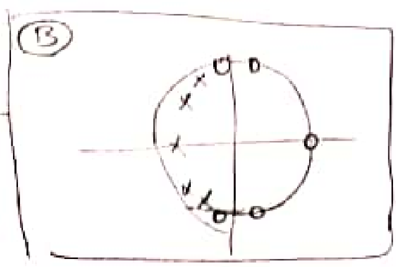
$$\Rightarrow |H(e^{j\Omega})|^2 = H \times H^* = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2j\Omega}\right)\left(1 - e^{2j\Omega}\right) = \frac{1}{2}\left(2 - e^{-2j\Omega} - e^{2j\Omega}\right)$$

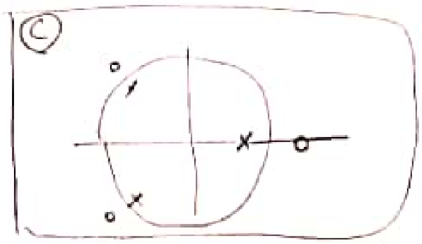
$$= 1 - \cos(2\Omega) = \sin^2(\Omega) \longrightarrow |H(e^{j\Omega})| = |\sin(\Omega)|$$

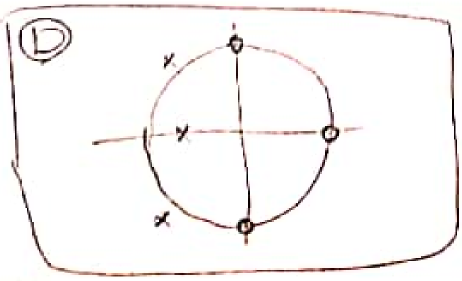


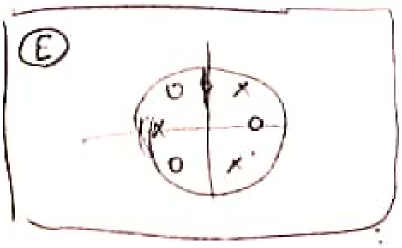
سوال 4: 45

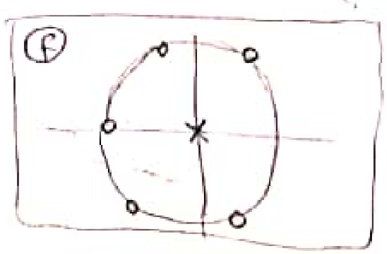












(I) سیستم‌های IIR هستند که در نقاطی غیر از صفر و بی‌نهایت صفر و قطب داشته باشند مثل ← B, C, D, E

(II) سیستم‌های FIR هستند که به جز صفر و بی‌نهایت قطب نداشته باشند مثل ← A, F

(III) سیستم‌های Stable هستند که همه قطب‌های آنها داخل دایره واحد قرار داشته باشند مثل ← A, C, E, B, F

(IV) سیستم‌های minimum phase هستند که همه قطب و صفرهای آنها داخل دایره واحد باشند ← مثل E

(V) سیستم‌های generalized linear phase هستند که FIR باشند و صفرهای آنها به صورت $\{re^{j\theta}, \frac{1}{r}e^{-j\theta}, \frac{1}{r}e^{j\theta}, re^{-j\theta}\}$ باشند یا یک صفر در ۱ یا ۱- داشته باشند یا به صورت $\{e^{j\theta}, e^{-j\theta}\}$ باشند.
پس مثل A, F

(VI) برای اینکه اندازه $|H(e^{j\omega})|$ ثابت باشد باید سیستم all pass باشد که معمولاً باید به ازای هر صفر، یک قطب آن هم وجود داشته باشد، که فقط C چنین ویژگی را دارد

(VII) سیستم‌هایی که همه قطب و صفرهایشان (به جز صفر و بی‌نهایت) داخل دایره واحد باشند، سیستم وارون آنها Stable و Causal است مثل ← E

(VIII) اگر بخواهیم سیستم معکوس FIR داشته باشیم باید سیستم FIR باشد و از میان آنها که کمترین صفر را دارند انتخاب کنیم
FIR باشد ← مثل F.

(IX) سیستم‌های low pass هستند که صفرهای غالب آنها در فرکانس $\pm\pi$ باشند
پاسخ ← مثل A, F

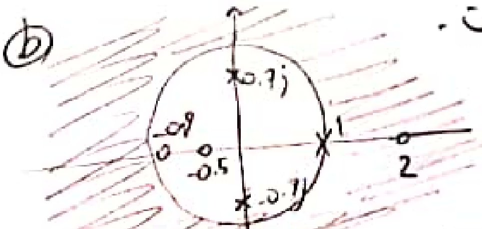
(X) از میان سیستم‌ها، سیستمی کمترین group delay را دارد که minimum phase باشد مثل ← E

سؤال 5 :(5)

$$H(z) = \frac{(1-\frac{3}{2}z^{-1}-z^{-2})(1+0.9z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+\frac{7}{10}jz^{-1})(1-\frac{7}{10}jz^{-1})} = \frac{1-0.6z^{-1}-2.35z^{-2}-0.9z^{-3}}{-0.49z^{-3}+0.49z^{-2}-z^{-1}+1}$$

(a) dif. eq $\Rightarrow y(n)-y(n-1)+0.49y(n-2)-0.49y(n-3) = x(n)-0.6x(n-1)-2.35x(n-2)-0.9x(n-3)$

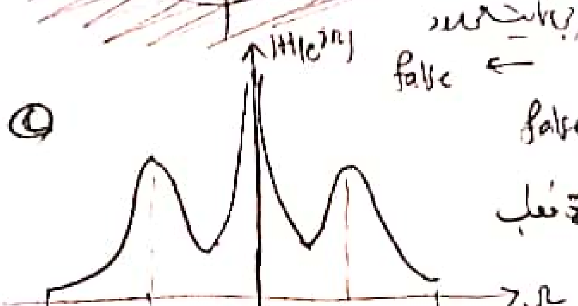
(b) با توجه به اینکه ROC برای H(z) ناحیه‌ای با شعاع بزرگتر از واحد است.
و اینکه سیستم‌ها راست‌رو است ...



(i) در $z=1$ یک قطب داریم ← پایدار نیست ← false

(ii) چون پایدار نیست ... با $\frac{1}{1-z^{-1}}$ به عنوان ... ← false

(c)



(iii) در اطراف $|\Omega| = \frac{\pi}{4}$ هیچ فیلتری غالب نیست ← false

(iv) اگر جای صفر و قطب‌ها عوض شوند باز این درست، چون $z=2$ قطب است سیستم پایدار نخواهد بود. ← false

Scanned by CamScanner

سؤال 52:

$$H(z) = \underbrace{(1-0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})}_{X(z)}\underbrace{(1-0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1})}_{X(-z)}\underbrace{(1-1.25e^{j0.8\pi}z^{-1})}_{Y(z)}\underbrace{(1-1.25e^{-j0.8\pi}z^{-1})}_{Y(-z)}$$

let $W(z) = X(z)Y(z)$

W(z)W(-z) ترکیب،

ⓐ

$$H_1(z) = (0.9 - e^{j0.6\pi}z^{-1})(0.9 - e^{-j0.6\pi}z^{-1})(0.8 - e^{j0.8\pi}z^{-1})(0.8 - e^{-j0.8\pi}z^{-1})$$

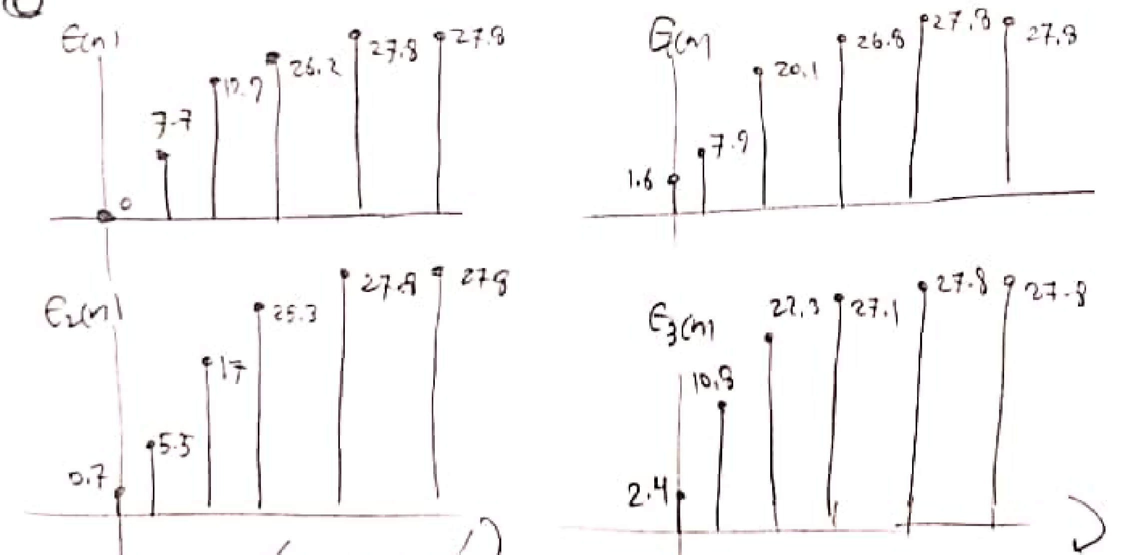
$$H_2(z) = (0.9 - e^{j0.6\pi}z^{-1})(0.9 - e^{-j0.6\pi}z^{-1})(1-1.25e^{j0.8\pi}z^{-1})(1-1.25e^{-j0.8\pi}z^{-1})$$

$$H_3(z) = (1-0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1-0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1})(0.8 - e^{j0.8\pi}z^{-1})(0.8 - e^{-j0.8\pi}z^{-1})$$

ⓑ

$$\begin{cases} h(n) = \delta(n) + 2.58\,\delta(n-1) + 3.50\,\delta(n-2) + 2.51\,\delta(n-3) + 1.27\,\delta(n-4) \\ h_1(n) = 1.27\,\delta(n) + 2.51\,\delta(n-1) + 3.50\,\delta(n-2) + 2.58\,\delta(n-3) + \delta(n-4) \\ h_2(n) = 0.81\,\delta(n) + 2.20\,\delta(n-1) + 3.40\,\delta(n-2) + 2.90\,\delta(n-3) + 1.56\,\delta(n-4) \\ h_3(n) = 1.57\,\delta(n) + 2.89\,\delta(n-3) + 3.4\,\delta(n-2) + 2.20\,\delta(n-1) + 0.81\,\delta(n-4) \end{cases}$$

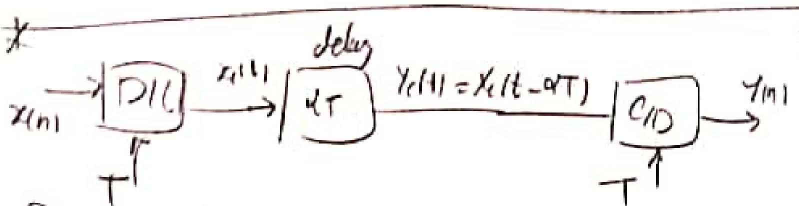
ⓒ



max phase ← کمترین تاخیر در h(n) ها کل ... صفره

min phase ← h₃(n) بیشترین تاخیر در h(n) ها مال

سؤال 7.56



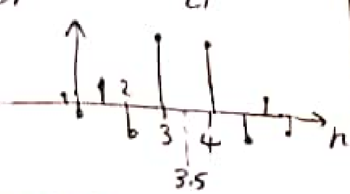
$$\frac{\Omega}{T} = \omega$$

$$\begin{cases} H(j\omega) = e^{-j\omega\alpha T} \\ H_{eff}(e^{j\Omega}) = e^{-j\frac{\Omega\alpha T}{T}} = e^{-j\alpha\Omega} \quad \forall |\Omega| < \pi \end{cases}$$

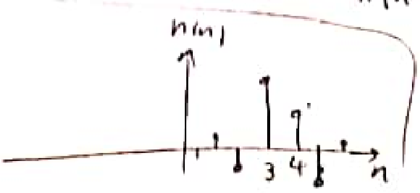
ⓐ $\longrightarrow A(e^{j\Omega}) = 1 \quad , \ \measuredangle H(e^{j\Omega}) = \Phi(\Omega) = -j\alpha\Omega \quad \forall |\Omega| < \pi$

ⓑ (i) $\alpha = 3 \longrightarrow h(n) = \delta(n-3)$

(ii) $\alpha = 3.5 \longrightarrow h(n) = \dfrac{\sin(\pi(n - \frac{7}{2}))}{\pi(n - \frac{7}{2})} = \dfrac{\cos(n\pi)}{\pi(n - \frac{7}{2})}$



(iii) $\alpha = 3.25 \longrightarrow h(n) = \dfrac{\sin(\pi(n - 3.25))}{\pi(n - 3.25)}$



ادامه سوال ۷:

$\alpha \in \mathbb{Z}$

$H(e^{j\Omega}) = A(e^{j\Omega})\, e^{j\alpha\Omega} \quad \forall |\Omega| < \pi$ $\Big\} \rightarrow$ $h[n]$ is symmetric around $n=\alpha$

$\alpha = \frac{M}{2} \in \mathbb{Z} \rightarrow h[n]$ is symmetric about $M/2$.

$\alpha \in \mathbb{R} \rightarrow$ we can't specify anything

---

سوال 8: 62

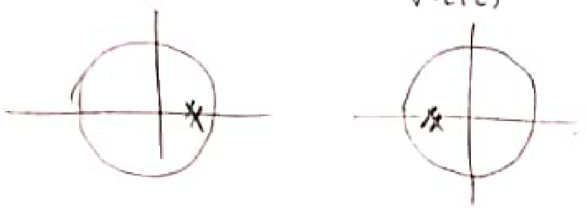
$S_1: \; y[n] - y[n-1] + \frac{1}{4} y[n-2] = x[n] \rightarrow H_1(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2}} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2} z^{-1})^2}$

$S_2: \; H_2(e^{j\Omega}) = H_1(-e^{-j\Omega}) \Rightarrow H_1(-z) = H_2(z)$

let $z = e^{j\Omega}$

$\rightarrow H_2(z) = \frac{1}{1 + z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2}}$

$H_1(z)$ $\quad\quad$ $H_2(z)$



a) برای H_1 چون قطب‌های مناسب را در فرکانس صفر دارد پس lowpass است و برای H_2 چون قطب‌های مناسب را در فرکانس $\Omega = \pi$ دارد highpass است.

b) $H_3(z) = (1 - \frac{1}{2} z^{-1})^2 \rightarrow$ min فاز است ← در H_3 دو صفر در $z = \frac{1}{2}$ داریم که چون در داخل دایره واحد است

اما H_3 قطب ندارد و نمی‌توان یک زوج $\{re^{\pm j\theta}, \frac{1}{r} e^{\pm j\theta}\}$ ایجاد کرد. بنابراین فیلتر min فاز تعمیم‌یافته نمی‌توان ساخت.

c) $y[n] + \alpha_1 y[n-1] + \alpha_2 y[n-2] = \beta_0 x[n] \rightarrow H_4(z) = \frac{\beta_0}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2}}$,

$|H_4| = |H_1| \rightarrow |H_1(e^{j\Omega})|^2 = H_1(e^{j\Omega})\, H_1^*(e^{j\Omega}) = \frac{1}{(1 - e^{-j\Omega} + \frac{e^{-2j\Omega}}{4})(1 - e^{j\Omega} + \frac{e^{2j\Omega}}{4})}$

$|H_1(e^{j\Omega})|^2 = \frac{1}{(\frac{5}{4} - \cos\Omega)^2} = |H_4|^2 \leftarrow \frac{\beta_0^2}{(1 + \alpha_1 e^{-j\Omega} + \alpha_2 e^{-2j\Omega})(1 + \alpha_1 e^{j\Omega} + \alpha_2 e^{2j\Omega})}$

$= \frac{\beta_0^2}{(1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2) + 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1)\left(\frac{e^{j\Omega} + e^{-j\Omega}}{2}\right) + 2\alpha_2 \left(\frac{e^{2j\Omega} + e^{-2j\Omega}}{2}\right)}$

$= \frac{\beta_0^2}{(1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2) + 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1)\cos(\Omega) + 2\alpha_2 \cos(2\Omega)}$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 1 &= \tfrac{25}{16} + \tfrac{1}{2} \\ 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1) &= 1 \\ 2\alpha_2 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \beta_0 = 2 \\ \alpha_1 = -5/2 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner