تمرین سری اول DSP — محمدپارسا دینی 400101204

سوال 1.13-1: همه‌ی توابع ویژه در سیستم‌های LTI به صورت α^n است (با ضریب بسیار ثابت تا یک ثابت مختلط)

(a) $\alpha^n = e^{j\frac{2\pi n}{3}} \longrightarrow \alpha = e^{j\frac{2\pi}{3}} \longrightarrow \boxed{\checkmark}$ تابع ویژه است.

(b) $\alpha^n = 3^n \longrightarrow \alpha = 3 \longrightarrow \boxed{\checkmark}$ تابع ویژه است.

(c) از آنجا که تابع $2^n u(-n-1)$ را نمی‌توان به صورت یک تابع مختلط α^n نوشت ← تابع ویژه نیست $\boxed{\times}$

(d) $\cos(\omega_0 n) = \frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2} = \frac{\alpha^n + \alpha^{-n}}{2}, \alpha = e^{j\omega_0} \longrightarrow \boxed{\checkmark}$ تابع ویژه است.

(e) $4^{-n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n = \alpha^n \longrightarrow \alpha = \frac{1}{4} \longrightarrow \boxed{\checkmark}$ تابع ویژه است.

(f) $\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) + 4^n u(-n-1) = 4^n - \delta(n) \longrightarrow \boxed{\times}$ نمی‌توان آن را به صورت جمع تعدادی α^n نوشت، تابع ویژه نیست

سوال 2-23:

(a) $T(x(n)) = (\cos \pi n)(x(n)) = (-1)^n x(n) = y(n)$

① سیستم stable است چرا که با ورودی‌های محدود $x(n)$ قطعاً $y(n)$ کراندار خواهد بود

$|y(n)| = |x(n)| < M$

② سیستم Causal است چرا که صرفاً به ورودی‌های حال بستگی دارد ③ سیستم خطی هم هست، چرا که اگر ورودی ما ترکیب خطی از x_1 و x_2 باشد، که y_1 و y_2 خروجی‌های متناظر آن است را به این صورت داریم.

$$\begin{cases} \text{let } \hat{x}(n) = ax_1 + bx_2 \\ \hat{y}(n) = \underbrace{(ax_1 + bx_2)}_{\hat{x}(n)} (-1)^n = ax_1 \cdot (-1)^n + bx_2 \cdot (-1)^n = ay_1 + by_2 \end{cases}$$

④ سیستم shift invariant نیست

چرا که توانستیم در مثال زیر نشان نقضی بیابیم.

$$\begin{cases} \text{let } \hat{x}(n) = x(n-\alpha),\ x(n) \leftrightarrow y(n) \\ \hat{y}(n) = \underbrace{x(n-\alpha)}_{\hat{x}(n)} \cdot (-1)^n \neq y(n-\alpha) = x(n-\alpha) \cdot (-1)^{n-\alpha} \end{cases}$$

← صرفاً برای αهای زوج درست است

(b) $T(x(n)) = x(n^2)$

① سیستم stable است، چرا که در $\forall n: |x(n)| < M$ در نتیجه $|y(n)| = |x(n^2)| < M$

② سیستم Causal نیست چرا که برای $n=-k$ داریم: مقدار $y(n)$ در نقطه $n=-k$ به مقدار $x(n)$ در $n=k^2$ وابسته است که نشان می‌دهد سیستم به آینده وابستگی دارد.

③ فرضاً $x_1 \to y_1$ و $x_2 \to y_2$، فرض کنید $\hat{x}(n) = ax_1 + bx_2$ و $\hat{x}(n) \leftrightarrow \hat{y}(n)$ داریم:

$\hat{y}(n) = \hat{x}(n^2) = ax_1(n^2) + bx_2(n^2) = ay_1(n) + by_2(n) \rightarrow$ سیستم linear هم هست.

④ سیستم shift invariant است و فرضاً که $x(n) \to y(n)$ داریم $\hat{x}(n) = x(n-k)$ و $\hat{x}(n) \to \hat{y}(n)$

$\hat{y}(n) = \hat{x}(n^2) = x((n-k)^2) \; \cancel{=} \; y((n-k)^2)$

ⓒ $T(x(n)) = x(n)\left(\sum_{k=0}^{n} \delta(n-k)\right)$

① سیستم Stable است. زیرا که $|x(n)|<M$ خواهیم داشت:

$$y(n) = x(n)\left(\sum_{k=0}^{n} \delta(n-k)\right) < M\left(\sum_{k=0}^{n} \delta(n-k)\right) \le Mn \rightarrow |y(n)| < Mn$$

② سیستم Causal است چراکه $y(n)$ فقط به مقادیر $n' \le n$ (گذشته و حال) بستگی دارد

③ سیستم Shift invariant نیست. زیرا $\hat{x}(n) \rightarrow \hat{y}(n)$ ، $\hat{x}(n) = x(n-m)$ داریم:

$$\hat{y}(n) = \hat{x}(n)\left(\sum_{k=0}^{n} \delta(n-k)\right) = \sum_{k=0}^{n} x(n-m)\,\delta(n-k) \neq y(n-m) = \sum_{k=0}^{n-m} x(n-m)\,\delta(n-m-k)$$

④ سیستم linear است. زیرا $x_1 \rightarrow y_1$ ، $x_2 \rightarrow y_2$ و $\hat{x}(n) = ax_1 + bx_2$ ، $\hat{y}(n) \leftrightarrow \hat{x}(n)$

$$\hat{y}(n) = \hat{x}(n)\sum_{k=0}^{n} \delta(n-k) = \sum_{k=0}^{n} (ax_1(n) + bx_2(n))\,\delta(n-k) = \left(a\sum_{k=0}^{n} x_1(n)\,\delta(n-k)\right) + \left(b\sum_{k=0}^{n} x_2(n)\,\delta(n-k)\right)$$

$$= ay_1 + by_2$$

*** *** *** ***

ⓓ $T(x(n)) = \sum_{k=n-1}^{\infty} x(k)$

① سیستم stable نیست چراکه از $|x(n)|<M$ نتیجه نمی‌گیریم (∀n $0 \neq x(n)$) داریم

$$|y(n)| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} x(k)\right| \le \sum_{k=0}^{\infty} |x(k)| \rightarrow \text{diverges} \leftarrow N\infty < |y(n)| < M\infty$$

② سیستم Causal نیست چراکه برای یافتن مقدار $y(n)$ در لحظه n ، به مقادیر ورودی $x(n)$ در لحظات $n' \ge n$ نیاز داریم و به آینده وابسته است.

③ سیستم Shift invariant است. زیرا $x(n) \rightarrow y(n)$ ، همچنین $\hat{x}(n) = x(n-m)$ ، $\hat{x}(n) \leftrightarrow \hat{y}(n)$ داریم:

$$\hat{y}(n) = \sum_{k=n-1}^{\infty} \hat{x}(k) = \sum_{k=n-m-1}^{\infty} x(k-m) = y(n-m) = \sum_{k=n-m-1}^{\infty} x(k)$$

④ سیستم linear است. زیرا $x_1 \rightarrow y_1$ ، $x_2 \rightarrow y_2$ ، $\hat{x}(n) = ax_1 + bx_2$ ، $\hat{x}(n) \rightarrow \hat{y}(n)$

$$\hat{y}(n) = \sum_{k=n-1}^{\infty} \hat{x}(k) = \sum_{k=n-1}^{\infty} (ax_1(n) + bx_2(n)) = a\sum_{k=n-1}^{\infty} x_1(n) + b\sum_{k=n-1}^{\infty} x_2(n) = ay_1(n) + by_2(n)$$

I $\delta(n) \rightarrow \boxed{T_1} \rightarrow 2e^{\frac{jn}{4}} u(n)$

برای آنکه بگوییم یک سیستم LTI است ما باید بتوانیم برای همه‌ی ورودی $x(n)$ و خروجی $y(n)$ خاصیت linearity و shift invariant بودن ثابت کنیم ولی از طرف دیگر ~~~~ ما فقط یک ورودی و خروجی متناظر آن به سیستم را می‌دانیم که برای اثبات LTI بودن آن کافی نیست و از طرف دیگر نمی‌توان گفت که T_1، LTI نیست ولی اگر LTI باشد از آنجا که پاسخ ضربه را داریم، می‌توانیم آن را به صورت یکتا مشخص کنیم چرا که

$$\begin{cases} y(n) = x(n) * h(n) \\ h(n) = 2e^{\frac{jn}{4}} u(n) \end{cases} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot 2e^{j\frac{(n-k)}{4}} u(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{n} 2x(k)\, e^{\frac{j(n-k)}{4}}$$

(iii) $\Rightarrow$ the system could be LTI, and if it is, the inf. given uniquely specifies the system.

***

II $\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) \rightarrow \boxed{T_2} \rightarrow \delta(n)$

$= x(n)$

همچنان نمی‌توان اثبات یا رد کرد که T_2 LTI است اما اگر فرض کنیم که LTI است، در این صورت پاسخ ضربه سیستم $h(n)$، ورودی سیستم با تابع ضربه $x(n)$ است چرا که $x(n) * h(n) = \delta(n)$، ما می‌توانیم از روابط تبدیل Z، تبدیل $H(z)$ را بیابیم:

$$X(z)H(z) = Z\{x(n) * h(n) = \delta(n)\} = 1 \quad , \quad \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{z}{z-1/3}$$

$$\hookrightarrow H(z) = \frac{1}{X(z)} = \frac{z-1/3}{z} = 1 - \frac{1}{3}z^{-1} \longrightarrow h(n) = Z^{-1}\left\{1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right\} = \delta(n) - \frac{1}{3}\delta(n-1)$$

از آنجا که پاسخ ضربه سیستم را می‌یابیم، می‌توانیم بگوییم اگر سیستم LTI باشد، در این صورت با داشتن ورودی به سیستم می‌توان آن را به صورت یکتا تعیین کرد:

$$y(n) = x(n) * h(n) = x(n) * \left(\delta(n) - \frac{1}{3}\delta(n-1)\right) = x(n) - \frac{1}{3}x(n-1)$$

(iii) $\Rightarrow$ the system could be LTI, and if it is, the information given uniquely specifies the system

***

III $x(n) + \alpha y(n) \longrightarrow \boxed{T_3} \rightarrow T\{x(n)\} + \alpha T(y(n))$

$\forall n, y, \alpha$

در اینجا linearity را داریم ولی نمی‌توانیم اثبات کنیم که T_3، shift invariant نیز هست. چرا که نمی‌دانیم در حالت تعمیم برقرار هست یا نه

$$X(n) = x(n) + \alpha y(n) \quad , \quad Y(n) = \underbrace{T(x(n))}_{A(n)} + \alpha \underbrace{T(y(n))}_{B(n)}$$

$$\forall n \begin{cases} T(x(n-k)) = A(n-k) \\ T(y(n-k)) = B(n-k) \end{cases}$$

در نتیجه نمی‌توانیم اثبات یا رد کنیم که T_3 LTI است. از طرف دیگر چون پاسخ ضربه را به صورت یکتا نمی‌توانیم مشخص کنیم، در نتیجه با داده‌هایی که درباره T_3 داریم، نمی‌توان ~~~~ خروجی را با داشتن ورودی معلوم کرد.

(iv) $\Rightarrow$ the system could be LTI, but can't be uniquely determined from the information given.

ادامه سوال 3-27 :

IV

$$\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \rightarrow \boxed{T_4} \rightarrow 3\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right)$$

از فرض سیستم ال LTI می‌دانیم که اگر ورودی یک فرکانس $\Omega = \frac{\pi}{3}$ داشته باشد خروجی هم حتماً باید فقط شامل مقداری از همین فرکانس باشد، و نمی‌تواند فرکانس دیگری ($\Omega = \frac{\pi}{2}$) داشته باشد. در نتیجه سیستم نمی‌تواند LTI باشد.

(دلیل مسئله این است که $\beta\cos(\frac{n\pi}{3})$ ، $\alpha\sin(\frac{n\pi}{2})$ هر دو توابع ویژه LTI هستند و در نتیجه از $\beta\cos(\frac{n\pi}{3})$ نمی‌توان $\sin(\frac{n\pi}{2})$ را گرفت.)

(V) $\Rightarrow$ the system could not possibly be LTI.

*** ——— *** ——— ***

V

$$y(n) - \frac{1}{5}y(n+1) = x(n)$$

در اینجا یک معادله دیفرانسیل داریم که بدیهی است که خطی است.

حال فرضاً که $\hat{x}(n) = x(n-k)$ و $\hat{y}(n) \leftrightarrow \hat{x}(n)$ ، داریم:

$$\forall n \begin{cases} \hat{y}(n) - \frac{1}{5}\hat{y}(n-1) = \hat{x}(n) = x(n-k) \\ y(n) - \frac{1}{5}y(n-1) = x(n) \rightarrow x(n-k) = y(n-k) - \frac{1}{5}y(n-k-1) = \hat{y}(n) - \frac{1}{5}\hat{y}(n-1) \end{cases}$$

که نشان می‌دهد برای اینکه دو تابع $y(n)$ و $\hat{y}(n)$ مشخص شود باید شرایط اولیه را نیز بدانیم و در نتیجه نمی‌توان گفت که سیستم shift invariant نیز هست $\leftarrow$

(V) $\Rightarrow$ the system could be LTI, but can not be uniquely determined from the given information.

(همچنین شرایط اولیه برای یافتن $y(n)$ با داشتن $x(n)$ لازم است.)

سوال 4-28 :

اگر به ورودی‌ها نگاه کنیم، داریم: $\leftarrow$ (*)

(a) $y_3(n) \neq y_4(n-1)+y_4(n-2)$ و $x_3(n) = x_4(n-1)+x_4(n-2)$

اما نمی‌توان خاصیت shift invariant بودن سیستم را بدون آنکه بدانیم سیستم LTI است، اثبات کنیم. حال اگر فرض کنیم که سیستم linear است، ثابت می‌شود که shift invariant نیست، با توجه به نقض فوق (*). اما اگر خاصیت linearity را نداشته باشیم، نمی‌توان نظری درباره این سیستم داد که shift invariant است یا خیر.

*** ——— *** ——— *** ——— ***

اینبار فرض کنیم که سیستم ما خطی است.

(b)

$$\begin{cases} \hat{x}(n) = x_1(n) + x_2(n) \rightarrow \hat{y}(n) = y_1(n) + y_2(n) \\ = 2\delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2) \qquad = \delta(n) + \delta(n-1) + 4\delta(n-3) + \delta(n-4) + \delta(n-5) \end{cases}$$

let

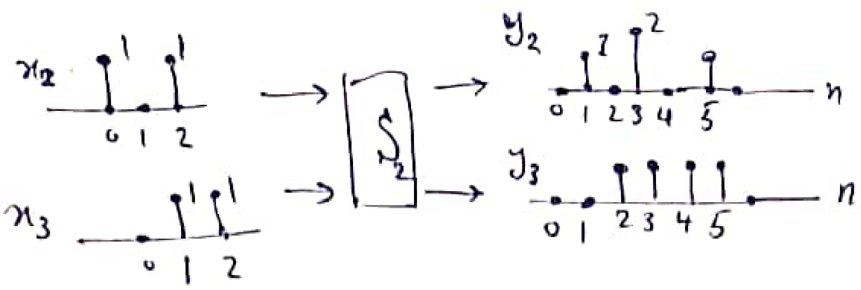
$$\begin{cases} \hat{z}(n) = 2x_3(n) + 2x_4(n) \rightarrow \hat{h}(n) = 2y_3(n) + 2y_4(n) \\ = 2\delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2) \qquad = 2\delta(n) + 2\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + 2\delta(n-3) + 2\delta(n-4) + 2\delta(n-5) \end{cases}$$

مشاهده می‌شود که چون داریم $\hat{x}(n) = z(n)$ ، در نتیجه باید داشته باشیم: $h(n) = z(n)$ که در حقیقت این رابطه برقرار نمی‌باشد چرا که $z(n) \neq h(n)$ $\leftarrow$ در نتیجه با این فرض نتیجه می‌گیریم که سیستم خطی نمی‌تواند باشد.

*** ——— *** ——— *** ——— ***

ادامه سؤال 26 : 4

c)



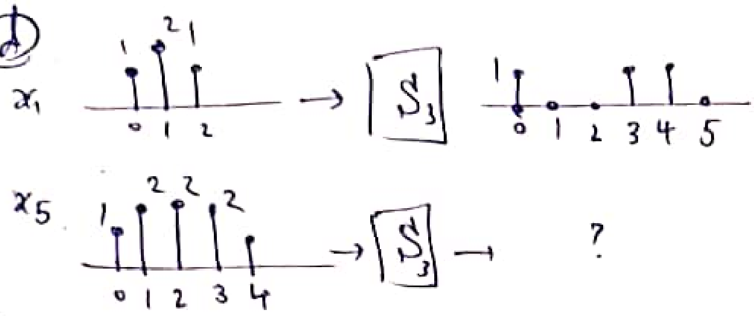
the impulse response of such system S_2

$$y_2 = x_2(n-1) + x_2(n-3) = x_2(n) * \left(\delta(n-1) + \delta(n-3)\right)$$
$$y_3 = x_3(n-1) + x_3(n-3) = x_3(n) * \left(\delta(n-1) + \delta(n-3)\right)$$

$$h(n) = \delta(n-1) + \delta(n-3)$$

*** *** ***

d)



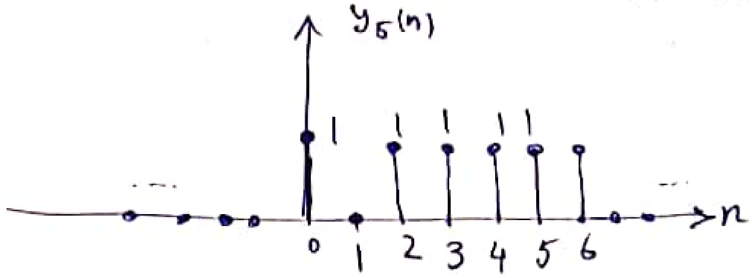
از آنجا که سیستم LTI است داریم:

$$x_5(n) = x_1(n) + x_1(n-2)$$

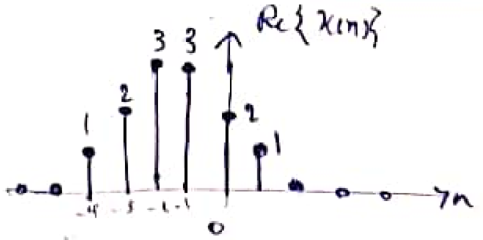
linearity

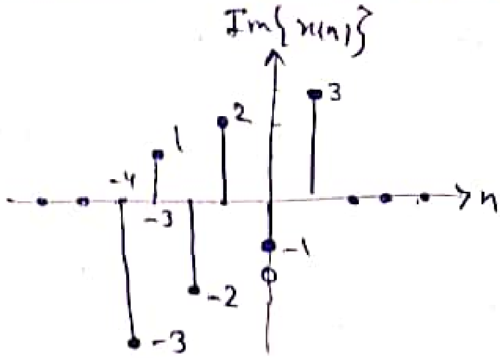
$$y_5(n) = y_1(n) + y_1(n-2)$$

$$\Longrightarrow y_5(n) = \delta(n) + \delta(n-2) + \delta(n-3) + \delta(n-4) + \delta(n-5) + \delta(n-6$$



*** ***





44 : 8

ⓐ $X(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=0} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\Omega n}\right)\Big|_{\Omega=0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) = 12 + 0j = \boxed{12}$

ⓑ $X(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=\pi} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\Omega n}\right)\Big|_{\Omega=\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(x(n)\cdot(-1)^n\right) =$

$\left(1-2+3-3+2-1\right) + j\left(-3-1-2-2-1-3\right) = 0 - 12j = \boxed{-j12}$

ⓒ $\int_{\langle 2\pi\rangle} X(e^{j\Omega})\, d\Omega = 2\pi\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X(e^{j\Omega})\, e^{j\Omega n}\, d\Omega\right)\Big|_{n=0} = 2\pi\, x(n)\Big|_{n=0} = \boxed{2\pi(2-j)}$

ⓓ $X(e^{-j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{+j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)\, e^{-j\Omega n} \Rightarrow \boxed{x(-n) \leftrightarrow X(e^{-j\Omega})}$

the desired signal is the time-reversal signal of $x(n) \Rightarrow \boxed{x(-n) = \hat{x}(n)}$

ⓔ $j\, Im\{X(e^{j\Omega})\} = j\, Im\left\{\sum_n x(n)\, e^{-j\Omega n}\right\} = j\sum_{n=-\infty}^{\infty} -x(n)\sin(\Omega n)$

$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}(n)\, e^{-j\Omega n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} -j\,\hat{x}(n)\sin(\Omega n)\right) + \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}(n)\cos(\Omega n)\right) = \sum -j\,\hat{x}(n)\sin(\Omega n)$ ☑

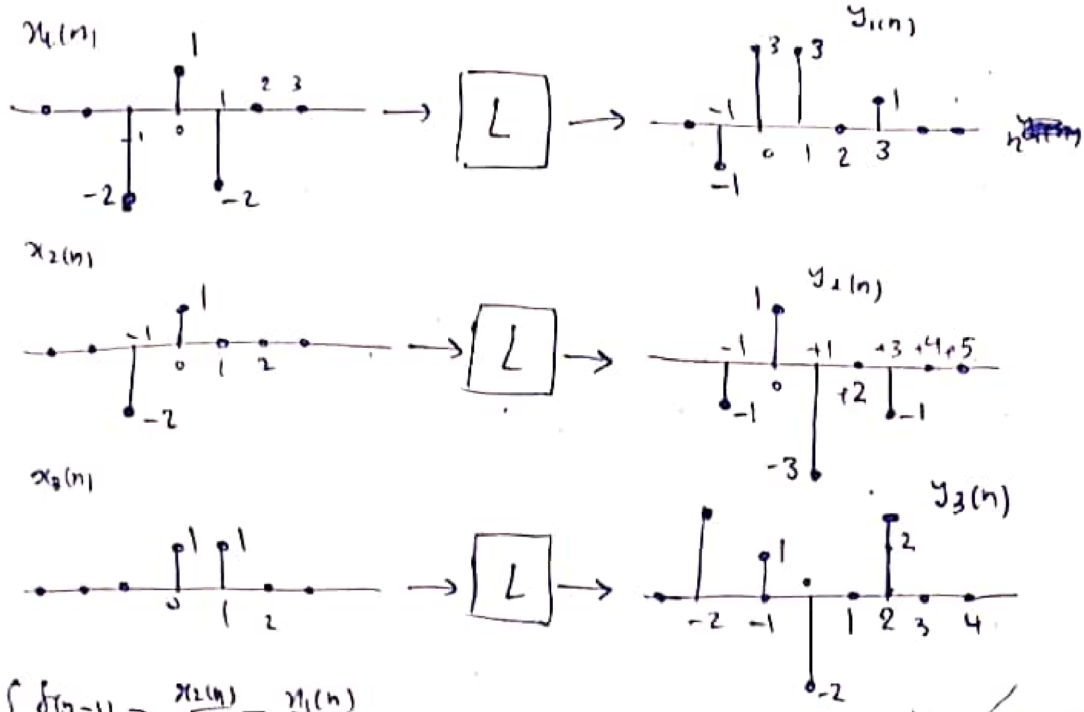
if $\hat{x}(n) = \hat{x}_{odd}(n) = \dfrac{x(n) - x(-n)}{2} \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\dfrac{x(n)-x(-n)}{2}\right)\cos(\Omega n) = 0$

$\Rightarrow -j\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\dfrac{x(n)-x(-n)}{2}\right)\sin(\Omega n) = -j\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\dfrac{x(n)-x(-n)}{2}\right)\sin(\Omega n) + \left(\dfrac{x(-n)-x(n)}{2}\right)\sin(\Omega n)\right]$

$= -j\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x(n)-x(-n)}{2}\sin(\Omega n)\right) = -j\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\sin(\Omega n) = -j\sum \hat{x}(n)\sin(\Omega n)$ ☑

$\Rightarrow \boxed{\hat{x}(n) = x_{odd}(n) = \dfrac{x(n) - x(-n)}{2}}$

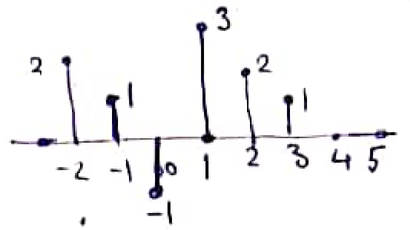
سوال ۴۹ : ۶



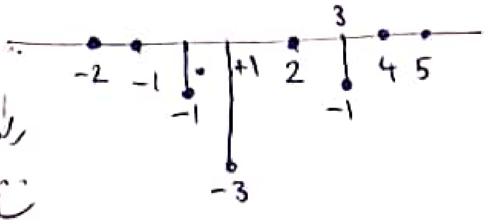
$$\begin{cases} \delta(n-1) = \frac{x_2(n)}{2} - \frac{x_1(n)}{2} \\ \delta(n) = \frac{x_1(n)}{2} - \frac{x_2(n)}{2} + x_3(n) \end{cases}$$

(a) سعی می‌کنیم به‌گونه‌ای $\delta(n)$ را از ترکیب خطی ورودی L بیابیم ← , $\delta(n-1)$

$$\begin{cases} L(\delta(n)) = h(n) = \frac{y_1(n)}{2} - \frac{y_2(n)}{2} + y_3(n) = \\ L(\delta(n-1)) = \frac{y_2(n)}{2} - \frac{y_1(n)}{2} = \end{cases}$$



$= h(n)$



$\neq h(n-1)$

اما مشاهده می‌شود که شیفت دادن $\delta(n)$ یک واحد به راست، خروجی‌اش را به یک واحد به راست شیفت نمی‌دهد که نشان می‌دهد که این سیستم shift invariant نیست

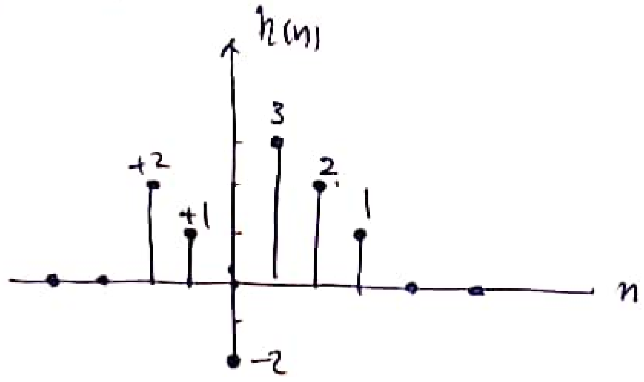
*** *** *** ***

(b) سیستم ما واقعاً خطی است و ما به‌گونه‌ای $\delta(n)$ را لازم و توسط خاصیت خطی بودن L ورودی آن را تعیین کنیم:

$$\delta(n) = \frac{x_1(n)}{2} - \frac{x_2(n)}{2} + x_3(n) \rightarrow y(n) = h(n) = 2\delta(n+2) + \delta(n+1) + 3\delta(n-1) - 2\delta(n) + 2\delta(n-2) + \delta(n-3)$$

$$= \frac{y_1(n)}{2} - \frac{y_2(n)}{2} + y_3(n)$$

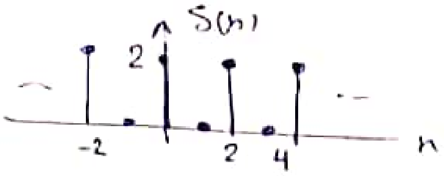
خاصیت پاسخ ضربه را ندارد چراکه سیستم صرفاً خطی است و LTI نیست

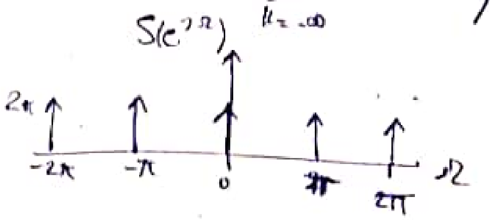


Scanned by CamScanner

59; 7

(a) $S(n) = 1 + \cos(n\pi) \rightarrow S(e^{j\Omega}) = 2\pi\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\pi)\right)$



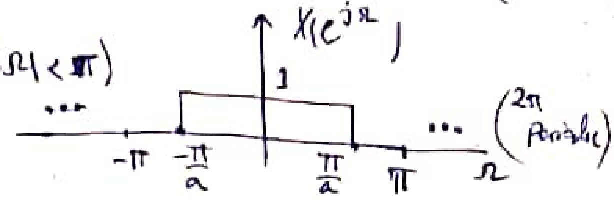


(b) $y(n) = x(n) \cdot \mathbb{1}(n \overset{2}{=} 0) = x(n) \times \frac{1}{2} S(n) \Rightarrow Y(e^{j\Omega}) = \left(\frac{1}{2\pi} X(e^{j\Omega}) * S(e^{j\Omega})\right)\frac{1}{2}$

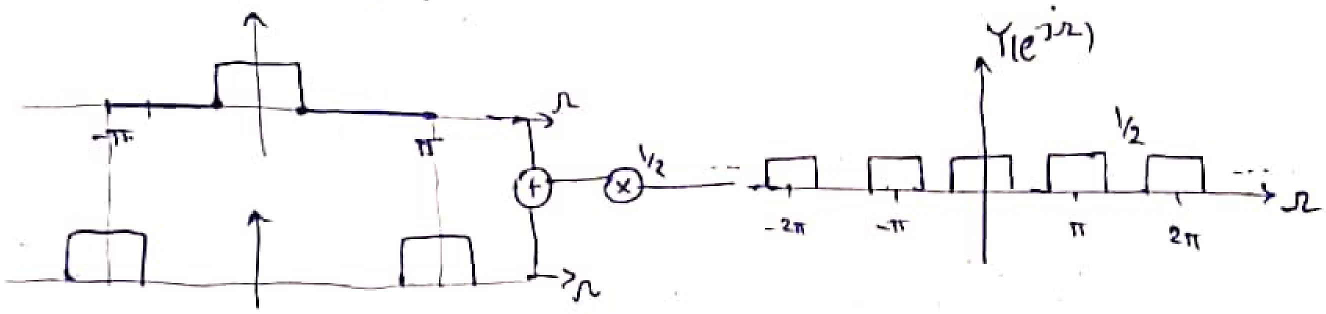
$$Y(e^{j\Omega}) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})\, S(e^{j(\Omega-\omega)})\, d\omega\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} X(e^{j\omega})\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-\omega-k\pi)\right)d\omega = \frac{X(e^{j(\Omega-\pi)}) + X(e^{j\Omega})}{2}$$

(c) $w(n) = y(n) + \frac{y(n+1)+y(n-1)}{2} \longrightarrow W(e^{j\Omega}) = Y(e^{j\Omega})\left(1 + \frac{e^{j\Omega}+e^{-j\Omega}}{2}\right) = Y(e^{j\Omega})(1+\cos(\Omega))$

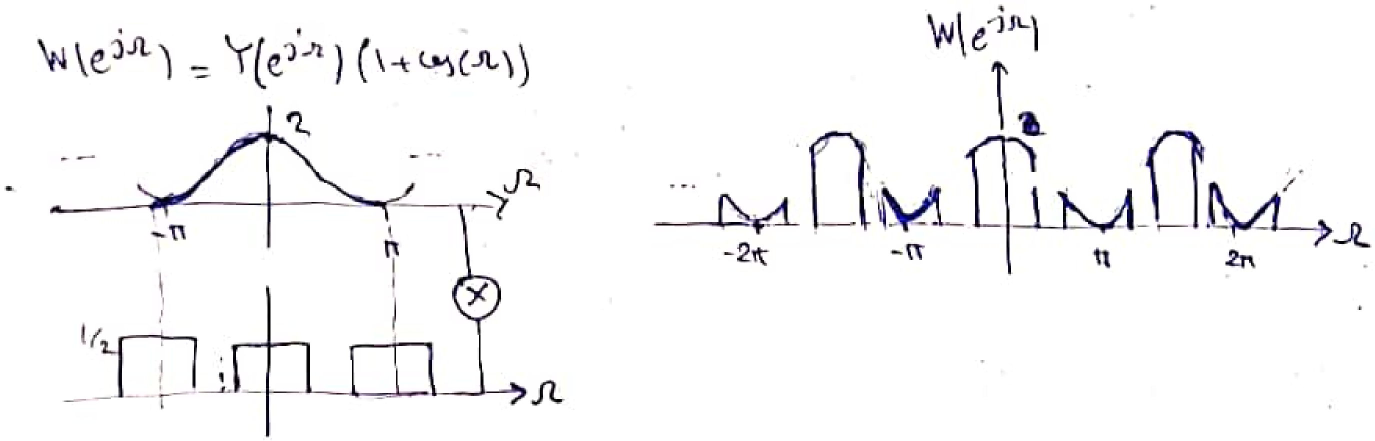
(d) $x(n) = \frac{\sin(\frac{\pi n}{a})}{\frac{\pi n}{a}}$, $a>1$ $\longrightarrow X(e^{j\Omega}) = \Pi\left(\frac{\Omega a}{\pi}\right)$ $(\forall |\Omega| < \pi)$



$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{X(e^{j\Omega}) + X(e^{j(\Omega-\pi)})}{2}$$

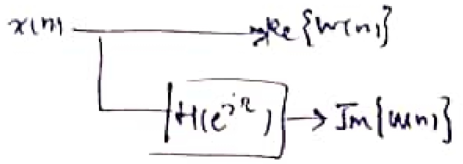


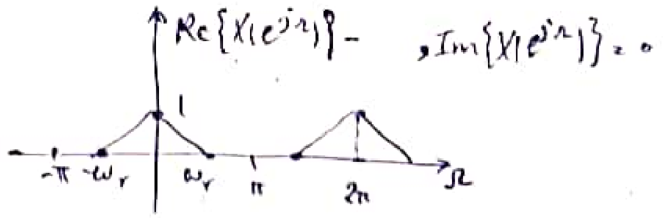
$$W(e^{j\Omega}) = Y(e^{j\Omega})(1+\cos(\Omega))$$



$$\begin{cases} X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{(\Omega-2k\pi)a}{\pi}\right) \\ Y(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{(\Omega-k\pi)a}{\pi}\right) \\ W(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1+\cos(\Omega)}{2}\right)\Pi\left(\frac{(\Omega-k\pi)a}{\pi}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\cos^2\left(\frac{\Omega}{2}\right)\Pi\left(\frac{(\Omega-2k\pi)a}{\pi}\right) \end{cases}$$

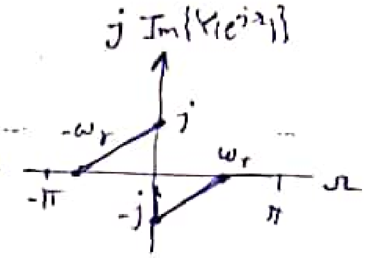
سوال 8 : 65

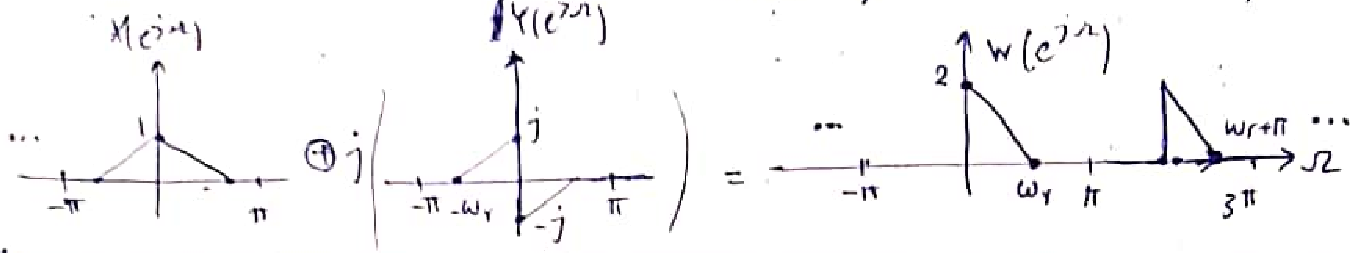




$$W(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) + jY(e^{j\Omega}) \quad , \quad Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega})\,H(e^{j\Omega}) \Rightarrow$$

$\hookrightarrow Re\{Y(e^{j\Omega})\}$





سوال 9 : 84

ⓐ

$$X^*(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)\, e^{+j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(-n)\, e^{-j\Omega n} \Longrightarrow x^*(-n) \longleftrightarrow X^*(e^{j\Omega})$$

By convolution Property: $x(n) * y^*(-n) \leftrightarrow X(e^{j\Omega})\, Y^*(e^{j\Omega})$

ⓑ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X(e^{j\Omega})\, Y^*(e^{j\Omega})\, e^{-j\Omega n}\, d\Omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, y^*(k-n)$$

letting $n=0$

$$\longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X(e^{j\Omega})\, Y^*(e^{j\Omega})\, d\Omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, y^*(k)$$

ⓒ

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{\sin(\frac{n\pi}{4})}{2\pi n}}_{x(n)} \times \underbrace{\frac{\sin(\frac{n\pi}{6})}{5\pi n}}_{y^*(n)} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{10}\right)\int_{\langle 2\pi\rangle} \sqcap\left(\frac{4\Omega}{\pi}\right) \sqcap\left(\frac{6\Omega}{\pi}\right) d\Omega$$

$$= \frac{1}{20\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} \sqcap\left(\frac{\Omega}{\pi/6}\right) d\Omega = \frac{1}{20\pi} \times \frac{\pi}{3} = \frac{1}{60}$$

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2}\sqcap\left(\frac{4\Omega}{\pi}\right)$$

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{1}{5}\sqcap\left(\frac{6\Omega}{\pi}\right)$$