دکتر کربلایی — تمرین سری 2 ریاضی مهندسی — محمدپارسا دینی — سوال 6 بخش 1

فرض کنیم سری مختلط فوریه تابع $f(t)$ به صورت مقابل باشد:

$$\begin{cases} f(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega_0 t} \\ \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=2\pi f_0 \end{cases}$$

(i) حالت اول: فرض کنیم $f(t)$ فرد باشد یعنی $\forall t: f(t)=-f(-t)$ در این صورت:

$$f(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega t}=-\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{-jn\omega t}=-c_0-\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n e^{-jn\omega t}+c_{-n}e^{jn\omega t}$$

$\Downarrow$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega t}=-\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{-n} e^{jn\omega t}$$

$\Longrightarrow$ از آنجا که می‌دانیم ضرایب سری فوریه یکتاست می‌توانیم نتیجه بگیریم که $c_n=-c_{-n}$. از طرف دیگر می‌دانیم میان c_n و c_{-n} رابطه $c_{-n}=c_n^*$ برقرار است. که توأماً $c_n=-c_{-n}$ و $c_{-n}=c_n^*$ نتیجه می‌دهد که $\forall n: c_n=-c_n^*$

که بدیهتاً نتیجه می‌دهد که c_n موهومی محض است. چرا که اگر $c_n=x_n+jy_n$ آنگاه از معادله بالا نتیجه می‌شود که $c_n=x_n+jy_n=-x_n-(-jy_n)$ که نتیجه می‌دهد $x_n=0$ و به ازای هر y_n رابطه فوق برقرار است. $\longrightarrow \forall n: Re\{c_n\}=0$

(ii) حالت دوم: فرض کنیم $f(t)$ زوج باشد یعنی $\forall t: f(t)=f(-t)$ در این صورت

$$f(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega t}=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{-jn\omega t}=f(-t)=\sum_{n\in\mathbb{N}} c_{-n} e^{+jn\omega t}$$

$\Downarrow$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega t}=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{-n} e^{+jn\omega t}$$

$\Longrightarrow$ از آنجا که ضرایب سری فوریه یکتاست نتیجه می‌توان گرفت که $\forall n: c_n=c_{-n}$. از طرف دیگر می‌دانیم که $c_{-n}=c_n^*$ پس خواهیم داشت: $c_n=c_n^*$

که نتیجه خواهد داد که c_n حقیقی محض است چرا که اگر $c_n=x_n+jy_n$ خواهیم داشت

$$c_n=c_n^* \longrightarrow x_n+jy_n=x_n-jy_n \longrightarrow y_n=0 \xrightarrow{\forall n} Im\{c_n\}=0$$

سوال 1 - بخش 2: می‌دانیم که

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{<T>} f(t)e^{-j\omega n t}dt \quad \text{و} \quad f(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega t}$$

$$\Longrightarrow f(t)^*=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^* e^{-jn\omega t}dt \Longrightarrow |f(t)|^2=f(t)f(t)^*=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_m\cdot c_n^*\cdot e^{jn\omega t(n-m)}$$

(*) نکته: چون که تابع‌ها متعامد هستند با یک انتگرال‌گیری در یک دوره تناوب تنها اگر $n=m$ جمله غیرصفر می‌شود:

انتگرال‌گیری از طرفین در یک دوره تناوب $\xrightarrow{(*)}$

$$\int_{<T>}|f(t)|^2dt=\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m c_m^*\int_{<T>}1\,dt=\sum_{m=-\infty}^{\infty}|c_m|^2\cdot T$$

قضیه پارسوال

finally $\Longrightarrow \frac{1}{T}\int_{<T>}|f(t)|^2dt=\sum_{m=-\infty}^{\infty}|c_m|^2$

★ سوال ۱ - بخش ۳ : در(کل) سوالات فرض می‌شود که سری فوریه $f(x)$ را تعبیر $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n e^{jn\omega x}$ باشد

(i) $g(x) = f(x-x_0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega(x-x_0)} = e^{-jn\omega x_0} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega x} = \sum \left(e^{-jn\omega x_0} c_n\right) e^{jn\omega x}$

if $f(x) \leftrightarrow c_n$, then $f(x-x_0) \leftrightarrow e^{-jn\omega x_0} \cdot c_n$

(ii) $g(x) = f(-x) = \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{-jn\omega x}}_{\text{re-indexing by letting } n\to -n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{-n} e^{jn\omega x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^* e^{jn\omega x}$

if $f(x) \leftrightarrow c_n$, then $f(-x) \leftrightarrow c_n^*$ $\underline{\text{b}} + c_{-n}$

(iii) $g(x) = f(ax) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega a x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega_0 x}$

$\omega_0 = \omega a \longleftarrow$ فرکانس اصلی جدید

به سبب ایجاد انقباض یا انبساط در $f(x)$ با ضریب

$f(ax) \longleftarrow$ در x a

if $f(x) \leftrightarrow c_n$, then $f(ax) \leftrightarrow c_n$

(iv) $g(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (jn\omega) e^{jn\omega x}$

if $f(x) \leftrightarrow c_n$, then $\frac{d}{dx} f(x) \leftrightarrow (jn\omega) c_n$

(v) $g(x) = f(x)^* = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega x}\right)^* = \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^* e^{-jn\omega x}}_{\text{re-indexing by letting } n\to -n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{-n}^* e^{jn\omega x}$

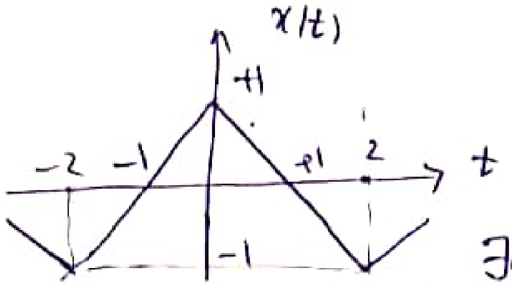
if $f(x) \leftrightarrow c_n$, then $f(x)^* \leftrightarrow c_{-n}^*$

(vi) $g(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{x} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega\tau} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{x} c_n e^{jn\omega\tau}\, d\tau$

$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \int_{-\infty}^{x} e^{jn\omega\tau}\, d\tau = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{c_n}{jn\omega} e^{jn\omega\tau}\Big|_{\tau=-\infty}^{\tau=x} = \sum \frac{c_n}{jn\omega} \cdot e^{jn\omega x}$

if $f(x) \leftrightarrow c_n$, then $\int_{-\infty}^{x} f(\tau)\, d\tau \leftrightarrow \frac{c_n}{jn\omega}$

سوال ۶ - بخش ۴ :



$$T = 4 \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$$

وقتی که $\exists c_n \in \mathbb{C} : x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}$

(i) ابتدا مقدار تابع $x(t)$ را در نقطه $t=1$ می‌خوانیم که صفر است. چرا که در $t=1$،

$$e^{jn\omega t}\Big|_{t=1} = \left(e^{j\omega t}\right)^n\Big|_{t=1} = \left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)^n = j^n$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$x(t)\Big|_{t=1} = 0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(e^{jn\omega t}\right)\Big|_{t=1} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (j)^n}_{=S_1} \Rightarrow \boxed{S_1 = 0}$$

(ii) حال مقدار تابع را در نقطه $t=2$ می‌خوانیم و از آنجایی که

$$x(2) = \lim_{h\to 0} \frac{x(2-h) + x(2+h)}{2} = -1$$

مشکلی در تطبیق این تابع در $t=2$ با سری فوریه‌اش نخواهد بود.

از طرف دیگر در $t=2$ داریم:

$$e^{jn\omega t}\Big|_{t=2} = \left(e^{j\omega t}\right)^n\Big|_{t=2} = \left(e^{j\pi}\right)^n = (-1)^n$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$x(t)\Big|_{t=2} = -1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(e^{jn\omega t}\right)\Big|_{t=2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (-1)^n = S_2$$

$$\Rightarrow \boxed{S_2 = -1}$$

ت) (iii) از قضیه پارسوال استفاده میکنیم :

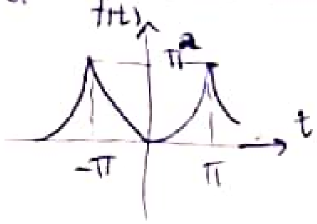
$$\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

$$L.H.S = \frac{1}{4}\int (1-|t|)^2 dt = \frac{1}{4}\left(\int_{-2}^{0} (1+t)^2 dt + \int_{0}^{2} (1-t)^2 dt\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2(1+t)\Big|_{t=-2}^{t=0} + 2(1-t)\Big|_{t=0}^{t=2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \Bigg] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = 0 \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \cancel{|c_0|^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = S_3 = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$



سؤال ۲ - بخش ث :

$$T = 2\pi,\quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 1$$

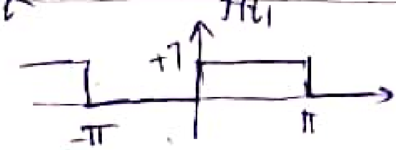
$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2\pi^3}{6\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

note that $(e^{-j\pi}) = -1$

$$\forall n \in \mathbb{Z}-\{0\} \Rightarrow c_n = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-jnt} dt = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{t^2 e^{-jnt}}{-jn} - \frac{2te^{-jnt}}{n^2} + \frac{2e^{-jnt}}{jn^3}\right)\Bigg|_{t=-\pi}^{t=\pi}$$

$$c_n = \frac{\pi^2\cdot(-1)^n - \pi^2\cdot(-1)^{-n}}{-jn} - \frac{2\pi\cdot(-1)^{-n} + 2\pi\cdot(-1)^n}{n^2} + \frac{2\cdot(-1)^n - 2\cdot(-1)^{-n}}{jn^3}$$

$$c_n = \frac{4\pi\cdot(-1)^n}{n^2} \Rightarrow \boxed{f(t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)^n}{n^2} e^{jnt}}$$



سؤال ۲ - بخش ج :

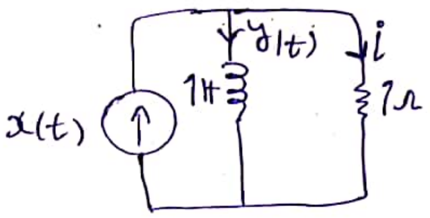
$$T = 2\pi \rightarrow \omega = 1$$

$$\rightarrow c_0 = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} f(t)dt = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

$$\forall n \neq 0 : c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-jnt} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-jnt} dt = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{-jnt}}{-jn}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{-2\pi jn}$$

$$\rightarrow c_n = \begin{cases} \frac{1}{j\pi n} & n \not\equiv_2 0 \\ 0 & n \equiv_2 0 \end{cases} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{jt(2n-1)}}{j\pi(2n-1)}$$

✻ سوال ۳



$$KCL \rightarrow i = x(t) - y(t)$$

$$\begin{cases} V = 1 \dfrac{dy(t)}{dt} \\ V = i \cdot 1 = x(t) - y(t) \end{cases} \longrightarrow x(t) - y(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

✻ بخش 3.1 ← معادله دیفرانسیل ←

$$x(t) = \frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

✻ بخش 3.2 ← فرض کنید

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{jn\omega t} \quad , \quad y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{jn\omega t}$$

سری فوریه های $x(t)$ و $y(t)$ باشند. با قرار دادن این مقادیر در معادله دیفرانسیل خواهیم داشت:

$$\forall k \in \mathbb{Z} ; \quad y_k (jk\omega + 1) = x_k \xrightarrow{\omega = 1} x_k = y_k (jk + 1)$$

کبش 3.3 ←

$$x(t) = \cos t + 2\sin 2t = \frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2} + \frac{2}{2j}\cdot\frac{e^{2jt}-e^{-2jt}}{1}$$

$$= \frac{e^{jt}}{2} + \frac{e^{-jt}}{2} + (-j)e^{2jt} + je^{-2jt} \quad \rightarrow \omega=1$$

$$\longrightarrow x_1 = \tfrac{1}{2},\ x_{-1}=\tfrac{1}{2},\ x_2=-j,\ x_{-2}=-2j \quad \text{و} \quad \forall k\in\mathbb{Z}-\{\pm1,\pm2\}\cdot x_k=0$$

$$\Longrightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{jk\omega t} = \tfrac{1}{2}e^{jt} + \tfrac{1}{2}e^{-jt} + (-j)e^{2jt} + je^{-2jt} = \cos t + 2\sin 2t$$

$$\longrightarrow \forall k\in\mathbb{Z}-\{\pm1,\pm2\} \quad y_k = 0$$

$$y_1 = \frac{x_1}{j+1} = \frac{1}{2(j+1)} = \frac{1-j}{4}, \quad y_{-1} = \frac{x_{-1}}{-j+1} = \frac{1}{2(1-j)} = \frac{1+j}{4}$$

$$y_2 = \frac{x_2}{2j+1} = \frac{-j}{2j+1} = \frac{-2-j}{5}, \quad y_{-2} = \frac{x_{-2}}{-2j+1} = \frac{j}{-2j+1} = \frac{-2+j}{5}$$

$$\Longrightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k e^{jk\omega t} = \left(\frac{1-j}{4}e^{jt} + \frac{1+j}{4}e^{-jt}\right) + \left(\frac{-2-j}{5}e^{2jt} + \frac{-2+j}{5}e^{-2jt}\right)$$

$\boxed{\text{let } \theta>0 \text{ s.t. } \tan\theta = 2}$

$$\Longrightarrow y(t) = \frac{\cos t + \sin t}{2} + \frac{-4\cos 2t + 2\sin 2t}{5} = \frac{\sqrt2}{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{2}{5}\left(\tan\theta\cos 2t - \sin 2t\right)$$

$$= \frac{\sqrt2}{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{2}{5\cos\theta}\left(\underbrace{\sin\theta\cos 2t - \sin 2t\cos\theta}_{\sin(2t-\theta)}\right) \xrightarrow[\cos\theta = 1/\sqrt5]{\theta=\tan^{-1}2} \boxed{y(t) = \frac{\sqrt2}{2}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{\sqrt5}\sin(2t-\tan^{-1}2)}$$

* کبش 3.4 ← ابتدا فازور x را مشخص می‌کنیم و سپس توسط انتگرال که برای x و y داریم آن را حساب می‌کنیم. *
همچنین چون فازورها برای 2sin2t و cost یکسان نیست به کمک اصل superposition یا برهم‌نهی می‌سازیم
فازور را یک بار دیگر 2 فرض کرده و جواب نهایی جمع جواب این حالات خواهد بود.

- if $\omega=2$: $\cancel{x_2}$ $\quad X_2 = 2\angle -90$

$$y_2 = \frac{X_2}{j\omega+1} = \frac{2\angle-90}{2j+1} = \frac{2\angle-90^\circ}{\sqrt5\angle\tan^{-1}2} = \frac{2}{\sqrt5}\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2t-\tan^{-1}2\right)$$

$$63^\circ \simeq \tan^{-1}2$$

$$= \frac{2}{\sqrt5}\sin(2t-\tan^{-1}2)$$

- if $\omega=1$:

$$X_1 = 1\angle 0$$

$$y_1 = \frac{X_1}{\omega j+1} = \frac{1\angle0}{j+1} = \frac{1\angle0}{\sqrt2\angle45^\circ} = \frac{1}{\sqrt2}\angle-45^\circ = \frac{1}{\sqrt2}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$$

همان طور که می‌بینید جواب‌های کبش فوق و این کبش کاملاً با هم برابر است

$$y = y_1 + y_2 = \frac{1}{\sqrt2}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{\sqrt5}\sin(2t-\tan^{-1}2)$$

سؤال 7 4 - تمرین :

let $f(t) = \cos^4 t \rightarrow$ its Period $= \pi = T$

We know that $\frac{1}{T}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} |f(t)|^2 \, dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$ where c_n's are fourier series' coefficients

so in order to compute $\int_{\langle T\rangle} \cos^8 t \, dt$ we will try to find c_n's by using Trigonometric formullas (mostly $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$):

$$\cos^4 t = \left(\frac{\cos 2t+1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\cos^2 2t + 2\cos 2t + 1\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\cos 4t+1}{2} + 2\cos 2t + 1\right) \therefore$$

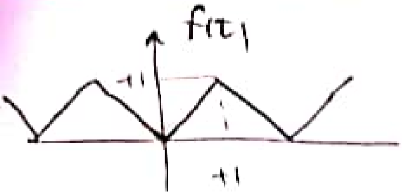
$\cos^4 t = \frac{\cos 4t}{8} + \frac{\cos 2t}{2} + \frac{3}{8}$. Since the fourier expansion of a function is unique, We can deduce that $\Rightarrow$ $\cos^4 t = \frac{e^{4jt} + e^{-4jt}}{16} + \frac{e^{2jt} + e^{-2jt}}{4} + \frac{3}{8}$

$c_0 = \frac{3}{8}$, $c_4 = \frac{1}{16}$, $c_{-4} = \frac{1}{16}$, $c_2 = \frac{1}{4}$, $c_{-2} = \frac{1}{4}$, $\forall n \in \mathbb{Z} - \{0, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{16}\}$
$\hookrightarrow c_n = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^8 t \, dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{35}{128}$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^8 t \, dt = \boxed{\frac{35\pi}{128}}$$

سوال ۴ـ بخش 2 :



$$C_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} |t|\, e^{-j(n\pi)t}\, dt = \frac{1}{2}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} |t|\, e^{jn\pi t}\, dt = \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0} -t\, e^{jn\pi t}\, dt + \int_{0}^{+1} t\, e^{jn\pi t}\, dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{e^{jn\pi t}}{jn\pi}t - \frac{e^{jn\pi t}}{j^2 n^2\pi^2}\right)\Bigg|_{t=-1}^{t=0} + \left(\frac{e^{jn\pi t}}{jn\pi}t - \frac{e^{jn\pi t}}{j^2n^2\pi^2}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=1}\right]$$

$$C_n = \frac{1}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0 & n \overset{2}{=} 0 \\ \frac{2}{n^2\pi^2} & n \overset{2}{\neq} 0 \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^2\pi^2} e^{jn\pi t}$$

$$\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} t^2\, dt = \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2(2n+1)^2}$$

$$\hookrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = S_2 = \frac{\pi^4}{96} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^4 - 32n^3 + 24n^2 - 8n + 1}$$

سوال 6 :

سوال 6 بخش 1 :

(راه اول)

I. $f(t) = \frac{\pi}{2} e^{-t}\cos t \sin\omega t \ : \forall\ t>0$

$$\underbrace{B(\omega)}_{\text{فوریه سینوسی } f(t)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\pi}{2} e^{-t}\cos t \sin\omega t \, dt \xrightarrow{\text{تبدیل ضرب به جمع}} \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}\left(\sin(\omega+1)t - \sin(\omega-1)t\right)dt$$

$$\xrightarrow[\text{using integral by parts}]{=} \frac{1}{2}\left(\frac{-e^{-t}\sin(\omega+1)t-(\omega+1)e^{-t}\cos(\omega+1)t}{(\omega+1)^2+1} + \frac{-e^{-t}\sin(\omega-1)t-(\omega-1)e^{-t}\cos(\omega-1)t}{(\omega-1)^2+1}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=\infty}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\left(\frac{-\omega-1}{(\omega+1)^2+1} + \frac{-\omega+1}{(\omega-1)^2+1}\right)\right) = \boxed{\frac{\omega^4}{\omega^4+4}}$$

فی الواقع از آنجایی که تابع در $t>0$ در $u(t)$ ضرب شده، بعد از آن انتگرال را از صفر در نظر گرفتیم و تبدیل فوریه مدنظر، همان شرایط تبدیل لاپلاس را دارد.

(راه دوم) استفاده از تبدیل لاپلاس

$$\int_0^\infty e^{-t}\sin(\omega+1)t\,dt = \mathcal{L}\{\sin(\omega+1)t\} = \frac{\omega+1}{s^2+(\omega+1)^2}\Bigg|_{s=1}$$

$$\int e^{-t}\sin(\omega-1)t\,dt = \mathcal{L}\{\sin(\omega-1)t\} = \frac{\omega-1}{s^2+(\omega-1)^2}\Bigg|_{s=1}$$

$$\xrightarrow{-} B(\omega) = \boxed{\frac{\omega^4}{\omega^4+4}}$$

سوال 6 بخش 2 :

II. $f(t) = \frac{\pi}{2} e^{-t} : \forall t>0$

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\cos\omega t\,dt = \int_0^\infty e^{-t}\cos\omega t\,dt \xrightarrow{\text{integral by parts}} \left(\frac{e^{-t}(\omega\sin(\omega t)-\cos(\omega t))}{\omega^2+1}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=\infty}$$

$$\boxed{A(\omega) = \frac{1}{\omega^2+1}}$$

سوال 6 - بخش 3:

$\forall t \neq 0: \; f(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) + e^{t}u(-t) + e^{2t}u(-2t)$

we know that $e^{-\alpha t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1/\sqrt{2\pi}}{\alpha + j\omega}$ thus; $e^{\alpha t}u(-t) \longleftrightarrow \frac{1}{\alpha - j\omega} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$$f(t) \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1+j\omega} + \frac{1}{2+j\omega} + \frac{1}{1-j\omega} + \frac{1}{2-j\omega}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \left(\frac{2}{1+\omega^2} + \frac{4}{4+\omega^2}\right) = \frac{6(\omega^2+2)}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)} = F(\omega)$$

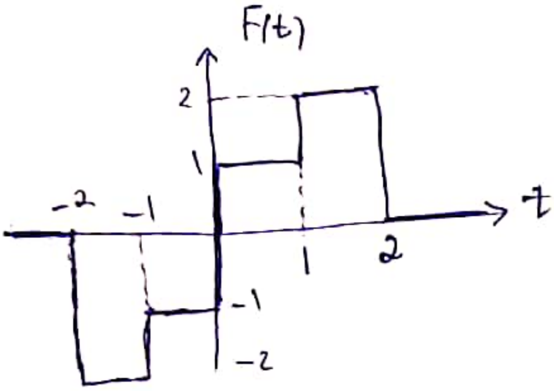
$$\frac{I}{2\pi} = \int_0^{\infty} \underbrace{\frac{6(t^2+2)}{(t^2+1)(t^2+4)}}\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{6(\omega^2+1)}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}}_{F(\omega)}\, d\omega = \frac{1}{12}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\, dt \Big|_{t=0}$$

- this function is even
- let $t = \omega$

$$\frac{I}{2\pi} = \frac{f(t)}{12}\Big|_{t=0} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \rightarrow I = 2\pi \times \frac{1}{6} = \boxed{\frac{\pi}{3}}$$

(ما می‌دانیم از آنجایی که $2 = \lim \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2}$ ، مقدار $f(0)$ را 2 در نظر می‌گیریم (آن را 5 در نظر نمی‌گیریم) ، چونکه تبدیل فوریه $f(t)$ در صفر به 2 همگراست نه 5!

سؤال 6 تمرين 4 :



let F(t) be thus function which is obviously an odd function and therefore if $F(t)=\int_0^\infty (A(\omega)\cos\omega t + B(\omega)\sin\omega t)\,d\omega$ then by the fact that F(t) is odd, we can simply deduce ~~that~~ $A(\omega)=0$. Furthermore, ...

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\sin\omega t\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^1 \sin\omega t\,dt + 2\int_1^2 \sin\omega t\,dt\right] - \frac{1}{\pi}\left[\int_{-1}^{0}\sin\omega t\,dt + 2\int_{-2}^{-1}\sin\omega t\,dt\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^1 \sin\omega t\,dt + 2\int_1^2\sin\omega t\,dt\right] = \frac{2}{\pi\omega}\left[\left(-\cos\omega t\right)\Big|_{t=0}^{t=1} + 2(-\cos\omega t)\Big|_{t=1}^{t=2}\right]$$

$$=\frac{2}{\pi\omega}\left[1-\cos\omega - 2\cos 2\omega + 2\cos\omega\right] = \boxed{\frac{2+2\cos\omega-4\cos 2\omega}{\pi\omega}} = f(\omega)$$

7012

(I) $f(t) = \Pi\left(\frac{t}{2\tau}\right) = \begin{cases} 1 & |t| < \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases}$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right) \Bigg|_{t=-\tau}^{t=\tau} = \frac{j}{\sqrt{2\pi}\,\omega} \underbrace{\left(e^{-j\omega\tau} - e^{j\omega\tau} \right)}_{-2j \sin \omega\tau}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\omega} \sin \omega\tau = \frac{\sin \omega\tau}{\omega} \times \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

(II) $f(t) = e^{-\alpha t} u(t)$, $\alpha > 0$

$$\Rightarrow F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-t(\alpha + j\omega)} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-t(\alpha+j\omega)}}{-\alpha - j\omega} \right) \Bigg|_{t=0}^{t=\infty}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\alpha + j\omega} \right)$$

(III) $f(t) = e^{-\alpha|t|}$, $\alpha > 0$

$$= \underbrace{e^{-\alpha t} u(t)}_{h(t)} + \underbrace{e^{\alpha t} u(-t)}_{h(-t)} = H(\omega) + H(\omega)^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\alpha + j\omega} + \frac{1}{\alpha - j\omega} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \right)$$

طبق تمرین بالا

$$e^{-\alpha(t)} u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\alpha + j\omega} \right) = H(\omega)$$

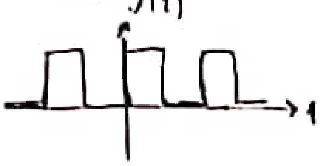
$$e^{\alpha(t)} u(-t) \longleftrightarrow H(\omega)^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\alpha - j\omega} \right)$$

سوال ۶ :

"لفظ کوتاه"

(i) سوال ۱ : نادرست • برای مثال سوال ۲ یعنی یک تابع پالس دارای ضرایب فوریه مختلط مقدار بود : $C_n = \frac{2(1-(-1)^n)}{j\pi n}$

دقیق مقدار بودن تابع ورودی به موجب مقدار بودن ضرایب سری فوریه ندارد و ما مقدارهای دوری می‌توانند ضرایب سری را از دو طرف موهومی باشد، اما شایدا اگر تابع را حقیقی باشد، نمی‌توانند حاصل جمع سری فوریه این مختلط شود.



(ii) سوال ۲ : نادرست : برای مثال سیگنال پالس دوبه‌دو گرچه سری فوریه دارد، اما $\int_0^t |f(t)|\,dt = \infty$ از آنجا که انتگرال بی‌نهایت، شروط دیریکله را نقض می‌کند چون که مطلقاً انتگرال پذیر نبود، سری فوریه ندارد.

(iii) سوال ۳ : درست. با به عقیده من یک کلمه در این متن جا افتاده که اگر آن را اضافه کنیم درست می‌شود. اگر $X(t)$ حقیقی و فرد باشد، ضرایب سری فوریه مختلط آن موهومی خالص و فرد است ($C_k = -C_{-k}$)

ضرایب ← کلمه جاافتاده

چون که تابع فرد است، نتیجه می‌گیریم که $a_n = 0$ و از آنجا که رابطه C_n با a_n و b_n را در توابع متناوبی که حقیقی مقدار هستند میدانیم، فرد بودنش را می‌توان ثابت کرد.

$$\left.\begin{aligned} C_n &= \frac{a_n}{2} - j\frac{b_n}{2} \\ C_{-n} &= \frac{a_n}{2} + j\frac{b_n}{2} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{a_n = 0} \begin{cases} C_n = -\frac{j}{2} b_n \\ C_{-n} = \frac{j}{2} b_n \end{cases}$$

حال به سادگی می‌توان ثابت کرد که $\forall n: C_{-n} = -C_n$

(iv) از آنجا که یک تابع با سری نمایی اش حاصل بردم نمی‌ اعوجاج سینوس و کسینوس متعدد است که (سینوس) و کسینوس‌ها را در این تابع حاصل رهم نمایش یک تابع کسینوسی با فازهای متفاوت است می‌توان آنگونه ضرایب مختلط است. اگر Real این تابع را نگاه کنیم، بردم تمام کسینوس‌ها با زاویه فاز ضرایب مختلف را دو طرف حقیقی ریک سینوس و کسینوس با

(v) بنابر استدلال گفته شده در مورد (iv) می‌توانیم بگوییم که اگر imaginary تابع را ملاحظه کنیم، بردم تمی تمام سینوس‌ها را خواهیم داشت و از آنجا که جمع تعداد بی‌نهایت زوج و فرد نیز فرد خواهد بود، $Im\{C_k\}$ فرد خواهد بود ⟸ درست

(vi) نادرست : می‌دانیم که اگر یک تابع تعداد متناهی از تعداد محدودی ناپیوستگی نداشته باشد، شرایط دیریکله را نقض کرده و نه در کل $\mathbb{R}$. برای مثال تابع پالس متناوب دارای بی‌نهایت نقطه ناپیوستگی در هر تناوب تنها ۲ ناپیوستگی دارد.

(vii) طبق نامساوی Bessel این نادرست است چرا که نامساوی پارسوال آن است :

$$\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} |f(t)|^2\,dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |C_n|^2 = |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2} \geq |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{N}\frac{a_n^2+b_n^2}{2}$$

(viii) درست : تفاوتی ندارد که کدام تناوب (ضریب صحیحی از تناوب اصلی) را قرار دهیم چرا که در این صورت فرکانس فشرده یا گسترده می‌شود. در این مورد خاص با فرکانس T برابر مثل $2T$، فرکانس از $\omega = \frac{2\pi}{T}$ به $\frac{2\pi}{2T}$ می‌رسد و می‌دانیم که با تغییر متغیر $\sum C_k e^{j\omega kt}$ را می‌توان برحسب فرکانس جدید نوشت.

(ix) نادرست : این جمله از دیدگاه که نادرست است • می‌توانیم تابعی را داشته باشیم که در یک نقطه ناپیوستگی داشته باشد به طوری که با میانگین حد چپ و راست آن نقطه برابر نباشد. در این صورت سری فوریه به میانگین این دو حد میل خواهد کرد و با مقدار تابع برابر نخواهد شد.

(x) درست $C_{-n} = C_n^*$ داریم که تغییر جهت می‌دهد. Reindexing by letting k to −k

$$x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_k e^{jk\omega t} \rightarrow x(-t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_k e^{-jk\omega t} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_{-k} e^{jk\omega t} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_k^* e^{jk\omega t}$$