تمرین سری 6 ریاضیات مهندسی — ٤٠٠١٠١٢٠٤ — محمد پارسا ...

سوال 1 :

$$\text{let } \left(((i)^{i})^{i\cdots}\right)^{i} = f_n(i)$$

(I)

$$i^n = \begin{cases} 1 & n \overset{4}{\equiv} 0 \to f_n(i) = i^1 = i \\ i & n \overset{4}{\equiv} 1 \to f_n(i) = i^i = e^{i\log i} = e^{i\left(\frac{i\pi}{2}\right)} = e^{-\pi/2} \\ -1 & n \overset{4}{\equiv} 2 \to f_n(i) = i^{-1} = -i \\ -i & n \overset{4}{\equiv} 3 \to f_n(i) = i^{-i} = \frac{1}{i^i} = e^{\pi/2} \end{cases}$$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = f_n(i)$

$\lim_{n\to\infty} a_n$ موجود نمی باشد چرا که $\{a_n\}$ به یک عدد همگرا نمی شود و به عبارت دیگر

$$\exists N > M : \lim_{n\to N} a_{n+1} \neq \lim_{n\to N} a_n$$

$Q_1Q_k = \phi_k - z$

$Q_kQ_1 = z - \phi_k$

ابتدا فرض می کنیم که $\overrightarrow{Q_1Q_k} = \overrightarrow{OQ_k} - \overrightarrow{OQ_1}$ و بنابراین

وضع که $Q_1 = (1,0) = z$ fix شده باشد. بنابراین $\{Q_i\}$ ریشه های n ام واحد هستند

$\hookrightarrow$ و $\phi^n = 1 \to \phi_k = \exp\left(\frac{2k\pi j}{n}\right)$

$$\hookrightarrow \prod_{i=2}^{n} l_i = \prod_{k=2}^{n-1} |Q_1Q_k| = \prod_{k=2}^{n-1} (z - \phi_k)$$

که چند جمله ای بر ریشه ها تجزیه اش

از طرف دیگر داریم

$$\phi^n - 1 = (\phi - 1)(\phi^{n-1} + \phi^{n-2} + \cdots + \phi + 1) = \prod_{k=1}^{n} (\phi - \phi_k) \times (\phi - z)$$

$$\hookrightarrow \phi^{n-1} + \phi^{n-2} + \cdots + \phi + 1 = \prod_{k=2}^{n-1} (\phi - \phi_k) = \frac{\phi^n - 1}{\phi - 1}$$

$$\text{if } \phi = 1 \Rightarrow \prod_{i=2}^{n} l_i = \prod (z - \phi_k) = \lim_{z\to 1} \frac{z^n - 1}{z - 1} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{z\to 1} \frac{n z^{n-1}}{1} = n$$

let $\hookrightarrow z = 1$

و حکم ثابت شد.

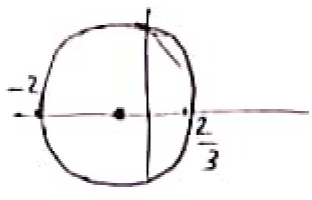
ادامه سؤال ۲:

(I)

$$\left.\begin{array}{l} 2|z| = |z-2| \\ z = x+iy \end{array}\right\} \quad 2\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-2)^2+y^2} \leftrightarrow 3x^2+3y^2+4x-4=0$$

$$\leftrightarrow \left(x+\frac{2}{3}\right)^2+y^2 = \frac{4}{3}+\frac{4}{9} = \frac{16}{9} \leftrightarrow$$

مکان هندسی نقاط روی یک دایره به مرکز $W(-\frac{2}{3},0)$ و به شعاع $\frac{4}{3}$



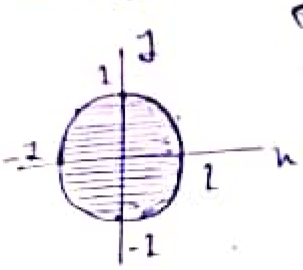
(ii)

$$\left.\begin{array}{l} \left|\dfrac{2z-i}{-iz-2}\right| \le 1 \\ z = x+yi \end{array}\right\} \to |2z-i| \le |-iz+2| \leftrightarrow \sqrt{4x^2+(2y-1)^2} \le \sqrt{x^2+(y-2)^2}$$

$$\leftrightarrow 3x^2+3y^2-3 \le 0 \leftrightarrow x^2+y^2 \le 1$$

همه‌ی نقاط داخل و روی دایره واحد به مرکز مبدأ

$$z = \{re^{j\theta} \mid 0 < r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

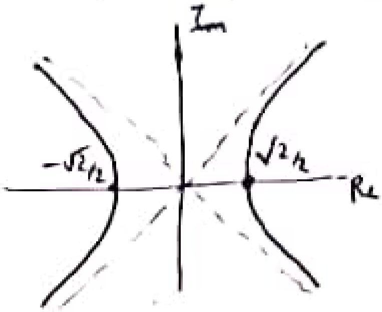


(iii)

$$|z|^2 + 3\mathrm{Re}\{z^2\} = 4 \leftrightarrow x^2+y^2+3\mathrm{Re}\{x^2-y^2+2ixy\} = 4$$

$$\leftrightarrow x^2+y^2+3(x^2-y^2) = 4 \to 4x^2-2y^2 = 4 \to x^2-\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

که معادله یک هذلولی است و همه‌ی نقاط روی آن را شامل می‌شود



IV. Let $f(z) = 1 + z + \cdots + z^n \Rightarrow$ then $z f(z) = z^{n+1} - 1 + f(z)$

therefore $f(z)\cdot(z-1) = z^{n+1} - 1 \rightarrow f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^{n+1}-1}{z-1} & (\forall z \in \mathbb{C},\ z \neq 1) \\ n & z = 1 \end{cases}$

d'moivre

Let $z = e^{j\theta}$ $\xrightarrow{\text{then}}$: $f(z) = \sum_{k=0}^{n} e^{jk\theta} = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) + i \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$

$\hookrightarrow f(z) = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \longrightarrow$ hence $\mathrm{Real}\{f(z)\} = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$

$$f(z) = \frac{-1 + e^{j(n+1)\theta}}{-1 + e^{j\theta}} = \frac{e^{\frac{j(n+1)\theta}{2}}\left(e^{\frac{j(n+1)\theta}{2}} - e^{\frac{-j(n+1)\theta}{2}}\right)}{e^{\frac{j\theta}{2}}\left(e^{\frac{j\theta}{2}} - e^{-\frac{j\theta}{2}}\right)} \times \frac{\frac{1}{2i}}{\frac{1}{2i}} = e^{\frac{j\theta n}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \left(\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right) \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\hookrightarrow \mathrm{Re}\{f(z)\} = \frac{\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{\theta}{2} + \sin\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right)}{2\sin\frac{\theta}{2}} = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right)}{2\sin\frac{\theta}{2}}}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) =$$

تبدیل ضرب به جمع

④

سوال 2:

(i) $f(z)=\dfrac{Re\{z^2\}}{|z|^2}=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

تابع بررسی کرد که حد آن وجود ندارد وجود دارد بصورت زیر

می‌توان نشان داد که اگر حد وجود داشته باشد از هر مسیری که به سمت $(0,0)$ برویم باید به یک عدد برسیم.

$\lim_{x,y\to(0,0)} f(z) \xrightarrow{} $ Let $(x,y)=(x,kx) \to f(z)=\dfrac{1-k^2}{1+k^2}$

$|n|\neq|k|$

Let $(x,y)=(x,nx) \to f(z)=\dfrac{1-n^2}{1+n^2}$

از آنجا که به دو جواب متمایز رسیدیم لذا این نقطه $(0,0)$ حد موجود نیست که ثابت می‌کند تابع $f(z)$ در $z=0$ پیوسته نیست.

(ii) $f(z)=|z|^2\ Im\{z\}=(x^2+y^2)y$

ابتدا ثابت می‌کنیم که حد $\lim_{z\to0 \text{ یا } (x,y)\to0} f(z)$ موجود است داریم: $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta \to |f(x,y)-f(0,0)|<\epsilon$

$\exists\ \delta>0,\ \forall\ \epsilon>0$

$0\le\sqrt{x^2+y^2}\le\delta>0$

$0\le|y|\le\sqrt{x^2+y^2}\le\delta$

$|f(x,y)-f(0,0)|=|y|\sqrt{x^2+y^2}$

$0\le|y|\sqrt{x^2+y^2}\le\delta^2$

کافی است که $\epsilon=\delta^2$ تا حد فوق برقرار باشد.

در نتیجه حد فوق برقرار است و از آنجا که مقدار این حد برابر با مقدار تابع در $z=0$ است، این تابع در همسایگی $z=0$ پیوسته است.

(II) (i) $W=\tanh z=\dfrac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}} \to w(e^{2z}+1)=e^{2z}-1 \to e^{2z}(w-1)+(w+1)=0$

$z=\tanh^{-1}w=\dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) \to z\neq-1$ صورت صفر نشود، $z\neq1$ مخرج صفر نشود.

$\begin{cases}u(r,\theta)=\ln r\\ v(r,\theta)=\theta\end{cases}$ به شرط $r\neq0$

$=\dfrac{1}{2\ln|1-z|}\log(1+z^2)$

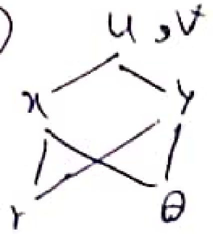
$\dfrac{d}{dz}\tanh^{-1}z=\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dz}\log\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1-z}{1+z}\times\dfrac{2}{(1-z)^2}=\boxed{\dfrac{1}{1-z^2}}\quad \forall z\in\mathbb{C}-\{1,-1\}$

(ii) $z^2\log(z+4)+i \longrightarrow |z+4|\neq0 \longrightarrow z\neq-4$

$\dfrac{d}{dz}\left(z^2\log(z+4)+i\right)=\boxed{2z\log(z+4)+\dfrac{z^2}{z+4}}\quad \forall z\in\mathbb{C}-\{-4\}$

سوال 3 : با استفاده از مشتق زنجیری خواهیم داشت

I



طبق کوشی - ریمان
$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

طبق مختصات قطبی
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = u_x\cdot\cos\theta + u_y\cdot\sin\theta = \frac{1}{r}\overbrace{\left(v_y\cdot y + v_x\cdot x\right)}^{\frac{\partial v}{\partial\theta}\ (*)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial\theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta} = -u_x\cdot r\sin\theta + u_y\cdot r\cos\theta = \Big(\underbrace{-v_y\cdot y - x\cdot v_x}_{-r\cdot\partial v/\partial r}\Big) \quad (**)$$

در نتیجه مبرهن است که روابط مقابل برقرارند :

$$\boxed{\begin{cases} r\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial v}{\partial\theta} \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial\theta} = -r\dfrac{\partial v}{\partial r} \end{cases}} \checkmark$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial r} = \dfrac{\partial v}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial r} = v_x\cdot\cos\theta + v_y\cdot\sin\theta = \dfrac{1}{r}\left(v_x\cdot x + v_y\cdot y\right) & (**) \\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial\theta} = \dfrac{\partial v}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial r} = -v_x\cdot r\sin\theta + v_y\cdot r\cos\theta = \left(-v_x\cdot y + v_y\cdot x\right) & (*) \end{cases}$$

II

ادامه سوال 3:

II (i) $f(z) = Re\{z^2\} = -y^2 + x^2 = \underbrace{u(x,y)}_{x^2-y^2} + i\underbrace{v(x,y)}_{0}$

$$\left.\begin{array}{l} u_x = 2x \neq 0 = v_y \\ u_y = -2y \neq 0 = -v_x \end{array}\right\} (0,0)$$

از آنجا که مشتقات جزئی $u(x,y)$ موجود و پیوسته هستند ولی تنها نقطه $(0,0)$ یعنی همان $z=0$ در معادلات کوشی ریمان صدق می‌کند، $f'(z)$ تنها در $z=0$ موجود است (البته $f(0)$ نیز موجود است) بنابراین $f(z)$ نه در همسایگی $z=0$ تحلیلی است.

(ii) $f(z) = \frac{1}{z^4} = r^4 e^{4i\theta} = \underbrace{r^4 \cos 4\theta}_{u(r,\theta)} + i\underbrace{r^4 \sin 4\theta}_{v(r,\theta)}$

$$\left.\begin{array}{l} r u_r = 4r^4 \cos 4\theta = 4r^4 \cos 4\theta = v_\theta \\ u_\theta = -4r^4 \sin 4\theta = -4r^4 \sin 4\theta = -r v_r \end{array}\right\}$$

تابع فوق در همه نقاط به جز نقطه $r=0$ یا همان $z=0$، تعریف شده و دارای مشتقات جزئی موجود و پیوسته برای $u(r,\theta)$ و $v(r,\theta)$ باشد. و همچنین در معادلات کوشی-ریمان صدق می‌کند. بنابراین تابع $f(z)$ در $\mathbb{C}-\{0\}$ موجود و تحلیلی است.

(iii) $f(z) = x^2 + iy^2 = u(x,y) + iv(x,y) \rightarrow \begin{cases} u_x = 2x \neq 2y = v_y \rightarrow 2(x-y)=0 \\ u_y = 0 \neq 0 = -v_x \end{cases}$

از آنجا که مشتقات جزئی $u(x,y)$ و $v(x,y)$ موجود و پیوسته می‌باشند و تابع در $\mathbb{C}$ تعریف شده است و از آنکه صرفاً در نقاطی از $\mathbb{C}$ که $Re\{z\} = Im\{z\}$ در معادلات کوشی-ریمان صدق می‌کند نتیجه می‌گیریم که تابع $f'(z)$ صرفاً در حالتی که $x=y$ موجود و تحلیلی است در نقاطی که $x=y$.

(iv) $f(z) = e^{\bar{z}} = e^{x-yi} = e^x(\cos y - i\sin y) \rightarrow \begin{cases} u_x = e^x \cos y \neq -e^x \cos y = v_y \\ u_y = -e^x \sin y \neq +e^x \sin y = -v_x \end{cases}$

تابع فوق در $\mathbb{C}$ تعریف شده و دارای مشتقات جزئی موجود و پیوسته برای $u(x,y)$ و $v(x,y)$ است. و صرفاً در نقاطی که $\sin y = 0$ و $\cos y = 0$ صدق می‌کند در معادلات کوشی ریمان اما می‌دانیم که $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ و در نتیجه در هیچ نقطه‌ای از $\mathbb{C}$ نیست که در معادلات CR صدق کند و $f'(z)$ موجود باشد. پس در هیچ جا از $\mathbb{C}$ تابع $f(z)$ تحلیلی نمی‌باشد.

III (i) $\left.\begin{array}{l} f \text{ is analytic} \\ Re\{f\} = \text{const} \end{array}\right\}$ $f = \underbrace{u(x,y)}_{c} + i\,v(x,y)$

$u_x = 0 = v_y \rightarrow v = A(x) \rightarrow Im\{f(z)\} = A$

$u_y = 0 = -v_x \rightarrow v = A$

constant with respect to x and y

$f(z) = c + iA$

↳ constant value

ادامه سؤال 3:

(ii) $\operatorname{Im}\{f(z)\} = C$, F is analytic $\Big\}$ CR implies that

$$-V_x = 0 = u_y \longrightarrow u(x,y) = A(x)$$
$$V_y = 0 = u_x \longrightarrow u(x,y) = A$$

$\Big\}$ $f(z) = A + iC$ ↳ Constant Value

(iii) $|f(z)| = \text{Const} = C$, F is analytic $\Big\}$

$$u(x,y)^2 + V(x,y)^2 = C^2 = |f(z)|^2$$

$$\frac{d}{dx} \rightarrow 2u(x,y)\cdot u_x(x,y) + 2V(x,y)\cdot \underbrace{\cancel{V_x(x,y)}}_{-u_y(x,y)} = 0$$

$$\frac{d}{dy} \rightarrow 2u(x,y)\cdot u_y(x,y) + 2V(x,y)\cdot \underbrace{\cancel{V_y(x,y)}}_{u_x(x,y)} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2u_x & -2u_y \\ 2u_y & 2u_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x,y) \\ V(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2u_x u_y \cdot u - 2u_y u_y \cdot V = 0 \\ 2u_y u_x \cdot u + 2u_x u_x \cdot V = 0 \end{cases}$$

با کم کردن

$$V(x,y)\left(u_x^2 + u_y^2\right) = 0 \xrightarrow{V \neq 0} \begin{cases} u_x(x,y) = 0 \\ u_y(x,y) = 0 \end{cases} \longrightarrow u(x,y) = A$$

به طریق مشابه با بالا همین فرآیند برای V نیز به دست می‌آید که $V(x,y) = B$ و در نتیجه

$$f(z) = A + iB = \text{Const}$$

سوال 4:

(i) $u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$

$u_x=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\ ,\ u_{xx}=\dfrac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$

$u_y=\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\ ,\ u_{yy}=\dfrac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$

$u_{xx}+u_{yy}=0$

در معادله لاپلاس صدق می‌کند و دارای مشتقات پاره‌ای موجود و پیوسته است پس دارای تابع تحلیلی است (همساز است)

$v(x,y)=\int u_x\,dy-u_y\,dx+c=-\dfrac{2y}{x^2+y^2}+c$

$\hookrightarrow f(z)=\dfrac{x}{x^2+y^2}+i\left(c-\dfrac{2y}{x^2+y^2}\right)$

(ii) $u(x,y)=\ln|z|=\ln\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

$u_x=\dfrac{x}{x^2+y^2}\rightarrow u_{xx}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$u_y=\dfrac{y}{x^2+y^2}\rightarrow u_{yy}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$u_{xx}+u_{yy}\neq 0$ $\longrightarrow$ در معادله لاپلاس صدق نمی‌کند و بنابراین دارای تابع هارمونیک مزدوج نیست (مشتقات پاره‌ای پیوسته دارد)

$v(x,y)=\int u_x\,dy-u_y\,dx+c=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+c$

$f(z)=f(x,y)=\frac{1}{2}\ln|x^2+y^2|+i\left(\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+c\right)$

(iii) $u(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$

$u_x=\dfrac{-2x}{(x^2+y^2)^2}\ ,\ u_{xx}=\dfrac{2y^2-6x^2}{(x^2+y^2)^3}$

$u_y=\dfrac{-2y}{(x^2+y^2)^2}\ ,\ u_{yy}=\dfrac{2(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$

$u_{xx}+u_{yy}\neq 0$

در معادله لاپلاس صدق نمی‌کند بنابراین همساز نیست.

(iv) $u(x,y)=-2-x^3+3xy^2+\sinh x\sin y$

$u_x=-3x^2+3y^2+\cosh x\sin y\rightarrow u_{xx}=-6x+\sinh x\sin y$

$u_y=6xy+\sinh x\cos y\rightarrow u_{yy}=6x-\sinh x\sin y$

$u_{xx}+u_{yy}=0$

در معادله لاپلاس صدق می‌کند که همساز است به دلیل داشتن مشتقات پاره‌ای موجود و پیوسته تحلیلی است

$v(x,y)=\int u_x\,dy-u_y\,dx+c=-3x^2y+y^3-\cosh x\cos y$

$f(z)=(-2-x^3+3xy^2+\sinh x\sin y)+i(-3x^2y+y^3-\cosh x\cos y)$

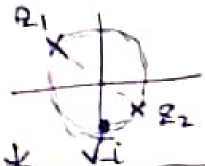
سوال ۵:

I (i) $\log(z^2+1)=i \rightarrow z^2+1=e^i \rightarrow z=\sqrt{e^i-1}$

$\sqrt{e^i-1}=\sqrt{(\cos 1-1)+i\sin 1}=\sqrt{re^{i\theta}} \rightarrow r=\sqrt{2-2\cos 1}\ ,\ \theta=\tan^{-1}\left(\frac{\sin 1}{\cos 1-1}\right)$

$z=\sqrt{r}\,e^{\frac{\theta}{2}},\ \sqrt{r}\,e^{\frac{\theta}{2}-\pi} \rightarrow \begin{cases} z_1=(2-2\cos 1)^{\frac14}\cdot e^{\frac12\left(\tan^{-1}\frac{\sin 1}{\cos 1-1}\right)}\cdot e^{2k\pi i} \\ z_2=(2-2\cos 1)^{\frac14}\cdot e^{\frac12\left(\tan^{-1}\frac{\sin 1}{\cos 1-1}\right)-\pi}\cdot e^{2k\pi i}\end{cases}$

(ii) $z=\sqrt{-i}=1.e^{\frac{3\pi}{2}i} \rightarrow z=1.e^{\frac{3\pi}{4}i}\ ,\ 1.e^{\left(\frac{3\pi}{4}+\pi\right)i}$



$z_1=1.e^{\frac{3\pi}{4}i}\ ,\ \cancel{z_2=1.e^{\frac{7\pi}{4}i}}$ غلط

(iii) $\cos z=2=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \xrightarrow{\text{let } e^{iz}=A} A+\frac{1}{A}-4=0 \xrightarrow{A\neq 0} A^2+4A+1=0$

$e^{iz}=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=2\pm\sqrt{3} \rightarrow iz=\log(2\pm\sqrt{3}) \rightarrow \begin{cases} z_1=-i\ln|2+\sqrt{3}|\cdot e^{2k\pi i} \\ \cancel{z_2=-i\ln|2-\sqrt{3}|}\cdot e^{2k\pi i}\end{cases}$ غلط

4

(i) let $w=\tan^{-1}z \Rightarrow iz=i\tan w=\frac{\sin w}{\cos w}=\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{e^{iw}+e^{-iw}}=\frac{e^{2iw}-1}{e^{2iw}+1}$

$\longrightarrow e^{2iw}(iz-1)+(1+iz)=0 \longrightarrow e^{2iw}=+\frac{1+iz}{1-iz} \rightarrow 2iw=+\log\left(\frac{iz+1}{-iz+1}\right)$

$\boxed{w=\frac{+i}{2}\log\left(\frac{iz+1}{-iz+1}\right)}=\boxed{\frac{i}{2}\ln\left|\frac{i+z}{i-z}\right|}$ $\qquad \frac{iz+1}{-iz+1}=\frac{i+z}{i-z} \leftarrow \boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftarrow \frac{a\pm c}{b\pm d}}$

$iw \quad -iw \quad 2iw$

سوال 6 : گزاره 2 ← نادرست

گزاره 1 : شرط اینکه یک تابع در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد این است که $f(z)$ همانند z مشتقات جزئی u و v نسبت به x و y موجود و پیوسته باشند و همچنین در معادلات کوشی ریمان صدق کنند. اگر دو مورد اول برقرار باشد ولی تنها بین نقاط دامنه تابع f اگر تنها یک نقطه در معادلات کوشی ریمان صدق کند آنگاه تابع f تنها در یک نقطه از دامنه‌اش مشتق‌پذیر است

مثال → $f(z) = Re\{z\}^2 - Im\{z\}^2 = x^2 - y^2 \Longrightarrow \begin{cases} u_x = 2x = 0 = v_y \\ u_y = -2y = 0 = -v_x \end{cases} \rightarrow (x,y) = (0,0)$

گزاره 2 : درست : برای مثال اگر $u(x,y) = x^2 - y^2$ ، $v(x,y) = 2xy$ باشد $v(x,y)$ مزدوج همساز $u(x,y)$ است اما $u(x,y)$ مزدوج همساز $v(x,y)$ نیست در کل $\mathbb{C}$:

$\begin{cases} u_x = 2x = v_y \\ u_y = -2y = -v_x \end{cases} \checkmark$ $\quad \begin{cases} v_x = 2y \neq u_y = -2y \\ v_y = 2x \neq -u_x = -2x \end{cases} X \longrightarrow$ معادله دوم فقط در $y=z$ صدق می‌کند و در کل $\mathbb{C}$ صدق نمی‌کند.

گزاره 3 : درست : اگر تابع u مزدوج همساز v است خواهیم داشت

$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \xrightarrow{\text{نتیجه می‌دهد}} \begin{cases} v_x = (-u_y) \\ v_y = -(-u_y) = u_x \end{cases}$

گزاره 4 : درست : ممکن است مجموعه‌ای نه باز و نه بسته باشد و ممکن است هم باز و هم بسته باشد مانند

$\hookrightarrow \mathbb{C}, \Phi, \mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3, \ldots$ $\quad \hookrightarrow$

گزاره 5 : نادرست . گزاره نادرست است و نمی‌توان مرز A را به صورت تفاضل بستار آن و درون آن بیان کرد . زیرا اگر مجموعه A بسته باشد، تفاضل A و بستار A تهی خواهد شد.

گزاره 6 : درست : می‌دانیم که می‌توان هر عدد مختلط z را به صورت نمای قطبی $re^{j\theta}$ نمایش دهیم و از آنجا که $e^{j\theta}$ یک تابع متناوب با تناوب $2\pi i$ می‌باشد برای هر عدد مختلط z ، حاصل $\arg(z)$ دارای بی‌نهایت مقدار متمایز است.

گزاره 7 : نادرست : اگر برای مثال از گزاره 4 به کمک آن بیاییم که کل $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{C}^n$ را در نظر بگیریم آنگاه می‌دانیم $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{C}^n$ نه باز و نه بسته است که یک مثال نقض برای گزاره فوق محسوب می‌شود.

گزاره 8 : نادرست : اگر مجموعه $\{0\}$ و $\mathbb{C} - \{0\}$ را در نظر بگیریم که یک دو به دو مجزا $\mathbb{C}$ است هر اشتراک ندارند ولی اجتماعشان یک مجموعه همبند است . همچنین می‌توان از $\mathbb{C}$ به صورت دو نیم‌صفحه در نظر بگیریم مثال نقضی برای این گزاره است.

گزاره 9 : درست : $e^{iz} = e^{iz + 2\pi i}$ بنابراین e^{iz} تابعی متناوب با تناوب $2\pi i$ است