$x(n), y(n)$ stationary & uncorrelated. 400101204 محمد پارسا رضایی DSP 3 / تمرین سری

نمره ۱: 87:

$\hookrightarrow E(x(n)y(n)) = E(x(n))E(y(n))$

(i) $E(w(n)) = E(x(n)+y(n)) = E(x(n)) + E(y(n)) = m_x + m_y$

(ii) $E(w(n)^2) = E(x(n)^2 + y(n)^2 + 2x(n)y(n)) = E(x(n)^2) + 2E(x(n))E(y(n)) + E(y(n))^2$

$= (\sigma_x^2 + m_x^2) + (\sigma_y^2 + m_y^2) + 2m_x m_y$

$\rightarrow Var(w(n)) = \sigma_w^2 = \left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + (m_x + m_y)^2\right) - E(w(n))^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$

نمره ۲: 90:

(a) $h(n) = a^n u(n) \rightarrow \phi_{hh}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u(k) a^{k-n} u(k-n)$ $(|a|<1)$

$= \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} a^{2k}\right) \times a^{-n} u(-n-1) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} a^{2k}\right) \times a^{-n} u(n) = \frac{a^{-n}}{1-a^2} u(-n-1) + a^{-n} \times a^{2n} \times \frac{1}{1-a^2} u(n)$

$= \frac{a^{-n}}{1-a^2} u(-n-1) + \frac{a^n}{1-a^2} u(n) = \frac{a^{|n|}}{1-a^2}$

(b) getting FT we get: $\mathcal{F}\{\phi_{hh}(n)\} = H(e^{j\Omega})H(e^{-j\Omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} \times \frac{1}{1-ae^{j\Omega}}$

$|H(e^{j\Omega})|^2 = H(e^{j\Omega})H^*(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} \times \frac{1}{1-ae^{j\Omega}} = H(e^{j\Omega})H(e^{-j\Omega}) = \Phi_{hh}(e^{j\Omega})$

$\mathcal{F}\{\phi_{hh}(n)\} = \Phi(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\left\{\frac{a^n u(n)}{1-a^2} + \frac{a^{-n}u(-n-1)}{1-a^2}\right\} = \boxed{\frac{1}{1-a^2}\left(\frac{1}{1-ae^{j\Omega}} + \frac{1}{1+ae^{j\Omega}}\right)}$

$\rightarrow \boxed{|H(e^{j\Omega})|^2 = \frac{1}{1-a^2}\left(\frac{2-2a\cos(\Omega)}{1+a^2-2a\cos(\Omega)}\right)}$

(c) using Parseval theorem: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\Omega})|^2 d\Omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{2n} u(n)$

$= \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} = \frac{1}{1-a^2}}$

Scanned by CamScanner

سوال ۲: ۹۱

(a)

$$\begin{cases} y(n) = x(n) - x(n-1) \longrightarrow h(n) = \delta(n) - \delta(n-1) \quad , \text{LTI} \\ \phi_{xx}(m) = R_x(m) = \sigma_x^2\,\delta(m) \end{cases}$$

$$\phi_{YY}(m) = E\left(Y(n_1)Y^*(n_2)\right) = E\left(\sum_{k,\ell} X(n_1-k)\,h(k)\,X^*(n_2-\ell)\,h^*(\ell)\right)$$

let: $n_1 - n_2 = m$

$$= \sum_{k,\ell} h(k)\,h^*(\ell)\,E\left(X(n_1-k)\,X^*(n_2-\ell)\right) = \sum_{k,\ell} h(k)\,h^*(\ell)\,R_x(n_1-n_2-k+\ell)$$

$$= \sum_{k,\ell} h(k)\,h^*(\ell)\,R_x(m-k+\ell) = \sum_{\ell}\left(R_x(m+\ell) * h(m)\right) h^*(\ell)$$

$$= R_x(m) * h(m) * h^*(-m)$$

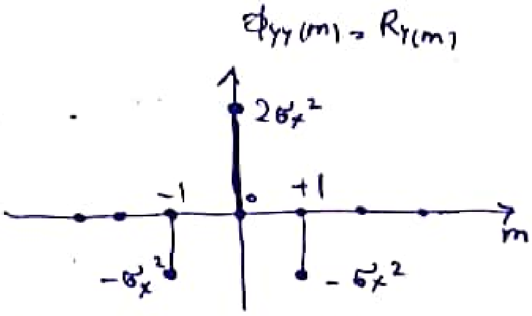
thus:

$$R_Y(m) = \phi_{YY}(m) = \left[\sigma_x^2\,\delta(m)\right] * \left[\delta(m) - \delta(m-1)\right] * \left[\delta(-m) - \delta(-m-1)\right]$$

$$= \left(\sigma_x^2\,\delta(m) - \sigma_x^2\,\delta(m-1)\right) * \left(\delta(m) - \delta(m+1)\right)$$

$$= \sigma_x^2\,\delta(m) - \sigma_x^2\,\delta(m+1) - \sigma_x^2\,\delta(m-1) + \sigma_x^2\,\delta(m)$$

$$= 2\sigma_x^2\,\delta(m) - \sigma_x^2\,\delta(m+1) - \sigma_x^2\,\delta(m-1)$$



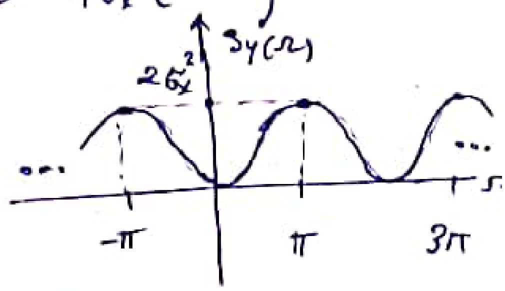
~~*** ***~~

(b) the average Power of output = ?

دقت می‌کنیم که سیگنال $R_Y(m)$ ، سیگنال انرژی است و زوج است.

$$\mathcal{F}\left\{R_Y(m) = \phi_{YY}(m)\right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_Y(m)\,e^{-j\Omega m} = 2\sigma_x^2 - \left(\sigma_x^2 e^{j\Omega m} + \sigma_x^2 e^{-j\Omega m}\right)$$

$$S_Y(\Omega) = 2\sigma_x^2\left(1 - \cos(\Omega)\right)$$



the average Power of $y(n)$

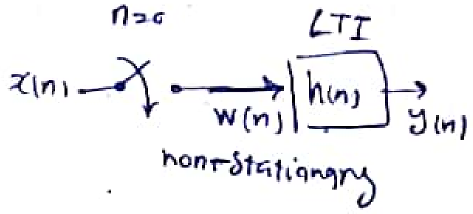
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_Y(\Omega)\,e^{-j\Omega m}\,d\Omega\,\Bigg|_{m=0} = \phi_{YY}(0) = R_Y(0) = 2\sigma_x^2$$

inverse fourier

(c) این سیستم مشتق‌گیر، توان (میانگین) اولیه سیگنال ورودی که σ_x^2 بود را دو برابر $2\sigma_x^2$ رسانده که نشان می‌دهد توان سیگنال نویز تقویت شده است.

$x(n) \rightarrow$ Stationary white noise Process

$m_x = 0 \; , \; R_x(m) = \sigma_x^2 \, \delta(m) \; , \; S_x(\Omega) = \sigma_x^2$



$w(n) = x(n)\, u(n) \qquad , \quad y(n) = w(n) * h(n)$

ⓐ the mean of output = ? $\qquad$ if $n<0 \rightarrow w(n)=0 \rightarrow x(n) \rightarrow$ otherwise $n \geq 0$

$n \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}\big(y(n)\big) = \mathbb{E}\big(w(n) * h(n)\big) = \mathbb{E}\big(\underbrace{x(n) * h(n)}_{\cdot \mathbb{1}(n-k \geq 0)}\big) = \mathbb{E}\Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\, x(n-k)\Big) \cdot \mathbb{1}(n \geq k)$

$= \sum_{k=-\infty}^{n} h(k)\, \mathbb{E}\big(x(n-k)\big) = \Big[\sum_{k=-\infty}^{n} h(k)\Big] m_x$

$$\Rightarrow m_y(n) = \begin{cases} 0 & n<0 \\ m_x \Big[\sum_{k=-\infty}^{n} h(k)\Big] & n \geq 0 \end{cases} = m_y(n) = \big[h(n) * u(n)\big] m_x \cdot u(n)$$

$\rightarrow$ میانگین خروجی محدود شد $y(n)$ (برعکس $x(n)$) ، ایستا نیست.

ⓑ $\phi_{YY}(n_1, n_2) = R_{YY}(n_1, n_2) = \mathbb{E}\big(Y(n_1)\, Y^*(n_2)\big)$

$\xrightarrow{n_1, n_2 \geq 0} R_{YY}(n_1, n_2) = \mathbb{E}\Big(\Big[\sum_{k,l} h(k)\, h^*(l)\, X(n_1-k)\, X^*(n_2-l)\Big]\Big)$

$= R_x(n_1, n_2) * h(n_1) * h^*(n_2) = \Big[\sum_{k,l=-\infty}^{\infty} R_x(n_1-k, n_2-l)\, h(k)\, h^*(l)\Big] \, \mathbb{1}(n_1-k \geq 0)\, \mathbb{1}(n_2-k \geq 0)\; \mathbb{1}(n_1 \geq 0)\, \mathbb{1}(n_2 \geq 0)$

$= \sum_{k=-\infty}^{n_1} \sum_{l=-\infty}^{n_2} R_x(n_1-k, n_2-l)\, h(k)\, h^*(l)$

ⓒ $\lim_{n \to +\infty} m_y(n) = m_x \lim_{n \to \infty} \Big[\sum_{k=-\infty}^{n} h(k)\Big] = m_x \Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\Big] = m_y$ $\quad (n \geq 0)$

$\lim_{n_1, n_2 \to \infty} R_{YY}(n_1, n_2) = \lim_{n_1, n_2 \to \infty} \sum_{k=-\infty}^{n_1} \sum_{l=-\infty}^{n_2} R_x(n_1-k, n_2-l)\, h(k)\, h^*(l)$

$= \Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_x(n_1-k, n_2-l)\, h(k)\, h^*(l)\Big] = R_{\hat{Y}}(n_1, n_2) = R_{\hat{Y}}(m)$

$= \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} R_x(\overbrace{n_1-n_2}^{m}-k+l)\, h(k)\, h^*(l) = \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} R_x(m-k+l)\, h(k)\, h^*(l)$

یعنی وقتی که n_1, n_2 به ∞ میل کنند، حالا $R_{YY}(n_1, n_2)$ ، $m_Y(n)$ به $R_Y(m)$ ، m_Y تبدیل می‌شوند یعنی به حالت stationary تبدیل می‌شود.

سوال ۵ : 95

(a) از آنجا که در فرم نتیجه بر $x(n+1)$ داریم و همچنین ضریب $\sigma_s^2(n)$ خطی رفتار نمی‌کند و همچنین نتیجه تابع $y(n)$ به سوال $x(n+1)^2$ که کاملا غیرخطی است وابسته است، سیستم نمی‌تواند خطی باشد.

$$y(n) = \frac{\sigma_s^2(n)}{\sigma_x^2(n)}\left(x(n) - m_x(n)\right) + m_x(n) =$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{3}x(n) - \frac{1}{3}x(n-1) - \frac{1}{3}x(n+1)\right)\sigma_s^2(n)}{\frac{1}{3}\times\left[\left(\frac{2}{3}\right)\left(x(n-1)+x(n)+x(n+1)\right)\right]^2} + \frac{1}{3}\left(x(n)+x(n-1)+x(n+1)\right)$$

(b) let $\hat{x}(t) = x(n-m)$

با فرض اینکه $x(n)$ خواهیم دید که $m_x(n)$ و $\sigma_s^2(n)$ و $\sigma_x^2(n)$ به صورت تغییر می‌کنند که شیفت می‌خورند در نتیجه سیستم shift invariant است.

$$\Rightarrow \hat{y}(n) = \frac{\hat{\sigma}_s^2(n)}{\hat{\sigma}_x^2(n)}\left(\hat{x}(n) - \hat{m}_x(n)\right) + \hat{m}_x(n)$$

$\hat{\sigma}_s(n) = \sigma_s(n+m)$, $\hat{\sigma}_x(n) = \sigma_x(n+m)$, $\hat{m}_x(n) = m_x(n+m)$, $\hat{x}(n) = x(n+m)$

$$\Longrightarrow \hat{y}(n) = y(n+m) \longrightarrow \text{the system shift invariant}$$

(c) سیستم Stable نیست. چرا که اگر به ازای ورودی‌ها محدود $x(n)$ داشته باشیم $\sum_{k=n-1}^{n+1} x(k) = 0$ در این صورت مخرج صفر شده و خروجی بی‌کران می‌شود.

(d) سیستم علی نیست چرا که مقدار $y(n)$ در لحظه n به لحظات آینده یعنی $n+1$ وابستگی دارد.

(e) اگر $\sigma_x^2(n) \ll \sigma_w^2$ باشد در این صورت $\sigma_s^2(n) = 0$ و در نتیجه داریم به ازای n:

$$y(n) \approx m_x(n) = \frac{1}{3}\left(x(n-1) + x(n) + x(n+1)\right) \qquad (i)$$

همچنین اگر داشته باشیم $\sigma_w^2 \ll \sigma_x^2(n)$ در این صورت $\sigma_s^2(n) \approx \sigma_x^2(n)$ و در نتیجه

$$y(n) \approx \frac{\sigma_x^2(n)}{\sigma_x^2(n)}\left(x(n) - m_x(n)\right) + m_x(n) = x(n) - m_x(n) + m_x(n) = x(n) \qquad (ii)$$

(iii) منطقی است چرا که اگر توان نویز کم باشد، خروجی تقریبا برابر ورودی است اما اگر توان نویز بسیار بیشتر از توان خود سیگنال $x(n)$ باشد، در این صورت خروجی برابر میانگین مقادیر $x(n)$ خواهد بود چرا که میانگین نویز سفید جمع شده با سیگنال برابر صفر است و صرفا میانگین $x(n)$ را استخراج می‌کنیم.

ⓐ

$$x(n) \rightarrow \boxed{h(n)} \rightarrow y(n)$$
$$v(n) \rightarrow \boxed{h(n)} \rightarrow z(n)$$

$$\phi_{yz}(n_1,n_2) = E\{Y(n_1)\, Z^*(n_2)\}$$

let: $n_1 - n_2 = m$

$$= E\left(\left[\sum_k h(k)\, X(n_1-k)\right]\left[\sum_l h^*(l)\, V^*(n_2-l)\right]\right)$$

$$\sum_{k,l} h(k)\, h^*(l)\, E\left(X(n_1-k)\, V^*(n_2-l)\right) = \sum_{k,l} \Phi_{xv}(\overbrace{n_1-n_2}^{m}-k+l)\; h(k)\, h^*(l)$$

$$\phi_{yz}(m) = \phi_{xv}(m) * h(m) * h^*(-m) \xrightarrow{h(n) \text{ is real}} = \phi_{xv}(m) * h(m) * h(-m)$$

$$\xrightarrow{\text{getting FT}} \Phi_{yz}(e^{j\Omega}) = \Phi_{xv}(e^{j\Omega})\, H(e^{j\Omega})\, H(e^{-j\Omega}) = \boxed{\Phi_{xv} \times |H(e^{j\Omega})|^2} \quad (*)$$

ⓑ

اگر سیگنال $v(n)$ را $-x(n)$ وارد کنیم در $m=0$ حاصل $R_{xv}(m)$ (cross corr.) ، کمینه‌اش بیشینه می‌شود با علامت منفی است. پس خواهیم داشت

$x(n) \rightarrow$ نویز سفید گوسی

$$R_{xv}(m) = -\sigma_x^2\, \delta(m) = \Phi_{xv}(m) \rightarrow \Phi_{xv}(e^{j\Omega}) = -\sigma_x^2 \xrightarrow{(*)} \Phi_{yz}(e^{j\Omega}) = -\sigma_x^2\, |H(e^{j\Omega})|^2$$

در نتیجه مقدار $\Phi_{yz}(e^{j\Omega})$ برای حالتی که $x(n) = -v(n)$ منفی شد.