تمرین سری 8 ریاضیات مهندسی — محمدیاسر دینی — ٤٠٠١٠١٢٠٤

سوال ۴:
بخش اول:

(I) $a_n = \frac{n!\,(2i)^n}{n^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,(2i)^{n+1}\cdot n^n}{n!\,(2i)^n\,(n+1)^{n+1}}\right|$

$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!\,(n+1)\,(2i)^n\,2i\,(n)^n}{n!\,(2i)^n\,(n+1)\,(n+1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$

$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = 2\frac{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n\to\infty} 1-\frac{1}{n+1}} = 2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = 2e^{-1} \simeq 0.74 < 1$

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = A$

$\to \ln A = \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1-t)}{t} \xrightarrow{\text{Hop}} \frac{-1}{1} = -1$ $\quad \boxed{A = e^{-1}}$

(II) $b_n = \frac{1}{n^2-i} \Rightarrow \forall n \quad \left|\frac{1}{n^2-i}\right| < \left|\frac{1}{n^2}\right| \Leftrightarrow \frac{1}{(n^2+1)^2} < \frac{1}{n^2} = x_n$

از آنجا که $\forall n \; b_n \le x_n$ داریم $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ بنابر سری های p توانی همگرا است (2>1) می‌توانیم نتیجه بگیریم که طبق آزمون مقایسه $\sum b_n$ همگرا است.

($\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگرا $\Leftrightarrow$ آزمون انتگرال $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx = \left(\frac{-1}{x}\right)\Big|_1^{\infty} = 1$: همگرا) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگراست

(III) $c_n = \left(\frac{ai}{b}\right)^n n^4 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)\cdot n^{\frac{4}{n}} = \frac{a}{b}\lim_{n\to\infty} n^{\frac{4}{n}} = \frac{a}{b}$

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \begin{cases} \text{واگرا} & a > b \\ \text{همگرا} & a < b \\ \text{واگرا} & a = b \end{cases}$

بنابر آزمون ریشه

$a = b \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} i^n n^4 = \left(\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)^4 - n^4\right) + i\left(\sum_{n=0}(n+2)^2 - n^4\right) = (1+i)\left(\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)^4 - n^4\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left((n+2)^4 - n^4\right)$ واگراست چراکه به کمک آزمون انتگرال داریم:

$\int_1^{\infty}(x+2)^4 - x^4\,dx = \left(\frac{(x+2)^5}{5} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_1^{\infty} = \infty$

let $n^{\frac{4}{n}} = 1+t$

$n^4 = (1+t)^n$

پس هم بخش حقیقی و هم بخش موهومی سری به ∞ میل کرده و در نتیجه واگراست.

سوال 1:
بخش سوم بخش اول

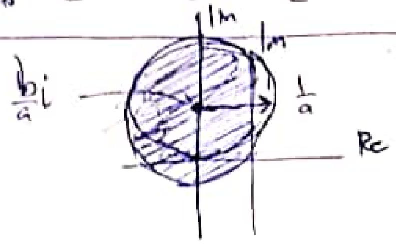
(I) $a_n = \frac{2^n}{n!} z^{3n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}\, z^{3n+3}\, n!}{2^n \cdot z^{3n} \cdot (n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1}|z|^3 = 0 = \frac{1}{R}$$

بنا بر آزمون نسبت

$R = \infty$ شعاع همگرایی (همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$)

(II) $h_n = \sum_{n=0}^{\infty} (az-bi)^n$



اگر واگرا باشد >1
اگر همگرا باشد <1

بنا بر آزمون نسبت

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{|(az-bi)^{n+1}|}{|(az-bi)^n|}\right) = |az-bi| < 1$$

$\longrightarrow |z - \frac{b}{a}i| < \frac{1}{a}$

شعاع همگرایی: $\frac{1}{a}$ ، دایره به مرکز $\frac{b}{a}i$ و شعاع $\frac{1}{a}$ $\Leftarrow$ ناحیه همگرایی

سوال 1: بخش دوم:

(I) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(i)(z-i)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-i)^n = z^5 - z^3 + 6$

$a_0 = f(i) = i^5 - i^3 + 6 = i - (-i) + 6 = 2i + 6$

$a_1 = \frac{f'(z)}{1!}\Big|_{z=i} = 5i^4 - 3i^2 = 8$

$a_2 = \frac{f''(z)}{2!}\Big|_{z=i} = \frac{1}{2}(20i^3 - 6i) = -13i$

$a_3 = \frac{f^{(3)}(z)}{3!}\Big|_{z=i} = \frac{1}{6}(60i^2 - 6) = -11$

$a_4 = \frac{f^{(4)}(z)}{4!}\Big|_{z=i} = \frac{1}{24}(120i) = 5i$

$a_5 = \frac{f^{(5)}(z)}{5!}\Big|_{z=i} = \frac{1}{120}(120) = 1$

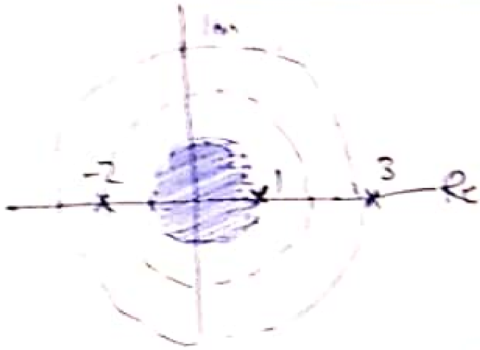
$\forall n \geq 6: \frac{f^{(n)}(z)}{n!}\Big|_{z=i} \to 0 = a_n$

$\longrightarrow f(z) = (2i+6) + 8(z-i) + (-13i)(z-i)^2 + (-11)(z-i)^3 + 5i(z-i)^4 + (z-i)^5$

شعاع همگرایی

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 = \frac{1}{R} \to R = \infty$ (شعاع همگرایی)

سوال 2 :



$$f(z)=\frac{2z+1}{(z-1)(z-3)(z+2)}=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

(الف)

سری تیلور برای ناحیه‌ای معتبر است که در آن قطب نباشد

بنابراین تنها صفحه‌ای به مرکز مبدأ و به شعاع قطب می‌شود ناحیه معتبر برای سری تیلور $f(z)$

سطح دایره : مرکز مبدأ و به شعاع 1 .

(ب)

ادامه سوال 2 :

$$f(z)=\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{1}{z-1}\right)+\left(\frac{-1}{5}\right)\frac{1}{z+2}+\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{1}{z-3}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} x_n+\sum_{n=0}^{\infty} y_n+\sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

$$\forall n:\quad x_n=\left(\frac{-1}{2}\right)\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{z-1}\right)\Big|_{z=0}=\frac{1}{2\times n!}\;\frac{n!}{(z-1)^{n+1}}\Big|_{z=0}=\frac{1}{2}$$

$$\forall n:\quad y_n=\left(\frac{-1}{5}\right)\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{z+2}\right)\Big|_{z=0}=\left(\frac{-1}{5\times n!}\right)\frac{n!\,(-1)^{n+1}}{(z+2)^{n+1}}\Big|_{z=0}=\frac{(-2)^{-n}}{5\times 2}$$

$$\forall n:\quad z_n=\left(\frac{7}{10}\right)\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{z-3}\right)=\frac{7}{10\times n!}\cdot\frac{n!}{(z-3)^{n+1}}\Big|_{z=0}=\frac{-7\times(-3)^{-n}}{3\times 10}$$

$$\forall n:\quad a_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{7}{30}\right)(-3)^{-n}+\left(\frac{2^{-n}}{10}\right)$$

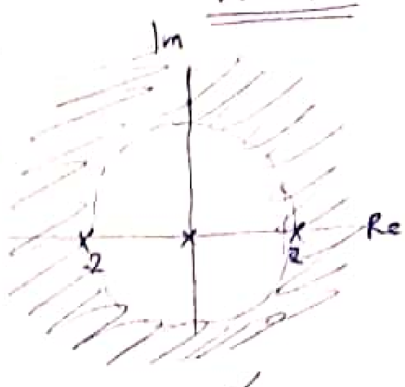
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n\left(\frac{-1}{2}+\frac{(-2)^{-n}}{40}+\frac{7}{30}(-3)^{-n}\right)$$

سوال 3 :

(I) $f(z) = \dfrac{2(4-z)}{z(z-2)(z+2)} = \dfrac{2}{z} - \dfrac{3}{z(z+2)} - \dfrac{1}{z(z-2)}$

$= \dfrac{2}{z} + \dfrac{3}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{2}{z}\right)^n - \dfrac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{2}{z}\right)^n$

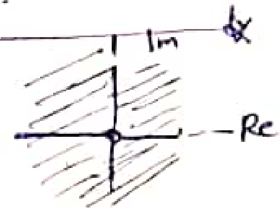
$= \dfrac{2}{z}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty}\left[\dfrac{3(-1)^n\left(\frac{2}{z}\right)^n + \left(\frac{2}{z}\right)^n}{2}\right]\right)$



$z \neq 0, 2, -2$ برای آنکه سری توانی برای $|z|$ معتبر و همگرا باشد باید به صورت توأم همگرا باشند

$\sum \left(\frac{2}{z}\right)^n$ همگرا $\longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{\left(\frac{2}{z}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{z}\right)^n}\right| = \dfrac{2}{|z|} < 1 \longrightarrow |z|>2$ (تعبیر آزمون نسبت)

(II) $f(z) = z^3\cos\left(\frac{1}{z^2}\right) = z^3\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{z^2}\right)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\, z^{-4n+3}}{(2n)!}$

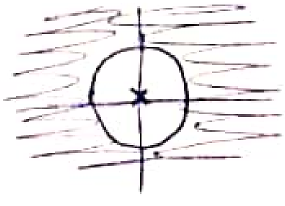


$\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{z^{-4}}{2(n+1)\times(2n+1)}\right| = 0 = \dfrac{1}{R} \longrightarrow R=\infty$ شعاع همگرایی

ناحیه همگرایی ← همه نقاط صفحه مختلط به جز مبدأ $z \in \mathbb{C}-\{0\}$ به عبارتی: $(|z|>0)$

(III) $f(z) = \dfrac{e^{-\frac{1}{z^n}}}{z^m} = z^{-m}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-z^{-n})^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k\cdot z^{-kn-m}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(k!)(z^{kn+m})}$

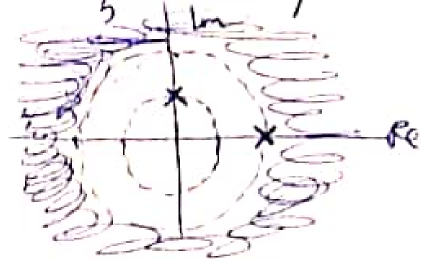
آزمون نسبت $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{n}z^{-k}\right| = \dfrac{1}{|z|^k} < 1 \longrightarrow |z|>1$



ناحیه همگرایی ← سطح خارج دایره واحد به مرکز مبدأ صفحه مختلط

(IV) $f(z) = \dfrac{z}{(z-2)(z-i)} = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1-2i}{z-i} + \dfrac{4+2i}{z-2}\right) = \dfrac{1}{5z}\left(\dfrac{1-2i}{1-\frac{i}{z}} + \dfrac{4+2i}{1-\frac{2}{z}}\right)$

$= \dfrac{1}{5z}\left[\underbrace{(1-2i)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{z}\right)^n}_{A} + \underbrace{(4+2i)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n}_{B}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{(1-2i)\cdot i^n + (4+2i)2^n}{5}\right)z^{-n-1}$



شرط همگرایی B $\Rightarrow \left|\frac{2}{z}\right| = \dfrac{2}{|z|} < 1 \longrightarrow |z|>2$

شرط همگرایی A $\Rightarrow \left|\left(\frac{i}{z}\right)^n\right| = \dfrac{1}{|z|} < 1 \longrightarrow |z|>1$

$\Big\}\ |z|>2$

سوال ۴ : نقطه تکین تابع $f(z)$ در $z=-1$ است.

I) $f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z+1}\right)$

از بسط تابع در همسایگی $z=-1$ داریم : (فرض کنید که $z+1=t$)

$$f(z) = g(t) = (t-1)^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right) = (t-1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t^{-1})^{2n+1}(-1)^n}{(2n+1)!} = (t^2-2t+1)\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{6(t^3)} + \frac{1}{5!\,t^5} \cdots\right)$$

$$\underset{z=-1}{\operatorname{Res}} f(z) = \underset{t=0}{\operatorname{Res}}\, g(t) = \text{ضریب جمله } \frac{1}{t} \text{ در بسط } g(t) = \frac{-1}{6} + 1 = \boxed{\frac{5}{6}}$$

II) $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-\pi i)^5}$

نقطه تکین تابع $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-\pi i)^5}$ در $z=\pi i$ است.

از بسط تابع در همسایگی $z=\pi i$ داریم : (فرض کنید که $z-\pi i = t$) [قطب از مرتبه ۵ است]

$$f(z) = g(t) = \frac{e^{t+\pi i}}{t^5} = \frac{\overset{-1}{e^{\pi i}}}{t^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = -t^{-5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-t^{n-5}}{n!}$$

$$\underset{z=\pi i}{\operatorname{Res}} f(z) = \underset{t=0}{\operatorname{Res}}\, g(t) = \text{ضریب جمله } \frac{1}{t} \text{ در بسط } g(t) = \frac{-1}{4!} = \boxed{\frac{-1}{24}}$$

III) $f(z) = (1-z^3)\, e^{\frac{1}{z}}$

نقطه تکین تابع $z=0$ است.

$$f(z) = (1-z^3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!} = (1-z^3)\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{24z^4}\right)$$

$$\underset{z=0}{\operatorname{Res}} f(z) = \text{ضریب جمله } \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{24} = \boxed{\frac{23}{24}}$$

سؤال 6 :

گزاره 1: درست : $z=3$ نقطه تکین اساسی نیست چراکه $\exists m \in \mathbb{N} : \lim_{z \to 3} (z-3)^m f(z) \neq 0$
و همچنین چون که $(z^2-9)=0$ دو ریشه $z=-3$ دارد قطب مرتبه 2 است.

گزاره 2: درست : نمایش یک تابع به صورت تابع سری توانی در یک دامنه خاص اگر موجود باشد یکتاست. و برابر سری تیلور تابع در آن نقطه است که این یکتاست حول یک نقطه ثابت.

گزاره 3: درست : اگر یک سری توانی حول مرکزش همگرا باشد تا آن گاه سری تیلور حول مرکز سری توانی باید موجود نباشد ولی ممکن نیست و بنابراین یک تناقض است چون مقدار تابع اولاً باید موجود باشد و ثانیاً دامنه به صورت همبند باز و تحلیلی باشد.

گزاره 4: درست : صفرهای یک نقطه از یک تابع تحلیلی صفرهای تنها تحلیلی هستند در حالی قطب گیری نیستند.