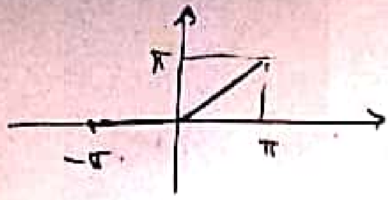
محمدپارسا دینی * 400101204 * تمرین تشریحی سری 1 ریاضیات مهندسی

* سوال 1 - بخش 1:



$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle T\rangle} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{2}\right) = \pi/4$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{+1}{\pi n^2}\left(\cos n\pi - 1\right) = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} = \begin{cases} 0 & n \overset{2}{\equiv} 0 \\ \dfrac{-2}{\pi n^2} & n \overset{2}{\not\equiv} 0 \end{cases}$$

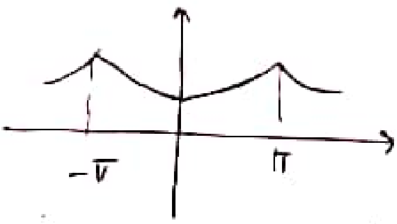
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{-\pi}{n}\cos n\pi = \frac{-\pi\cdot(-1)^n}{n} = \begin{cases} -1/n & n \overset{2}{\equiv} 0 \\ 1/n & n \overset{2}{\not\equiv} 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \pi/4 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{\pi(2k-1)^2}\cos(2k-1)x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sin(nx)}{n}$$

---

* سوال 1 - بخش 2:



$$f(x) = \begin{cases} \pi e^{-x} & -\pi < x < 0 \\ \pi e^{x} & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle T\rangle} f(x)\,dx \xrightarrow{f \text{ is even}} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \pi e^{x}\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\pi e^{x}\right)\Big|_0^{\pi} = e^{\pi} - 1$$

استفاده از رابطه $\cos nx = \dfrac{e^{jnx} + e^{-jnx}}{2}$

$\cos nx$, $f(x)$ هر دو زوج اند

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \pi e^{x}\cos nx\,dx = 2\int_0^{\pi} e^{x}\cdot\frac{e^{jnx} + e^{-jnx}}{2}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} e^{x(jn+1)} + e^{x(-jn+1)}\,dx = \left(\frac{e^{x(jn+1)}}{jn+1} + \frac{e^{x(-jn+1)}}{-jn+1}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi}$$

1

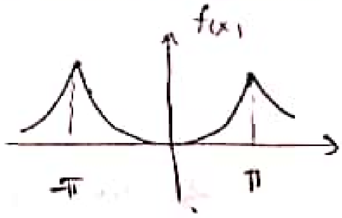
$$a_n = -\left(\frac{1}{jn+1} + \frac{1}{-jn+1}\right) + e^{\pi}\left(\frac{e^{jn\pi}}{jn+1} + \frac{e^{-jn\pi}}{-jn+1}\right) = \frac{-2}{n^2+1} + e^{\pi}\cdot(-1)^n \frac{-2}{1+n^2}$$

$$= \frac{2(e^{\pi}\cdot(-1)^n - 1)}{n^2+1}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{<T>} f(x)\sin nx\,dx = 0 \longleftarrow$$ f(x) زوج و $\sin x$ فرد است

$$\Rightarrow f(x) = (e^{\pi}-1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(e^{\pi}\cdot(-1)^n - 1)}{n^2+1}\cos nx$$

سوال 1 - بخش 3:



$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}(x^3)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}\sin nx + \frac{2x}{n^2}\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx\right]_0^{\pi}$$

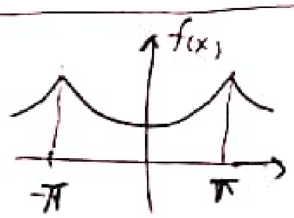
x^2 و $\cos nx$ زوج است

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{n^2}\cos n\pi = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\,dx = 0 \longleftarrow$$ f(x) زوج و $\sin x$ فرد است

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cdot(-1)^n\cdot\cos nx$$

سوال 1 - بخش 4:



$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cosh x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cosh x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}(\sinh x)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{e^{2\pi}-1}{2e^{\pi}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cosh x\cos nx\,dx \xrightarrow{} \frac{2}{\pi}\,\frac{n^2}{n^2+1}\left(\frac{\cosh x\,\sin(nx)}{n} + \frac{\sinh x\cdot\cos nx}{n^2}\right)\Big|_0^{\pi}$$

با جزء به جزء زدن

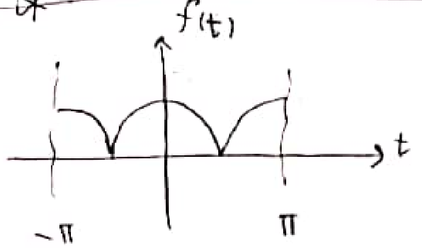
$$= \frac{2}{\pi(n^2+1)}\left(n\cosh(\pi)\sin n\pi + \sinh(\pi)\cdot\cos n\pi\right) = \frac{2}{n^2+1}\sinh(\pi)(-1)^n$$

$$\longrightarrow a_n = \frac{2(e^{\pi}-e^{-\pi})(-1)^n}{2(n^2+1)\pi} = \frac{2(e^{2\pi}-1)(-1)^n}{2e^{\pi}(n^2+1)\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cosh(x)\,\sin(nx)\,dx = 0 \longleftarrow$$ Coshx تابع زوج است در حالیکه sinx تابع فرد است

$$\Longrightarrow f(x) = \left(\frac{e^{2\pi}-1}{\pi\cdot e^{\pi}}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{2\pi}-1)\cdot(-1)^n}{2\pi\cdot e^{\pi}\,(n^2+1)} \cos nx$$

سوال ۲ - تمرین ۲ :



$T = \pi$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\cos x|\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\cos x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}(+\sin x)\Big|_0^{\pi/2} = 2/\pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(n+1)x + \cos(n-1)x}{2}\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n-1)x}{n-1}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi+n\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{-\pi-n\pi}{2}\right)}{n+1} + \frac{\sin\left(\frac{\pi-\pi n}{2}\right) - \sin\left(\frac{-\pi+\pi n}{2}\right)}{1-n}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+1)\right)}{n+1} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right)}{-1+n}\right) = \begin{cases} 0 & n \overset{4}{\equiv} 1 \\ \dfrac{4}{\pi(n^2-1)} & n \overset{4}{\equiv} 2 \\ 0 & n \overset{4}{\equiv} -1 \\ \dfrac{-4}{\pi(n^2-1)} & n \overset{4}{\equiv} 0 \end{cases}$$

$\forall n: b_n = 0$: از آنجا که تابع f(t) زوج است در نتیجه

در پایان به دست می‌آید که :

$$\Longrightarrow f(t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\,(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} \cos(2kt)$$

سوال ۱ - بخش ۶: ابتدا سری فوریه را برای حالتی که $T=2\pi$ یا $l=\pi$ محاسبه می‌کنیم.

ضمناً از آنجایی که $\sin^3 x$ تابع فرد است $\leftarrow a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{4}\left(3\sin x\sin nx - \sin 3x\sin nx\right)dx$$

$\sin^3 t = \frac{3}{4}\sin t - \frac{\sin 3t}{4} \leftarrow$ استفاده از اتحاد

و سه حالت پیش می‌آید. اگر $n=1$ یا $n=3$ نباشد انتگرال فوق صفر می‌شود پس $\forall n \neq 1,3 \Rightarrow b_n = 0$

و اما برای $n=1$ و $n=3$ داریم:

$$b_1 = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 3\sin x\sin x - \sin 3x\sin x\,dx = \frac{3}{4\pi}(\pi) = \frac{3}{4}$$

$$b_3 = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 3\sin 3x\sin x - \sin 3x\sin 3x\,dx = \frac{-1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 3x\,dx = \frac{-1}{4\pi}(\pi) = -\frac{1}{4}$$

پس به دست آمد که $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$. حال با گسترش دامنه تناوب از $T=2\pi$ به T دلخواه و جایگذاری آن در رابطه فوق به دست می‌آید که:

let $x: \frac{n\pi x}{l}$

$$\boxed{\sin^3\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \frac{3}{4}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{3n\pi x}{l}\right)}$$

سوال ۱ - بخش ۷: بخش dc سری فوریه همان a_0 است که از رابطه ذیل به دست می‌آید

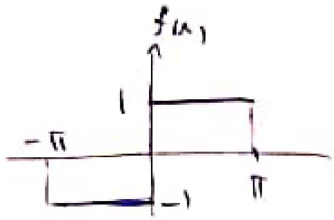
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x e^{ax}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x}{a}e^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax}\right)\Bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi}$$

$$= \frac{a\pi e^{a\pi} + a\pi e^{-a\pi} + e^{-a\pi} - e^{a\pi}}{2\pi a^2}$$

بخش dc یا مقدار متوسط تابع در یک دوره تناوب

محمدرضا دینی 4001d204 تمرین سری یک تئوری

سوال 2 - بخش 1 :



$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$$

f is odd

$$\forall n: \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0$$

$f(x)$ تابعی فرد و $\cos(nx)$ زوج است پس $f(x)\cos nx$ فرد خواهد بود و در نتیجه انتگرال فوق صفر می‌باشد

$$\forall n: \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx\,dx$$

f فرد و $\sin nx$ نیز فرد است

بنابراین $f(x)\sin(nx)$ زوج خواهد بود

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-1}{n}\cos nx\right)\Big|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & n \overset{2}{\equiv} 0 \\ \frac{4}{\pi n} & n \overset{2}{\not\equiv} 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} \longleftarrow \text{the fourier expansion of } f(x)$$

سوال 2 - بخش 2 :

$$S_{2n-1}(x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}\right)\frac{4}{\pi}$$

برای یافتن نقاط اکسترمم S_{2n-1} ، معادله $\frac{dS_{2n-1}}{dx} = 0$ را حل می‌کنیم

$$\frac{dS_{2n-1}}{dx} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(2k+1)x = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{(2k+1)jx}+e^{-(2k+1)jx}}{2}$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{2(2k+1)jx}+1}{2e^{(2k+1)jx}} = \frac{2}{\pi}\left(\sum_{k=0}^{n-1}e^{(2k+1)jx}+\sum_{k=0}^{n-1}e^{-(2k+1)jx}\right)$$

با سری هندسی

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{(e^{2jx})^n-1}{e^{2jx}-1}\cdot e^{jx}+\frac{(e^{-2jx})^n-1}{e^{-2jx}-1}\cdot e^{-jx}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-e^{-jx}+\cancel{e^{jx}}+e^{(2n-1)jx}-e^{(2n+1)jx}-\cancel{e^{jx}}+e^{-jx}+e^{(-2n+1)jx}-e^{(-2n-1)jx}}{(e^{2jx}-1)(e^{-2jx}-1)}\right)$$

$$\frac{dS_{2n-1}}{dx} = \frac{\frac{2}{\pi}\left(e^{-jx}-e^{jx}\right)\left(e^{2njx}-e^{-2njx}\right)}{2-e^{2jx}-e^{-2jx}} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{-2j\sin x \cdot 2j\sin(2nx)}{2-2\cos 2x}$$

$$= \frac{-8}{\pi}\cdot\frac{\sin x \cdot \sin 2nx}{2\sin^2 x} = \frac{-4}{\pi}\,\frac{\sin 2nx}{\sin x} \xrightarrow[x\neq 0]{n\neq 0} \sin 2nx = 0$$

$$\longrightarrow x \in \left\{ \frac{k\pi}{n} \,\middle|\, 0 < k \leq 2n-1 \right\} \cup \left\{ \frac{\pi + 2k\pi}{2n} \,\middle|\, 0 < k \leq 2n-1 \right\}$$

از آنجا که $x=0$ ریشه فرض نیست می‌توان گفت که در صورت عضو نبودن جواب قیمت و روابط فوق معتبرند. پس $4n-1$ جواب معادله فوق دقیقاً به فاصله مساوی $\frac{\pi}{2n}$ از یکدیگر هستند.

راه دوم:

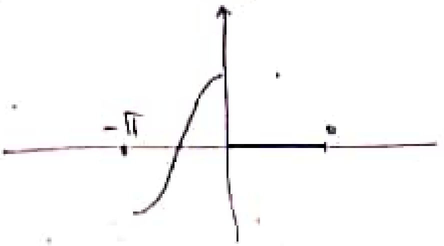
$$\frac{dS_{2n-1}}{dx} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(2k+1)x = 0 \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } \sin x} \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sin x\cos(2k+1)x = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل جمع به ضرب}} \frac{2}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sin((2k+2)x) - \sin(2kx)\right) = \frac{2}{\pi}\left(\sin 2nx - \sin 0\right)$$

$$\Rightarrow \sin 2nx = 0 \xrightarrow{x\neq 0} x \in \left\{ \frac{k\pi}{n} \,\middle|\, 0 < k \leq 2n-1 \right\} \cup \left\{ \frac{\pi + 2k\pi}{2n} \,\middle|\, 0 < k \leq 2n-1 \right\}$$

در نتیجه مقدار ثابت میان نقاط اکسترمم (max و min متوالی) برابر $\frac{\pi}{2n}$ است.

سوال ۳ تشریحی :



$$\text{i)}\quad a_0=\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} f(x)\,dx=0$$

$$\text{ii)}\quad a_n=\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos nx\cos x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\cos(n+1)x+\cos(n-1)x}{2}\,dx$$

$(\forall n\neq 1)$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin(n+1)x}{n+1}+\frac{\sin(n-1)x}{n-1}\right)\Big|_{-\pi}^{0}=0$$

$$a_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos^2 x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\cos 2x+1}{2}\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin 2x+2x}{4}\right)\Big|_{-\pi}^{0}=\frac{1}{2}$$

$$b_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos x\sin x\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin 2x\,dx=0$$

$$\text{iii)}\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos x\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin(n+1)x+\sin(n-1)x}{2}\,dx=$$

$(\forall n\neq 1)$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{-\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{-\cos(n-1)x}{n-1}\right)\Big|_{-\pi=x}^{x=0}=\frac{-1}{2\pi}\left(\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}+\frac{1-(-1)^{n-1}}{n-1}\right)$$

$$=\frac{-1+(-1)^{n+1}}{2\pi}\left(\frac{2n}{n^2-1}\right)=\begin{cases}\dfrac{-2n}{\pi(n^2-1)} & n\overset{2}{\equiv}0\\[2mm] 0 & n\overset{2}{\not\equiv}0\end{cases}$$

در پایان خواهیم داشت :

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}\cos x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2(2k)}{\pi(4k^2-1)}\sin 2kx$$

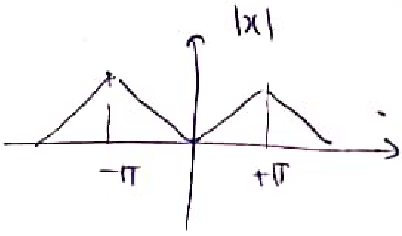
با قرار دادن $x=\frac{\pi}{4}$ خواهیم داشت :

$$f(\pi/4)=0=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-4k}{\pi(4k^2-1)}\sin\frac{k\pi}{2}$$

از طرف دیگر می‌دانیم $\sin\frac{k\pi}{2}=\begin{cases}0 \leftarrow k\overset{4}{\equiv}0,2\\ 1\leftarrow k\overset{4}{\equiv}1\\ -1\leftarrow k\overset{4}{\equiv}-1\end{cases}$ همچنین خواهیم داشت :

$$\boxed{\frac{-1}{2}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{-\sqrt{2}}{4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(2k-1)(-1)^k}{\pi(4(2k-1)^2-1)}=S}$$

سوال 3 - بخش 2 :



$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle T\rangle} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$$, $\forall n : b_n = 0$, |x| زوج , $\sin nx$ فرد است

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\langle T\rangle} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx - \frac{1}{n}\sin nx \frac{-1}{n}\cos nx\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{-2}{\pi n}\left(\cos n\pi - 1\right) = \frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n} = \begin{cases} 0 & n \overset{2}{\equiv} 0 \\ \frac{4}{\pi n} & n \overset{2}{\not\equiv} 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)}\cos(2k-1)x$$

با $f(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)+f(-h)}{2} = 0$ پس فوریه‌اش است :

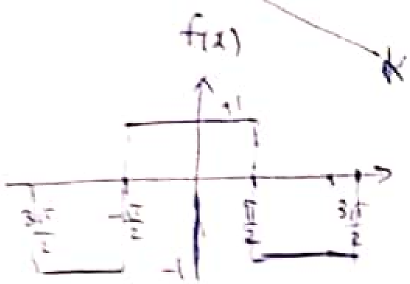
حال طبق قضیه پارسوال می‌دانیم :

$$\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} |f(t)|^2\,dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\langle T\rangle} |t|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \frac{\pi^3-(-\pi^3)}{3(2\pi)} = \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2k-1)^2}$$

$$\longrightarrow \frac{8S}{\pi^2} = \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} \rightarrow \boxed{S = \frac{\pi^4}{96}}$$

سؤال 3 - بخش 3 :



$$a_0 = \frac{1}{T}\int f(x)\,dx = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{\langle T\rangle} f(x)\sin nx\,dx = 0 \leftarrow$$ f زوج و sinx فرد است

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\langle T\rangle} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos nx\,dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} -\cos nx\,dx\right)$$

$$= \frac{\pi}{n}\left(2\sin\frac{n\pi}{2} - \sin\frac{3\pi n}{2} + \sin\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{n}\times 4\times(-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \overset{2}{\not\equiv} 0 \\ 0 & n \overset{2}{\equiv} 0 \end{cases}$$

$$f(t) = 4\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)}\cos(2k+1)x$$

با استفاده از قضیه پارسوال داریم :

$$\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle}|f(t)|^2\,dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|F_n|^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} 1\,dt = 1 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{16\pi^2}{(2k-1)^2}\times\frac{1}{2} \longrightarrow \boxed{S = \frac{\pi^2}{8}}$$

سئوال 4 _ کتاب 7 :

$$y'' + \omega^2 y = \cos\alpha t$$

$$s^2+\omega^2=0 \rightarrow s=\pm j\omega \rightarrow y_h(t) = c_1\sin\omega t + c_2\cos\omega t$$

جواب همگن سوال

ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه

$$\text{let } y = A\cos\alpha t + B\sin\alpha t \rightarrow y' = -A\alpha\sin\alpha t + B\alpha\cos\alpha t \rightarrow y'' = -A\alpha^2\cos\alpha t - B\alpha^2\sin\alpha t$$

جایگذاری در معادله ←

$$A\cos\alpha t\,(\omega^2-\alpha^2) + B\sin\alpha t\,(\omega^2-\alpha^2) = \cos\alpha t$$

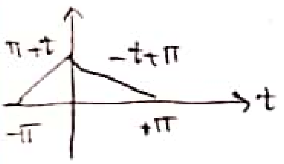
از آنجا که سری فوریه یک تابع یکتاست، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} A(\omega^2-\alpha^2)=1 \xrightarrow{|\omega|\neq|\alpha|} A = \dfrac{1}{\omega^2-\alpha^2} \\ B(\omega^2-\alpha^2)=0 \xrightarrow{|\omega|\neq|\alpha|} B=0 \end{cases}$$

در نهایت ←

$$y = y_p(t) + y_h(t) = \frac{1}{\omega^2-\alpha^2}\cos\alpha t + c_1\sin\omega t + c_2\cos\omega t$$

$$\boxed{y = \frac{1}{\omega^2-\alpha^2}\cos\alpha t + c_1\sin\omega t + c_2\cos\omega t}$$



سوال 4 _ کتاب 2 :

$$\forall n: b_n = 0 \longrightarrow$$ تابع $f(t)$ زوج است

$$\forall n: a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r(t)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-t)\cos nt\,dt = \frac{2-2\cdot(-1)^n}{\pi n^2}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi-t}{n}\sin nt - \frac{1}{n^2}\cos nt\right)\Bigg|_{t=0}^{t=\pi}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r(t)\,dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow r(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\cos nt + \frac{\pi}{2} \quad , \text{now let } y_p = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

با استفاده از خواص برهم نهی

$$\text{let } y_n = A_n\cos nt + B_n\sin nt \;,\; y_n'' = -A_n\cdot n^2\cos nt + (-B_n)\cdot n^2\sin nt$$

جایگذاری در معادله دیفرانسیل

$$A_n\cos nt\,(\omega^2-n^2) + B_n\sin\omega t\,(\omega^2-n^2) = \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n^2}\cos nt + \pi/2$$

و چون که سری فوریه یکتاست:

$$\xrightarrow{\text{فرض } |\omega|\neq|n|} A_n = \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n^2(\omega^2-n^2)} \;,\; B_n = 0 \;,\; A_0 = \pi/2$$

در نهایت پاسخ معادله دیفرانسیل می‌شود:

$$\hookrightarrow y = y_h(t) + y_p(t) = \left(\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n^2(\omega^2-n^2)}\cos nt\right) + c_1\sin\omega t + c_2\cos\omega t$$

سوال ۲ بخش یک : داریم

$T = 2L \ , \ \omega = \frac{2\pi}{T}$ طبق سری فوریه می‌دانیم

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega x}$$

به کمک رابطه اویلر داریم:

$$f(x) = c_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} (c_n + c_{-n}) \cos n\omega x + j(c_n - c_{-n}) \sin n\omega x$$

از آنجایی که می‌دانیم سری فوریه یکتاست ، خواهیم داشت

$$\begin{cases} c_n + c_{-n} = a_n \\ j(c_n - c_{-n}) = b_n \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_n \\ c_{-n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$$

به کمک کرامر خواهیم داشت.

$$c_n = \frac{\det \begin{vmatrix} a_n & 1 \\ b_n & -j \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{vmatrix}} = \frac{-ja_n - b_n}{-j-j} = \frac{a_n}{2} - j\frac{b_n}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$, \quad a_0 = c_0$$

$$c_{-n} = \frac{\det \begin{vmatrix} 1 & a_n \\ j & b_n \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{vmatrix}} = \frac{b_n - a_n j}{-j-j} = \frac{a_n}{2} + j\frac{b_n}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

سوال ۲ بخش ۲ :

طبق روابطی که بالا به دست آوردیم

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$c_n = \frac{a_n}{2} - j\frac{b_n}{2} = \frac{2}{2T}\int_{\langle T \rangle} f(x) \cos n\omega x \, dx - \frac{2j}{2T}\int_{\langle T \rangle} f(x) \sin n\omega x \, dx$$

$$\frac{1}{2L}\int_{\langle T \rangle} f(x) \left(\cos n\omega x - j \sin n\omega x \right) dx = \frac{1}{2L}\int_{\langle T \rangle} f(x) e^{-jn\omega x} dx$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{\langle 2L \rangle} f(x) e^{-jn\omega x} dx$$

سوال ۲- بخش 3 :

$$f(t) = 1 + \sin\omega t + \cos\omega t + 2\sin\left(2\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f(t) = 1 + \frac{1}{2}(1-j)e^{j\omega t} + \frac{1}{2}(1+j)e^{-j\omega t} + e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{+j2\omega t} + e^{+j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-j2\omega t}$$

$$f(t) = c_0 + c_1 e^{j\omega t} + c_{-1} e^{-j\omega t} + c_{+2} e^{+j2\omega t} + c_{-2} e^{-j2\omega t}$$

از آنجا که سری فوریه یک تابع نمایش یکتا دارد ← نتیجه می‌گیریم که :

$c_0 = 1$

$c_1 = \frac{1}{2}(1-j) = \frac{\sqrt{2}}{2} \measuredangle -45^\circ$ $\qquad$ $c_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-j) = e^{-j\pi/4}$

$c_{-1} = \frac{1}{2}(1+j) = \frac{\sqrt{2}}{2} \measuredangle 45^\circ$ $\qquad$ $c_{-2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j) = e^{j\pi/4}$

سوال ۲- بخش 4 : در قسمت اول این سوال به دست آوردیم که

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} c_n = \frac{a_n}{2} - j\frac{b_n}{2} \\ c_{-n} = \frac{a_n}{2} + j\frac{b_n}{2} \end{cases}$$

I می‌توان به راحتی نتیجه گرفت که

$$|c_n| = |c_{-n}| = \left(\sqrt{a_n^2 + b_n^2}\right)\frac{1}{2}$$

II همچنین داریم :

$$\measuredangle c_n = \tan^{-1}\frac{b_n}{a_n} = -\tan^{-1}\frac{-b_n}{a_n} = -\measuredangle c_{-n}$$

در نتیجه حکم ثابت شد

Scanned by CamScanner

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right)$$

سوال 6 بخش اول :

ابتدا به کمک استقرا روی n یک لم کلی را اثبات می‌کنیم

$$\begin{cases} \dfrac{d^k}{dx^k}\left((x-1)^n\right) = \dfrac{n!}{(n-k)!}(x-1)^{n-k} \\ \dfrac{d^k}{dx^k}\left((x+1)^n\right) = \dfrac{n!}{(n-k)!}(x+1)^{n-k} \end{cases}$$

برای $n=1$ ، $n=0$ که حالت پایه‌ی استقرا هستند حکم از فوق بدیهی است.

$k=0 \rightarrow (x-1)^n = (x-1)^n \cdot \frac{0!}{0!}$ ✓ , $(x+1)^n = (x-1)^n$ ✓

$k=1 \rightarrow \frac{d}{dx}(x-1)^n = n(x-1)^{n-1}$ ✓ , $\frac{d}{dx}(x+1)^n = n(x+1)^{n-1}$ ✓

فرض کنید که حکم فوق برای یک k برقرار باشد، نشان می‌دهیم که به ازای $k+1$ نیز برقرار است:

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\left((x-1)^n\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{n!}{(n-k)!}(x-1)^{n-k}\right) = \frac{n!}{(n-k-1)!}(x-1)^{n-k-1} \quad ✓$$

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\left((x+1)^n\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{n!}{(n-k)!}(x-1)^{n-k}\right) = \frac{n!}{(n-k-1)!}(x-1)^{n-k-1} \quad ✓$$

با استفاده از قضیه لایب نیتز و لم فوق خواهیم داشت :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right] = \frac{1}{2^n \cdot n!}\frac{d^n}{dx^n}\left((x-1)^n \cdot (x+1)^n\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{2^n \cdot n!}\left(\frac{d^k}{dx^k}\left[(x-1)^n\right]\right)\left(\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left[(x+1)^n\right]\right)$$

$$\boxed{\forall k: \ c_k = \frac{\binom{n}{k}^2}{2^n}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)! \cdot k! \cdot 2^n \cdot n!} \cdot \frac{(x-1)^{n-k} \cdot n!}{(n-k)!} \cdot \frac{(x+1)^k \cdot n!}{k!} \quad , \text{let } c_k = \frac{(n!)^2}{2^n (k!)^2 (n-k)!^2}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \overset{\text{ضریب}}{c_k} \cdot (x-1)^{n-k} \cdot (x+1)^k$$

$$\deg\left(P_n(x)\right) = \max\left\{ \deg\left((x+1)^{n-k}\right) + \deg\left((x-1)^k\right)\right\}_{k=0}^{k=n}$$

$$= \max\left\{ (n-k) + k \right\}_{k=0}^{k=n} = n$$

بنابراین ثابت شد که درجه چندجمله‌ای $P_n(x)$ برابر n است.

سوال ۶ بخش ۲ :

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = \frac{d}{dx}\frac{(x^2-1)^1}{2^1 \times 1!} = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{(2^2 \times 2!)}\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2 = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

حال تعامد هر $P_i(x)$ و $P_j(x)$ که $i \neq j$ را بررسی می‌کنیم:

$$P_1(x) \perp P_0(x) \longleftrightarrow \int_{-1}^{1} P_1(x)\,P_0(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x\,dx = \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} = 0 \checkmark$$

$$P_1(x) \perp P_2(x) \longleftrightarrow \int_{-1}^{1} P_1(x) \cdot P_2(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(3x^3-x)\,dx = \left(\frac{3}{8}x^4 - \frac{x^2}{4}\right)\Big|_{-1}^{1} = 0 \checkmark$$

$$P_0(x) \perp P_2(x) \longleftrightarrow \int_{-1}^{1} P_2(x) \cdot P_0(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(3x^2-1)\,dx = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} = 0 \checkmark$$

سوال ۶ - بخش ۳ :

فرض کنید که $n \neq m$ باشد. می‌دانیم که $P_n(x)$ و $P_m(x)$ به جای y در معادله دیفرانسیل زیر یعنی

$0 = (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y$ صدق می‌کنند. داریم:

$$\left[(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0\right] \times P_m$$

با کم کردن دو معادله مقابل به دست می‌آید

$$\left[(1-x^2)P_m'' - 2xP_m' + m(m+1)P_m = 0\right] \times P_n$$

$\downarrow$

$\cancel{(1-x^2)(P_n''-P_m'')}$

$$\underbrace{(1-x^2)\left(P_n''P_m - P_m''P_n\right) - 2x\left(P_n'P_m - P_m'P_n\right)}_{\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\left(P_n'P_m - P_m'P_n\right)\right)} + P_mP_n\left(n(n+1)-m(m+1)\right) = 0$$

حال با انتگرال گیری از طرفین در بازه $[-1,1]$ به دست می آید:

$$0 = \left((1-x^2)\left(P_n'P_m - P_m'P_n\right)\right)\Big|_{x=-1}^{x=+1} = \left(n(n+1)-m(m+1)\right)\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx$$

اما R.H.S (سمت چپ تساوی فوق) برابر صفر است. از آنجایی که ضریب انتگرال نمی تواند صفر باشد

چرا که $n(n+1)-m(m+1) = (n-m)(n+m+1)$ و $\left.\begin{array}{l} m,n\geq 0 \longrightarrow 1\leq n+m+1\neq 0 \\ n\neq m \longrightarrow n-m\neq 0 \end{array}\right\}$

پس بنابراین انتگرال $\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx$ صفر خواهد بود که تعامد $P_m(x)\perp P_n(x)$ را نتیجه می دهد.

حال حالت $n=m$ را بررسی می کنیم:

$$I = \int^{1} P_n(x)^2\,dx = ?$$

حال حالت $n=m$ را بررسی می‌کنیم:

$$I = \int_{-1}^{1} P_n(x)^2\, dx = ?$$

حال برای محاسبه انتگرال n بار جزء به جزء اعمال می‌کنیم. در اولین اثبات خواهیم دید که

$$\left.\begin{matrix} \forall k \\ x=\pm 1 \end{matrix}\right\} \quad \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(x^2-1)^k = 0$$

پس خواهیم داشت (تمام جملات بیرون انتگرال صفر می‌شوند):

$$I = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \cdot \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n\, dx =$$

از طرف دیگر بدیهی است که $\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n = (2n)!$ پس خواهیم داشت:

$$I = \frac{(2n!)}{2^{2n}\cdot(n!)^2}\int_{-1}^{1} (-1)^n (x^2-1)^n\, dx = \frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot(n!)^2}\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\, dx = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} (1-x)^n(1+x)^n\, dx$$

از اعمال یک بار جزء به جزء با $u=(1-x)^n$, $dv=(1+x)^{n+1}$ خواهیم داشت:

$$I = \frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot(n!)^2} \times \frac{n}{n+1}\int_{-1}^{1} (1-x)^{n-1}(1+x)^{n+1}\, dx$$

از اعمال $n-1$ بار دیگر مثل روند به دست می‌آید:

$$I = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(1)}{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+n)}\int_{-1}^{1} (1+x)^{2n}\, dx = \frac{(2n)!\,(n!)}{2^{2n}(n!)^2\cdot\prod_{i=1}^{n}(n+i)}\int_{-1}^{1} (1+x)^{2n}\, dx$$

$$I = \frac{(n!)^2}{2^{2n}\cdot (n!)^2} \int_{-1}^{1} (1+x)^{2n}\, dx = \frac{2^{-2n}}{2n+1} \left[(x+1)^{2n+1} \right] \Bigg|_{x=-1}^{x=+1}$$

$$I = \frac{2^{-2n}}{2n+1} \left(2^{2n+1} - 0 \right) = \frac{2^{-2n} \cdot 2^{2n+1}}{2n+1} = \boxed{\frac{2}{2n+1}}$$

بنابراین P_n ها یک مبنای متعامد تشکیل می‌دهند چرا که :

$$I = \int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & m = n \end{cases}$$

و همچنین به دست می‌آید که $\|P_n(x)\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$.

Scanned by CamScanner

در پایان قرار بود ثابت کنیم که

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left((x^2-1)^k\right)\Big|_{-1}^{1} = 0$$

می‌دانیم مشتق مرتبه n ام تابع $(x^2-1)^k$ می‌شود $\binom{k}{n}(2x)^n \cdot (x^2-1)^{k-n}$ چراکه

$$\frac{d}{dx}(x^2-1)^k = k \cdot 2x \cdot (x^2-1)^{k-1}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^k = k(k-1)\cdot(2x)^2 \cdot (x^2-1)^{k-2}$$

$$\vdots$$

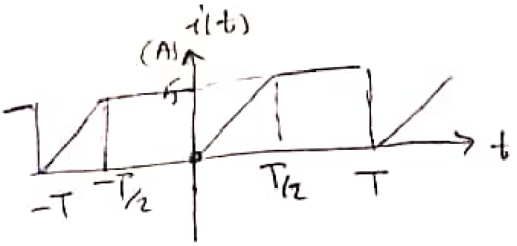
$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^k = \underbrace{k(k-1)\cdots(k-n+1)}_{\binom{k}{n}} \cdot (2x)^n \cdot (x^2-1)^{k-n}$$

به ازای $n = k-1$ خواهیم داشت:

$$\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(x^2-1)^k = \binom{k}{k-1}\cdot(2x)^{k-1}\cdot(x^2-1)$$

که بدیهی است به ازای $x=+1$ و $x=-1$ صفر می‌شود. پس لم اثبات شد.

سوال 7 ـ بخش 1 :



$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} f(t)\,dt = \frac{1}{T}\left(\frac{5T}{4} + \frac{5T}{2}\right) = \boxed{\frac{15}{4}}$$

$$\forall n: \; a_n = \frac{2}{T}\int_{\langle T\rangle} f(t)\cos\frac{2\pi n t}{T}\,dt = \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/2} \frac{10}{T} t \cos\frac{2\pi n t}{T}\,dt + \int_{T/2}^{T} 5\cos\frac{2\pi n t}{T}\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{T}\left[\frac{10}{T}\left(\frac{tT}{2\pi n}\sin\frac{2\pi n t}{T} + \frac{T^2}{4\pi^2 n^2}\cos\frac{2\pi n t}{T}\right)\Big|_{t=0}^{t=T/2} + \frac{5T}{2\pi n}\left(\sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\right)\Big|_{t=T/2}^{t=T}\right]$$

$$= \frac{2}{T}\left[\frac{10}{T}\cdot\frac{T^2}{4\pi^2 n^2}\left(\cos n\pi - 1\right) + 0\right] = \frac{5}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0 & n \overset{2}{\equiv} 0 \\ \dfrac{-10}{\pi^2 n^2} & n \overset{2}{\not\equiv} 0 \end{cases}$$

$$\forall n: \; b_n = \frac{2}{T}\int_{\langle T\rangle} f(t)\sin\frac{2\pi n t}{T}\,dt = \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/2} \frac{10}{T} t \sin\frac{2\pi n t}{T}\,dt + \int_{T/2}^{T} 5\sin\frac{2\pi n t}{T}\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{T}\left[\frac{10}{T}\left(\frac{-tT}{2\pi n}\cos\frac{2\pi n t}{T} + \frac{T^2}{4\pi^2 n^2}\sin\frac{2\pi n t}{T}\right)\Big|_{t=0}^{t=T/2} + \frac{5T}{2\pi n}\left(-\cos\frac{2\pi n t}{T}\right)\Big|_{t=T/2}^{t=T}\right]$$

$$= \frac{2}{T}\left[\frac{10}{T}\left(\frac{-T^2}{4\pi n}\right)\left(\cos n\pi\right) + \frac{5T}{2\pi n}\left(-\cos 2\pi n + \cos n\pi\right)\right]$$

$$= \frac{2}{T}\left[\frac{5T}{2\pi n}\left(-\cancel{\cos n\pi} + \cancel{\cos n\pi} - \cos 2\pi n\right)\right] = \frac{-5}{\pi n}\cos 2n\pi$$

$$= \boxed{\frac{-5}{\pi n}}$$

Scanned by CamScanner

$$P_{av} = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} R\, i(t)^2\, dt \longrightarrow$$ توان متوسط مصرف شده در مقاومت R

حال به عنوان لم قضیه پارسوال را اثبات می‌کنیم:

$$\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} |i(t)|^2\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 + |c_{-n}|^2\right) + c_0^2$$

طبق رابطه پارسوال

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n^2}{4} + \frac{b_n^2}{4}\right) + \left(\frac{a_n^2}{4} + \frac{b_n^2}{4}\right)\right) + a_0^2$$

$$i(t) = a_0 + \sum a_n \sin n\omega t + b_n \cos n\omega t$$ نوعی N

$$= a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} |i(t)|^2\, dt$$

$\left(c_n = \frac{a_n}{2} - j\frac{b_n}{2},\ c_{-n} = \frac{a_n}{2} + j\frac{b_n}{2}\right)$: از تمرین قبل کمک می‌گیریم ⊛

$$P_{av} = R \cdot \left(a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)\right) \longleftarrow$$ در نهایت می‌توان نتیجه گرفت که

* حال ضرایب را محاسبه می‌کنیم:

$$a_0 = \frac{15}{4} = 3.750$$

$$a_1 = \frac{-10}{\pi^2} = -1.013 \qquad b_1 = \frac{-5}{\pi} = -1.592$$

$$a_2 = 0 \qquad b_2 = \frac{-5}{2\pi} = -0.796$$

$$a_3 = \frac{-10}{9\pi^2} = -0.113 \qquad b_3 = \frac{-5}{3\pi} = -0.531$$

* حال P_{av} را تا جمله فرکانس سوم بسط فوریه تقریب می‌زنیم:

$$\hat{P}_{av} = \left[a_0^2 + \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}\right)\right] R \simeq \boxed{39605.784\ W}$$

$N = 1$

* حال مقدار واقعی را محاسبه می‌کنیم:

$$P_{av} = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} R \cdot i(t)^2 = \frac{R}{T}\left(\int_0^{T/2} \left(\frac{10}{T}t\right)^2 dt + \int_{T/2}^{T} 25\, dt\right) = \frac{R}{T}\left(\frac{25T}{6} + \frac{25T}{2}\right)$$

$$= \boxed{41666.666\ W}$$

$$\frac{|P_{av} - \hat{P}_{av}|}{P_{av}} \times 100 = \boxed{4.946\,\%}$$

و درصد خطا برابر است با:

سوال 8 :

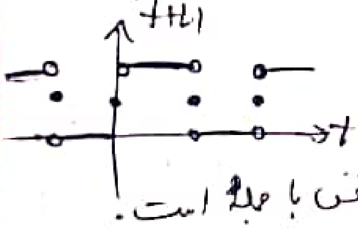
بخش 1: نادرست ؛ توابع ثابت از این قاعده مستثنا هستند. چرا که هر تناوبی را می‌توانند اختیار کنند و در پایان جواب نهایی نیز متناوب است اما $\frac{T_1}{T_2}$ می‌تواند گنگ باشد.

بخش 2: نادرست: جواب معادلات Sturm-Liouville می‌توانند یکه نباشند. در مثال $P=\{\sin nx , \cos nx\}_{n=0}^{\infty}$ می‌دانیم $\|\sin nx\|=\|\cos nx\| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ است که جواب حالت خاصی از معادلات S-L است اما یکه نمی‌باشد. این هم شما زمانی برقرار می‌شود که $\int_{\langle T\rangle} P_n^2(x)\,dx=1$ و $r(x)=1$ باشد.

بخش 3: نادرست: می‌دانیم $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ یک مجموعه متعامد را تشکیل می‌دهند اما این مجموعه کامل نیست چرا که به وضوح نمی‌توان توابع زوج را برحسب ترکیب خطی از اعضای این مجموعه نوشت.

بخش 4: نادرست: می‌دانیم طبق شروط دیریکله کافی است تا هر سه شرط ① تابع در یک تناوب انتگرال‌پذیر باشد ② تابع دارای تغییرات کراندار باشد ③ تعداد نقاط ناپیوستگی در یک تناوب متناهی باشد.

بخش 5: درست؛ از آنجایی که در ترکیب یک سیگنال صوتی که در محدوده فرکانسی $[20Hz, 20000Hz]$ می‌باشد طبق مدل ریاضی $f(t)= a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$ که حتی فرکانس‌های ∞ را نیز شامل می‌شوند و ما قادر به ایجاد همه‌ی این مولفه‌ها نیستیم ~~که~~ از یک $n \geq M$ دیگر نمی‌توانیم دقیق باشیم و جملات پس از آن ignore می‌شوند که در این صورت صدا به سبب اینکه فرکانس‌های بالا ندارد ← زیرتر است (یا مردانه‌تر و بم‌تر)



بخش 6: نادرست؛ اگر تابع روبرو را در نظر بگیریم: تابع به گونه‌ای است که در سمت چپ و راست در نقاط ناپیوستگی فرق دارد و مقدار تابع در آن نقطه ناپیوستگی برابر میانگین این دو حد نمی‌باشد. بنابراین تابع سری فوریه‌اش در نقاط ناپیوستگی به خود تابع همگرا است که یک تناقض با جمله است.

بخش 7: به راحتی می‌توان مثال نقض آورد که مجموعه $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ با آنکه یک مجموعه متعامد است، اما نمی‌توان توابع زوج را توسط آن تولید کرد که به وضوح با جمله گفته شده تناقض دارد. ← نادرست

بخش 8: اگر تناوب یک تابع متناوب کم شود فرکانس اصلی این تابع زیاد می‌شود و در نتیجه فاصله هارمونیک‌های فرکانس آن زیاد می‌شود. $\omega = \frac{2\pi}{T}$, if $T\downarrow$, then $\omega\uparrow$ ← نادرست

بخش 9: نادرست: تعامد آن‌ها به این شکل است که $\int_a^b r(x) f_n(x) f_m(x)\,dx = 0$ ولی درباره $r(x)$ اطلاعاتی در دست نیست و تنها می‌دانیم در صورتی جمله فوق درست است که $r(x)\equiv C$ که C عددی ثابت و دقیق است.

بخش 10: درست؛ انقباض و انبساط خطی، اثری بر تبدیل فوریه و یا سری فوریه ندارد چرا که

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} \Rightarrow f(at)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{jna\omega t}=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega' t}$$

که $\omega'=a\omega$