پردازش سیگنال گرافی (۲۵۱۵۰)	پاییز ۱۴۰۰

تمرین ۱

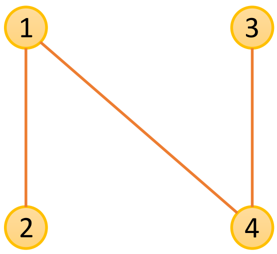
مدرس : دکتر آرش امینی

سؤال ۱

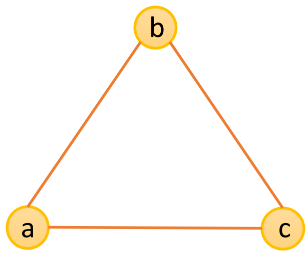
برای دو گراف G_1 و G_2 در شکل زیر

آ- گراف حاصلضرب کرونکر را رسم کنید.

ب- گراف حاصلضرب دکارتی را رسم نمایید.



G_1

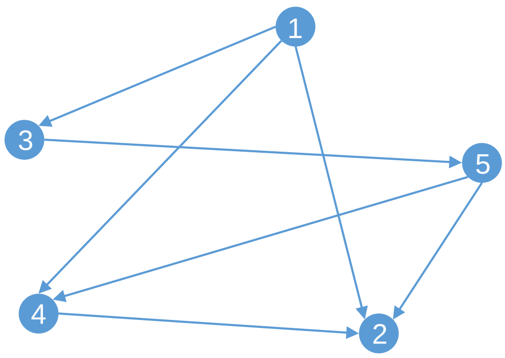


G_2

سؤال ۲

آ- برای یک گراف کلی (جهت دار یا بدون جهت) G با ماتریس مجاورت $\mathbf{A}$ ثابت کنید درایه (i, j) ماتریس $\mathbf{A}^k$ برابر تعداد گشت های به طول k از گره i به j است.

ب- فرض کنید در یک دستگاه معادلات حالت به شکل $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ با شرط اولیه $\mathbf{x}(0) = [1, 0, 3, 4, 2]^T$ ماتریس حالت $\mathbf{A}$ همان ماتریس مجاورت گراف شکل زیر باشد. حال رابطه $\mathbf{x}(t)$ را به صورت دستی محاسبه کنید.



سؤال ۳

برای یک گراف ساده $G = (V, E)$ و یک زیر مجموعه از رئوس آن مانند $S \subset V$، مرز S که با $\delta(S)$ نمایش داده می شود برابر است با مجموعه یال هایی از گراف G که تنها یکی از دو سر آنها در S باشد. همچنین ضریب ایزومتری برای S به شکل زیر تعریف می‌شود :

$$\tau(S) = \frac{|\delta(S)|}{\min(|S|, |V \backslash S|)}$$

با این تعریف ثابت ایزومتری گراف به صورت $\tau_G = \min_{S\subset V: \cdot<|S|\leq ۱/۲|V|} \tau(S)$ بدست می‌آید.
آ- نشان دهید اگر گراف همبند باشد کوچکترین مقدار ویژه غیر صفر ماتریس لاپلاسین ($\lambda_۲(\mathbf{L})$) از رابطه زیر بدست می‌آید

$$\lambda_۲(\mathbf{L}) = \min_{\mathbf{v}:\mathbf{v}^T\mathbf{1}_n=\cdot} \frac{\mathbf{v}^T\mathbf{L}\mathbf{v}}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}$$

که $\mathbf{1}_n = (۱,\ldots,۱)^T_{۱\times n}$ و n تعداد رئوس گراف است.
ب- نشان دهید برای یک گراف همبند با وزن یال های واحد نامساوی زیر برقرار است

$$\lambda_۲(\mathbf{L}) \leq ۲\tau_G$$

(راهنمایی : به ازای هر S برداری تعریف کنید که مؤلفه‌های آن بر حسب آنکه اندیس متناظر آن عضوی از S باشد یا نه، تغییر می کند.)

سؤال ۴

نشان دهید مقدار ویژه بیشینه ماتریس مجاورت یک گراف ساده مانند G که آن را با $\lambda_{\max}$ نمایش می‌دهیم، از میانگین درجه رئوس گراف (d_{avg}) بزرگتر است، به عبارتی

$$\lambda_{\max} \geq d_{avg}$$

سؤال ۵

فرض کنید $\mathbf{B}_{(n-۱)\times(n-۱)}$ یک زیر ماتریس اساسی از ماتریس متقارن $\mathbf{A}_{n\times n}$ باشد (به عبارت دیگر $\mathbf{B}$ با حذف یک سطر و ستون هم‌شماره از $\mathbf{A}$ بدست می‌آید). نشان دهید

$$\lambda_۱ \geq \gamma_۱ \geq \lambda_۲ \geq \gamma_۲ \geq \ldots \geq \lambda_{n-۱} \geq \gamma_{n-۱} \geq \lambda_n$$

که λ_i مقدار ویژه $\mathbf{A}$ و γ_i مقدار ویژه $\mathbf{B}$ (به ترتیب از بزرگ به کوچک) است.
(راهنمایی : از قضیه Courant-Fischer (یا قضیه Min-Max) استفاده کنید.)

سؤال ۶

در این سؤال می‌خواهیم طبف لاپلاسین برخی از گراف های مشهور را بدست آوریم
آ- برای گراف کامل K_n، نشان دهید مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین به صورت $\lambda_i = n - n\delta[i-۱]$ بدست می‌آید که $\delta[i]$ تابع ضربه گسسته و $۱ \leq i \leq n$ است.
ب- فرض کنید G یک گراف ساده بدون جهت باشد که در آن رئوس u, v با درجه ۱ به رأس w وصل هستند. نشان دهید ماتریس لاپلاسین این گراف یک مقدار ویژه ۱ دارد.
پ- با توجه به قسمت قبل نشان دهید مقادیر ویژه گراف ستاره به صورت زیر است

$$\lambda_i = \begin{cases} \cdot & \text{if} \quad i = ۱ \\ ۱ & \text{if} \quad ۲ \leq i \leq n-۱ \\ n & \text{if} \quad i = n \end{cases}$$

امتیازی : بردار ویژه متناظر با λ_n را بیابید.