۹۸۲۰۶۲۲۳ محمد رضیی   به نام خدا   تمرین سری دوم

سوال ۱ :

$$g(x,y) = A e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}} \qquad f(x) \triangleq e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$\mathcal{F}_{u,v}\{g(x,y)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\, e^{-j2\pi(ux+vy)}\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A f(x) f(y)\, e^{-j(2\pi x + vy)}\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} A f(x) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-jvy} dy \right] e^{-jux}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} A f(x) \underbrace{\mathcal{F}_{v}(f(y))}_{\text{مستقل از } x} e^{-jux}\, dx = A\, \mathcal{F}_u(f(x))\, \mathcal{F}_v(f(y)) \quad (1)$$

محاسبه ی :

$$\mathcal{F}_w(f(x)) = F(w) = ?$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x) = \frac{-x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \frac{-x}{\sigma^2} f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}(\cdot)} jw F(x) = \frac{1}{j\sigma^2}\frac{\partial}{\partial w} F(w)$$

$$\rightarrow \frac{\frac{\partial}{\partial w} F(w)}{F(w)} = (j\sigma^2)(jw) = -w\sigma^2 = \frac{\partial}{\partial w} \ln(F(w))$$

$$\xRightarrow{\int_0} \int_0^{w} \frac{\partial}{\partial w'} \ln(F(w'))\, dw' = -\int_0^{w} w' \sigma^2\, dw'$$

$$\Rightarrow \ln F(w) - \ln F(0) = \frac{-\sigma^2 w^2}{2} \rightarrow F(w) = F(0)\, e^{-\frac{\sigma^2 w^2}{2}} \quad (2)$$

محاسبه ی

$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \sigma\sqrt{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx}_{\text{تابع توزیع احتمال گوسی}} = \sigma\sqrt{2\pi}$$

$$\xRightarrow{(2)} \mathcal{F}(f(x)) = \sigma\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\sigma^2 w^2}{2}} \Big|_{w=2\pi f_x} = \sigma\sqrt{2\pi}\, \exp(-2\pi^2\sigma^2 f_x^2) \quad (3)$$

$$(3) \rightarrow (1) \longrightarrow \boxed{G(u,v) = 2\pi\sigma^2 A\, e^{-2\pi^2\sigma^2(u^2+v^2)}}$$

که رابطه ی بالا نشان می دهد تبدیل فوریه ی گوسی با واریانس σ^2 یک گوسی با واریانس $\frac{1}{(2\pi\sigma)^2}$ می باشد.

که با توجه به شکل گوسی یک فیلتر پایین گذر است همچنین مقدار $G(0,0) = 2\pi\sigma^2 A$ و $G(\infty,\infty) = 0$ این موضوع را تایید می کند