«به نام خدا»

تمرین سری سوم

پاسخ تمرینات نوشتاری

پاسخ سوال ۱) راحت‌ترین راه برای اثبات این سوال، استفاده از مفاهیم ابتدایی حساب تغییرات است. در حساب تغییرات، اگر فرض کنیم $f(\bar{y})$ را می‌خواهیم به ازای تمامی مقادیر $\bar{y}$ که $\bar{y}(\partial\Omega)=y_0$ که $\partial\Omega$ همان مرز ناحیه‌ی مورد بررسی یا استنسیل سوال است و $\bar{y}$ یک تابع است و به $f(\bar{y})$ به اصطلاح تابعک گفته می‌شود. فرض کنیم $\bar{y}=y+\epsilon g$ که y همان تابعی است که $f(y)$ بیشترین مقدار ممکن را به خود می‌گیرد و $y_0=y(\partial\Omega)$ (شرایط مرزی را ارضا کند) بنابراین g باید به گونه‌ای باشد که $g(\partial\Omega)=0$ باشد.

تعریف: اگر $\frac{\partial}{\partial\epsilon} f(y+\epsilon g)\Big|_{\epsilon=0}$ برابر با صفر باشد، y به اصطلاح یک مسیر ایستان برای f است.

حال ما در این سوال دنبال مسیرهای ایستان هستیم پس باید $\frac{\partial}{\partial\epsilon} f(y+\epsilon g)\Big|_{\epsilon=0}=0$ باشد. حال تابع f که از آن در مسئله‌ها است را می‌یابیم:

$$f(u)=\int_\Omega |\nabla u| + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega\left[\sigma^2-(u-v)^2\right]$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial\epsilon} f(u+\epsilon g)\Big|_{\epsilon=0} = -\lambda\int_\Omega (u-v)g + \int_\Omega \frac{\partial}{\partial\epsilon}|\nabla(u+\epsilon g)|\Big|_{\epsilon=0}$$

$$= -\lambda\int_\Omega (u-v)g + \int_\Omega \frac{\nabla u}{|\nabla u|}\cdot\nabla g \longrightarrow$$

باید از ∇ خلاص شویم

قضیه گرین:

$$\underbrace{\int_{\Omega}}_{\text{حجم}}(\underbrace{A}_{\text{بردار}}\cdot\nabla \underbrace{b}_{\text{اسکالر}})\,\underbrace{dv}_{\text{المان حجم}} = \int_{\underbrace{\partial\Omega}_{\text{سطح}}}(A\cdot \underbrace{N}_{\text{بردار عمود سطح}} b)\,\underbrace{ds}_{\text{المان سطح}} - \int_\Omega(\nabla\cdot A b)\,dv$$

بنابراین

$$\frac{\partial}{\partial\epsilon} f(u+\epsilon g)\Big|_{\epsilon=0} = \int_\Omega \lambda(u-v)g + \int_\Omega\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\cdot\nabla g$$

$$\xrightarrow[b\triangleq g]{\text{در قضیه گرین: } A\triangleq\frac{\nabla u}{|\nabla u|}} = \int_\Omega -\lambda(u-v)g + \int_{\partial\Omega}\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\cdot N g - \int_\Omega \nabla\cdot\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)g$$

چون شرط $\frac{\partial}{\partial\epsilon} f(u+\epsilon g)\Big|_{\epsilon=0}=0$ به ازای همه‌ی توابع g که $g(\partial\Omega)=0$ برقرار است پس باید هر یک از انتگرال‌های بالا صفر باشد.

$$\begin{cases} \text{if } u\in\Omega \rightarrow -\lambda(u-v)-\nabla\cdot\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)=0 \\ \text{if } u\in\partial\Omega \rightarrow \frac{\nabla u}{|\nabla u|}\cdot N=0 \ \text{ یا } \ \frac{\partial}{\partial N}u=0 \end{cases}$$

در حساب تغییرات می‌بایست شرایط اسپایا حاکم باشد بنابراین اگر به جای u ابتدا $\tilde{u}$ قرار دهیم و سپس $u+\varepsilon g=\tilde{u}$ قرار دهیم که u جواب بهینه ماست، می‌بایست که $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} L(u+\varepsilon g)\big|_{\varepsilon=0}$ برابر با صفر باشد. ($\forall g$ به طوری که g در ابتدا و انتهای بازه صفر باشد)

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \left\{ \frac{1}{2}\lambda \int_{\Omega} |u+\varepsilon g - v|^2 \, dx\,dy + \int_{\Omega} |\nabla (u+\varepsilon g)| \, dx\,dy \right\}$$

مشتق را داخل می‌بریم و به جای ε صفر قرار می‌دهیم

$$= \int_{\Omega} \lambda (u-v) g \, dx\,dy + \int_{\Omega} \frac{\nabla u \, \nabla g}{|\nabla u|} \, dx\,dy \quad \circledast$$

قضیه گرین:

$$\int_{\Omega} \underset{\text{بردار}}{A} \, \underset{\text{اسکالر}}{\nabla b} \, dx\,dy = \int_{\partial\Omega} A \cdot N \, b \, ds - \int_{\Omega} (\nabla \cdot A)\, b \, dx\,dy$$

$$\text{if } A = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}, \; b = g \quad \circledast \xrightarrow{\text{قضیه گرین}} = \overset{(1)}{\lambda \int_{\Omega} (u-v) g \, dx\,dy} + \overset{(2)}{\int_{\partial\Omega} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot N g \, ds} - \overset{(3)}{\int_{\Omega} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) g \, dx\,dy}$$

چون برای همه‌ی مقادیر g که $g(\partial\Omega)=0$ است برقرار است بنابراین لازم است که از g فاکتور بگیریم و عبارتی که در آن ضرب شده است را زیر انتگرال برابر صفر قرار دهیم:

$$\lambda (u-v) - \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = 0$$

و $\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot N = 0$ صفر روی مرز

ت) این همان مسئله‌ای است که همان روش TV البته با ضریب منفی است.

پاسخ سوال ۲)

$$f(x\mid\mu,b) = \frac{1}{2b}\exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right) \rightsquigarrow P(v\mid\mu=u,b)$$

حکم: $\min_u \int_\Omega (|\nabla u| + \lambda\|u-v\|)$ با استفاده از MAP

اثبات : $v = u+\eta$

$$u^*_{map} = \underset{u}{\operatorname{argmax}}\, P(u\mid v) = \underset{u}{\operatorname{argmax}} \frac{P(v\mid u)\,P(u)}{P(v)} = \underset{u}{\operatorname{argmax}}\, P(v\mid u)\,P(u)$$

let $P(u) \propto e^{-g(u)} \Rightarrow u^*_{map} = \underset{u}{\operatorname{argmax}}\left[\prod_{ij}\frac{1}{2b}\exp\left(-\frac{|v_{ij}-u_{ij}|}{b}\right)\right]e^{-g(u)}$

$$\Rightarrow u^*_{map} = \underset{u}{\operatorname{argmax}}\, \frac{1}{2b}\exp\Big(-\frac{1}{b}\underbrace{\sum_{ij}|v_{ij}-u_{ij}|}_{\|v-u\|_1}\Big)\,e^{-g(u)}$$

$\|v-u\|_1 \longrightarrow$ البته اگر وکتوری تعریف کنیم

$$= \underset{u}{\operatorname{argmax}}\, -\frac{1}{b}\|v-u\|_1 - g(u) = \underset{u}{\operatorname{argmin}}\, \frac{1}{b}\|u-v\|_1 + g(u)$$

if $\frac{1}{\lambda} \approx \left(\frac{1}{b}\right)^{-1}$, $g(u) = \int|\nabla u| \longrightarrow u^*_{map} = \lambda\int|\nabla u| + \underbrace{\|u-v\|_1}_{\sum_{ij}|u_{ij}-v_{ij}| \,=\, \int|u-v|}$

$$\Rightarrow u^*_{map} = \operatorname{argmin} \int_\Omega |\nabla u| + \lambda|u-v|$$