



دانشگاه صنعتی شریف
مهندسی برق

درس حسگری فشرده

عنوان:

گزارش پروژه نهایی

نگارش:

محمد رضیعی فیجانی

استاد درس:

دکتر آرش امینی

شهریور ۱۳۹۹

سلام افلا

فهرست مطالب

۷	۱ ساختار تصویربرداری MRI
۷	۱-۱ تاریخچه
۸	۲-۱ خطرات MRI
۹	۳-۱ بررسی مفهوم اسپین
۱۴	۱-۳-۱ پروتون‌ها در یک میدان مغناطیسی خارجی
۱۶	۲-۳-۱ مغناطش شبکه
۱۷	۳-۳-۱ فرکانس لامور و پدیده NMR
۲۲	۴-۱ سیگنال FID و آزادسازی
۲۵	۲ حسگری فشرده
۲۶	۳ یادگیری عمیق
۳۱	۴ نتایج

فهرست شکل‌ها

۹	۱-۱ تصویر سازندگان اصلی دستگاه تصویربرداری MRI
	۲-۱ تصویری از آرشیو اداره ثبت اختراعات آمریکا که متعلق به ریموند دامادیان، دانشمند آمریکایی و یکی از مخترعین سیستم‌های نوین ام آر آی
۱۰	۳-۱
۱۱	۴-۱
۱۳	۵-۱
۱۳	۶-۱
۱۴	۷-۱
۱۴	۸-۱
۱۵	۹-۱
۱۷	۱۰-۱
۱۹	۱۱-۱
۲۰	۱۲-۱
۲۱	۱۳-۱
۲۲	۱۴-۱
۲۳	۱۵-۱
۲۴	

۲۴ ۱۶-۱

۲۷ ۱-۳

۳۰ ۲-۳

۳۱ ۱-۴

فهرست جدول‌ها

۱-۱	بررسی عدد اسپین نسبت به عدد اتمی و جرم اتمی	۱۱
۲-۱	بررسی عدد اسپین نسبت به تعداد پروتون‌ها و تعداد نوترون‌ها	۱۲
۳-۱		۱۸

بخش ۱

ساختار تصویربرداری MRI

۱-۱ تاریخچه

تاریخچه تصویربرداری تشدید مغناطیسی^۱ (MRI) تلاش تعداد زیادی از محققانی را شامل می‌شود که پدیده تشدید مغناطیسی هسته^۲ (NMR) را کشف کردند. در سال ۱۹۵۰، حصول تصویر یک بعدی MRI توسط هرمن کار^۳ گزارش گردید. پاول لاتربر^۴، شیمیدان آمریکایی با کار بر روی تحقیقات پیشین، موفق به ابداع روش‌هایی برای تولید تصاویر دو بعدی و سه بعدی MRI گردید. سرانجام وی در سال ۱۹۷۳ اولین تصویر گرفته شده بر اساس تشدید مغناطیسی هسته‌ای (NMR) خود را منتشر نمود. اولین تصویر مقطع نگاری از یک موش زنده در ژانویه ۱۹۷۴ منتشر گردید.

از سوی دیگر تحقیقات و پیشرفت‌های مهمی در زمینه تصویربرداری بر اساس تشدید مغناطیسی هسته برای نخستین بار در دانشگاه ناتینگهام انگلستان^۵ صورت پذیرفت، جایی که پیتر منسفیلد فیزیکدان برجسته آن مؤسسه با گسترش یک روش ریاضی موفق به کاهش زمان تصویربرداری و افزایش کیفیت تصاویر نسبت به روش بکارگرفته شده توسط لاتربر گردید. در همان زمان در سال ۱۹۷۱ دانشمند آمریکایی ارمنی تبار ریموند دامادیان استاد دانشگاه ایالتی نیویورک در مقاله‌ای که در مجله Science منتشر گردید، اعلام نمود که امکان تشخیص تومور از بافت‌های عادی به کمک تصویربرداری NMR

¹Magnetic Resonance Imaging

²Nuclear Magnetic Resonance

³Herman Carr

⁴Paul C. Lauterbur

⁵University of Nottingham

میسر می‌باشد.

سرانجام جایزه نوبل پزشکی سال ۲۰۰۳ به خاطر اختراع ام آر آی به پاول لاتربر از دانشگاه ایلینوی در اوربانا شامپاین و پیتر منزفیلد از انگلستان اعطا گردید. این جایزه به تنهایی می‌تواند اهمیت این نوع تصویربرداری را نشان دهد.

اما چه عواملی باعث شده‌اند تا این قدر MRI با اهمیت و ویژه باشند؟ تصویربرداری MRI روشی غیر تهاجمی و نسبتاً امن است.

سیستم‌های ام آر آی امروزه غالباً دارای قدرت میدان‌های ۰/۲، ۱، ۱/۵، ۳ و تسلا می‌باشند. در ایالات متحده آمریکا بیمارستان‌ها و مراکز خدمات بهداشتی اجازه استفاده از سیستم‌های تا ۴ تسلا را نیز برای یک بیمار دارند. اما از چهار تسلا به بالا صرفاً جنبه و کاربردهای تحقیقاتی دارد.

امروزه بزرگ‌ترین تولیدکننده‌های سیستم‌های ام آر آی شرکت‌های زیمنس (آلمان)، جنرال الکتریک (آمریکا)، توشیبا (ژاپن)، و فیلیپس (هلند) می‌باشند.

۲-۱ خطرات MRI

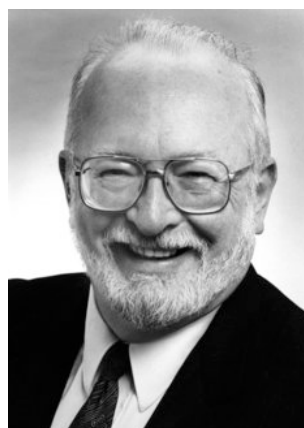
برخلاف سایر دستگاه‌های تصویربرداری مثل اشعه ایکس و سی تی اسکن، ام آر آی از تشعشع یونیزه استفاده نمی‌کند. از این ابزار می‌توان برای تصویربرداری از جنین در دوران بارداری استفاده کرد بدون آن که اثری روی آن داشته باشد. اما باز هم این روش ممکن است خطراتی در پی داشته باشد و به همین دلیل جوامع پزشکی استفاده از MRI را در مراحل اولیه تشخیص بیماری توصیه نمی‌کنند. از آنجایی که در فرآیند ام آر آی از مغناطیس قوی استفاده می‌شود هر قطعه فلزی که در بدن وجود داشته باشد مثل ضربان ساز قلب، مفصل مصنوعی، دریچه مصنوعی قلب، حلزون مصنوعی گوش و یا هر نوع صفحه و پیچ و مهره فلزی در بدن ممکن است خطر ساز باشد، چون میدان مغناطیسی می‌تواند باعث جابجایی و یا گرم شدن آن قطعه شود.

تعدادی از بیمارانی که از ضربان ساز قلب استفاده می‌کردند طی انجام ام آر آی از دنیا رفتند. بنابراین لازم است تکنولوژیست MRI سوالات لازم را قبل از انجام این فرآیند از بیمار بپرسد. البته بیشتر قطعات فلزی که امروز در ایمپلنت‌های بدن استفاده می‌شوند تحت تأثیر میدان‌های مغناطیسی قرار نمی‌گیرند و به اصطلاح MR-Safe هستند. علاوه بر این، هنگام اسکن، دستگاه ام آر آی صداها را تولید می‌کند



source: <https://is.gd/teAHxS>

(ب) تصویر هرمن کار



source: <https://is.gd/HgbMvo>

(آ) تصویر پاول لاتریور



source: <https://is.gd/W7AXIL>

(ج) تصویر Peter-Mansfield

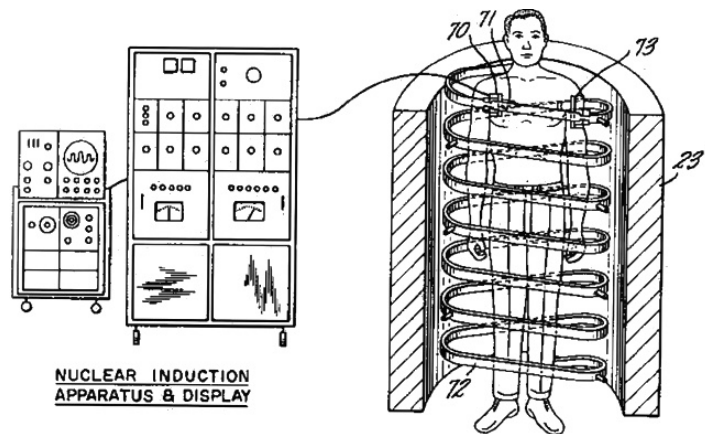
شکل ۱-۱: تصویر سازندگان اصلی دستگاه تصویربرداری MRI

که ممکن است باعث ناراحتی فرد شود، بنابراین استفاده از حفاظ گوش در طول این فرآیند ضروری است.

۳-۱ بررسی مفهوم اسپین

ساختار یک اتم، یکی از اجزای اساسی در آزمایشات تشدید مغناطیسی است. اتم ها از سه ذره اصلی^۶ تشکیل شده اند: (۱) پروتون، که بار مثبت دارد (۲) نوترون، که بدون بار است (۳) الکترون، که بار

^۶Fundamental Particles



source: <https://w.wiki/3STS>

شکل ۱-۲: تصویری از آرشیو اداره ثبت اختراعات آمریکا که متعلق به ریموند دامادیان، دانشمند آمریکایی و یکی از مخترعین سیستم‌های نوین ام آر آی

الکتریکی منفی دارد. پروتون‌ها و نوترون‌ها در درون هسته اتم قرار گرفته اند و الکترون‌ها در خارج هسته به دور آن می‌گردند. همچنین عدد/تمی^۷ تعداد پروتون‌های یک اتم و جرم/تمی^۸، تعداد پروتون‌ها و نوترون‌ها در یک اتم را نشان می‌دهد. اگر دو اتم عدداتمی یکسان اما عدد جرمی متفاوت داشته باشند، آن دو اتم را همریخت یا ایزوتوپ^۹ یکدیگر می‌نامند. که خواص شیمیایی مشابهی اما با نرخ‌های متفاوت دارند.

یکی دیگر از خواص هسته‌ها، اسپین^{۱۰} یا اندازه حرکت زاویه ای ذاتی اسپینی^{۱۱} است. هسته هایی که حرکت اسپینی دارند همواره حول یک محور در حال گردش هستند. (شکل ۱-۳(آ) حرکت اسپینی را نمایش می‌دهد.) تمام عناصر جدول تناوبی^{۱۲} بجز آرگون^{۱۳} و سریم^{۱۴} حداقل یک ایزوتوپ دارند که حرکت اسپینی دارد. از آنجا که این حرکت نقش مهمی در اصول تصویربرداری MRI دارد، بنابراین تقریباً تمامی عناصر قابلیت مشاهده شدن در تصویربرداری MRI را دارند. اسپین یکی از خواص کوانتومی هسته است و تعداد محدودی اسپین در طبیعت وجود دارند.

اسپین که با نماد I و یا Φ نمایش می‌دهند، مقادیر کوانتیده‌ای به خود می‌گیرد به طوری که می‌تواند

⁷Atomic Number

⁸Atomic Weight

⁹Isotope

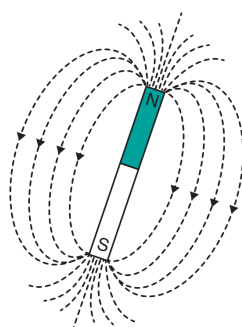
¹⁰Spin

¹¹Intrinsic Spin Angular Momentum

¹²Periodic Table

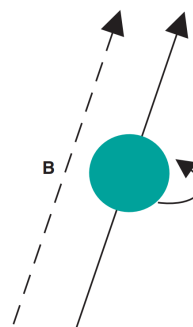
¹³Argon

¹⁴Cerium



doi:10.1002/9781119013068

(ب) مغناطیس



doi:10.1002/9781119013068

(آ) اسپین

شکل ۱-۳:

صفر یا یک عدد صحیح (مثل ۱ و ۲ و ۳ و ...) و یا یک عدد صحیح و نصفی (مثل ۰/۵ و ۱/۵ و ۲/۵ و ...) باشد. بنابر [۴]، می‌توان جدول ۱-۱ را استخراج نمود که آن را می‌توان به شیوه جدول ۱-۲ برحسب تعداد پروتون‌ها و نوترون‌ها به خاطر سپرد. درحقیقت اتم‌هایی با عدد اتمی یا جرم اتمی فرد دارای اسپین هستند و اگر هردو زوج باشند، نمی‌توان آن‌ها را در تصویربرداری MRI مطالعه نمود.

در تصویربرداری MRI ما بر روی هسته‌هایی متمرکز هستیم که اسپین آن‌ها $\frac{1}{2}$ است. به‌طور خاص در تصویربرداری MRI، هسته اتم هیدروژن ^1H (فراوان‌ترین ایزوتوپ هیدروژن) و اتم کربن ^{13}C (ایزوتوپ کمیاب اما مفید در تصویربرداری) استفاده می‌شود. [۲] با توجه به این که فراوان‌ترین ایزوتوپ کربن یعنی ^{12}C فاقد اسپین است (چراکه تعداد پروتون‌ها و نوترون‌های آن هردو زوج هستند)، بنابراین قابل بررسی در تصویربرداری MRI نیستند. البته عناصر دیگری نیز مانند ^{19}F ، ^{23}Na و ^{31}P نیز در این تصویربرداری حائز اهمیت می‌باشند.

عدد اتمی	جرم اتمی	عدد اسپین
زوج	زوج	صفر
فرد	زوج	عدد صحیح
فرد	فرد	عدد صحیح و نصفی
زوج		

جدول ۱-۱: بررسی عدد اسپین نسبت به عدد اتمی و جرم اتمی

اتم هیدروژن ^1H از آن جهت بسیار اهمیت دارد که اولاً ساختار بسیار ساده‌ای دارد (هسته آن از یک تک پروتون تشکیل شده است) و ثانیاً در ساختمان اصلی آب H_2O بکار رفته است. بدن هراسان به طور میانگین، از ۶۰ درصد آب تشکیل شده است. همچنین برخی ارگان های بدن حتی تا ۹۰ درصد از آب ساخته شده‌اند. مغز و قلب انسان ۷۳ درصد آب، ریه ها ۸۳ درصد، پوست ۶۴ درصد، ماهیچه‌ها و کلیه‌ها ۷۹ درصد و استخوان ها ۳۱ درصد آب را شامل می‌شوند. [۲] از این رو، اتم هیدروژن نقش تعیین کننده ای دارد. از آنجایی که اتم اکسیژن ^{16}O اسپینی ندارد، بنابراین نقشی در تصویربرداری MRI ندارد. با توجه به این که آب در بافت های نرم به میزان بیشتری وجود دارد، این نوع تصویر برداری عموماً برای تصویربرداری از نواحی دارای بافت نرم مانند مغز مورد استفاده قرار می‌گیرد.

از آنجایی که درون هسته متشکل از پروتون هاست، بارالکتریکی هسته مثبت است. از این رو، در صورت حرکت دورانی حول محور دوران خود، یک میدان مغناطیسی هم‌راستا با همان محور دوران، ایجاد می‌کند. چون که مقدار اندازه اسپین هسته یک مقدار ثابت است این میدان مغناطیسی نیز اندازه ثابتی دارد. بنابراین برای ممان مغناطیسی هسته ^{15}H دو مولفه‌ی مقدار و جهت میدان مغناطیسی می‌توان تعریف کرد. به عبارت دیگر یک هسته دارای اسپین را می‌توان به صورت یک آهنربای میکروسکوپی ریز در نظر گرفت (شکل ۱-۳ (ب)). برای یک پروتون یا همان هسته ^1H ، ممان مغناطیسی μ و تکانه زاویه‌ای اسپینی Φ^{16} با یک ثابت تناسب γ به صورت زیر به یک دیگر مرتبط می‌شوند.

$$\mu = \gamma \cdot \Phi \quad (1-1)$$

که γ در رابطه‌ی بالا نسبت ژایرومغناطیسی 17 نامیده می‌شود و واحد $\frac{\gamma}{\pi}$ را عموماً بر حسب (MHz/Tesla)

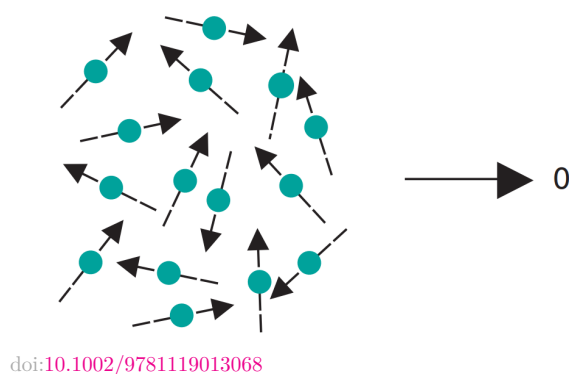
تعداد پروتون	تعداد نوترون	عدد اسپین
زوج	زوج	صفر
فرد	فرد	عدد صحیح
فرد	زوج	عدد صحیح و نصفی
زوج	فرد	

جدول ۱-۲: بررسی عدد اسپین نسبت به تعداد پروتون ها و تعداد نوترون ها

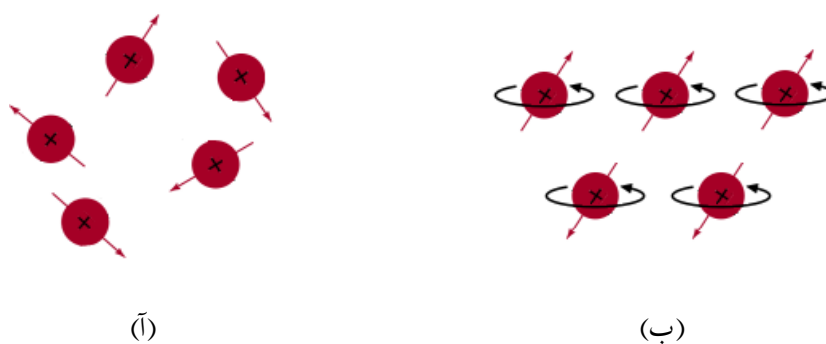
¹⁵Nuclear Magnetic Moment

¹⁶Spin Angular Momentum

¹⁷Gyromagnetic Ratio



شکل ۱-۴:

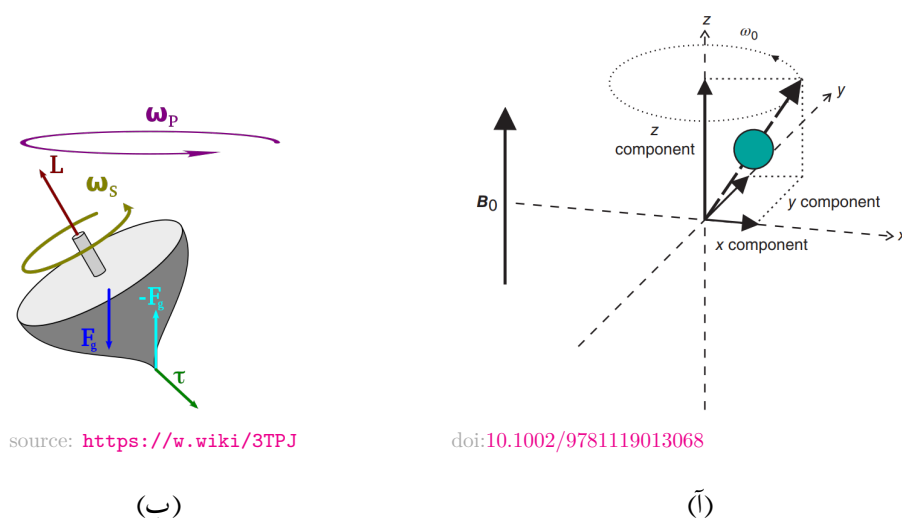


source: http://www.qorganica.es/QOT/T12/alineamiento_e_exported/index.html

شکل ۱-۵:

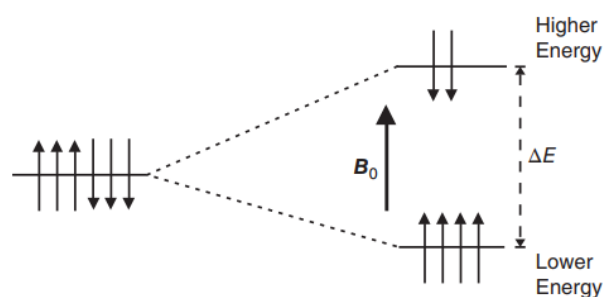
بیان می‌کنند.

در اندازه‌گیری MR مجموعه‌ای از این میدان‌های مغناطیسی کوچک مورد بررسی قرار می‌گیرد و به صورت تکی به قدری نیستند که بتوان آن‌ها را بررسی نمود. جهت این اسپین‌ها یک مکانیسم تصادفی دارد به طوری که در یک مجموعه هسته دارای اسپین، در صورت عدم حضور میدان خارجی، برآیند میدان مغناطیسی حاصل در آن مجموعه صفر است و سیستم در حالت تعادل قرار دارد. (شکل ۱-۴) در واقع تصاویر MRI در ابعاد ماکروسکوپیکی ثبت می‌شوند.

source: <https://w.wiki/3TPJ>

doi:10.1002/9781119013068

شکل ۱-۶:



doi:10.1002/9781119013068

شکل ۱-۷:

۱-۳-۱ پروتون‌ها در یک میدان مغناطیسی خارجی

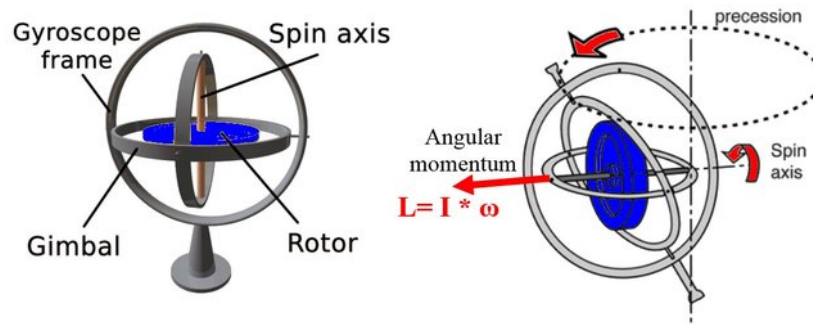
هنگامی که پروتون‌های دارای اسپین در داخل یک میدان مغناطیسی قوی^{۱۸} خارجی B قرار می‌گیرند، دو اتفاق مهم رخ می‌دهد: اولاً ممان‌های مغناطیسی اتم‌ها تمایل پیدا می‌کنند که هم‌جهت یا خلاف جهت^{۱۹} قرار بگیرند (شکل ۱-۵(ب)) و ثانیاً وادار می‌شوند که حرکت چرخشی حول راستای میدان مغناطیسی خارجی داشته باشند که به این پدیده حرکت تقدیمی^{۲۰} می‌گویند.

همانطور که اشاره شد در اثر یک میدان مغناطیسی خارجی B تمایل پیدا می‌کنند که ممان‌های مغناطیسی خود را در جهت یا خلاف جهت آن میدان قرار دهند. آن‌هایی که در جهت آن میدان قرار

^{۱۸} هنگامی که از میدان مغناطیسی قوی صحبت می‌کنیم منظور چیزی حدود حداقل ۱ تسلا یا ۱۰۰۰۰ گاوس است.

^{۱۹} Parallel or Anti-parallel

^{۲۰} Precession



source: <https://is.gd/T3UkHu>

شکل ۱-۸:

داشته باشند انرژی کمتر و آنهایی که در خلاف جهت آن میدان باشند، انرژی بیشتری را دارا می‌باشند. تعداد پروتون‌های زیادی وجود دارند که در جهت و یا خلاف جهت میدان قرار می‌گیرند و تعداد آن‌ها تقریباً مشابه هم دیگر است که در حقیقت می‌توان گفت اکثر پروتون‌ها در این میدان اثر یک دیگر را خنثی می‌کنند اما برآیند آن‌ها صفر نمی‌شود زیرا تعداد آنانی که در جهت میدان قرار می‌گیرند به میزان کمی، بیشتر است که به آن به اصطلاح، اسپین اضافه^{۲۱} گفته می‌شود. (شکل ۱-۷) از این رو مقدار ناصفری برای مغناطیس‌شوندگی شبکه^{۲۲} وجود دارد. به عبارت دقیق‌تر، نسبت $\frac{\text{تعداد خلاف جهت‌ها} - \text{تعداد هم جهت‌ها}}{\text{تعداد کل پروتون‌ها}}$ یک عدد نامنفی بسیار کوچک است. به عنوان مثال، در یک میدان مغناطیسی خارجی $B_0 = 3T$ و در دمای اتاق، نسبت مذکور چیزی در حدود 10^{-5} می‌باشد. یعنی از یک میلیون پروتونی که در اختیار داریم تنها 10^4 تا آنان در اسپین اضافه نقش دارند که آن اسپین اضافه در تولید سیگنال‌های MR^{۲۳} استفاده می‌شوند.

به طور دقیق‌تر تعداد پروتون‌های همجهت (N_{down}) و خلاف جهت میدان (N_{up})، از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌گردد.

$$\frac{N_{\text{up}}}{N_{\text{down}}} = e^{\frac{\Delta E}{k_B T}} \quad (2-1)$$

که در این رابطه، k_B ثابت بولتزمن^{۲۴} ($k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$) و ΔE اختلاف این دو سطح انرژی است که در شکل ۱-۷ مشخص شده است و T نیز دما بر حسب کلوین می‌باشد. مرجع [۱۱] روابط کوانتومی دقیق‌تری را در این رابطه بیان کرده است.

²¹Excess Spin

²²Net Magnitation

²³MR Signals

²⁴Boltzmann Constant

پدیده دومی که در اثر قرار گرفتن یک پروتون در درون یک میدان مغناطیسی بسیار قوی برایش اتفاق می‌افتد، حرکت تقدیمی نامیده می‌شود. این پدیده را می‌توان به صورت یک ژایروسکوپ (۸-۱) (شکل ۶-۱(ب)) و یا حرکت آشنای یک فرفره در حال گردش (شکل ۶-۱(ب)) در نظر گرفت. اگر یک ژایروسکوپ و یا فرفره در راستای عمودی جهت گیری داشته باشد، بدون تلوتلو خوردن^{۲۵} به دور خود می‌چرخد. هنگامی که یک بار محور چرخش ژایروسکوپ از محور عمومی فاصله بگیرد، در اثر میدان مغناطیسی زمین یا همان جاذبه^{۲۶} شروع به گردش حول محور عمودی خود با فرکانسی مستقل از فرکانس اسپینی مطابق شکل ۶-۱(ب) می‌کند.

به‌طور خلاصه دو نوع حرکت برای یک پروتون دارای اسپین در یک میدان مغناطیسی قوی می‌توان تصور کرد.

آ) حرکت اسپینی هسته به دور محور خود و با فرکانس مخصوص خود که آن حرکت، ممان زاویه‌ای اسپینی را تولید می‌کند و آن نیز باعث ایجاد ممان مغناطیسی می‌شود.

ب) حرکت تقدیمی که نوعی تلوتلو خوردن و گردش حول یک محور دیگر و با فرکانسی مستقل می‌باشد.

۱-۳-۲ مغناطش شبکه

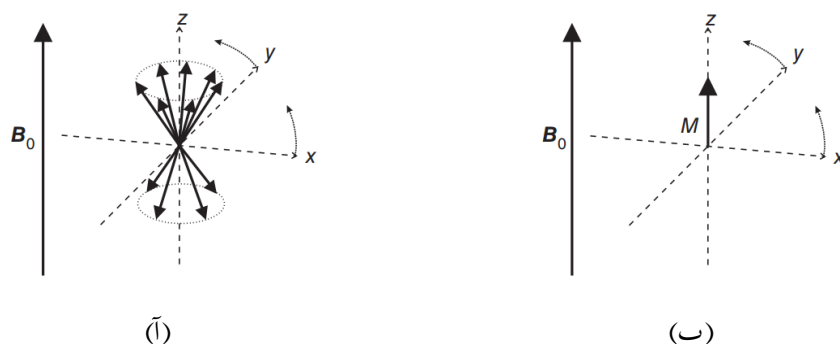
مغناطش شبکه و یا مغناطیس‌شوندگی شبکه^{۲۷}

موضوع مهم دیگری است که در MRI مطرح می‌شود. مغناطیس‌شوندگی هر پروتون را می‌توان به عنوان یک بردار در نظر گرفت. مغناطش شبکه را می‌توان به‌عنوان برآیند آن بردارها مطابق شکل ۹-۱ در نظر گرفت. هر یک از این بردار را می‌توان در راستای میدان به دو مولفه‌ی طولی و عرضی تجزیه نمود. با این مدل‌سازی نیز همان‌طور که پیشتر نیز توضیح داده شد، اکثر مولفه‌هایی هم‌جهت و خلاف جهت، هم‌دیگر را کنسل می‌کنند و تعداد کمی اسپین‌های هم‌جهت باقی می‌مانند که اسپین اضافه نام داشتند. اما موله‌عرضی صفر است. چراکه اسپین پروتون‌ها فاز تصادفی دارند و بنابراین برآیند آنان صفر می‌شود. این یعنی مغناطش شبکه، مولفه‌ای در راستای عرضی ندارد و صرفاً در راستای مولفه‌ی طولی یا همان راستای میدان مغناطیسی خارجی B_0 می‌باشد. (شکل ۹-۱(ب))

²⁵Wobbling

²⁶Gravity

²⁷Net Magnetization



doi:10.1002/9781119013068

شکل ۱-۹:

۳-۳-۱ فرکانس لامور و پدیده NMR

همانند رابطه‌ی بین تکانه زاویه‌ای اسپینی و ممان مغناطیسی که در رابطه‌ی ۱-۱ بیان شد، رابطه‌ی تناسبی دیگری نیز بین فرکانس زاویه‌ای حرکت تقدیمی ω و میدان مغناطیسی خارجی B_0 با ثابت تناسب ژایرومغناطیسی^{۲۸} γ می‌توان استخراج نمود:

$$\omega_0 = \gamma \cdot B_0 \quad \leftrightarrow \quad f_0 = \frac{\gamma}{2\pi} \cdot B_0 \quad (3-1)$$

به عنوان یک مثال، به ازای میدان خارجی $B_0 = 1\text{ T}$ ، مقدار f_0 برابر 42.58 MHz می‌شود. این فرکانس در شکل ۱-۶(آ) نیز نشان داده شده است. تساوی بالا به عنوان **تساوی لارمور**^{۲۹} شناخته می‌شود و مهم‌ترین معادله‌ای است که اکثر پدیده‌های مرتبط با MRI را توضیح می‌دهد که از بین آن پدیده‌ها می‌توان به رزونانس مغناطیسی و قسمت‌های تصویربرداری مانند مفهوم میدان گرادیان و نقش آن در تصویربرداری اشاره نمود. ثابت تناسب ژایرومغناطیسی برخی از مهمترین عناصر در کاربرد MRI در جدول ۱-۳ آورده شده است.

گفته شد که بر اثر وارد کردن یک میدان خارجی B_0 بر مجموعه‌ای از پروتون‌ها تعدادی از آن اسپین‌ها همجهت با میدان می‌شوند که انرژی کمتری دارند و تعدادی از آنان نیز خلاف انرژی میدان جهت‌گیری می‌کنند که انرژی بیشتری را دارا می‌باشند و در هر دو سطح انرژی^{۳۰} دارای حرکت تقدیمی با فرکانس تقدیمی لارمور که از رابطه‌ی ۱-۳ ناشی می‌شود، می‌باشند و اکثر آن ممان‌های مغناطیسی

²⁸Constant Gyromagnetic Ratio²⁹Larmor Equation³⁰Energy State

هم‌دیگر را خنثی می‌کردند و مغناطش شبکه که مقداری کوچک ولی ناصفری بود را بوجود می‌آوردند. در این هنگام اگر یک سیگنال الکترومغناطیسی RF^{۳۱} با همان فرکانس لارمور ω به آن تابیده شود، مطابق شکل ۱-۱۰ تعدادی از اسپین‌هایی که هم جهت با میدان B و در سطح انرژی پایین تری قرار داشتند، در اثر این تشدید، انرژی آن سیگنال را جذب می‌کنند و به سطح بالایی انرژی می‌روند که در این حالت نیز خلاف جهت میدان جهت گیری می‌کنند. این خاصیت در حقیقت یک ویژگی کوانتومی است که با فیزیک کلاسیک نمی‌توان آن را توجیه کرد و به عنوان وارونه‌سازی جمعیت^{۳۲} شناخته می‌شود. در اثر این اتفاق، مغناطش شبکه نیز دچار تغییر می‌شود. برای بررسی این تغییرات معمولاً ساده تر است که دستگاه مختصات جدید $x'oy'$ را به شیوه زیر تعریف کنیم:

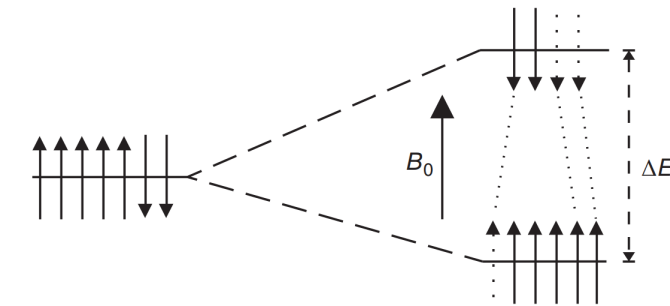
Element	Isotope	Spin	Natural Abundance	Quadrupole Moment, Q ($10^{-30} \frac{\text{rad}}{\text{m}^2} \text{A}$)	Gyromagnetic Ratio ($10^7 \frac{\text{rad}}{\text{T.s}}$)	Common Reference Standard
Hydrogen	¹ H	$\frac{1}{2}$	100	0	26.75105	Si(CH ₃) ₄
	² H or ² D	1	< 0.1	2.8E-3	4.10646	Si(CD ₃) ₄
Boron	¹⁰ B	3	19.7	0.08	2.87471	BF ₃ · OEt ₂
	¹¹ B	$\frac{3}{2}$	80.3	0.04	8.58406	BF ₃ · OEt ₂
Carbon	¹³ C	$\frac{1}{2}$	1.1	0	6.72804	Si(CH ₃) ₄
Nitrogen	¹⁴ N	1	99.6	1	1.93297	CH ₃ NO ₂
	¹⁵ N	$\frac{1}{2}$	0.4	0	-2.71171	CH ₃ NO ₂
Fluorine	¹⁹ F	$\frac{1}{2}$	100	0	25.18034	CFCl ₃
Aluminium	²⁷ Al	$\frac{5}{2}$	100	15	6.97594	Al(NO ₃) ₃ in D ₂ O
Silicon	²⁹ Si	$\frac{1}{2}$	4.7	0	-5.3146	Si(CH ₃) ₄
Phosphorus	³¹ P	$\frac{1}{2}$	100	0	10.84015	85% H ₃ PO ₄
Chlorine	³⁵ Cl	$\frac{3}{2}$	75.5	-7.9	2.62401	NaCl in D ₂ O
	³⁷ Cl	$\frac{3}{2}$	24.5	-6.2	2.18428	NaCl in D ₂ O

source: <http://www.acadiau.ca/~bellis/resources/nmr/isotopes.html>

جدول ۱-۳:

³¹RadioFrequency

³²Population Inversion



doi:10.1002/9781119013068

شکل ۱-۱۰:

$$x' = x \cos(\omega_0 t) - y \sin(\omega_0 t) \quad (1-4\text{آ})$$

$$y' = x \sin(\omega_0 t) + y \cos(\omega_0 t) \quad (1-4\text{ب})$$

$$z' = z \quad (1-4\text{ج})$$

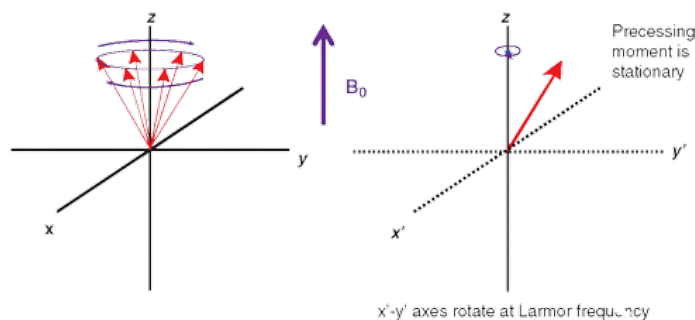
توجه داریم که در تعریف این دستگاه جدید پارامتر t که همان زمان است، دخیل شده است و این یعنی که دستگاه مختصاتی در طول زمان با همان فرکانس لارمور ω_0 در حال گردش است که شکل ۱-۱۱(آ) آن را نشان می‌دهد. (محور z ها در همان راستای میدان B_0 تعریف شده است.) با این تغییر، ممان های مغناطیسی گردان، به صورت ایستادن ^{۳۳} مطابق شکل ۱-۱۱(ب) در می‌آیند.

سیگنال RF یک سیگنال با پهنای باند بسیار باریک حول یک فرکانس مرکزی می‌باشد. در طی این فرایند، پروتون ها انرژی آن را در فرکانس مشخصی دریافت می‌کنند. با نوشتن روابط کوانتومی در [۱۱]، می‌توان نشان داد که رابطه این فرکانس خاص و میدان B_0 مجدداً از تساوی لارمور در رابطه‌ی ۱-۳ محاسبه می‌شود و این یعنی آن فرکانس خاص همان ω_0 است. همچنین اختلاف دو سطح مذکور انرژی نیز از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید که به معادله‌ی موج بروگلی ^{۳۴} ناشی می‌شود.

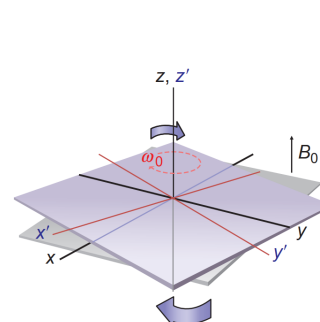
$$\Delta E = \hbar \omega_0 = \left(\frac{+1}{2} - \frac{-1}{2} \right) \gamma \hbar B_0 = \gamma \hbar B_0. \quad (1-5)$$

که در آن \hbar ثابت پلانک ^{۳۵} با مقدار $\hbar = 6.62607004 \times 10^{-34} \text{ (m}^2\text{kg/s)}$ می‌باشد. بنابراین صرفاً انرژی در این فرکانس ω_0 پروتون را برمی‌انگیزد که از اسپین خود را تغییر دهند و بین سطوح انرژی جابجا

³³Stationary³⁴De Broglie's wave equation³⁵Planck's Constant

source: musculoskeletalkey.com/magnetic-resonance-imaging-2/

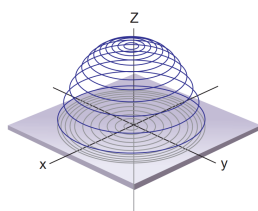
(ب)



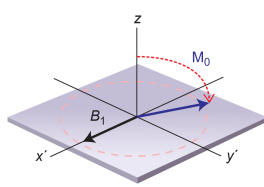
doi:10.1017/9781107706958.010

(ا)

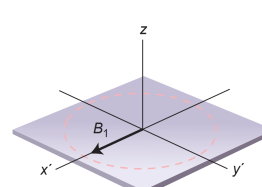
شکل ۱-۱۱:



(ج)



(ب)



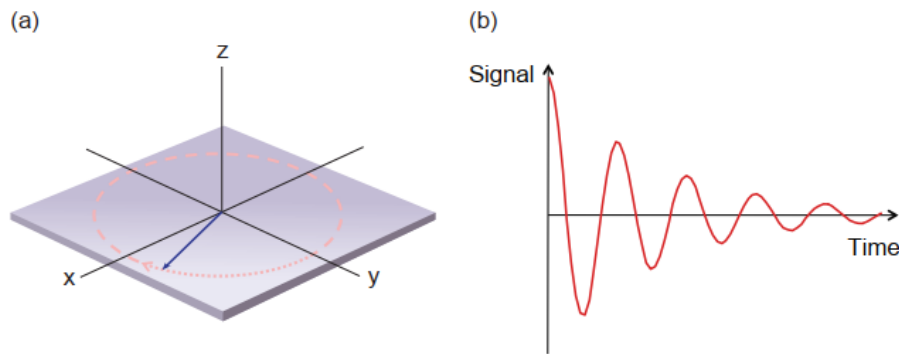
(ا)

doi:10.1017/9781107706958.010

شوند. این انرژی کوانتیده به عنوان انرژی جذب رزونانسی و یا تشدید^{۳۶} شناخته می‌شود و فرکانس مربوط به آن را فرکانس تشدید^{۳۷} می‌نامند. از این نکته می‌توان دلیل نام گذاری MRI و مخصوصاً بخش رزونانسی آن را متوجه شد.

پالس RF توسط یک سیم‌پیچ فرستنده که بر میدان B_0 عمود است، ایجاد می‌شود و یک میدان مغناطیسی B_1 که عمود بر میدان B_0 و با فرکانس تشدید لارمور ω در حال نوسان است، را ایجاد می‌کند. بنابراین دیگر موله عرضی M_x صفر نمی‌باشد. فرض کنید این میدان جدید B_1 در دستگاه گردان شکل ۱-۴آ در راستای x' تعریف شده است. از آنجا که این میدان با فرکانس ω در حال نوسان است، در این دستگاه مختصات گردان به صورت ایستاد ظاهر می‌شود (شکل ۱-۱۲آ) و فرض است که میدان B_0 نیز در راستای محور z تعریف شده است. این میدان جدید مغناطش شبکه (M_x) را در طول زمان جابجا می‌کند. این جابجایی در دستگاه مختصات گردان، به شکل خیلی ساده حول محور x'

³⁶Resonance Absorption Energy³⁷Resonant Rrequency



شکل ۱-۱۲:

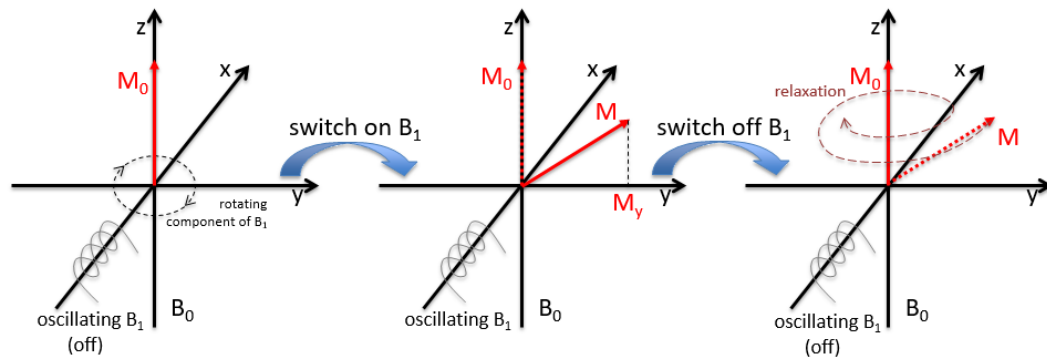
ها و با سرعت ثابت جابجا می‌شود (البته اگر میدان B_1 در طول زمان مقدار ثابتی داشته باشد) که در شکل ۱-۱۲ (ب) این جابجایی را از محور z تا محور y' را نمایش می‌دهد. این جابجایی را می‌توان بر حسب زمان و براساس زاویه‌ی تکان α ^{۳۸} به شکل زیر فرمول‌بندی کرد.

$$\alpha = \gamma B_1 t_p \quad (۱-۶)$$

که در آن B_1 اندازه‌ی میدان مغناطیسی سیگنال RF است و t_p طول زمان اعمال پالس است. اگر پالس RF درست در زمانی که M به صفحه‌ی مولفه‌ی عمودی برسد پایان بیابد، $\alpha = 90^\circ$ می‌شود و پالس RF یک پالس 90° نامیده می‌شود. اگر قدرت و یا طول مدت اعمال این سیگنال دوبرابر شود، بردار M دقیقاً 180° می‌چرخد و پالس متناظر با آن را پالس 180° می‌نامند. بنابراین زمان اهمیت ویژه‌ای در اساس کار دستگاه‌های MRI دارد [۱۱]. شکل ۱-۱۲ (ج) مسیر حرکت بردار M را در دستگاه مختصات معمول xoy نشان می‌دهد که مسیری فکری را طی می‌کند. همچنین پالس RF یک اثر مهم دیگری که بر روی اسپین‌ها دارد این است که آن‌ها را هم‌فاز می‌کند. به عبارت دیگر تمام آن‌ها در روی دایره‌ی گردان، به یک نقطه اشاره می‌کنند. شکل ۱-۱۳ خلاصه‌ای از آنچه که گفته شد را نشان می‌دهد.

با جابجایی بردار M به سمت صفحه‌ی عرضی و حرکت تقدیمی آن به دور محور z ها یک میدان مغناطیسی نوسانی ایجاد می‌شود که می‌توان آن را توسط ولتاژی که روی یک سیم‌پیچ گیرنده القا می‌کند، اندازه‌گیری نمود. این سیم‌پیچ صرفاً به میدان‌های مغناطیسی عمود بر راستای B حساس می‌باشد. بنابراین در این هنگام باید سیم‌پیچ فرستنده خاموش شود و در سیم‌پیچ گیرنده ولتاژی القا می‌شود که با فرکانس ω تغییر می‌کند. دامنه‌ی این ولتاژ القایی به صورت نمایی به سمت صفر تنها در عرض چند

³⁸Flip Angle



source: <https://musculoskeletalkey.com/magnetic-resonance-imaging-2/>

شکل ۱-۱۳:

میلی ثانیه میرا می شود (شکل ۱-۱۲) چرا که پروتون ها به سرعت نسبت به یک دیگر دیفاز^{۳۹} می شوند. این سیگنال القای آزاد میرا شونده (FID)^{۴۰} نامیده می شود [۸] که در مورد آن بیشتر صحبت خواهد شد.

۴-۱ سیگنال FID و آزادسازی

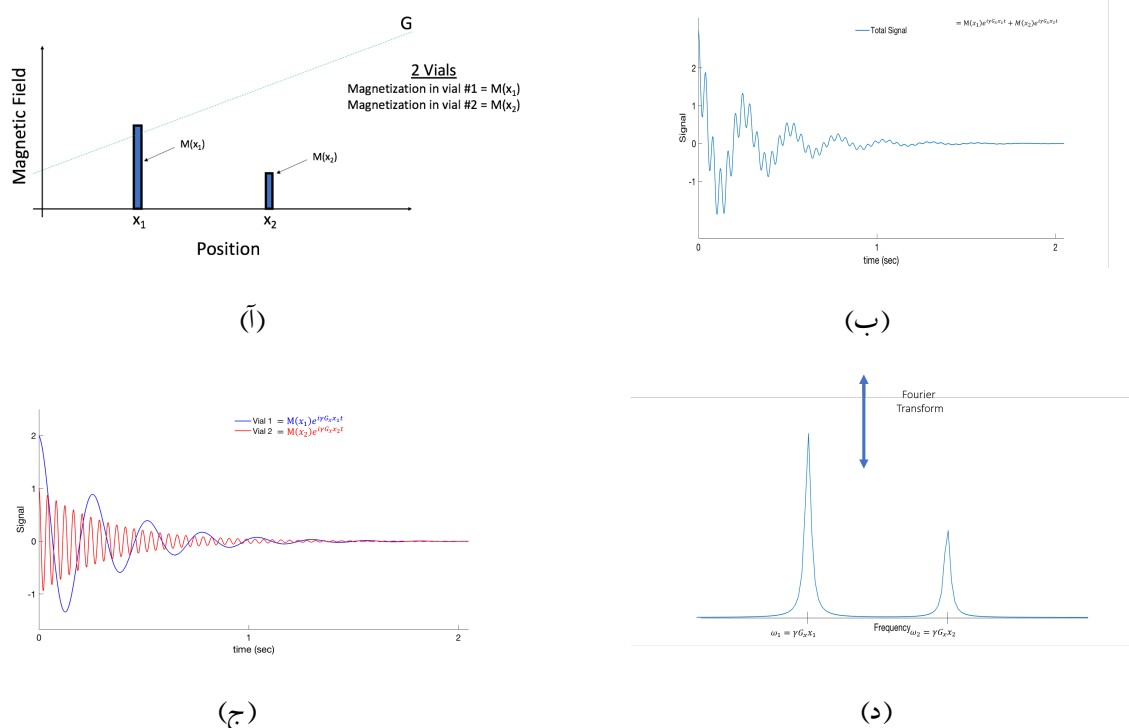
به محض آن که پالس RF قطع می شود، پروتون هایی که بردار مغناطیسی آن ها به سمت صفحه عرضی متمایل شده بود، به نقطه تعادل خود باز گردند. در این آزادسازی^{۴۱} دو اتفاق اصلی می افتد: (۱) پروتون ها انرژی ای را که در فرکانس ω جذب کرده بودند را از خود منتشر می کنند. (۲) اسپین هایی که بعد از اعمال فاز هم فاز شده اند، فاز خود را از دست می دهند و مغناطش شبکه به محور B_0 باز می گردد و حول آن مانند یک ژيروسکوپ به حرکت تقدیمی می پردازد (شکل ۱-۱۳).

علت دیفاز شدن اسپین ها، اختلاف اندکی است که بین فرکانس تقدیمی آن ها وجود دارد. برای درک بهتر این موضوع، یک دستگاه مختصات گردان با فرکانس لارمور ω شکل ۱-۴آ را در نظر بگیرید. اگر اسپینی فرکانس تقدیمی آن کمی بیشتر باشد، در جهت عقربه های ساعت و اگر کمی کمتر باشد، در خلاف جهت عقربه های ساعت دیفاز می شود. بنابراین هر چیزی که باعث تغییرات کمی در فرکانس آن ها از فرکانس لارمور شود، منجر به دیفاز شدن آن می شود. [۱۱]

³⁹Dephase

⁴⁰Free Induction Decay

⁴¹Relaxation



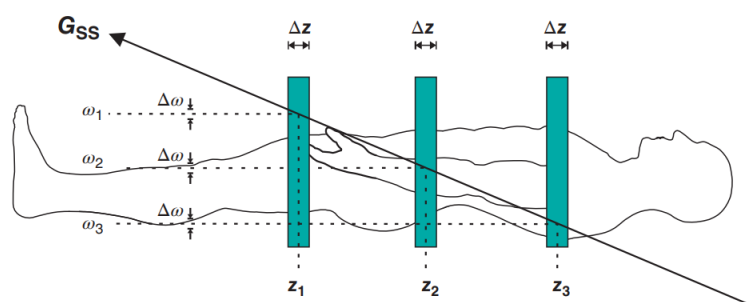
source: <https://youtu.be/vC82NeZmL-M>

شکل ۱-۱۴:

گفته شد که مولفه‌ی عرضی M ولتاژی را موسوم به FID در سیم پیچ های گیرنده القا می‌کند. به‌طورکلی، این سیگنال FID سه مولفه‌ی مورد علاقه دارد: اندازه ^{۴۲} (پیک دامنه)، فرکانس و فاز (جهت نسبت به فاز سیگنال RF فرستنده). اندازه سیگنال متناسب به مقدار M قبل از اعمال پالس RF است. فرکانس آن نیز همان فرکانس لارمور در رابطه ی ۱-۳ است که با اندازه میدان مغناطیسی B که پروتون ها تحت تاثیر آن هستند، متناسب است. اگر تمام پروتون ها تحت تاثیر یک میدان مغناطیسی B یکسان قرار داشته باشند، بنابراین تنها یک فرکانس درون FID دیده می‌شود. در واقعیت میدان مغناطیسی B در سراسر بدن بیمار تغییر می‌کند. بنابراین سیگنال MR شامل چندین فرکانس است که در طول زمان متناسب با سیگنال RF تغییر می‌کند. ساده تر است که چنین سیگنال چند فرکانسی را در حوزه فرکانس بررسی کرد که این حوزه نیز با یک تبدیل فوریه ^{۴۳} از حوزه زمان بدست می‌آید. [۴]

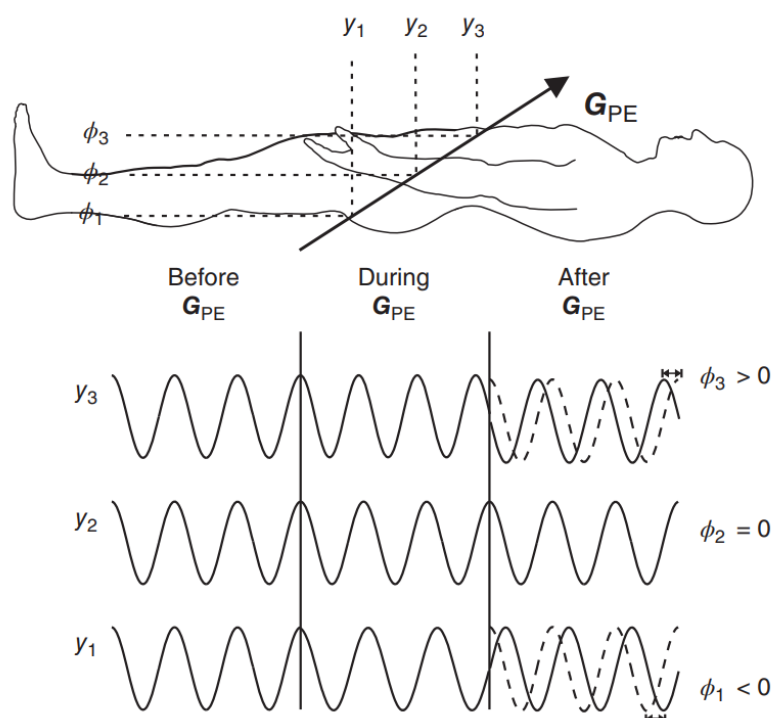
⁴²Magnitude

⁴³Fourier Transformation



doi:10.1002/9781119013068

شکل ۱-۱۵:



doi:10.1002/9781119013068

شکل ۱-۱۶:

بخش ۲

حسگری فشرده

بخش ۳

یادگیری عمیق

در ساختار CS-MRI تلاش می‌شود که مسیله‌ی بهینه سازی زیر حل شود تا از اسپارسیتی در یک حوزه تبدیل بتوان به منظور بازسازی تصویر از روی نقاط باقیمانده کند. مشکل اصلی این کار که در مقاله [۱۰] راه حل حسگری فشرده آن مورد بررسی قرار گرفت، این است که به بخاطر مفهوم مطلوب ناهمدوستی^۱ مجبور به آپدیت کرد بین هر دو حوزه‌ی تصویر و حوزه k-space است.

$$\min_{\hat{z} \in \mathbb{C}^N} \|\mathcal{T}z\|_1 \quad (3-1)$$

$$\text{s.t. } \mathcal{P}_\Lambda([\hat{x}]) = \mathcal{P}_\Lambda([\hat{z}]) \quad (3-1\text{b})$$

مقاله [۹] توانست نشان دهد که بین اسپارسیتی در یک حوزه تبدیل از تصویر (یا FRI^۲) و حوزه k-space ارتباطی وجود دارد و این ارتباط به رنگ پایین بودن^۳ ماتریس ساختاریافته هنکل^۴ در حوزه k-space بر میگردد. به عبارت دیگر اگر سیگنال ورودی یک سیگنال FRI باشد، ماتریس ساختار یافته هنکل آن در حوزه فوریه، رنگ پایین خواهد بود.

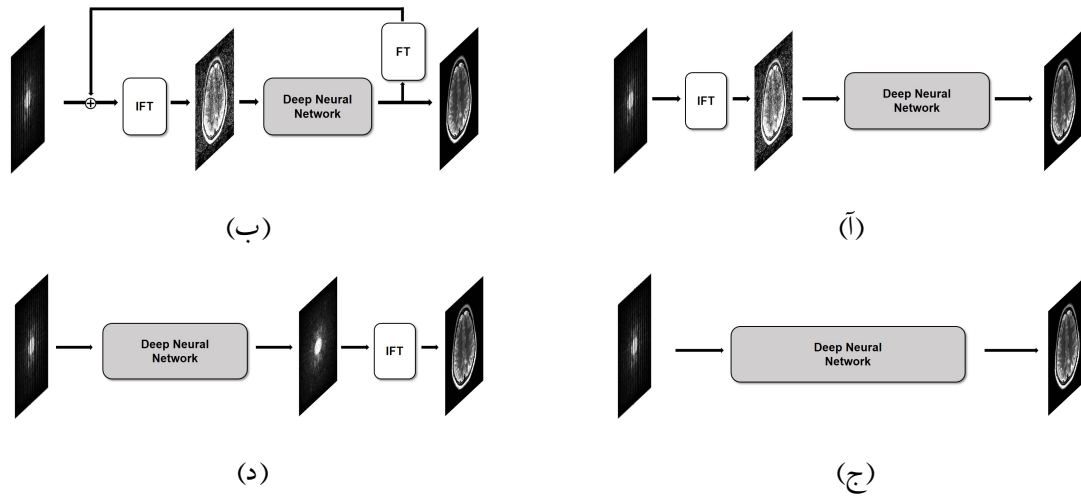
بنابراین مسیله‌ی CS-MRI را می‌توان به شکل زیر در آورد که در [۹] از آن به نام ALOHA یاد برده است.

¹Incoherency

²Finite Rate Inovation

³Low-Rankness

⁴Structured Hankel Matrix



شکل ۳-۱:

$$\min_{\hat{z} \in \mathbb{C}^N} \text{Rank}(\mathcal{H}_d(\hat{z})) \quad (\text{آ} ۲-۳)$$

$$\text{s.t. } \mathcal{P}_\Lambda([\hat{x}]) = \mathcal{P}_\Lambda([\hat{z}]) \quad (\text{ب} ۲-۳)$$

حال می‌خواهیم این مسئله را به یک مسئله یادگیری عمیق^۵ تبدیل کنیم. از آنجایی که ما از ساختار شکل ۳-۱ (ج) استفاده می‌کنیم، مساعد است که یک تابع هزینه را روی حوزه تصویر تشکیل دهیم از این رو الگوریتم ALOHA را به شکل زیر ویرایش می‌کنیم.

$$\min_{\hat{z} \in \mathbb{C}^N} \|x - \mathcal{F}^{-1}\hat{z}\| \quad (\text{آ} ۳-۳)$$

$$\text{s.t. } \text{Rank}(\mathcal{H}_d(\hat{z})) = s, \quad (\text{ب} ۳-۳)$$

$$\mathcal{P}_\Lambda([\hat{x}]) = \mathcal{P}_\Lambda([\hat{z}]) \quad (\text{ج} ۳-۳)$$

که در آن s یک تخمینی از رنک ماتریس ساختار یافته هنکل است. توجه داریم که تابع $\text{Rank}(\cdot)$ یک قید غیر کانوکس^۶ است. در مقاله [۹] به پیشنهاد از روش تکمیل ماتریس [۵] استفاده از رنک هسته‌ای^۷ را برای حل این مشکل توصیه کرده است اما این مقاله روش دیگری را برای غلبه بر این مشکل را اتخاذ

^۵Deep-Learning^۶non-convex^۷nuclear norm

کرده است.

در ابتدا از اعداد مختلط خود را خلاص می‌کنیم. این کار به سادگی با تعریف اپراتور $\mathcal{R}(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ روبرو امکان پذیر است: $\mathcal{R}(z) = [\mathcal{R}](z) \mathcal{I} \uparrow(z)$ در این صورت می‌توان معادله ۳-۳ را به صورت زیر با نویسی نمود.

$$\min_{\hat{z} \in \mathbb{C}^N} \|x - \mathcal{F}^{-1} \hat{z}\| \quad (3-4\text{آ})$$

$$\text{s.t. Rank}(\mathcal{H}_{d|2}(\mathcal{R}(\hat{z}))) = Q \leq 2s, \quad (3-4\text{ب})$$

$$\mathcal{P}_\Lambda([\hat{x}]) = \mathcal{P}_\Lambda([\hat{z}]) \quad (3-4\text{ج})$$

حال می‌خواهیم آن را به فرم یادگیری عمیق در بیاوریم. برای این کار چون از ساختار ۳-۱(ج) استفاده کردیم و در این ساختار ورودی و خروجی، حوزه ای یکسان دارند، پس می‌توان از یک ساختار متقارن اتوانکودر^۸ استفاده کرد. که دارای المان های پولینگ^۹ و آنپولینگ^{۱۰} است. این مقاله سعی میکند که آن قید رنگ را در درون ساختار شبکه تزریق کند تا همیشه برآورده شود.

تجزیه SVD ماتریس $\mathcal{H}_d(\mathcal{R}(\hat{z})) = U \Sigma V^T$ را در نظر بگیرد. میتوان دو بردار $\Psi, \tilde{\Psi} \in \mathbb{R}^{2d \times Q}$ به نحوی تعریف کرد که حاصل ضرب آن $\Psi \tilde{\Psi}^T = P_{\text{Range}(V)}$ شود. در این رابطه $P_{\text{Range}(V)}$ ماتریس پروجکشن روی برد ماتریس V حاصل از تجزیه SVD مذکور خواهد بود. همچنین ماتریس های پولینگ و آنپولینگ $\Phi, \tilde{\Phi} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ را تعریف کرد. چون که شبکه متقارن است پس میتوان عملکرد این دو را معکوس هم به شکل $\Phi \tilde{\Phi}^T = I_N$ دانست. از این رو روابط زیر را میتوان استخراج نمود.

$$\mathcal{H}_{d|2}(\mathcal{R}(\hat{z})) = \Phi \tilde{\Phi}^T \mathcal{H}_{d|2}(\mathcal{R}(\hat{z})) \Psi \tilde{\Psi}^T = \Phi \mathbf{C} \tilde{\Psi}^T \quad (3-5)$$

که در آن

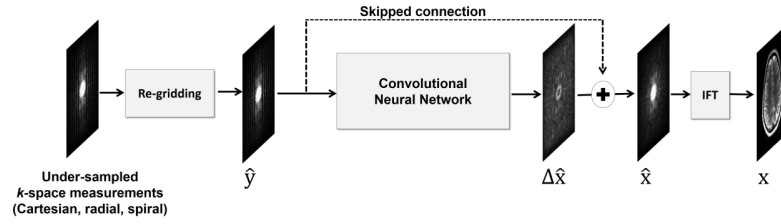
$$\mathbf{C} := \tilde{\Phi}^T \mathcal{H}_{d|2}(\mathcal{R}(\hat{z})) \Psi \quad (3-6)$$

حال می‌توان فضای برداری \mathcal{H} را به صورت زیر تعریف کرد.

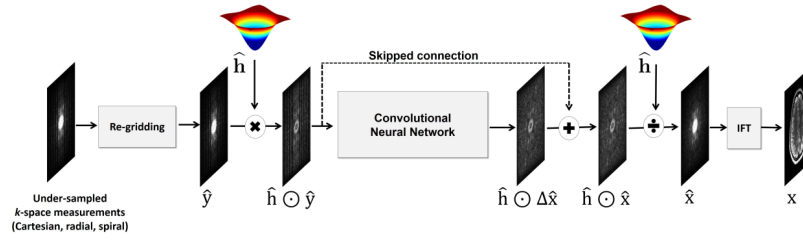
⁸Auto-encoder

⁹Pooling

¹⁰Unpooling



(ا)



(ب)

$$\mathcal{H}(\Psi, \tilde{\Psi}) = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N \mid \Re[\mathbf{z}] = \Phi^T (\mathbf{C} \otimes g(\tilde{\Psi})) \right. \\ \left. \mathbf{C} = (\tilde{\Phi} \Re[\mathbf{z}]) \otimes h(\Psi) \right\} \quad (7-3)$$

با این تعریف می‌خواهیم بهینه‌سازی را صرفاً بر روی این فضا حل کنیم. بنابراین این مسئله به صورت زیر قابل بازنویسی است.

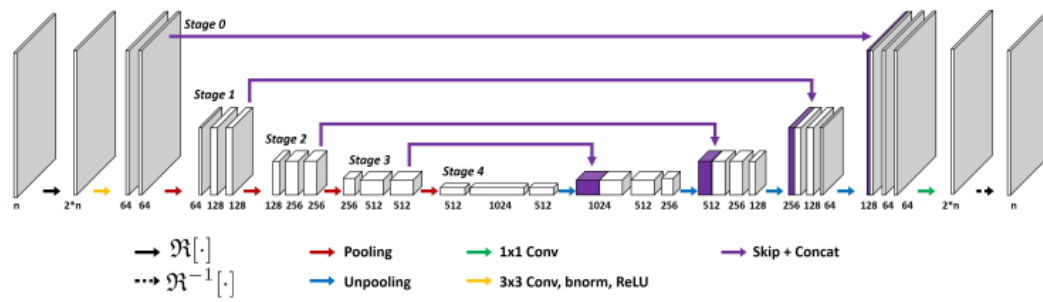
$$(P'_A) \quad \min_{\hat{\mathbf{z}} \in \mathcal{H}(\psi, \tilde{\psi})} \min_{\Psi, \tilde{\Psi}} \|\mathbf{x} - \mathcal{F}^{-1} \hat{\mathbf{z}}\| \quad (\tilde{A}-3)$$

$$\text{s.t.} \quad \mathcal{P}_\Lambda([\hat{\mathbf{x}}]) = \mathcal{P}_\Lambda([\hat{\mathbf{z}}]) \quad (B-3)$$

حال با این تعریف می‌توان شبکه کانولوشنالی‌های در یک ساختار اتوانکودر را ایجاد کرد. در این مقاله دوساختار موجود در شکل ۳ را مورد بررسی قرار داده است.

توجه داریم که در ساختارهای ۳ از اسکپ کانکشن^{۱۱} استفاده کرده است. این اسکپ کانکشن کمک به ایجاد یک ساختار Residual و تولید ساختارهای اسپارس‌تر در ورودی شبکه یادگیری عمیق است. بنابراین به اسپارسی‌تری ورودی آن افزوده می‌شود.

¹¹Skip-Connection



شکل ۳-۲:

برای ساختار اتوانکودر نیز از ساختار معروف UNET استفاده شده است که تصویر ۳-۲ این ساختار متقارن و دارای اسکپ کانکشن های خود را نشان میدهد که بعنوان اتوانکودر بسیار کاربرد دارد.

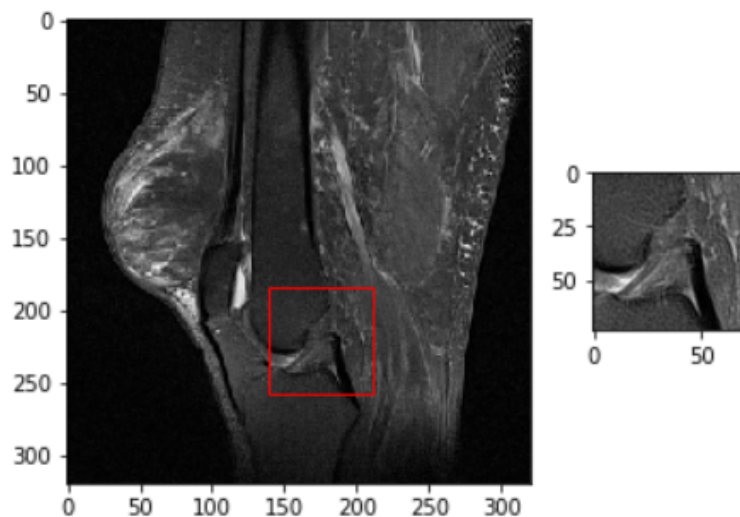
بخش ۴

نتایج

دکتر متاسفانه نرسیدم خروجی ران شده الگوریتم خود را ارسال کنم. لطفا در لینک زیر آخرین تغییرات که تا فردا صبح نهایی میشود را دیدن فرمایید.

<https://github.com/MohammadRaziei/compressed-sensing-course>

خروجی زیر حاصل اجرای ناقص من است که فایل های سورس آن نیز در همین ریپوزیتوری قرار دارد.



شکل ۴-۱:

مراجع

- [1] Available online: https://en.wikipedia.org/wiki/Magnetic_resonance_imaging, (accessed on 23 May 2021).
- [2] NMR theory web handout. Available online: <http://iverson.cm.utexas.edu/courses/310N/Handouts/NMRhandout.html>, (accessed on 6 June 2021).
- [3] Available online: <https://www.usgs.gov/special-topic/water-science-school/science/water-you-water-and-human-body>, (accessed on 8 June 2021).
- [4] Dale Brian M. Semelka Richard C Brown, Mark A. *MRI : basic principles and applications*. Wiley-Blackwell, 5 edition, 2015. URL: <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=d76d7c27e312cdba3afe5cafc952bb7e>.
- [5] Emmanuel J. Candès and Benjamin Recht. Exact matrix completion via convex optimization. *Found Comput Math*, 9(6):717–772, apr 2009. doi:10.1007/s10208-009-9045-5.
- [6] Justin P. Haldar. Low-rank modeling of local k-space neighborhoods (LORAKS) for constrained MRI. *IEEE Trans. Med. Imaging Transactions on Medical Imaging*, 33(3):668–681, mar 2014. doi:10.1109/tmi.2013.2293974.
- [7] Yoseo Han, Leonard Sunwoo, and Jong Chul Ye. k -space deep learning for accelerated MRI. *IEEE Trans. Med. Imaging Transactions on Medical Imaging*, 39(2):377–386, feb 2020. doi:10.1109/tmi.2019.2927101.
- [8] Joseph P. Hornak. Chapter 4: Nmr spectroscopy. Available online: <https://www.cis.rit.edu/htbooks/mri/chap-4/chap-4.htm#4.1>, (accessed on 22 June 2021).

-
- [9] Kyong Hwan Jin, Dongwook Lee, and Jong Chul Ye. A general framework for compressed sensing and parallel MRI using annihilating filter based low-rank hankel matrix. *IEEE Trans. Comput. Imaging Transactions on Computational Imaging*, 2(4):480–495, dec 2016. doi:10.1109/tci.2016.2601296.
- [10] Michael Lustig, David Donoho, and John M. Pauly. Sparse MRI: The application of compressed sensing for rapid MR imaging. *Magn. Reson. Med.*, 58(6):1182–1195, 2007. doi:10.1002/mrm.21391.
- [11] Donald W. McRobbie, Elizabeth A. Moore, and Martin J. Graves. Getting in tune: Resonance and relaxation. In *MRI from Picture to Proton*, pages 124–143. Cambridge University Press. doi:10.1017/9781107706958.010.
- [12] Michael Unser, Pouya D. Tafti, Arash Amini, and Hagai Kirshner. A unified formulation of gaussian versus sparse stochastic processes—part II: Discrete-domain theory. *IEEE Trans. Inform. Theory Transactions on Information Theory*, 60(5):3036–3051, may 2014. doi:10.1109/tit.2014.2311903.