Antenna Array Processing

HW8

Mohammadreza Arani :::::::::::: 810100511

1401/09/16

```
clear ; clc; close all;
load("hw8.mat"); % Load Given Data: D and x
```

در این تمرین می خواهیم روش های مختلف بازیابی سیگنال تُنک (sparse) را پیاده سازی کنیم. در فایل hw8.mat ماتریس دیکشنری D با ابعاد 60×10 و بردار مشاهدات x با ابعاد 60×1 قرار داده شده است. در واقع بردار مشاهدات از رابطه ی $x = D\,s$ بدون وجود هیچ گونه نویزی تولید شده است.

Part A: Subset Selection

الف) با فرض این که بدانیم sparsity level برابر 3 است ($N_0 = 3$) و جواب مساله یکتاست، با استفاده از روش subset selection بردار اسپارس s را بیابید. درایه های غیر صفر s و مدت زمانی که طول کشید تا s را پیدا کنید گزارش کنید. آیا دانستن N_0 کمکی به حل این قسمت می کند؟

Knowning the Sparsity Level, determines the depth of for loops we need to take to reach the solution! -> O(N0)

```
% Subset Selection:
N0 =3;

[Row_D,Col_D] = size(D);

S_hat = cell(Col_D,Col_D) ;
Err   = 1e5*ones(Col_D,Col_D,Col_D)  ;
minErr = Err(1,1,1);
tic;
% Sapesity Level Determines the depth of for loops! --> in this
for i=1:Col_D-N0+1
    for j=i+1:Col_D-N0+2
        for k = j+1:Col_D-N0+3

        s_hat = pinv([D(:,i),D(:,j),D(:,k)])*x  ;
        S_hat{i,j} = s_hat;
        Err(i,j,k) = norm(x-[D(:,i),D(:,j),D(:,k)]*s_hat,2) ; % Calculate the error using norm2

        if(Err(i,j,k)<minErr)% Choose Best Columns:
```

```
            best_i = i;
            best_j = j;
            best_k = k;
            best_s_hat = s_hat;
            best_D_sub = [D(:,i),D(:,j),D(:,k)];
            minErr = Err(i,j,k);
        end

        end
    end
end
% Choose Best Columns:

delta_t_subset = toc;

disp("Consumed Time: "+ delta_t_subset+"(s)")
```

```
Consumed Time: 1.2994(s)
```

```
disp("Min Err: "+minErr)
```

```
Min Err: 6.7056e-15
```

```
disp("s_hat equals to: ")
```

```
s_hat equals to:
```

```
disp(best_s_hat)
```

```
    5.0000
    7.0000
   -3.0000
```

```
disp("D_sub equals to: ")
```

```
D_sub equals to:
```

```
disp(best_D_sub)
```

```
   -0.0978    0.4338   -0.7468
   -0.3758   -0.3259   -0.1739
    0.4854    0.2182   -0.1654
    0.4276    0.1064   -0.3020
    0.2960   -0.0258   -0.2809
    0.2291   -0.2758    0.2044
    0.3132    0.1605   -0.3697
    0.2993    0.4324    0.0291
    0.1699    0.2625   -0.1799
    0.2723    0.5369   -0.0543
```

```
disp(" Best Indices Are ")
```

```
 Best Indices Are
```

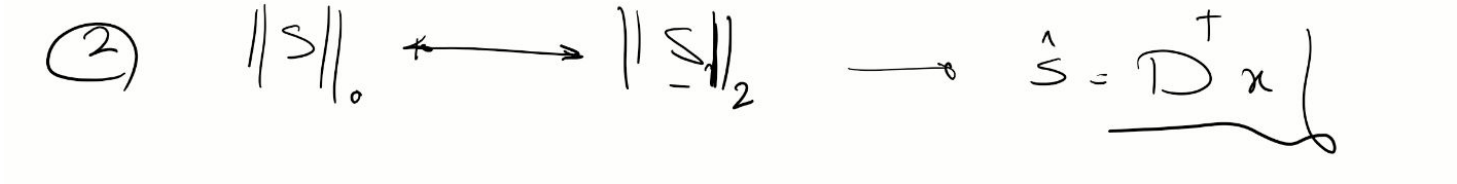
```
disp([best_i , best_j , best_k]')
```

```
     3
     6
    54
```

Part B:

ب) قسمت الف را با فرض این که به جای نرم صفر، نرم دو را کمینه کنیم تکرار کنید. آیا دانستن N_0 کمکی به حل این قسمت می کند؟

This Method works fine when s is saprse itself! -->> Checking s- satus:




```
s = pinv(D)*x;
disp(s')
```

```
  Columns 1 through 10

   -0.8779   -0.2642    1.5206    0.5541   -0.0881    1.7056   -0.4224   -0.6219   -0.1926   -0.5498

  Columns 11 through 20

   -0.9494    0.2295    0.7217   -0.5231    0.8819    1.0944   -0.1561   -0.2717    0.7519    0.1938

  Columns 21 through 30

    0.0893    0.6346   -1.1332    0.2557   -0.1637    0.8393   -0.1203   -0.4728    0.3206    0.1317

  Columns 31 through 40

    0.3394   -0.8016   -0.4127    0.3028    1.0453   -0.7418   -0.4494    0.5399    0.2173    0.2408

  Columns 41 through 50

   -0.2003    0.6208    0.1933    0.0180   -0.0023   -0.5883   -0.0615    0.6042   -1.0018   -0.3153

  Columns 51 through 60

   -0.3747    0.1485    0.1670   -1.0062    0.7273   -0.1761   -0.4949    0.1770    0.4521   -0.4678
```

```
% s does not sound like a sparse matrix -->>> This method is not fine!
% --->>> N0 prior knowledge is not useful in this Method!
```

Part C: Matching Pursuit

ج) قسمت الف را با استفاده از روش Matching Pursuit (MP) تکرار کنید. آیا دانستن N_0 کمکی به حل این قسمت می کند؟ یک بار دیگر بدون این که مقدار N_0 را دانسته در نظر بگیرید، این قسمت را تکرار کنید.

```
xr = x;
Chosen_IDX = 100+zeros(1,N0);

tic;
B = D;
for  i=1:N0


    if(i>1)
    B(:,Chosen_IDX(i-1)) = [];
    end
    Corr_matrix = repmat(xr,1,Col_D-i+1).*B;
    Corr_sum = sum(Corr_matrix,1); % Summation for each Column -->> a Row Vector
    [Value,Idx] = max(Corr_sum); % Choosing Best Fitted
    if(sum(Idx>Chosen_IDX)>0)
        Idx  = Idx + sum(Idx>Chosen_IDX) ;
    end
    Chosen_IDX(i) =  Idx;
    xr = x - Value*D(:,Idx); % xr = x  - <x,di>di

end
delta_t_MP = toc;

disp("Elapsed Time (MP): "+ delta_t_MP+"(s)");
```

```
Elapsed Time (MP): 0.0074118(s)
```

```
disp(" Best Indices Are ")
```

```
 Best Indices Are
```

```
disp(Chosen_IDX)
```

```
     6     3    55
```

MP Not Knowing N0:

Knowing N0 Helps alot in finding the best columns rapidly due to the fact that the MP algo is O(N0) when known and O(Col_D) when N0 is not known!

We then put an stopping Criteria -- >> This Compensates the number of iterations we have to cover until convergence!

```
xr = x;
Chosen_IDX_2 = inf+zeros(1,Col_D);
thresh = 1e-1;
tic;
```

```
B = D;
for  i=1:Col_D

    B = D;
    if(i>1)
    B(:,Chosen_IDX_2(1:i-1)) = [];
    end
    Corr_matrix = repmat(xr,1,Col_D-i+1).*B;
    Corr_sum = sum(Corr_matrix,1); % Summation for each Column -->> a Row Vector
    [Value,Idx] = max(Corr_sum); % Choosing Best Fitted
    if(sum(Idx>Chosen_IDX_2)>0)
        Idx  = Idx + sum(Idx>Chosen_IDX_2) ;
    end
    Chosen_IDX_2(i) =  Idx;
    xr = x - Value*D(:,Idx); % xr = x  - <x,di>di
    % Stop Criteria:
    s_hat = pinv(D(:,Chosen_IDX_2(1:i)))*x ;
    if(norm(x - D(:,Chosen_IDX_2(1:i))*s_hat ,2)<thresh )
        break;
    end

end
delta_t_MP_2 = toc;

disp("Elapsed Time (MP): "+ delta_t_MP_2+"(s)");
```

```
Elapsed Time (MP): 0.027271(s)
```

```
disp(" Best Indices Are ")
```

```
 Best Indices Are
```

```
disp(Chosen_IDX_2(Chosen_IDX_2<Col_D+5))
```

```
     6     3    55    16    38    41    40    39    21    26
```

Part D: Orthogonal MP (OMP)

د) قسمت الف را با استفاده از روش Orthogonal Matching Pursuit (OMP) تکرار کنید. آیا دانستن N_0 کمکی به حل این قسمت می کند؟ یک بار دیگر بدون این که مقدار N_0 را دانسته در نظر بگیرید، این قسمت را تکرار کنید.

```
xr = x;
Chosen_IDX_3 = inf+zeros(1,Col_D);
thresh = 1e-6;
tic;
B = D;
for  i=1:N0

    B = D;
```

```
    if(i>1)
    B(:,Chosen_IDX_2(1:i-1)) = [];
    end
    Corr_matrix = repmat(xr,1,Col_D-i+1).*B;
    Corr_sum = sum(Corr_matrix,1); % Summation for each Column -->> a Row Vector
    [Value,Idx] = max(Corr_sum); % Choosing Best Fitted
    if(sum(Idx>Chosen_IDX_2)>0)
        Idx  = Idx + sum(Idx>Chosen_IDX_3) ;
    end
    Chosen_IDX_3(i) =  Idx;
    xr = x - Value*D(:,Idx); % xr = x  - <x,di>di
    % Update Coefficients:
    if(i>1)
        D_sub_omp = D(:,Chosen_IDX_3(1:i)) ;
        xr = xr - D(:,Chosen_IDX_3(1:i))*(pinv(D_sub_omp)*xr);
    end
    % Stop Criteria:
%     if(norm(x - D(:,Chosen_IDX_3(1:i)) ,2)<thresh )
%         break;
%     end

end
delta_t_OMP = toc;

disp("Elapsed Time (OMP): "+ delta_t_OMP+"(s)");
```

```
Elapsed Time (OMP): 0.01431(s)
```

```
disp(" Best Indices Are ")
```

```
 Best Indices Are
```

```
disp(Chosen_IDX_3(Chosen_IDX_3<Col_D+5))
```

```
     6     3    22
```

OMP --- Not Knowing N0

```
xr = x;
Chosen_IDX_4 = inf+zeros(1,Col_D);
thresh = 1e-1;
tic;
B = D;
for  i=1:Col_D

    B = D;
    if(i>1)
    B(:,Chosen_IDX_4(1:i-1)) = [];
    end
    Corr_matrix = repmat(xr,1,Col_D-i+1).*B;
    Corr_sum = sum(Corr_matrix,1); % Summation for each Column -->> a Row Vector
```

```
    [Value,Idx] = max(Corr_sum); % Choosing Best Fitted
    if(sum(Idx>Chosen_IDX_4)>0)
        Idx  = Idx + sum(Idx>Chosen_IDX_4) ;
    end
    Chosen_IDX_4(i) =  Idx;
    xr = x - Value*D(:,Idx); % xr = x  - <x,di>di
        % Update Coefficients:
    if(i>1)
        D_sub_omp = D(:,Chosen_IDX_4(1:i)) ;
        xr = xr - D(:,Chosen_IDX_4(1:i))*(pinv(D_sub_omp)*xr);
    end

    % Stop Criteria:
    s_hat = pinv(D(:,Chosen_IDX_4(1:i)))*x ;
    if(norm(x - D(:,Chosen_IDX_4(1:i))*s_hat ,2)<thresh )
        break;
    end

end
delta_t_OMP_2 = toc;

disp("Elapsed Time (OMP): "+ delta_t_OMP_2+"(s)");
```

```
Elapsed Time (OMP): 0.030007(s)
```

```
disp(" Best Indices Are ")
```

```
 Best Indices Are
```

```
disp(Chosen_IDX_4(Chosen_IDX_4<Col_D+5))
```

```
     6     3    22    37     5    21    33    42    41    40
```

Part E:

ه) قسمت الف را با استفاده از روش Basis Pursuit (BP) تکرار کنید (روشی که نرم صفر را با نرم یک جایگزین می کند و با استفاده از Linear Programming مساله را حل می کند). آیا دانستن N_0 برای حل این قسمت ضروری است؟ کد این قسمت در اختیار شما قرار گرفته شده است. حتماً سعی کنید کد را درک کنید.

```
% be name khoda - Solution of Hw8 - part e
load('hw8.mat')
[M,N]=size(D);
```

```
N0=3;
% Linear Programming
f=ones(2*N,1);
Aeq=[D -D];
beq=x;
lb=zeros(2*N,1);
tic;
yhat = linprog(f,[],[],Aeq,beq,lb,[]); % Linear-Programming: given Cost function: (f) + Equalit
```

```
Optimal solution found.
```

```
% in Matrix Form

splus=yhat(1:N);
sminus=yhat(N+1:end);
sBP=splus-sminus;


posBP=find(abs(sBP)>0.01)'; % Choose Nonzero Elements
delta_t_LinP = toc;
disp("Elapsed Time (LP): "+ delta_t_LinP+"(s)");
```

```
Elapsed Time (LP): 0.12465(s)
```

```
disp('BP:')
```

```
BP:
```

```
[posBP;sBP(posBP)']
```

```
ans = 2×3
    3.0000    6.0000   54.0000
    5.0000    7.0000   -3.0000
```

```

```

Part F: <Comparison>

) به نظر شما کدام یک از روش های بالا بهترین است؟ چه معیارهایی را در نظر گرفتید؟ توضیح دهید.

Considering Run Time, MP wins when N0 is explicit! --->>>

MP demands N0 in that case which is hard to find in practice!

When N0 is not clear, LP gives better results comparing to MP and OMP interms of error and Sparsity Level!

Key Performance Indicators:

[1) Algorithm Simplicity ,

2) Run Time ,

3) Error ,

4) prior Knowledge]