به نام خدا

فهرست مطالب

قسمت اول: شرح مسئله

مسئله در مورد انتقال حرارت در یک بعد بر روی یک میله با شرایط مرزی مشخص شده می‌باشد.

معادله حاکم بر این مسئله عبارتست از:

$$\frac{d^2}{dz^2}C_A - \frac{2K}{RD}C_A = 0;$$

$$C_A(z=0) = C_{AS};$$

$$\frac{dCA}{dz}(z=L) = 0;$$

با استفاده از تغییر متغیر $X = \frac{z}{L}$ به معادله زیر می‌رسیم:

$$\frac{d^2}{dX^2}y - \Phi^2 y = 0;$$

که در آن $y = \frac{C_A}{C_{AS}}$ و $\Phi = L\sqrt{\frac{2K}{RD}}$ می‌باشد.

با استفاده از فرم مشتق مرکزی[1] برای تابع y در راستای محور انتشار یعنی z داریم:

$$\frac{y(i+1) - 2y^2(i) + y(i-1)}{h^2} = \frac{d^2}{dz^2}y + O(h^2)$$

این فرم تا مرتبه دوم دقیق است.

با اعمال شرایط مرزی در نقطه پایان که همان شرط تقارن است، داریم:

$$y_{N-1} = y_{N+1}; \qquad \rightarrow$$

$$\frac{2(y_{N-1} - y_N)}{h^2} - \Phi^2 y_N = 0;$$

[1] CD (Central Difference)

حال با انتخاب مقادیر مربوط به $h = 0.01$ که همان پارامتر گسسته‌سازی فضا می‌باشد و همچنین مقدار ثابت $\Phi = 0.5$ داریم:

$$\frac{(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})}{10^{-4}} - 0.25y_i = 0;$$

برای سطر اول داریم:

$$\frac{-2y_1 + y_2}{h^2} - 0.25y_1 = -\frac{y_0}{h^2}$$

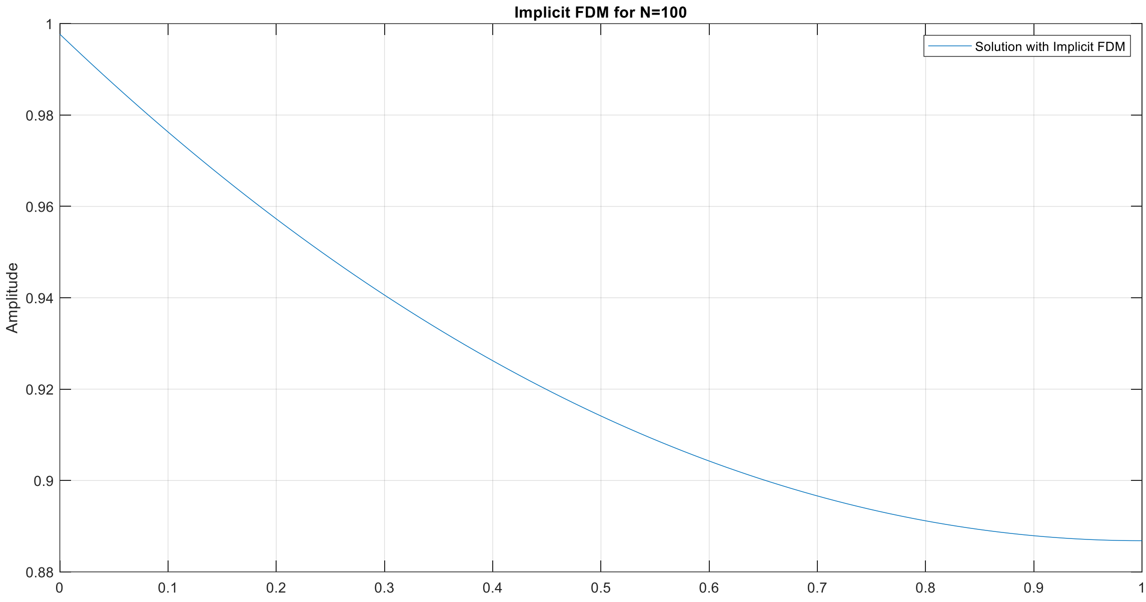
$$y1(-2 - \Phi^2h^2) = -y_0 - y_2$$

$$y_1 = \frac{y_0 + y_2}{2 + \Phi^2h^2}$$

ماتریس ضرایب به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\begin{bmatrix} -2 - h^2\Phi^2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 - h^2\Phi^2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 - h^2\Phi^2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 - h^2\Phi^2 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -2 - h^2\Phi^2 \end{bmatrix}$$

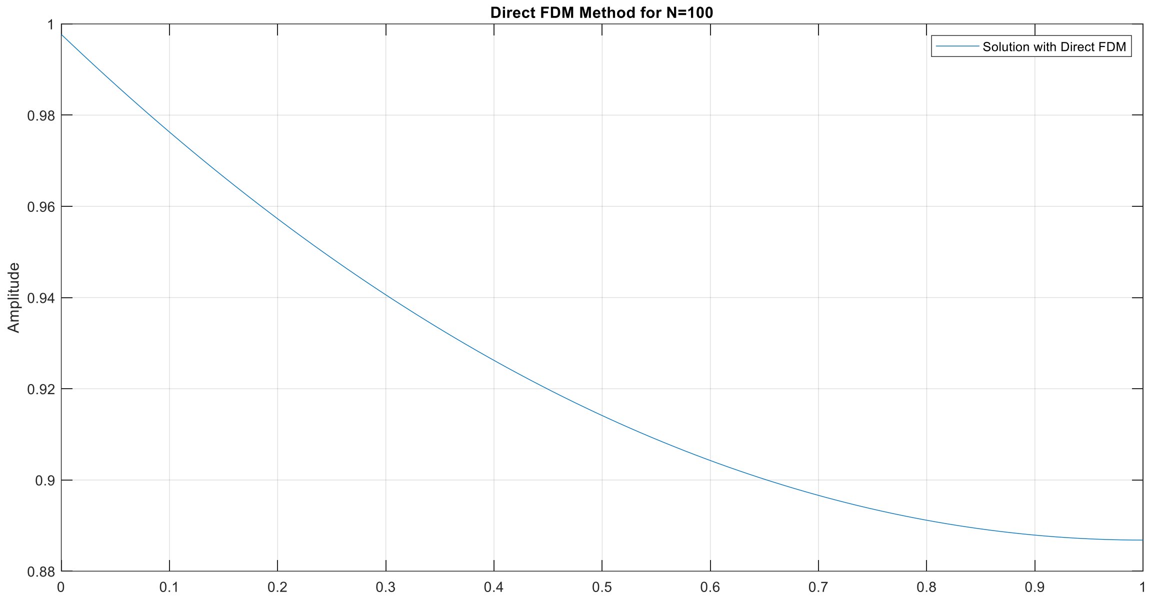
و به این ترتیب با استفاده از این ماتریس ضرایب بردار y به دست خواهد آمد.



Implicit FDM for N=100
Solution with Implicit FDM
Amplitude
1
0.98
0.96
0.94
0.92
0.9
0.88
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

شکل 1

روش دیگر استفاده از فرم مستقیم FDM است که به جای استفاده از ماتریس ضرایب و به دست آوردن وارون آن، از یک فرآیند تکرار شونده استفاده و در نهایت تا همگرایی آن را ادامه می‌دهیم:



شکل 2

حل تحلیلی:

$$y(x) = 4y^{(2)}(x);$$

$$y(x) = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 e^{-\frac{x}{2}};$$

با استفاده از شرایط مرزی داده شده مقدار c_1 و c_2را به دست می‌آوریم:

$$y(0) = 1\;;\quad c_1 + c_2 = 1;$$

$$y'(1) = 0;\quad \frac{c_1}{2}\sqrt{e} - \frac{c_2}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{e}}\right) = 0$$

از این دو معادله نتیجه خواهد شد که مقدار c_1 و c_2 به صورت:

$$c_1 = 0.2689;\quad c_2 = 0.7311$$

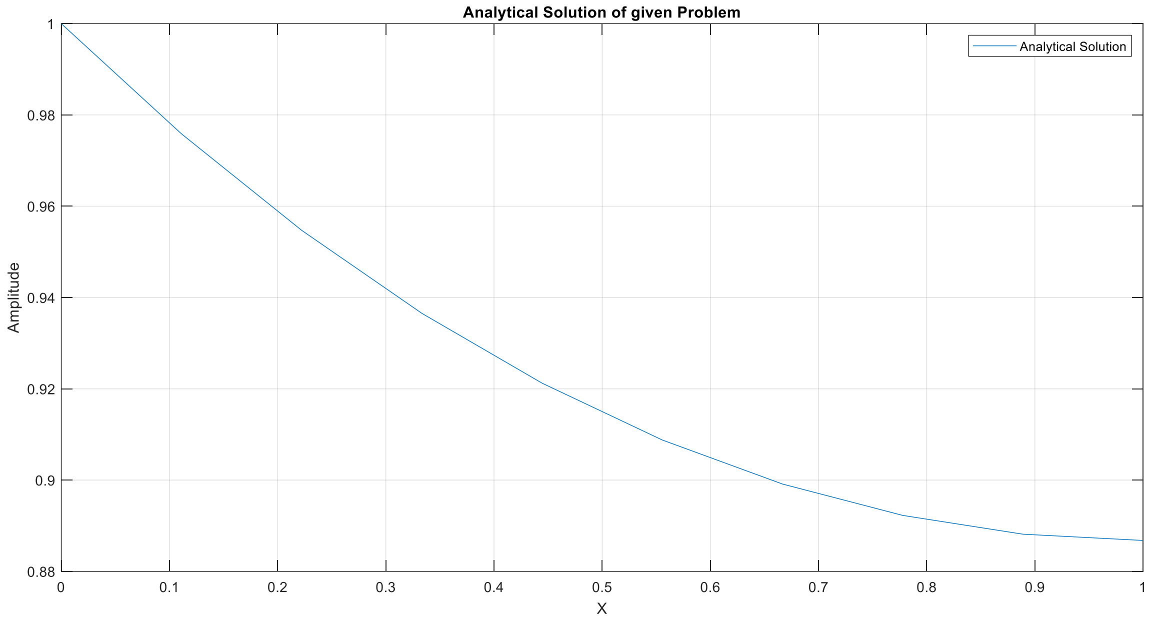
```
>> A = [1 ,1; 1/2*sqrt(exp(1)) , -1/2*sqrt(exp(1)^-1)];
>> B = [1;0] ;
>> X = inv(A)*B;
>> X

X =

    0.2689
    0.7311
```

شکل 3

که نمودار آن به صورت زیر خواهد بود:



شکل 4

با توجه به جواب‌های به دست آمده، به ازای 100 نقطه با دقت قدم‌های مکانی 0.01 می‌توان به حل دقیق رسید.