****

****

Antenna Array Processing

****
****

HW10

**********************************   Mohammadreza Arani   ::::::::::::   810100511
****

***   1401/09/20
****

```
close all; clear; clc;
```

تمرین سری دهم (موعد تحویل ۴ شنبه ۳۰ آذر ساعت ۵ بعد از ظهر)

--- لطفا تصویر کدهای MATLAB که می زنید را درگزارشتان قرار دهید ---

در این تمرین می خواهیم کالیبراسیون یک آرایه ی عمودی از آنتن ها را به وسیله ی داده های ADSB انجام دهیم. فرکانس کار سیستم $f_c = 300\ MHz$ است و آرایه شامل $M = 21$ آنتن است که به صورت یکنواخت بین مکان های $d_{min} = 0\ m$ تا $d_{max} = 10\ m$ چیده شده است.

داده های $T = 1000$ شات مختلف در ماتریس X در اختیار شما قرار گرفته است و زاویه ی واقعی این شات ها نیز که از ADSB گرفته شده است در بردار $THETA$ قرار داده شده است. ماتریس کالیبراسیون را به دست آورید. ضرایب را به صورت دامنه فاز نیز گزارش کنید.

```
% ADSB Data given:
ADSB_Data = load("hw10.mat");

fc = 300e+06; % 300 MHz

M =21;

d_min = 0;
d_max= 10;

D = linspace(d_min , d_max, M); % Antenna Position Vector over Z-Axis
D  = D'; % A column Vector

% T = 1000; % Shots -- >> in X -- >> Given
% Theta -- >>  True angles


% Find Calibration Matrix!
```

✓ فرم فاکتوریزشن پیشنهادی در مساله ی کالیبراسیون، دارای یک ابهام scale است به این معنی که اگر تک تک درایه های ψ را در α ضرب کنیم و تک تک درایه های ماتریس S را در $\frac{1}{\alpha}$ ضرب کنیم، باز هم فاکتوریزشن برقرار است. برای از بین بردن این ابهام ضریب کالیبراسیون آنتن اول را یک در نظر می گیریم. توجه داشته باشید این فرض خللی در روند زاویه یابی نهایی ایجاد نمی کند! در واقع احتیاجی نیست درایه ی اول ماتریس کالیبراسیون را تخمین بزنید زیرا می دانیم مقدار آن یک است.

✓ از آنجایی که ماتریس کالیبراسیون واقعی به شما داده نشده است تا از صحت و سقم پاسختان آگاه شوید، بهتر است خودتان یک شبیه سازی جداگانه انجام بدید تا مطمئن باشید کدتان ماتریس کالیبراسیون را درست حساب می کند.

```
c = 3e+08; % Light Speed in Air;

Lambda = c/fc; % Wave Length


K = 2*pi/Lambda; % Wave Number

Shots       = ADSB_Data.X;
True_Angles = ADSB_Data.THETA;

T = length(Shots);

Theta = 0 : 0.05 : 90 ; % Elevation Angle


MAP1 = exp(1j*K*D*sin(Theta*pi/180)) ;
MAP = MAP1 ./sqrt(sum(abs(MAP1).^2)) ;
```

CAlibration Phase:

As mentioned in the lectures, we can model the calibration problem as multiplication of a diagnal matrix and the steering vector as shown below:

$X = \psi[a(\theta = 0.001)\,; \ldots ; a(\theta = 90)]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ A \\ 0 \end{bmatrix}$; --- >>> if ψ was known, we could easily solve the sparse recovery problem using 3 proposed methods.

We can use given ADSB data and obtain the elevation angle from given amplitude and use it in the equation below:

$$\alpha$$

$$\left[\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_T\right]_{M\times T} = \underset{\text{مجهول}}{\underline{\psi}}\ \underline{A}\ \left[\underline{s}_1\ \underline{s}_2\ \cdots\ \underline{s}_T\right]$$

The proposed algorithm in which we can obtain the true value of ψ is called:

"***<u>Alternation Minimization</u>***"

-- >> an iterative method to reach the global minimum which guarantees the **convergence** in convex problems.

The algorithm works like:

- Initialize ψ and then find S.
- Using Obtaind S, find optimum ψ.
- do over until convergence!

$$\{\underline{\psi}, \underline{S}\} = \underset{\underline{\psi}, \underline{S}}{\arg\min} \left\| \underline{X} - \underline{\psi}\, \underline{A}\, \underline{S} \right\|_F^2$$

$$\text{s.t.} \quad \underline{\psi} = \mathrm{diag}(\mathrm{diag}(\underline{\psi}))$$

$$\|\underline{S}_t\|_0 = 1, \quad t = 1, \dots, T$$

مشکل درایه‌ی نرم صفر مشخص هست !!

Alternation

Minimization

$$\underset{\text{اولیه}}{\psi} \longrightarrow \hat{S}$$

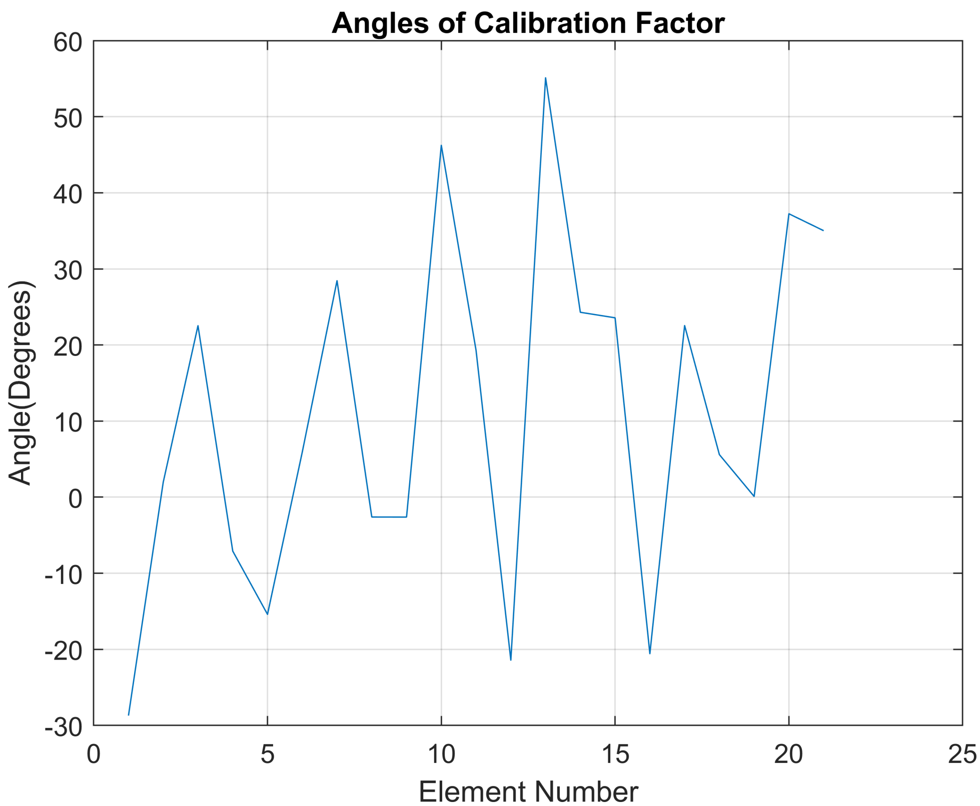
```
% Init PSI:
PSI  = diag(diag(randn(M)));

% Find Elevation Angles:

%S_indexes = find( (Theta-Theta(1)) == True_Angles'  );

% [val,S_indexes]=intersect(Theta-Theta(1),True_Angles) ; % gives common val and its position i

[idx,S_indexes] = ismember(True_Angles,Theta);
S = zeros(length(Theta),T);

MAX_Iter = 100;
Threshold =1e-2;

for i=1:MAX_Iter

   for p = 1 : T
%        Chooser_mat = zeros(M,1);
%        Chooser_mat(randi(M),1) = 1;

        cvx_begin quiet
            variables S_R(1,1) S_I(1,1) % Consider the S as a Complex Number!

                S_temp = S_R + 1j*S_I;
                minimize(  norm( Shots(:,p) - PSI*MAP(:,S_indexes(p)).*repmat(S_temp,M,1).*(1 )

                cvx_end
        S(S_indexes(p), p) = S_temp; % Update S based on the optimum answer!
   end


    for num_element = 1 : M
        cvx_begin quiet
                variables psi_R(1,1) psi_I(1,1)
                    PSI_temp = (psi_R + 1j*psi_I);
                    minimize(norm( Shots(num_element,:) - PSI_temp*MAP(num_element,:)*S )); % M
        cvx_end
        PSI(num_element,num_element) = PSI_temp; % Update PSI based on the optimum PSI!

    end

Error =  sum( abs( Shots - PSI*MAP*S ) ) ;

if(Error < Threshold)
    break;
end

end
```

```
%%%%%
% The ALgorithm Converged with maximum error of:
disp(max(max(Error)));
```

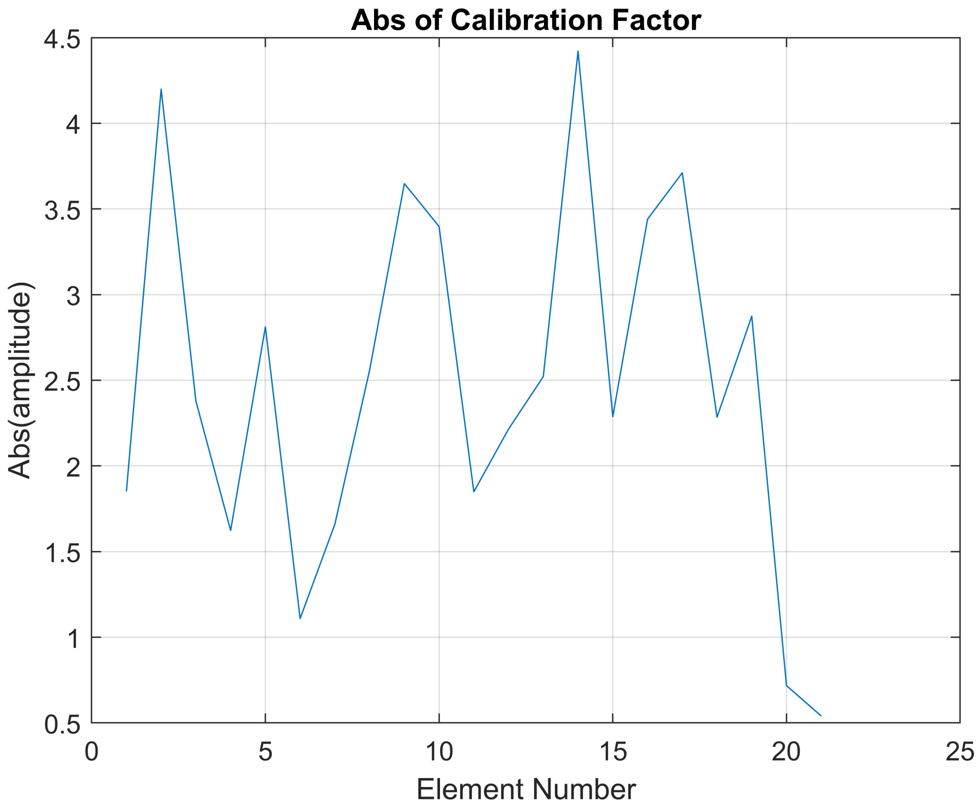
```
8.9462e-07
```

FInding Amplitude and angles of PSI:

```
figure(1)
plot(1:M , 180*angle(diag(PSI))/pi )
title("Angles of Calibration Factor");
xlabel("Element Number")
ylabel("Angle(Degrees)")
grid on
```




```
figure(2)
plot(1:M , abs(diag(PSI)) )
title("Abs of Calibration Factor");
xlabel("Element Number")
ylabel("Abs(amplitude)")
grid on
```



Test the SAI:

```
T  =1000;
f1 = 1:T;
f1 = f1(randperm(length(f1)));

location = f1;


S_test =  zeros(M,T);

for i=1:T

    s = S(:,i);
    l = location(i);
    s(l) = rand(1) + 1j*rand(1); % Complex Random Variable
    S(:,i) = s;

end

SAI_test = diag(diag(rand(M)+1j*rand(M)));
X = SAI_test*MAP*S;
```

Now Run the Algo for this given X:

```
PSI_test  = diag(diag(randn(M)));

Shots_test = X ;

% [idx,S_indexes] = ismember(True_Angles,Theta);
S_indexes_test = location ;
S = zeros(length(Theta),T);

MAX_Iter = 100;
Threshold =1e-2;

for i=1:MAX_Iter

   for p = 1 : T
%         Chooser_mat = zeros(M,1);
%         Chooser_mat(randi(M),1) = 1;

        cvx_begin quiet
            variables S_R(1,1) S_I(1,1) % Consider the S as a Complex Number!

                S_temp = S_R + 1j*S_I;
                minimize(  norm( Shots_test(:,p) - PSI*MAP(:,S_indexes_test(p)).*repmat(S_temp,

                cvx_end
        S(S_indexes_test(p), p) = S_temp; % Update S based on the optimum answer!
   end


    for num_element = 1 : M
        cvx_begin quiet
                variables psi_R(1,1) psi_I(1,1)
                    PSI_temp = (psi_R + 1j*psi_I);
                    minimize(norm( Shots_test(num_element,:) - PSI_temp*MAP(num_element,:)*S ))
        cvx_end
        PSI_test(num_element,num_element) = PSI_temp; % Update PSI based on the optimum PSI!

    end

Error_test =  sum( abs( Shots_test - PSI_test*MAP*S ) ) ;

if(Error_test < Threshold)
    break;
end

end
```

```
disp(max(max(Error_test)));
```

```
14.0986
```

```
disp(min(min(Error_test)));
```

```
1.7163
```

For 3 runs, we can get the most from calibration accuracy. -- >> The maximum Error is equal to 14 and the minimum error is 1.71.

The behaviour is almost imitated in the approximated PSI! -- >> and these happens only after 3 consecutive runs! given more time, we can get better results!

- Another approach is to solve the obtimization problem manually!

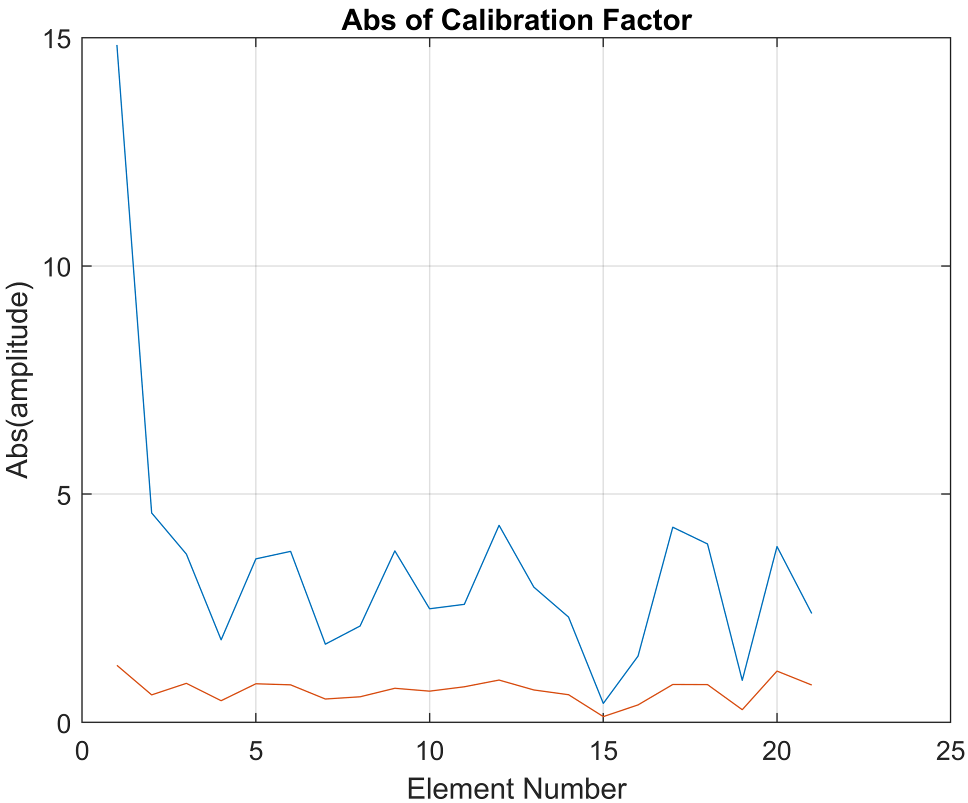
Consider the cost function as:

- $J = |X - \psi * A * S|^2;$
- $\frac{\partial}{\partial S} J = \frac{\partial}{\partial S}\left(\ (X - \psi * A * S)(-(\mathrm{SA}\psi)^T + X^T) \right) \ = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial S}[\ \mathrm{XX}^T + -X(\mathrm{SA}\psi)^T - (\psi * A * S)X^T + \psi * A * S * ((\mathrm{SA}\psi)^T$

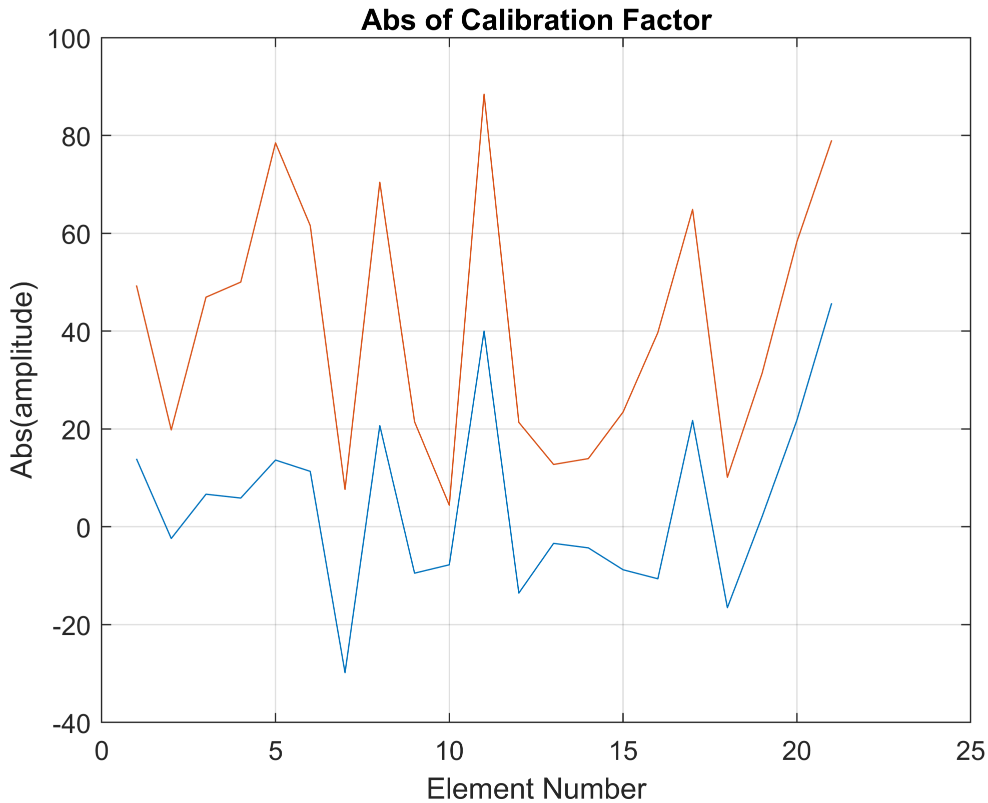
$$0 - 2A\psi X^T \ + \ 2\psi\mathrm{AS} = 0 \ \Rightarrow \boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{A\psi X^T}}{\boldsymbol{\psi A}} \ ;$$

-- >> we can use this manual solution instead of using CVX toolbox and it works in a blink of an eye!

```
figure(3)
plot(1:M , abs(diag(PSI_test)) )
title("Abs of Calibration Factor");
xlabel("Element Number")
ylabel("Abs(amplitude)")
grid on
hold on
plot(1:M , abs(diag(SAI_test)) )
```




```
figure(4)
plot(1:M , 180/pi*angle(diag(PSI_test)) );
title("Abs of Calibration Factor");
xlabel("Element Number")
ylabel("Abs(amplitude)")
grid on
hold on
plot(1:M , 180/pi*angle(diag(SAI_test)) );
```


Abs of Calibration Factor
Abs(amplitude)
Element Number
100
80
60
40
20
0
-20
-40
0
5
10
15
20
25