

## به نام خدا

تمرین سری ششم (موعد تحویل ۴ شنبه ۲ آذر ساعت ۵ بعد از ظهر)

--- لطفا تصویر کدهای MATLAB که می زنید را در گزارشتان قرار دهید ---

سیگنال  $s_1$  را که یک فرآیند تصادفی دارای توزیع یکنواخت بین  $[-2.5 \ 2.5]$  می باشد با  $T=1000$  نمونه و سیگنال  $s_2$  را که یک فرآیند تصادفی دارای توزیع یکنواخت بین  $[-1.5 \ 1.5]$  می باشد با  $T=1000$  نمونه تولید کنید. در صورت وجود میانگین در منابع، میانگین منابع را حتماً صفر کنید. این دو منبع را به صورت خطی و آنی

توسط ماتریس مخلوط کننده  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2.2 & -1 \\ 3.1 & -2 \end{bmatrix}$  ترکیب کنید و مشاهدات  $y_1$  و  $y_2$  و  $y_3$  را تولید کنید.

$$Y_{3 \times T} = A_{3 \times 2} S_{2 \times T}$$

أ) پراکندگی مشاهدات را در فضای سه بعدی (دستور `scatter3`) رسم کنید. همان طور که مشاهده می کنید با این که مشاهدات سه بعدی هستند، اما عملاً در یک فضای دو بعدی پراکنده شده اند. با محاسبه ی ماتریس  $R_x$  و اعمال تحلیل PCA (توسط دستور `eig`) ماتریس بردارهای ویژه ( $U$ ) و ماتریس قطری مقدار ویژه ( $D$ ) را به دست آورید.

ب) سعی کنید هر سه گزاره ی زیر را به صورت مفهومی درک کنید. بردار ویژه ها را متناظر با مقادیر ویژه از بزرگ به کوچک، به صورت  $u_1$ ،  $u_2$  و  $u_3$  در نظر بگیرید.

\* یکی از مقادیر ویژه صفر شده است (متناظر با  $u_3$ ). این اتفاق یعنی داده ها در جهت  $u_3$  تصویری ندارند یا به عبارت دیگر پراکندگی ندارند. معادل ریاضی این گزاره یعنی  $u_3^T Y = 0$ .

\*  $u_3$  بر ستون های ماتریس  $A$  عمود است زیرا این ستون ها هستند که داده ها را تولید کرده اند و در واقع داده ها در فضای این ستون ها هستند. معادل ریاضی این گزاره یعنی  $u_3^T Y = 0$ .

\*  $u_1$  و  $u_2$  در همان فضای ستون های ماتریس  $A$  یعنی  $a_1$  و  $a_2$  قرار دارند. معادل ریاضی این گزاره یعنی  $A = [u_1 \ u_2] C_{2 \times 2}$ . درایه های ماتریس  $C$  را به دست آورید.

ج) چون یکی از مقادیر ویژه صفر است می توان بدون از دست دادن هیچ گونه اطلاعاتی، داده ها را به فضای دو بعدی برد. ماتریسی که می تواند بُعد اضافی داده ها را حذف کند و همچنین آنها را در فضای جدید سفید کند به دست آورید ( $Z_{2 \times T} = B_{2 \times 3} X_{3 \times T}$ ). داده های سفید شده  $z_1(t)$  و  $z_2(t)$  را رسم کنید. توجه داشته باشید داده ی سفید یعنی ماتریس همبستگی آن یک ماتریس همانی است!

د) تبدیل SVD را ( $Y = Q G V^T$ ) روی ماتریس مشاهدات اولیه به صورت  $[Q, G, V] = \text{svd}(Y)$  اعمال کنید. رتبه (یا Rank) ماتریس  $Y$  چند است؟ رابطه ی ماتریس  $Q$  با  $U$ ، ماتریس  $G$  با  $D$  و ماتریس  $V^T$  با  $Z$  چیست؟

ه) در قسمت ب دیدیم که  $u_1$  و  $u_2$  در فضای ستون های ماتریس  $A$  یعنی  $a_1$  و  $a_2$  قرار دارند. حال نشان دهید که سطرهای اول و دوم ماتریس  $V^T$  یعنی  $v_1^T$  و  $v_2^T$  یا همان  $z_1(t)$  و  $z_2(t)$  نیز در فضای سطر های ماتریس  $S$  یعنی  $s_1^T$  و  $s_2^T$  قرار دارند. معادل ریاضی این گزاره یعنی

$$S_{2 \times T} = F_{2 \times 2} Z_{2 \times T}$$

درایه های ماتریس  $F$  را به دست آورید. با توجه به این نتایج می توان دریافت که سیگنال منابع بر سطرهای سوم تا  $T$ م ماتریس  $V^T$  عمود است.

و) اگر از ما بخواهند که بُعد داده های اولیه  $X$  را تا حد ممکن کاهش دهید به گونه ای که حداقل ۹۰ درصد انرژی کل مشاهدات ( $E_{\text{tot}} = E_1 + E_2 + E_3$ ) حفظ شود، چگونه این کار را انجام می دهید؟ داده ها را در فضای با بعد تقلیل یافته بر حسب زمان رسم کنید.