Antenna Array Processing

HW4

Mohammadreza Arani   :::::::::::::   810100511

1401/08/

```
clear; clc; close all;
```

Q1:

Initializations and the problem definition:

سیگنال باند پایه با عرض پالس ۰.۲۵ میلی ثانیه و دوره ی تناوب ۲.۵ میلی ثانیه و دامنه ی $A = 1$ را در نظر بگیرید.

۱- فقط یک PRI از این سیگنال را در نظر بگیرید. تابع ابهام این سیگنال را با فرض نرخ نمونه برداری یک مگاهرتز رسم کنید. در محاسبه ی تابع ابهام همان طور که در کلاس بیان شد، یک اکو را با تاخیر صفر و داپلر صفر در نظر می گیریم و اکوی دیگر را با تاخیر های مختلف و داپلرهای مختلف در نظر می گیریم و سپس correlation این دو اکو را محاسبه می کنیم. برای رسم، محور x را محور تاخیر زمانی (t_d) و محور y را محور داپلر (f_d) و محور z را به عنوان خروجی تابع ابهام در نظر بگیرید. توجه داشته باشید اهداف هر تاخیر زمانی و هر داپلری می توانند داشته باشند. برای محور x و y فواصل ریز در نظر بگیرید. مثلا داپلرها را با فواصل یک هرتز یک هرتز (که معادل یک متر بر ثانیه اختلاف سرعت می شود) و تاخیر ها را با فواصل یک میکروثانیه یک میکروثانیه (که معادل ۱۵۰ متر اختلاف رنج می شود) در نظر بگیرید. بیشترین تاخیر را برابر یک PRI و بیشترین داپلر را برابر ۸۰۰۰ هرتز در نظر بگیرید. بازه ی متقارن برای محور های x و y در نظر بگیرید.

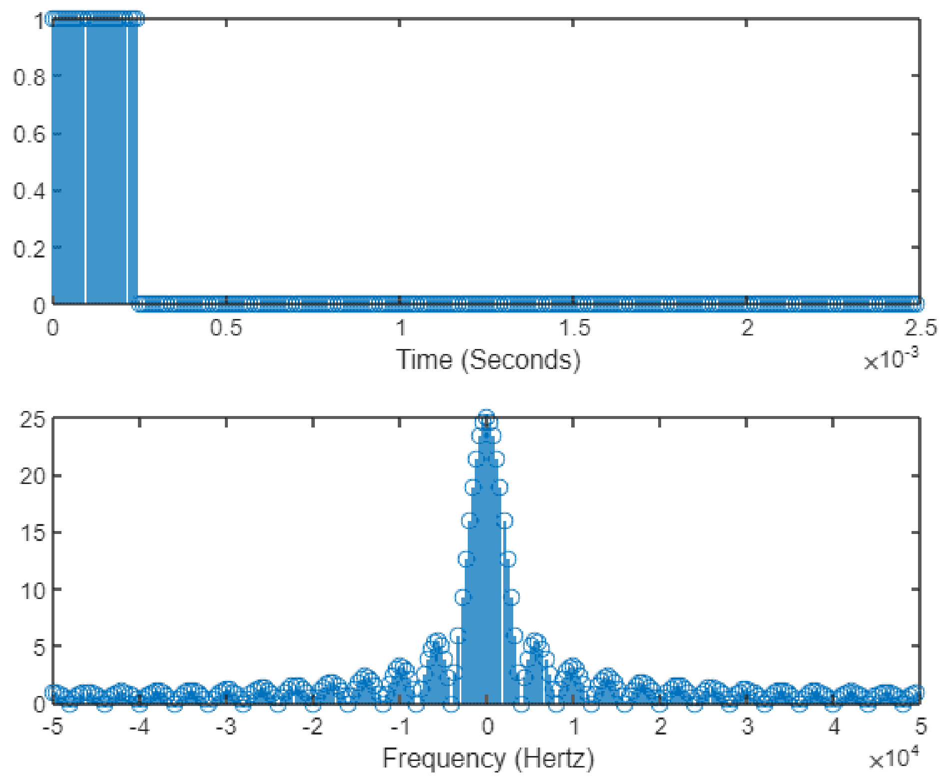
Initialization:

```
% Signals are considered to be in Low Frequency Band
ts =  1e-5; % --> to get 1 MHz -->
fs=1/ts; % sampling rate --> 100Hz
C=300e6; % light speed

Tau_length = 0.25e-3;  % 0.25ms

tau_num=Tau_length/ts;  % --> Consider a single sample on the signal
tau=tau_num*ts; % --> the signal length would be equal to number of samples multiplied by lengt

PRI=2.5e-3; % 2.5 ms
PRI_num=round(PRI/ts); % --> number of sqaured pulses in signal

PRF=1/PRI;

A=1;
```

```
Trecording=1 * PRI;    % --> Recording time at the receiver!

deltaf=1/Trecording; % Frequency Resolution

pulse_num=round(Trecording/PRI); % Number of pulse in recording time
sample_num=round(Trecording/ts);

t=0:ts:Trecording-ts; % Time Vector
freq=-fs/2:deltaf:fs/2-deltaf; % Frequency Vector
```

```
% Create Our Signal : The one Pulse:
SL_PRI=A* [ones(1,tau_num) zeros(1,PRI_num-tau_num)]; % single pulse in the interval of sending
sl=repmat(SL_PRI,1,pulse_num); % Repeated pulse for each PRI in Trecording
```

```
figure(1)
subplot(2,1,1)
stem(t,sl) % The Signal itself --> Pulse Train
xlabel('Time (Seconds)')
subplot(2,1,2)
slf=fftshift(fft(sl)); % shifted fft signal --> Fourier transformation --> I expect to see the
stem(freq,abs(slf)) % Frequency Domain
xlabel('Frequency (Hertz)')
```



Abmibuity Function:

Ambiguity function as defined previously in lecture 11, is represented below:

$$\rho(t_d, f_d) = \int S_l(t)\, S_l^*(t - t_d)\, e^{-j2\pi f_d t}\, dt$$

This can be implemented using:

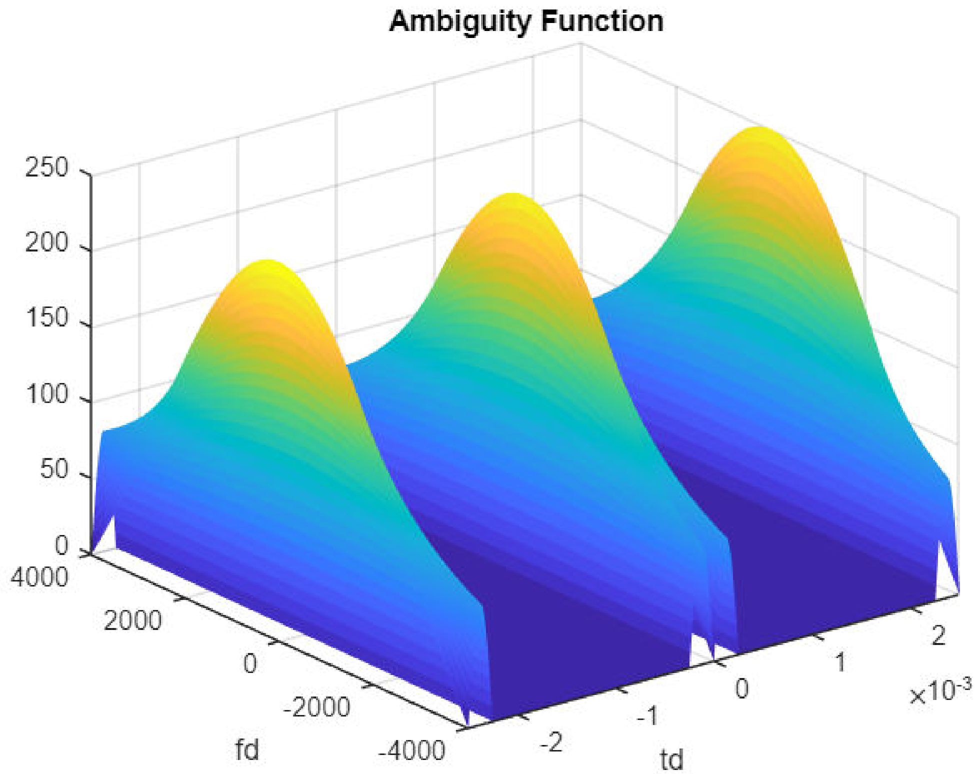
1- Correlation of 2 signals

2- Multiplication of Fourier Transforms

Also, in matlab we can either use symbolic function to plot the result or we can use Meshgrid to produce a surface based on fd, td!

```
% define td and fd vectors as mentioned in the first question:
delay_vector = -PRI : 1e-5 : PRI ;
doppler_freq_vector = -4e3: 1 : 4e3 ; % 8000Hz with 1Hz resolution

P = zeros(length(doppler_freq_vector),length(delay_vector));

for i=1:length(delay_vector)
    for j=1:length(doppler_freq_vector)
        td = delay_vector(i) ;
        fd = doppler_freq_vector(j);
        P(j,i) = sum(sl.*conj(circshift(sl,round(td/ts))) .* exp(-1j*2*pi*fd.*t)) ;  % sl(t)*sl


    end
end

% p(fd,td) = int(sl.*conj(circshift(sl,round(td/ts) )).*exp(-1j*2*pi*fd*t)
% , t ); --> Symbolic Expression
```

```

[TD,FD] = meshgrid(delay_vector , doppler_freq_vector) ; % Baze o motegharen greftam... Nemidur

figure()
h=surf(TD,FD,abs(P));
xlabel("td")
ylabel("fd")
title("Ambiguity Function")
set(h,'LineStyle','none')
```

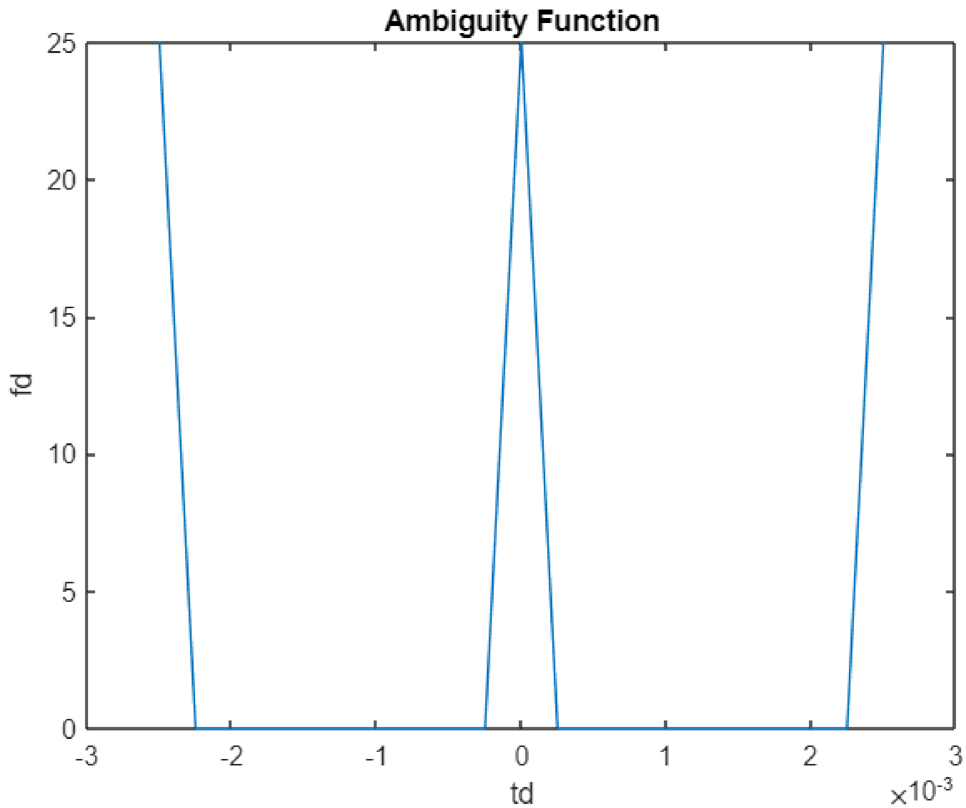


Q2:

۲- سطح مقطع های تابع ابهام در راستای t_d به چه شکلی است؟ در راستای f_d چه طور؟ سطح مقطع $f_d = 0$ و $t_d = 0$ را رسم کنید.

we can view the fd=0 plane below:

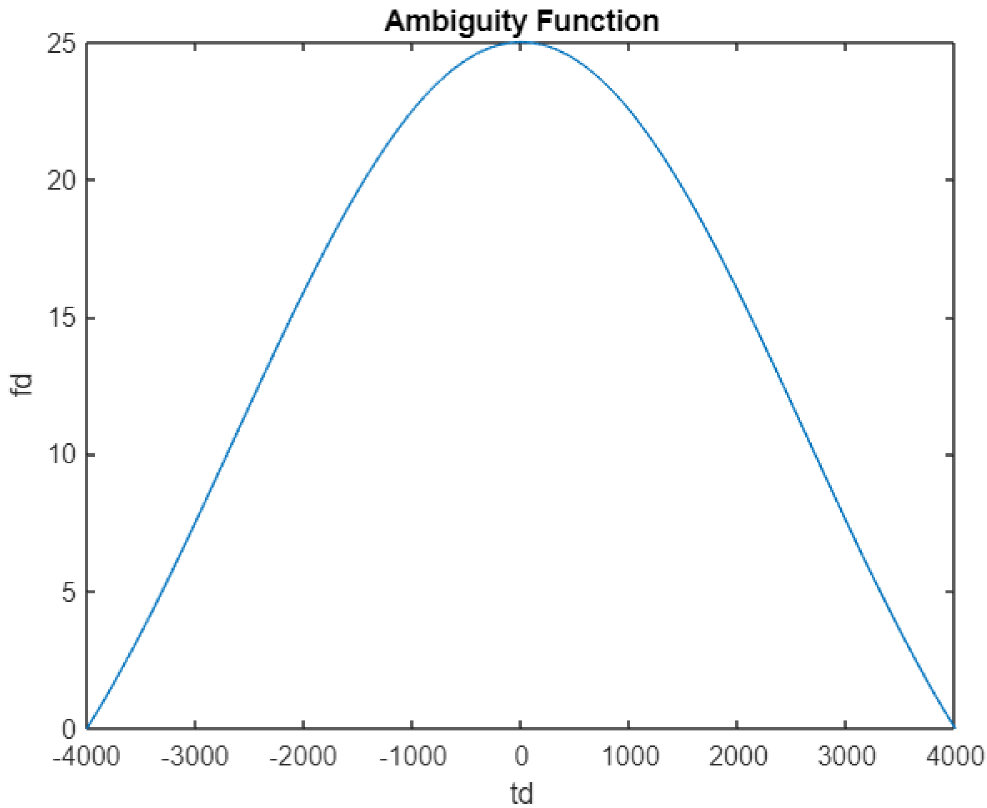
```
figure()
mid = floor(length(doppler_freq_vector)/2)+1; % the middle point
plot(delay_vector,abs( P(mid,:) ));
xlabel("td")
ylabel("fd")
title("Ambiguity Function")
```



Sounds like triangles! --> Perfect shape is Delta Form --> COnvolution of 2 rectangular pulse is triangle

And for the td = 0 plane we have:

```
figure()
mid_t = floor(length(delay_vector)/2)+1; % the middle point
plot(doppler_freq_vector,abs( P(:,mid_t) ));
xlabel("td")
ylabel("fd")
title("Ambiguity Function")
```



Looks like a sink function --> Fourier Transform of a rectangular Pulse for td --> 0

Q3:

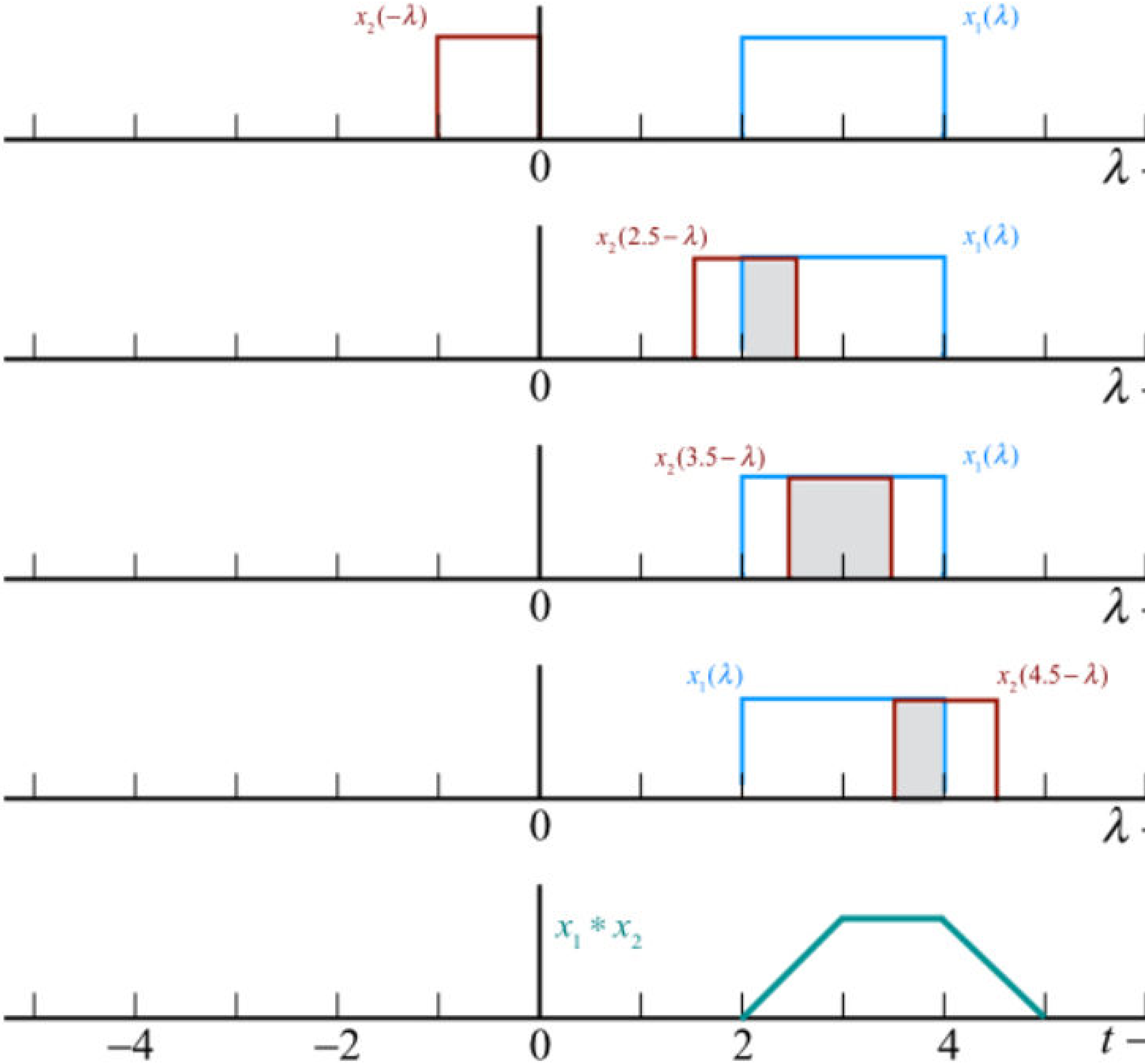
۳- فاصله ی مبدا تا اولین نال در جهت t_d چند میلی ثانیه است؟ فاصله ی مبدا تا اولین نال در جهت f_d چند هرتز است؟ سعی کنید استدلال بیاورید چرا این اعداد به دست آمدند. به نظر شما بهتر است این فاصله ها کم باشد یا زیاد باشد؟ سعی کنید درک کنید که چرا این فاصله ها رزولوشن یا تفکیک پذیری اهداف را به ما نشان می دهند. در واقع هرچه این فاصله کم باشه ما راحت تر دو هدف که پارامترهایشان بهم نزدیک هستند را می توانیم تفکیک کنیم. درکتان رو گزارش کنید :P

we have already mentioned previously, that the first Null in td axis is:

for fd=0:

$p(\mathrm{td}, \mathrm{fd}) = \int s_l(t) s_l(t-\mathrm{td})^* \, e^{-1\mathrm{j}2\pi\,\mathrm{fd}\,t} \mathrm{dt} -\to$ fro fd =0 :

$p(t_d, 0) = \int \; s_l(t) s_l(t-\mathrm{td}) \mathrm{dt}$ --> Convolution of 2 rectangular pulses:



First Null happens when the other sliding pulse has fully passed through the fixed rectangular pulse --> meaning in 2*τ!

Same happens for the fd axis -->

td =0:

$p(0,f_d) = \int s_l(t)s_l(t)^* \, e^{-1j2\pi \, \mathrm{fd} \, t}\mathrm{dt}$ --> $p(0,\mathrm{fd}) = \int \ |s_l(t)|^2 \, e^{-1j2\pi \, \mathrm{fd} \, t}\mathrm{dt}$ --> $F\{s_l\} - \rightarrow \mathrm{Sinc}(f)$ :::::::

$F\left\{|s_l|^2\right\} - \rightarrow \text{Sinc} * \text{Sinc}$ ::::: Still a Sinc function because the other side remains still a rectangular pulse!!!!!! -->

the first Null in the sinc function happens at $\frac{1}{\tau}$ as mentioned in the class! --> $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{0.25\text{ms}} = 4000\text{ Hz}$ --> which is the exact point we see in the figure above!

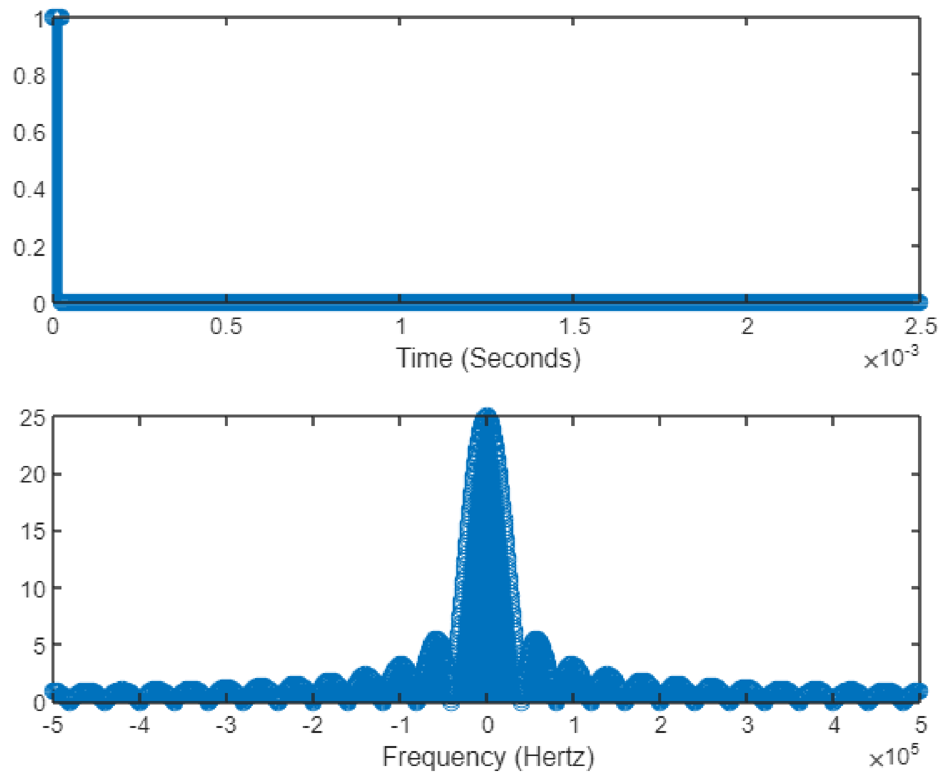
These 2 factors are in harmony and there exist a trade-off between range resolution and doppler resolution! --> There is no perfect solution for every problem and based on the application we have to choose one over the other!

Q4:

۴- حال فرض کنید عرض پالس را کاهش داده و مقدار آن را ۲۵ میکروثانیه در نظر بگیریم. مجددا فقط یک PRI از این سیگنال را در نظر بگیرید و تابع ابهام را رسم کنید. فاصله ی مبدا تا اولین نال در جهت t_d چند میلی ثانیه است؟ فاصله ی مبدا تا اولین نال در جهت f_d چند هرتز است؟ به نظر شما، نسبت به حالت قبل رزولوشن بهبود پیدا کرده یا بدتر شده؟

```
% Signals are considered to be in Low Frequency Band
ts =  1e-6; % --> to get 1 MHz -->
fs=1/ts; % sampling rate --> 100Hz
C=300e6; % light speed

Tau_length = 25e-6;  % 25 muo s

tau_num=Tau_length/ts;  % --> Consider a single sample on the signal
tau=tau_num*ts; % --> the signal length would be equal to number of samples multiplied by lengt

PRI=2.5e-3; % 2.5 ms
PRI_num=round(PRI/ts); % --> number of sqaured pulses in signal

PRF=1/PRI;

A=1;


Trecording=1 * PRI;   % --> Recording time at the receiver!

deltaf=1/Trecording; % Frequency Resolution

pulse_num=round(Trecording/PRI); % Number of pulse in recording time
sample_num=round(Trecording/ts);

t=0:ts:Trecording-ts; % Time Vector
freq=-fs/2:deltaf:fs/2-deltaf; % Frequency Vector
```

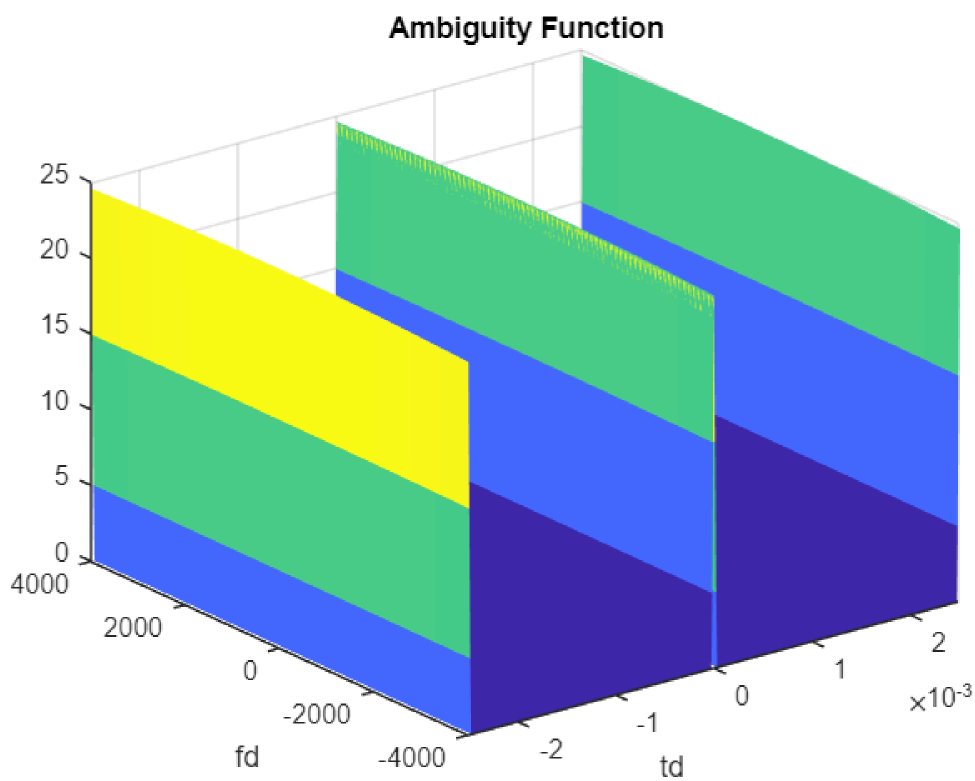
```
% Create Our Signal : The one Pulse:
SL2_PRI=A* [ones(1,floor(tau_num)) zeros(1,PRI_num-tau_num)]; % single pulse in the interval of
sl2=repmat(SL2_PRI,1,pulse_num); % Repeated pulse for each PRI in Trecording

figure(1)
subplot(2,1,1)
stem(t,sl2) % The Signal itself --> Pulse Train
xlabel('Time (Seconds)')
subplot(2,1,2)
slf2=fftshift(fft(sl2)); % shifted fft signal --> Fourier transformation --> I expect to see th
stem(freq,abs(slf2)) % Frequency Domain
xlabel('Frequency (Hertz)')
```



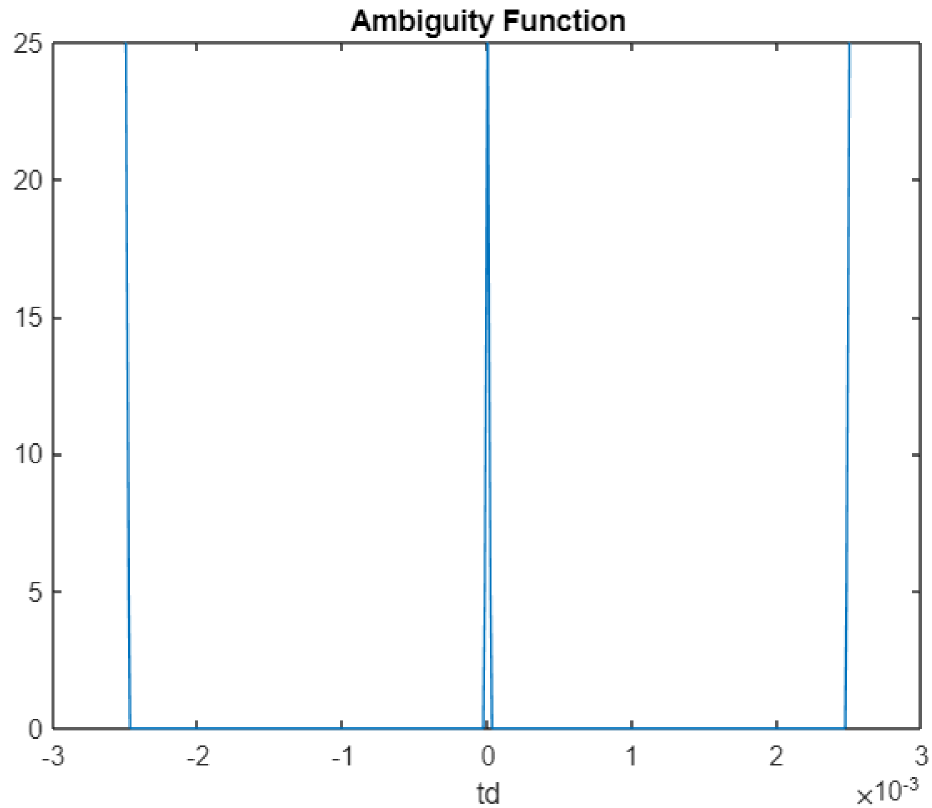

```
% define td and fd vectors as mentioned in the first question:
delay_vector = -PRI : 1e-5 : PRI ;
doppler_freq_vector = -4e3: 1 : 4e3 ; % 8000Hz with 1Hz resolution

P = zeros(length(doppler_freq_vector),length(delay_vector));

for i=1:length(delay_vector)
    for j=1:length(doppler_freq_vector)
        td = delay_vector(i) ;
        fd = doppler_freq_vector(j);
        P(j,i) = sum(sl2.*conj(circshift(sl2,round(td/ts))) .* exp(-1j*2*pi*fd.*t)) ;  % sl(t)*
```

```
    end
end
```

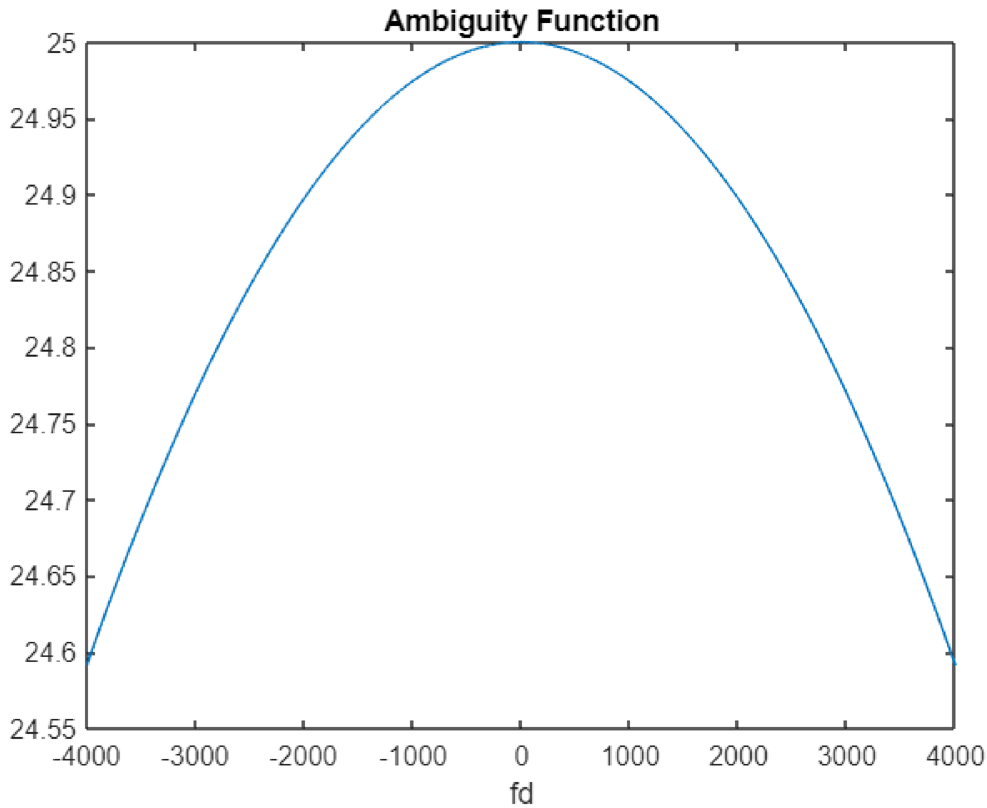
```
[TD,FD] = meshgrid(delay_vector , doppler_freq_vector) ; % Baze o motegharen greftam... Nemidun

figure()
h=surf(TD,FD,abs(P));
xlabel("td")
ylabel("fd")
title("Ambiguity Function")
set(h,'LineStyle','none')
```




```
figure()
mid = floor(length(doppler_freq_vector)/2)+1; % the middle point
plot(delay_vector,abs( P(mid,:) ));
xlabel("td")
title("Ambiguity Function")
```




```
figure()
mid_t = floor(length(delay_vector)/2)+1; % the middle point
plot(doppler_freq_vector,abs( P(:,mid_t) ));
xlabel("fd")
title("Ambiguity Function")
```



It is Obvious that in fd axis we have our nulls, further because 1/tau has been increased and it is now more than 4000 (actually 40000 Hz) because we divided tau to 10 then we expect to have our Ambiguity function in fd axis larger and in td axis narrower (close to delta form in time domain)!

frequency resolution is based on Trecord and that remains constant! --> also range resolution remains the same because it is proportional to 1/BW -->

resolutions have not been changed but the area where we can detect our target (its speed and its range is changed)!

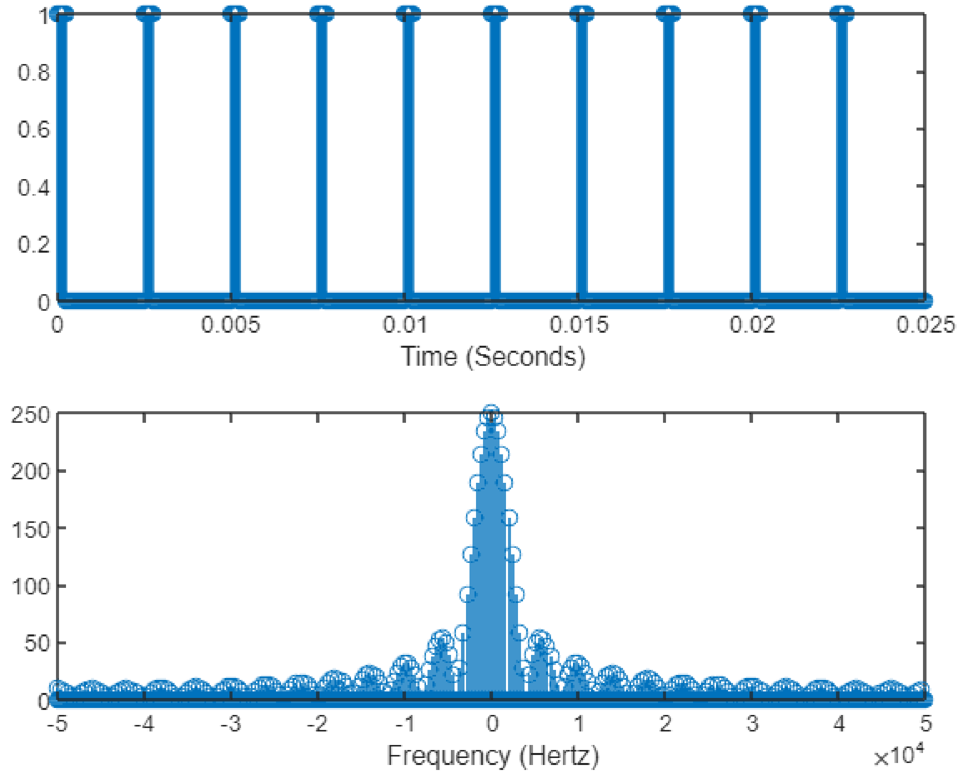
Q5:

حال قطار پالس با عرض پالس ۰.۲۵ میلی ثانیه و دوره ی تناوب ۲.۵ میلی ثانیه و دامنه ی $A = 1$ و طول ۲۵ میلی ثانیه ($T_{recording}$) را در نظر بگیرید.

۵- تابع ابهام این سیگنال را با فرض نرخ نمونه برداری یک مگاهرتز رسم کنید. توجه داشته باشید اهداف هر تاخیر زمانی و هر داپلری می توانند داشته باشند. برای محور x و y فواصل ریز در نظر بگیرید. مثلا داپلرها را با فواصل یک هرتز یک هرتز (که معادل یک متر بر ثانیه اختلاف سرعت می شود) و تاخیر ها را با فواصل یک میکروثانیه یک میکروثانیه (که معادل ۱۵۰ متر اختلاف رنج می شود) در نظر بگیرید. بیشترین تاخیر را برابر طول کل قطار پالس (۲۵ میلی ثانیه) و بیشترین داپلر را برابر ۸۰۰۰ هرتز در نظر بگیرید.

```
% Signals are considered to be in Low Frequency Band
ts =  1e-5; % --> to get 1 MHz -->
fs=1/ts; % sampling rate --> 100Hz
C=300e6; % light speed

Tau_length = 0.25e-3;  % 0.25 ms

tau_num=Tau_length/ts;  % --> Consider a single sample on the signal
tau=tau_num*ts; % --> the signal length would be equal to number of samples multiplied by lengt

PRI=2.5e-3; % 2.5 ms
PRI_num=round(PRI/ts); % --> number of sqaured pulses in signal

PRF=1/PRI;

A=1;


Trecording=10 * PRI;   % --> Recording time at the receiver!

deltaf=1/Trecording; % Frequency Resolution

pulse_num=round(Trecording/PRI); % Number of pulse in recording time
sample_num=round(Trecording/ts);

t=0:ts:Trecording-ts; % Time Vector
freq=-fs/2:deltaf:fs/2-deltaf; % Frequency Vector
```

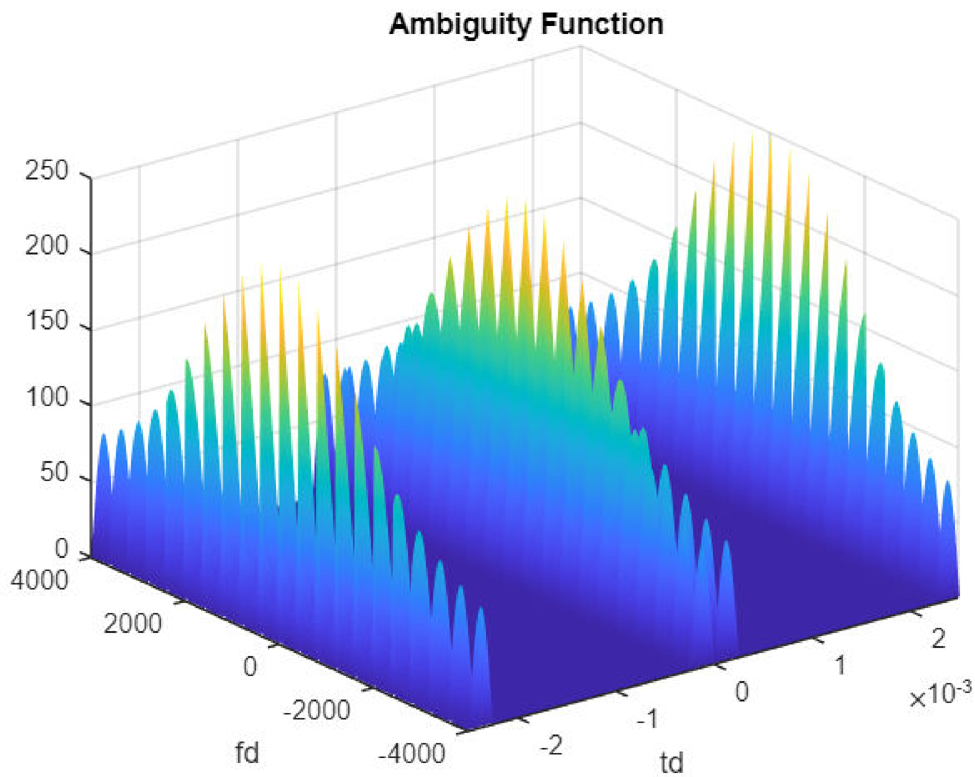
```
% Create Our Signal : The one Pulse:
SL3_PRI=A* [ones(1,floor(tau_num)) zeros(1,PRI_num-tau_num)]; % single pulse in the interval of
sl3=repmat(SL3_PRI,1,pulse_num); % Repeated pulse for each PRI in Trecording

figure(1)
subplot(2,1,1)
stem(t,sl3) % The Signal itself --> Pulse Train
xlabel('Time (Seconds)')
subplot(2,1,2)
slf3=fftshift(fft(sl3)); % shifted fft signal --> Fourier transformation --> I expect to see th
stem(freq,abs(slf3)) % Frequency Domain
xlabel('Frequency (Hertz)')
```



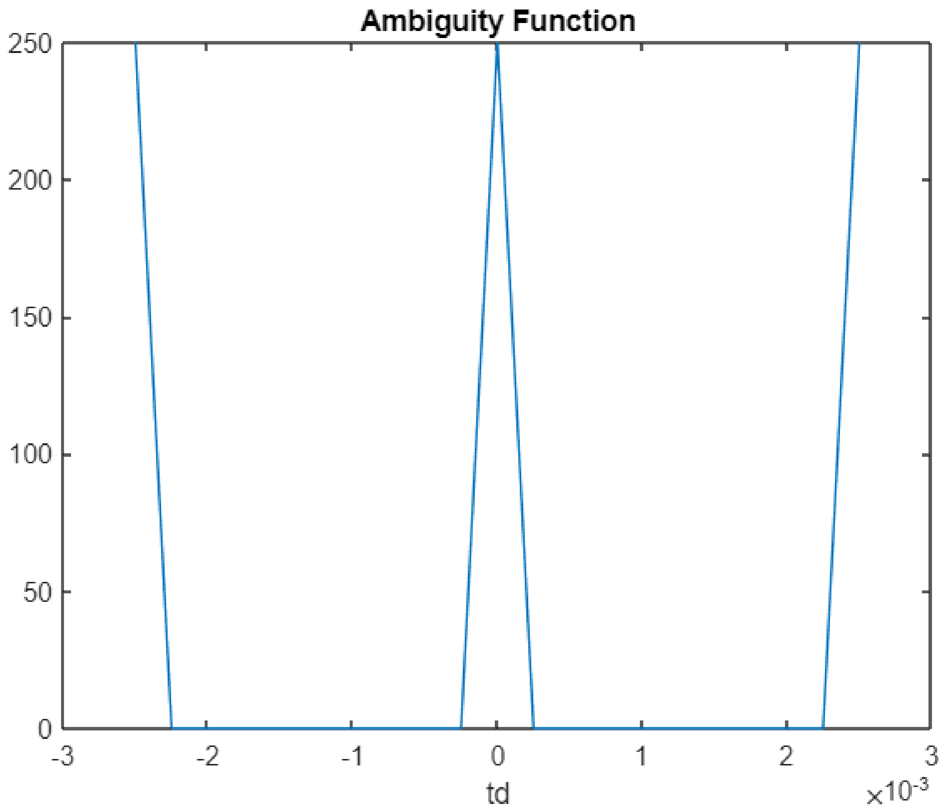

```
% define td and fd vectors as mentioned in the first question:
delay_vector = -PRI : 1e-5 : PRI ;
doppler_freq_vector = -4e3: 1 : 4e3 ; % 8000Hz with 1Hz resolution

P3 = zeros(length(doppler_freq_vector),length(delay_vector));

for i=1:length(delay_vector)
    for j=1:length(doppler_freq_vector)
        td = delay_vector(i) ;
        fd = doppler_freq_vector(j);
        P3(j,i) = sum(sl3.*conj(circshift(sl3,round(td/ts))) .* exp(-1j*2*pi*fd.*t)) ;  % sl(t


    end
end
```

```
[TD,FD] = meshgrid(delay_vector , doppler_freq_vector) ; % Baze o motegharen greftam... Nemidur

figure()
h=surf(TD,FD,abs(P3));
xlabel("td")
ylabel("fd")
```

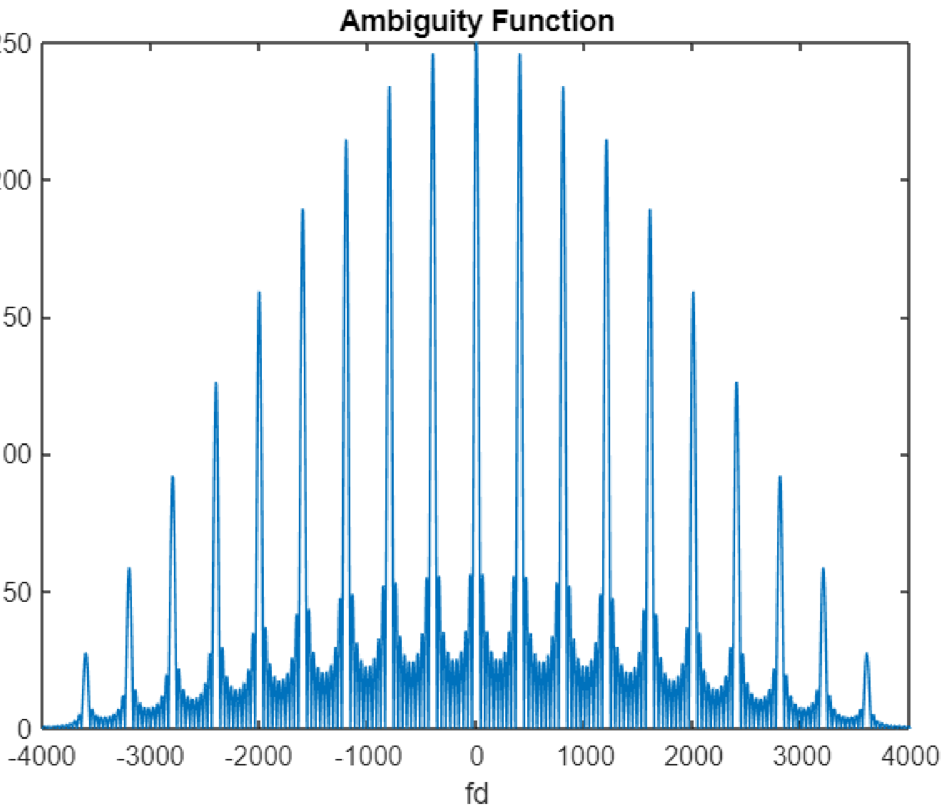
```
title("Ambiguity Function")
set(h,'LineStyle','none')
```




```
figure()
mid = floor(length(doppler_freq_vector)/2)+1; % the middle point
plot(delay_vector,abs( P3(mid,:) ));
xlabel("td")
title("Ambiguity Function")
```




```
figure()
mid_t = floor(length(delay_vector)/2)+1; % the middle point
plot(doppler_freq_vector,abs( P3(:,mid_t) ));
xlabel("fd")
title("Ambiguity Function")
```



Q6:

we can see increasing Trecord results in better doppler frequency resolution! --> a better Sinc(f) is obtained!

the Nulls are steady at their place like they were before in the first configuration but the 1/Trecord is increased and so the doppler frequency!

To increase the resolution that is not increased (Range Resolution) we can get more **Bnadwidth**! --> use an Up-chirp signal

In General -->

$S_l(t) = \Pi\left(\frac{t}{T_{\text{record}}}\right) * \text{rep}_{\text{PRI}}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ ==> Fourier Transform -->

$p(0, \text{fd}) = F\left\{|S_l(t)|^2\right\} \Rightarrow \ A \ = \text{conv}\ (\ \text{comb}_{\text{PRF}(}(\tau * \text{sinc}(\tau f)) \quad , \quad T_{\text{record}} * \text{sinc}(T_{\text{record}}\ f))$ ==>

The $p(0, f_d) = \text{conv}(A, A);$ -->

$$p(t_d, 0) = \text{rep}_{\text{PRI}}\Big(\quad \text{conv}\left(\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right), \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)\ \right)\quad\Big) ------\rightarrow \text{conv}\left(\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right),\ \Sigma(\delta\,(t - n * \text{PRI}))\right) \ = \Sigma\Lambda\left(\frac{(t - n * \text{PRI})}{\tau}\right)$$

۶- سطح مقطع $f_d = 0$ و $t_d = 0$ را رسم کنید. فاصله ی مبدا تا اولین نال در جهت t_d چند میلی ثانیه است؟ فاصله ی مبدا تا اولین نال در جهت f_d چند هرتز است؟ نسبت به سوال ۳ کدام یک کاهش یافته است و یا به عبارت دیگر رزولوشن کدام یک بهبود یافته است؟ به نظر شما چرا این اتفاق افتاده است؟ فرض کنید نمی توانید به عرض پالس دست بزنید، راهکار شما برای بهتر کردن رزولوشنی که بهبود نیافته چیست؟ در hw بعدی راهکارتان را پیاده سازی خواهیم کرد.

۷- فاصله ی قله ها از هم در جهت t_d چند میلی ثانیه است؟ چرا؟ فاصله ی قله ها از هم در جهت f_d چند هرتز است؟ چرا؟ اسم تابعی که حساب کردید تابع "ابهام" است و در واقع به خاطر همین قله ها این اسم را گذاشتند. یعنی هدفی که تاخیر و یا داپلر قله را دارد برای ما کاملا شبیه هدفی است که در تاخیر صفر و یا داپلر صفر قرار دارد! آیا می توان همزمان هم فواصل قله ها را در جهت t_d و هم در جهت f_d افزایش داد؟

The Peaks distance is 2.5 ms because that is the PRI!

The Peaks in fd axis is400Hz --> we multiplied frequency resolution by 10 and kept the tau value constant so the nulls will be moved to 1/10 their previous position from 4000Hz to 400Hz! and they repeat every 400Hz

In Time domain, the signal is periodic and the peaks of that signal repeat every period (PRI).

In doppler axis, the peaks repeat for every PRF!

Decreasing the PRI ==> Increase in PRF

Increase in PRI ==> Decrease in PRF

This means there is a trade-off here! --> A dilemma!

Q7:

It represents the distortion of a returned pulse due to the receiver matched filter[1] (commonly, but not exclusively, used in pulse compression radar) of the return from a moving target.

ecifically when there is a high correlation between $s_{\tau,f}$ and $s_{\tau',f'}$ for $(\tau, f) \neq (\tau', f')$. This motivates the *ambiguit*
orrelation between $s_{\tau,f}$ and $s_{\tau',f'}$ is equal to $\chi(\tau - \tau', f - f')$.

It represent how sure we are about the taregts sperated at a specific range and at a specific doppler distant!