2) a) برای این سوال در کل میایم تمام حالت هارو درنظر می گیریم!

← اول بیایم ببینیم x های جواب اند چه ویژگی دارند! ← باید اولاً توی $R(A)$ باشند

که $Ax=b$ برقرار باشه! => اگر نباشن x ← feasible نداریم $p^* = \infty$!

← اگر باشه اون موقع میتونیم $x = x_r + x_n$ که x در دو تا فضای $R(A)$

x_r توی $R(A)$، x_n توی $N(A)$

← بیایم بردار c رو برحسب A بنویسیم!

c_1, c_2

$$\begin{cases} Ac_1 = 0 \rightsquigarrow \text{یه قسمتی از } c \text{ که توی } A \text{ nullspace قرار داره} \rightarrow c = c_1 + c_2 \\ c_2 = A^T x^* \in R(A^T) \rightarrow \text{توی range } A \text{ اند!} \end{cases}$$

$$\Rightarrow c^T x = (c_1 + c_2)^T x = c_1^T x + x^{*T} \underbrace{A x}_{b}$$
$$= \boxed{c_1^T x + x^{*T} b}$$

$A^T x^*$ is orthogonal to $c_1 \rightsquigarrow$ nullspace of A

$$\underbrace{C(A^T)}_{\text{Rowspace of } A}^{\perp} = N(A)$$

حالا 2 حالت میشه

← اگر c_1 صفر باشه

$\Leftarrow \boxed{p^* = x^{T*} b}$

← اگر هم که c_1 ما صفر نباشه اون موقع ما میتونیم بگیم که برای t های A$(x_0 - t c_1) = b$ برقراره

صادقه و اگر t رو ببریم سمت بی نهایت $A(x_0 - \infty) = b \Leftarrow \boxed{p^* = -\infty}$ میشه چون که ارضا کننده و

در واقع x های ما unbounded اند و optimal value ما اون نیست!

$\Rightarrow$

$$p^* = \begin{cases} -\infty & c_1 \neq 0 \\ x^{T*} b & c_1 = 0 \\ \infty & c = c_1 \end{cases}$$

B)

$$\min \; c^T x$$
$$\text{s.b. to} \;\; a^T x \geq b \rightsquigarrow \text{halfspace}$$

چون ایجب نامساوی داریم

c میتونه توی nullspace A نباشه! چون توی halfspace هستیم ← تمام نقاط x جزو feasible point های ماهستن!

دوباره میایم c رو decompose میکنیم برحسب c_1, c_2

$c = c_1 + c_2$

$a^T c_1 = 0$

$, \; c_2 = a \lambda^*$ $\Rightarrow$ $c^T x = c_1^T x + c_2^T x$

$= c_1^T x + \lambda^{*T} a^T x$

if Assume $\boxed{x = -ta}$ $\rightarrow$ $-t(\underbrace{c_1^T a}_{0} + \underbrace{c_2^T a}_{a^T \lambda^* a}) = -t \underbrace{\|a\|_2}_{\text{مثبت}} \lambda^*$

$\Rightarrow$ if $\lambda^* > 0 \Rightarrow p^* = -\infty \rightarrow \boxed{\text{unbounded below}}$

if $\lambda^* \leq 0, \; c_1 = 0 \Rightarrow p^* = \lambda^* b$

$c^T x = c_2^T x = a^T \lambda^{*T} x = \boxed{\lambda^{*T} b} \rightarrow$ optimal point

$$p^* = \begin{cases} -\infty & \lambda > 0, \; c_1 \neq 0 \\ \lambda^{*T} b & \lambda \leq 0, \; c_1 = 0 \end{cases}$$

c)

$$\min \; c^T x$$

$$\text{s.t. } \underbrace{l}_{\text{lower bound}} \leq x \leq \underbrace{u}_{\text{upper bound}} \quad , \quad l \leq u$$

حالا می‌گیم خوب

چند حالت برای هر المان c میشه در نظر گرفت

$$\left.\begin{array}{ll} c_i > 0 & l_i c_i \\ c_i = 0 & 0 \leftarrow \text{هر } x_i \text{ کدام} \\ c_i < 0 \Rightarrow & u_i c_i \end{array}\right\} = p^*$$

پس واضح اگر c_i مثبت باشد باید کمترین مقدار ممکن برای x_i رو در نظر گرفت تا مقدار min بشد.

برای c_i منفی هم بالعکس و اگر یکی از c_i ها صفر باشد دیگر فرقی نمی‌کند چه x_i به آن تعلق بگیرد!

---

d)

$$\min \; c^T x$$

$$\text{s.t. } 1^T x = 1 \; , \; x \geq 0$$

مثلاً فرض کنیم یکی از c_iها منفی هست تا اینطوری باید تمام x_j هایی که $i \neq j$ هستند رو بهشون $x_j = 0$ بدیم و $\boxed{x_i = 1}$ بدیم!

اگر چند تا c_i منفی باشند اون موقع منفی‌ترین c_i رو در نظر بگیریم و ضریب x_i را $\boxed{1}$ می‌کنیم و بقیه‌شون رو ۰ می‌دیم!

در حالت کلی پس $p^* = 1 \cdot \min_{i=1:n} \{c_i\}$

3)

(a) $\min \|Ax-b\|_\infty \xrightarrow{\text{فرض}} \|A\hat{x}-b\|_\infty < t$

$$\max_{i=1:n} |a_i^T x - b_i| < t$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix}$$

$\min \; t$ ~ cost function

$$\begin{cases} \min \; t \\ \text{AND} \begin{cases} a_i^T x - b_i \le t \\ a_i^T x - b_i \ge -t \end{cases} \leftarrow \text{قیود} \end{cases}$$

در این مسئله variable ها x و t

از $t \ge \max_i |a_i^T x - b_i| = \|Ax-b\|_\infty$

$\boxed{t = p^*}$ ~> جواب مسئله معادل با خود مسئله.

---

b) $\min \|Ax-b\|_1 \Rightarrow \min_{i=1:n} |a_i^T x - b|$

if $t_i \ge |a_i^T x - b_i|$, $t = 1^T t_i$

اگر جمع تمام t_iها را کمینه کنیم در واقع تعریف همان l-1 نرم است

$$\Rightarrow \text{lp:} \begin{cases} \min \; 1^T t \\ \text{s.b. to} \;\; a_i^T x - b_i \le t_i \\ \qquad a_i^T x - b_i \ge -t_i \end{cases}$$

⇐ به هدف رسیده ایم و جواب ما هم همان مقدار کمینه یعنی $p^* = 1^T t$ است!

---

c) $\|Ax-b\|_1$, $\|x\|_\infty \le 1 \rightsquigarrow -1 \le x_i \le 1$

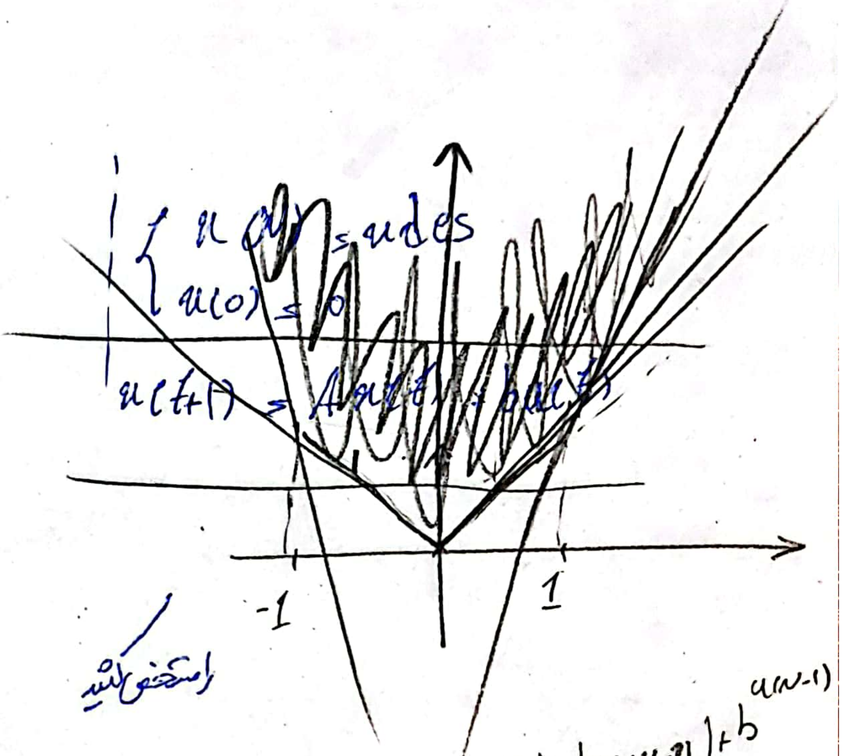
$$\text{lp:} \begin{cases} \min \; 1^T t \\ \text{s.b. to} \; -t_i \le a_i^T x - b_i \le t_i \\ \qquad -1 \le x_i \le 1 \end{cases}$$

شکل قبل است فقط یک قید جدید اضافه شده!
و آن ترم هم مستقل از قیود قبلی می باشد!
جواب هم همان $p^* = 1^T t$ است!

4)

$$f = \begin{cases} |a| & |a| \le 1 \\ 2|a| - 1 & |a| \ge 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(N) = x_{des} \\ x(0) = 0 \\ x(t+1) = Ax(t) + bu(t) \end{cases}$$



$$F = \sum_{t=0}^{N-1} f(u(t))$$

$u(0), \ldots, u(N-1) \longrightarrow$ را مشخص کنید

$$x(N) = Ax(N-1) + bu(N-1) = A(A(Ax(N-3) + bu(N-3)) + bu(N-2)) + bu(N-1)$$

$$x(N) = A^{N-1}bu(0) + A^{N-2}bu(1) + \cdots + Abu(N-2) + bu(N-1) = x_{des}$$

$$+ \cancel{A^{N-1}x(0)}^{=0}$$

$$\Rightarrow Q = [A^{N-1}b, A^{N-2}b, \ldots, Ab, b] \; ; \; \boxed{Qu = x_{des}}$$

epigraph $\rightsquigarrow$ حد بالای p_i $\quad f(u(t_i)) \le p_i$

$$\min \; 1^T p$$

$$Qu = x_{des}$$

$$p \ge f(u) = v$$

$$p \ge f(u) = 2v - 1$$

معادله بالا را هم که مقید داریم!

همزمان

p بالای هر دو نمودار است!

داریم p ها رو محدود می‌کنیم که درنتیجه $f(u)$ ها محدود شوند که درنتیجه مقدار u کمینه شود!

$|u| \le v$

آنگاه داریم u در دو طرف محدود می‌کنیم که $f(u)$ کمتر شود که p کمتر شود!

باید بالای هر دو نمودار باشد p ما که در واقع همان $f(u)$ هر مرحله است به ازای تمام u ها!

7)

(a) $\min f(x) = c^T F(x)^{-1} c < t$

$$\min \quad t$$

$$\Rightarrow \quad t - c^T F(x)^{-1} c \succeq 0$$

قبلاً داشتیم

$A \succeq 0$

$B^T(I - AA^+) = 0, \; C - B^T A^+ B \succeq 0$

$\Downarrow$

$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$

$A^+ = P_1 F(x)^{-1} P_1^T, \quad I - AA^+ = P_2 P_2^T$

$P_1 \in R^{k \times r}$

$P_2 \in R^{k \times (k-r)}$

schur complement

$\Downarrow$

X

$C - B^T A^+ B \succeq 0$

$\begin{bmatrix} \Lambda & P_1^T B \\ B^T P_1 & C \end{bmatrix} \equiv \boxed{\begin{bmatrix} F(x) & c \\ c^T & t \end{bmatrix} \succeq 0} \Leftarrow t - c^T F(x)^{-1} c \succeq 0$

$\Downarrow$

این شروط باهم معادل اند

SDP constraint ✓

$F(x) \succeq 0,$

schur complement $\leftarrow S = C - B^T A^{-1} B \succeq 0$

$\boxed{= t - c^T F(x)^{-1} c \succeq 0 \; ✓}$

(b) $\min \; f(x) = \max_{i=1,\dots,k} c_i^T F(x)^{-1} c_i \;, \; c_i \in R^m$

epigraph $\Rightarrow$ $t - c_i^T F(x)^{-1} c_i \succeq 0 \;\Rightarrow$ به ازای هر i ما یک SDP داریم که iهای مختلف ازهم مستقل اند

t بیشتر از t کوچیکه باشه!

$\begin{bmatrix} F(x) & c_i \\ c_i^T & t \end{bmatrix}$

$\Leftarrow$ یعنی یک SDP با k تا قید داریم!

c) $\min_x f(x) = \sup_{\|c\|_2 \leq 1} c^T F(x)^{-1} c = \lambda_{max}(F(x)^{-1})$ ماتریس هست!

با توجه به حل TA $\rightarrow \begin{cases} \max_{x \in \mathbb{R}^n} x^T A x \\ s.t \quad \|x\|^2 = 1 \end{cases}$

$\boxed{A \in S^n}$

$\downarrow$

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} p^* = \lambda_1 \\ x = x_1 \end{array}}$ $\rightarrow$ $\boxed{4.38}$ اسلاید

$F(x)^{-1} = F_0 + x_1 F_1 + \dots + x_n F_n$

equivalent SDP

$\begin{cases} \text{minimize} \quad t \\ \text{s.b. to} \quad F(x)^{-1} \leq tI \end{cases}$

$t \rightarrow$ در عوض λ_{max} هست که میخوایم کوچیکش کنیم

$F(x)^{-1} \leq tI \rightarrow$ LMI شرط

Variables : $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$

$\boxed{\lambda_{max}(F(x)^{-1}) \leq t} \iff \boxed{F(x)^{-1} \leq tI}$

$\Rightarrow F(x)^{-1} - tI$ is negative semi definite

d) $f(x) = E(c^T F(x)^{-1} c)$, $c \sim \begin{cases} Ec = \bar{c} \\ E(c-\bar{c})(c-\bar{c})^T = S \end{cases}$ $\quad S = \sum_{k=1}^{m} c_{nk} c_{nk}^T$

$f(x) = E\{(c-\bar{c})^T F(x)^{-1} (c-\bar{c})\} + E\{\bar{c}^T F(x)^{-1} \bar{c}\}$
$+ E\{\bar{c}^T F(x)^{-1} \underbrace{(c-\bar{c})}_{0}\} = E\{tr(F(x)^{-1}(c-\bar{c})^T(c-\bar{c}))\}$

$\boxed{* tr(AB) = tr(BA)}$

$+ \bar{c}^T F(x)^{-1} \bar{c} = tr(F(x)^{-1} . E\{(c-\bar{c})^T(c-\bar{c})\}) + \bar{c}^T F(x)^{-1} \bar{c}$

$= tr(F(x)^{-1} . S) + \bar{c}^T F(x)^{-1} \bar{c} = tr\left(F(x)^{-1} . \sum_{k=1}^{m} c_{nk} c_{nk}^T\right) + \bar{c}^T F(x)^{-1} \bar{c}$

$\boxed{\sum_k f_{nk}}$ $= \sum_{k=1}^{m} c_{nk}^T F(x)^{-1} c_{nk} + \bar{c}^T F(x)^{-1} \bar{c} \rightarrow f_0$

8) قسمت b) $\rightarrow$ CVX

epi graph: $\min \; t_0 + \sum_k t_{nk}$

$\text{s.t.} \begin{bmatrix} F(x) & c \\ c^T & t_0 \end{bmatrix} \succeq 0$ (SDP form)

$F(x) \succeq 0$

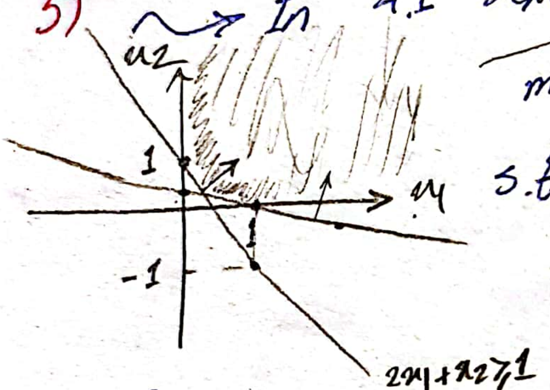
$s_1 = t_0 - c^T F(x)^{-1} c \geq 0$ from Schur complement

$s_2 = t_{nk} - c_n^T F(x)^{-1} c_n \geq 0$

$\begin{bmatrix} F(x) & c_n \\ c_n^T & t_{nk} \end{bmatrix} \succeq 0$

---

5) In 4.1 text book sketch of feasible set



$\min \; f_0(x_1, x_2)$

s.t. $2x_1 + x_2 \geq 1$

$x_1 + 3x_2 \geq 1$

$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$ $\Rightarrow$ non negative orthant R^2_{++}

(a) $f_0(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ $\quad [1 \;\; 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ (A: 1×2, 2×1)

$\hookrightarrow$ Analytical solution $\rightarrow x^* = (2/5, 1/5)$

constraint تقاطع $\quad x_2 = 1/5$

(b) $f_0(x_1, x_2) = -x_1 - x_2$ $\rightarrow x_1, x_2 \rightarrow +\infty$

$\hookrightarrow$ unbounded below $\rightarrow \boxed{f_0 \rightarrow -\infty}$

(c) $f_0(x_1, x_2) = x_1$ $\rightarrow$ کمترین میزان ممکن برای x_1 برابر صفر است

که در آن ممکن x_2 باید از 1 بزرگتر باشد

$\boxed{p^* = (0, x_2), \; x_2 \geq 1}$

(d) $f_0(x_1, x_2) = \max\{x_1, x_2\}$

$\hookrightarrow \boxed{x_1 = x_2 = 1/3}$

(e) $f_0(x_1, x_2) = x_1^2 + 9x_2^2$

$x^* = (1/2, 1/6)$

HW 3 Arani

1) minimize $f_0(x) = -\sum_{i=1}^{m} \log(b_i - a_i^T x)$

$b_i - a_i^T x > 0 \Rightarrow \underset{m\times 1}{b} > \underset{m\times n}{A}\underset{n\times 1}{x} \Rightarrow x < A^{-1}b$

(a) $Av \preceq 0 \Rightarrow x_0 + tv,\ t \geq 0 \in \operatorname{dom} f$

$x_0 \in \operatorname{dom} f_0 \Rightarrow A(x_0 + tv) \preceq b$

اگر و تنها اگر $\xrightarrow{\text{رفت}}$ unbounded $\leftarrow$ dom f_0 $\Leftarrow$

$\xrightarrow{\text{برگشت:}}$ اگر $\|x^k\|_2 \to \infty$ آنگاه: تعریف کنیم $\boxed{v^k = \frac{x^k}{\|x^k\|_2}}$, $\|v^k\|_2 = 1\ \forall k$

$\boxed{\text{limit of } v^k \to v}$

$a_i^T v^k < b_i / \|x^k\|_2 \Rightarrow a_i^T v \leq 0 \Rightarrow Av \preceq 0, v \neq 0$

(b) v with $Av \preceq 0$, $Av \neq 0$.

$\exists z \succ 0 \Rightarrow A^T z = 0 \iff \underset{\exists v}{Av \preceq 0, Av \neq 0}$

(a) با توجه به قسمت داریم: $f_0(x_0 + tv) = -\sum_{i=1}^{m} \log(b_i - a_i^T(x_0 + tv))$

$< -\sum \log(b_i - a_i^T x_0) - \log(b_j - a_j^T x_0 - t a_j^T v)$

و داشتیم که $a_j^T v < 0 \Rightarrow$ میل به $-\infty$, $t \to \infty$

ادامه (1)

(c) if f_0 bounded below $\Rightarrow \exists x_{**}$ satisfies optimality condition

dom f_0 bounded $\Rightarrow$ sublevel set f_0 ها

بازه های بسته اند!

dom f_0 unbounded $\Rightarrow$ sublevel set f_0 ها

اگر $\exists v \neq 0$, $Av \leq 0$ $\Rightarrow$ rank $A = 0$ $\rightarrow$ تناقض

قبلاً داریم که rank$(A) = n$; $N(A) = n$

dom f که bounded باشد $\Leftrightarrow$ bounded $\Leftarrow f_0$ below $\Leftarrow$ rank$(A) = n$ اگر $\Leftarrow$

که اگر اینطور باشد پس به مقدار minimum خواهیم رسید!

(d) $X_{opt} = \{x^* + v \mid Av = 0\}$, x^* is any optimal point

اگر بتوانیم با استفاده از Hessian ثابت کنیم که PD است $\Leftarrow$ مقدار جواب ما فقط 1 است که local optima هست که همان global optima ما هم هست

$$\nabla_x^2 f_0(x) = A^T \operatorname{diag}(d) A \ , \ d = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}, \ d_i = \frac{1}{b_i - a_i^T x}$$

$$\boxed{\ln(u) \xrightarrow{f'} \frac{u'}{u}}$$

PD positive definite $\Rightarrow$ convex است $\Leftarrow$ جواب یکتاست!

9

3) (a)-1 feasible set مسئله‌ی relaxation شامل همه‌ی feasible set مسئله‌ی Boolean LP است، => می‌توان گفت که اگر در مسئله‌ی relaxation

infeasible set را داشته باشیم و جواب قابل قبولی پیدا نشود => در مسئله‌ی Boolean LP هم

جواب نداریم!

همچنین جواب حاصل از relaxation در Boolean LP همواره کوچکتر مساوی جواب optimal در Boolean LP است.

a-2

3) اگر جواب خود relaxation خود 0 یا 1 بود، در این صورت به طور حتم این جواب قابل حصول برای Boolean LP هم خواهد بود!