HW6 CVX

حسن علیزاده پیرعلیلو

810100522

1) $C \subseteq \mathbb{R}^n$

nonempty

Convex

Closed

Projection $\Rightarrow \min_{x \in C} \|X_0 - x\|$

مسئله کانوکس پس حتماً پاسخ دارد.

فرض خلف)

در ابتدا فرض می‌کنیم x_1 و x_2 دو پاسخ بهینه برای مسئله Projection باشند پس داریم

$$\|X_0 - x_1\| = \|X_0 - x_2\| = D$$

از طرفی به کمک نامساوی مثلث که برای نرم وجود دارد و با توجه به Strictly Convex بودن $\|\cdot\|$ داریم:

$$\|X+Y\| < \|X\| + \|Y\|$$

حال فرض می‌کنیم نقطه $x_3 = \frac{x_1+x_2}{2}$ پس در نامعادله بالا جایگذاری می‌کنیم

$$\rightarrow \left\|\frac{x_1+x_2}{2} - X_0\right\| = \frac{1}{2}\|x_1 - X_0 + x_2 - X_0\|$$

$$< \frac{1}{2}\|x_1 - X_0\| + \frac{1}{2}\|x_2 - X_0\| = \frac{1}{2} 2D = D$$

یعنی حتی نقاط x_1 و x_2 نقاط بهینه برای مسئله بهینه‌سازی نیستند

و یعنی Proj نخواهد بود پس فرض خلف به تناقض رسید

و این یعنی حتماً پاسخ یکتا دارد.

2)

حجم یک ابر مستطیل به صورت حاصل ضرب اضلاع آن بیان می شود

لذا تابع هدف می شود $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(u_i - l_i)}$ که باید بیشینه شود

قید مسئله به فرم $Ax \leq b$ لذا می توان نوشت

$$\begin{cases} \max \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(u_i - l_i)} \\ s.t \quad a_i^T x \leq b_i \quad i=1,\dots,m \\ l \leq x \leq u \end{cases}$$

راه حل ابتدایی که به نظر می رسد این است که بیاییم و تمامی رئوس مستطیل را مورد بررسی قرار دهیم که چون به فرم 2^n نقطه است اگر تعداد ابعاد مسئله زیاد شود از نظر محاسباتی مصلحت نخواهد بود. پس سعی می کنیم مسئله را یک مرحله بهینه کنیم.

ابتدا از objective یک log می گیریم که چون تابع مقعر است مسئله را تغییر نمی دهد

$$\Longrightarrow \max \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(u_i - l_i) \equiv \max \sum_{i=1}^{n}\log(u_i - l_i)$$

در ادامه برای ساده کردن قید مسئله سعی می کنیم فرم تحلیل را ساده کنیم

$$\sup_{l \leq x \leq u} a_i^T x \leq b_i \quad i=1,\dots,m$$

2) ادامه) با توجه به اینکه x در یک ابر مستطیل قرار دارد زمانی مقدار $a_i^T x$ بیشینه می‌شود که

$$
\begin{cases}
a_{ij} \geq 0 \longrightarrow x_j = u_j \\
a_{ij} < 0 \longrightarrow x_j = l_j
\end{cases}
$$

که این را می‌توان به صورت زیر فرمول بندی کرد:

$$
\sup_{l \leq x \leq u} a_i^T x = \sum_{j=1}^{n} \left[\max\{a_{ij}, 0\} u_j - \max\{-a_{ij}, 0\} l_j \right]
$$

final Problem $\Rightarrow$

$$
\begin{cases}
\max\limits_{u_i, l_i} \sum\limits_{i=1}^{n} \log(u_i - l_i) \\
\text{s.t.} \ \sum\limits_{j=1}^{n} \left[\max\{a_{ij}, 0\} u_j - \max\{-a_{ij}, 0\} l_j \right] \leq b_i \quad i = 1, \dots, m
\end{cases}
$$

مسئله کانوکس با m قید خطی ✓.

3) a) $P\{a_j - a_k + v > 0\}$ ⟸ احتمال اینکه تیم j ببرد تیم k را

$$= P\{v > a_k - a_j\} = 1 - F_v(a_k - a_j)$$

$$= 1 - \frac{e^{\frac{a_k - a_j}{\sigma}}}{e^{\frac{a_k - a_j}{\sigma}} + e^{-\frac{a_k - a_j}{\sigma}}} = \frac{e^{-\frac{a_k - a_j}{\sigma}}}{e^{\frac{a_k - a_j}{\sigma}} + e^{-\frac{a_k - a_j}{\sigma}}}$$

حال باید مطابق مشاهده iام از OutCome ها بنویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}_{m \times n} \rightarrow$$

سطر iام ماتریس A مشخص کننده در بازی iام کدام دو تیم بازی کرده‌اند و کدام آنها برنده. اگر دو تیم j و k بازی کرده باشند ستون j و k تنها مقدار دارند و ستون تیمی که برنده باشد 1 است و بقیه المان‌ها صفر هستند.

پس می‌توان likelihood را نوشت:

$$\prod_i \frac{e^{\frac{A_i \hat{a}}{\sigma}}}{e^{\frac{A_i \hat{a}}{\sigma}} + e^{-\frac{A_i \hat{a}}{\sigma}}}$$

و A_i: سطر iام ماتریس A

ادامه 3) a)

حال با لگاریتم گیری از objective می‌توان بازنویسی کرد:

$$\begin{cases} \max \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{A_i \hat{a}}{\sigma} - \log\left(e^{\frac{A_i \hat{a}}{\sigma}} + e^{-\frac{A_i \hat{a}}{\sigma}}\right) \\ \text{s.t.} \quad 0 \le a \le 1 \end{cases}$$

مسئله بهینه‌سازی کانوکس .

4) a) $$PV(x,r) = \sum_{i=0}^{n} (1+r)^{-i} x_i$$

ترکیب Affine نسبت به x ⇐ نسبت به x کانوکس

$$IRR(x) = \inf_{r} \{ r \ge 0 \mid PV(x,r) = 0 \}$$

Inf یک تابع کانوکس هم کانوکس است ⇐ $IRR(x)$

هم نسبت به x کانوکس ⇐ تابع $IRR(x)$

quasiconvex هم هست چراکه sublevel set های

تابع کانوکس، کانوکس است .

از طرفی در کلاس 3.34 که گفته شده که تابع $IRR(x)$

quasiconcave است ⇐ تابع IRR quasilinear

خواهد شد.

4)b) تعریف تابع quasiconvex به صورت

$$f(\theta x+(1-\theta)y) \le \max(f(x), f(y))$$

حال به ترتیب x و 0 می‌توانند از نقطه ماکسیمم عبور کنند که خواسته سوال اثبات می‌شود چراکه

$$\theta=1$$

$$IRR(x+0y) \le \max(IRR(x), \underbrace{IRR(0)}_{0})$$ ✓

6) I) $\text{Cost} = c^T r \qquad r \ge Aq$

$$s = \min\{d, q\}$$

$$\text{revenue} = p^T s$$

$$\text{Profit} = p^T s - c^T r = p^T \min\{d, q\} - c^T r$$

$$E\{\text{Profit}\} = \sum_{i=1}^{K} \pi_i \left(p^T \min\{d^{(i)}, q\} - c^T r\right)$$

$\downarrow$ max over q and r

$$\Rightarrow \begin{cases} \max \sum_{i=1}^{K} \pi_i \left(p^T \min\{d^{(i)}, q\}\right) - c^T r \\ \text{s.t} \quad q \ge 0 \quad r \ge 0 \quad r \ge Aq \end{cases}$$

مسئله خطی دو مرحله بهینه‌سازی تصادفی است. ✓

(II ب) ادامه) همانطور که گفته شد در این حالت باید بعد از داشتن d مقدار q را تخمین بزنیم. از در این حالت تعداد K تا q هم داریم که مسئله مان Profit تغییری می‌کند

$$E\{profit\} = \sum_i \pi_i \left(p^T \min\{d^{(i)}, q^{(i)}\}\right) - c^T r$$

Problem $\rightarrow$

$$\begin{cases} \max & -c^T r + \sum_{i=1}^{K} \pi_i \left(p^T \min\left(d^{(i)}, q^{(i)}\right)\right) - c^T r \\ s.t & r \geq 0 \quad q^{(i)} \geq 0 \quad i=1,\dots,K \\ & r \geq A q^{(i)} \end{cases}$$

برای اینکه مسئله را در این حالت مقدار ساده‌تر کنیم از این اصل استفاده می‌کنیم که می‌خواهیم محصول اضافه تولید نکنیم لذا همواره $q \leq d$ خواهد بود در این حالت $\min\left(d^{(i)}, q^{(i)}\right) = q^{(i)}$ که می‌توان ساده‌سازی کرد:

Problem $\rightarrow$

$$\begin{cases} \max & -c^T r + \sum_{i=1}^{K} \pi_i \, p^T q^{(i)} \\ s.t & r \geq 0 \quad q^{(i)} \geq 0 \quad q^{(i)} \leq d^{(i)} \\ & r \geq A q^{(i)} \quad i=1,\dots,K \end{cases}$$

7)

با توجه به اینکه هر نقطه‌ی مسئله بایستی با ترکیب $w^{(i)}$ ها $i=1,\dots,k$ به پاسخ برسیم پس داریم

$$w=\sum_{i=1}^{K}\theta_i w^{(i)} \rightarrow \theta\succeq 0 \;,\; 1^T\theta=1$$

حال اگر تابعی کانوکس باشد به کمک Jensen's Inequality می‌توان گفت

$$f(w)\preceq\sum_{i=1}^{k}\theta_i f(w^{(i)})$$

Posinomial ها کانوکس نیستند اما می‌توان $g(x)$ را چنان تعریف کنیم که کانوکس باشد

را مطابق زیر به نحوی تعریف کرد که کانوکس باشد لذا :

$$g(x)=\log f(e^{x}) \rightarrow$$ کانوکس

لذا می‌توان گفت که با تغییر متغیر $x=\log w$ مقادیر توابع

$\log$ (Posynomial) کانوکس است پس داریم :

$$\log P(e^{x})\preceq\sum_{i=1}^{K}\theta_i\log P(e^{x^{(i)}})$$

$$\theta\succeq 0 \quad \sum\theta_i=1 \quad x^{(i)}=\log w^{(i)}$$

Scanned by CamScanner

به نام خدا

به همین ترتیب برای A و D هم داریم:

$$\log D(e^{x}) \leq \sum_{i=1}^{K} \theta_i \log D(e^{x^{(i)}})$$

$$\log A(e^{x}) \leq \sum_{i=1} \theta_i \log A(e^{x^{(i)}})$$

$$\sum \theta_i = 1 \qquad \theta \geq 0$$

پس مسئله با شرط‌هایی که برای P و D و A داریم و باید برآورده باشند به صورت مسئله feasibility خطی است:

$$\begin{cases} \min\limits_{\theta} \quad 1 \\ \text{s.t.} \quad \sum \theta_i \log P^{(i)} \leq \log P_{spec} \\ \qquad \sum \theta_i \log D^{(i)} \leq \log D_{spec} \\ \qquad \sum \theta_i \log A^{(i)} \leq \log A_{spec} \\ \qquad \sum \theta_i = 1 \quad \theta \geq 0 \end{cases}$$

ادامه 7) اگر مسئله بیان شده feasible باشد θ یافت شده و ما

با محاسبه می‌کنیم ولی اگر Infeasible باشد نمی‌توانیم چیزی بگوییم

درباره اینکه مسئله طراحی feasible یا Infeasible است.

با حل مسئله در قسمت (Q7 مشاهده می‌کنیم مسئله feasible

است و پاسخ بهینه ندارد لذا می‌توان دسته‌ای از ... ها یافت که در طراحی

جا می‌گیرند.