به نام خدا

BSS

Hw-2

محمدرضا آرانی

810100511

دانشگاه تهران

1401/12/23

جدول محتویات

بخش-1:

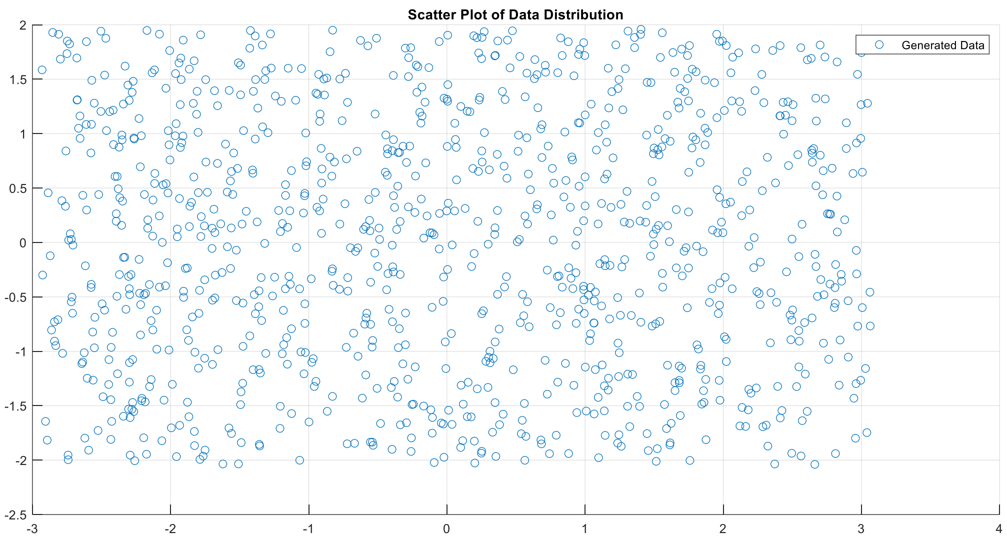
۱- منبع s_1 را که یک فرآیند تصادفی دارای توزیع یکنواخت بین [3 -3] می باشد با T=1000 نمونه و منبع s_2 را که یک فرآیند تصادفی دارای توزیع یکنواخت بین [2 -2] می باشد با T=1000 نمونه تولید کنید. در صورت وجود میانگین در منابع، میانگین منابع را حتما صفر کنید. این دو منبع را به صورت خطی و آنی توسط ماتریس مخلوط کننده $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ترکیب کنید و مشاهدات x_1 و x_2 و x_3 را تولید کنید.

$$X_{3\times T} = A_{3\times 2}\, S_{2\times T}$$

سوال-1:

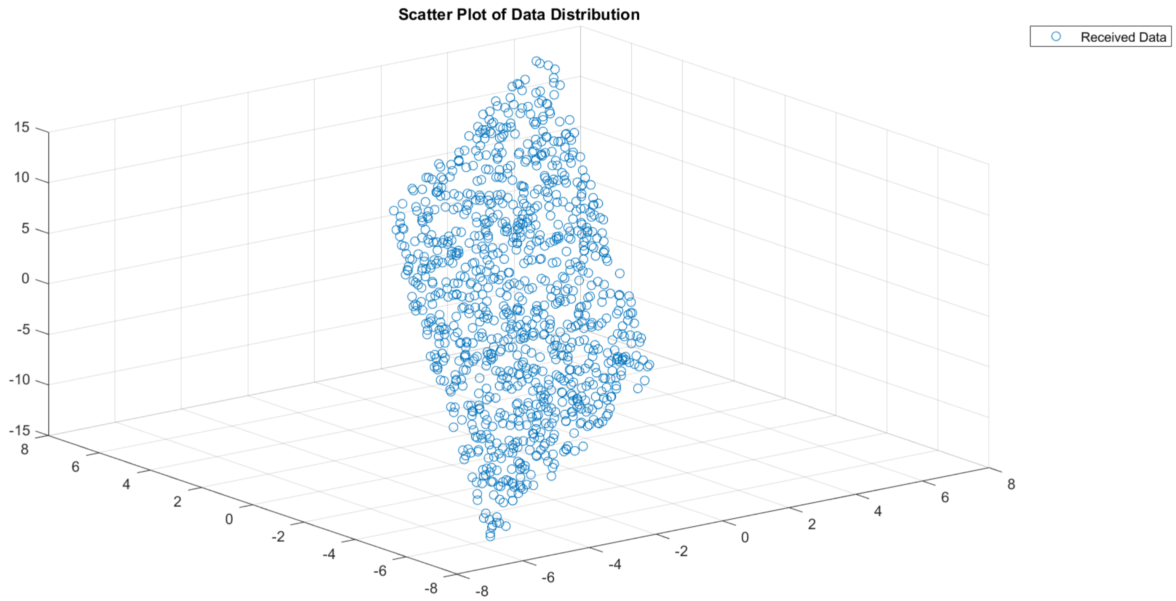
أ) پراکندگی مشاهدات را در فضای سه بعدی (دستور scatter3) رسم کنید. همان طور که مشاهده می کنید با این که مشاهدات سه بعدی هستند، اما عملا در یک فضای دو بعدی پراکنده شده اند. با محاسبه ی ماتریس R_x و اعمال تحلیل PCA (توسط دستور eig) ماتریس بردارهای ویژه (U) و ماتریس قطری مقدار ویژه (D) را به دست آورید.

در اینجا ابتدا داده‌ها را تولید می‌کنیم:



شکل 1

سپس با استفاده از ماتریس مخلوط کننده، داده‌های منبع را به گیرنده (یا همان فضای جدید) می‌بریم:



شکل 2

با توجه به توزیع به دست آمده، داده بیشتر در صفحه‌ی خاصی قرارگرفته و انگار در یک دستگاه مختصات 2 بعدی قابل بیان بوده و نیازی به 3 بعد برای بیان مختصات داده‌ها نیست. در واقع انگار رنک ماتریس مخلوط کننده‌ی A برابر 2 است که خروجی داده‌های ورودی به آن در 2 بعد توزیع شده اند.

- می‌توان یک صفحه‌ای پیدا کرد که داده‌ها در آن قابل بیان بوده و از 3 بعد به 2 بعد برسیم.

برای پیداکردن این صفحه از تحلیل PCA یا همان Principal component analysis استفاده می‌کنیم.

این تحلیل تلاش می‌کند تا دستگاه مختصات جدید را طوری بیابد که از ترکیب خطی مترهای دستگاه مختصات قبلی استفاده کند و در دستگاه مختصات جدید که تعداد متر کمتری دارد، مثلا از 3 متر به 2 متر در این دستگاه مختصات، برسد. سعی بر آن است که این مترهای جدید نسبت به هم uncorrelated بوده و داده‌ها در آن جهت‌ها بیشترین میزان واریانس و پراکندگی را داشته و در واقع قابل تمایز باشند.

با در نظر گرفتن این مسئله، تحلیل PCA در این فضا به حل یک مسئله‌ی بردار ویژه-مقدارویژه تقلیل می‌یابد.

با استفاده از دستور eig در متلب می‌توان به بردارهای ویژه و مقادیر ویژه متناسب رسید.

Eigen-Vectors

0.1961	0.9125	0.3589
0.7845	-0.3656	0.5010
-0.5883	-0.1833	0.7876

Eigen-Values

1.0e+04 *

0.0000	0	0
0	0.1949	0
0	0	5.0065

- Trace of D: 52013.8963 and Trace of Rx: 52013.8963

سوال-2:

ب) سعی کنید هر سه گزاره ی زیر را به صورت مفهومی درک کنید. بردار ویژه ها را متناظر با مقادیر ویژه از بزرگ به کوچک، به صورت u_1، u_2 و u_3 در نظر بگیرید.

* یکی از مقادیر ویژه صفر شده است (متناظر با u_3). این اتفاق یعنی داده ها در جهت u_3 تصویری ندارند یا به عبارت دیگر پراکندگی ندارند. معادل ریاضی این گزاره یعنی $u_3^T X = 0$.

* u_3 بر ستون های ماتریس A عمود است زیرا این ستون ها هستند که داده ها را تولید کرده اند و در واقع داده ها در فضای این ستون ها هستند. معادل ریاضی این گزاره یعنی $u_3^T A = 0$.

* u_1 و u_2 در همان فضای ستون های ماتریس A یعنی a_1 و a_2 قرار دارند. معادل ریاضی این گزاره یعنی $A = [u_1 \quad u_2\,]\, C_{2\times 2}$. درایه های ماتریس C را به دست آورید.

مقادیر ویژه متناسب با بردارهای ویژه، در واقع واریانس داده‌ها در جهت آن بردار ویژه را نشان می‌دهند. در این مورد، در جهت بردار ویژه‌ی سوم یعنی u3 ما مقدار ویژه‌ی $2.9207e-12$ رو داریم که تقریبا 0 درنظر گرفته می‌شود.

در واقع u3 تشکیل دهنده‌ی فضای nullity ما بوده و u1 و u2 فضای range ما را تشکیل می‌دهند و آن را span می‌کنند.

برای این تعادل داریم:

$$N + R = D$$

که در آن N همان nullity و R همان رنک ماتریس مخلوط کننده بوده و D بعد فضای داده‌های خروجی است.

- قابل ذکر است که یک ماتریس با ابعاد 3 در 2 همواره دارای رنک کوچکتر مساوی 2 (بعد کوچکتر) است.
- به وضوح می‌توان تعامد بین u3 و داده‌ها در بعد جدید را مشاهده کرد:

sum(abs(u3'*Y)) = 5.9924e-13

- تعامد u3 بر ستون‌های ماتریس A:

abs(u3'*A) = 1.0 e-15* [0.3053 0.3886]

ماتریس مربعی C به صورت زیر به دست می‌آید:

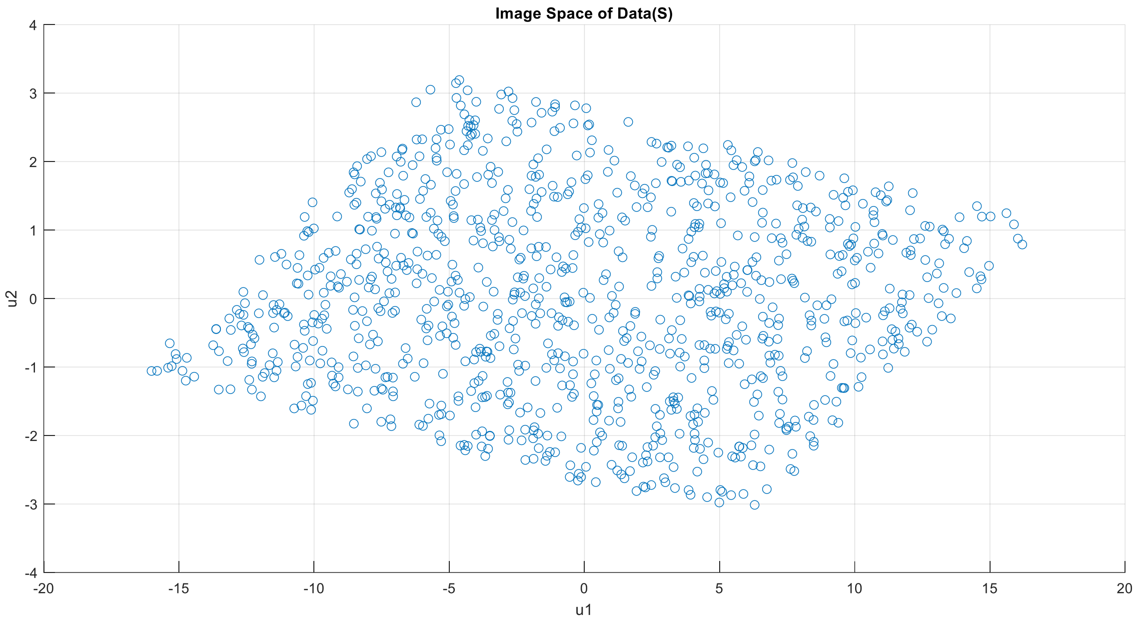
C:

2.7938-	3.7235
1.0929-	0.3685-

که درواقع حاصل استفاده از pinv و سپس ضرب در A است.

سوال-3:

ج) چون یکی از مقادیر ویژه صفر است می توان بدون از دست دادن هیچ گونه اطلاعاتی، داده ها را به فضای دو بعدی برد. ماتریسی که می تواند بُعد اضافی داده ها را حذف کند و همچنین آنها را در فضای جدید سفید کند به دست آورید $(Z_{2\times T} = B_{2\times 3}X_{3\times T})$. داده های سفید شده $z_1(t)$ و $z_2(t)$ را رسم کنید.



شكل 3

New eigen Vectors:

-0.0000 -1.0000

-1.0000 0.0000

New eigen Values:

1.0e+04 *

0.1949 0

0 5.0065

سوال-4:

د) تبدیل SVD را $(X = Q\ G\ V)$ روی ماتریس مشاهدات اولیه به صورت $[Q, G, V^T]$=svd(X) اعمال کنید . رتبه (یا Rank) ماتریس X چند است؟ رابطه ی ماتریس Q با U ، ماتریس G با D و ماتریس V با Z چیست؟

برای اینکه ماتریس سفید کننده را به دست بیاوریم داریم:

$$Z_w = W * Z; R_{Z_W} = Z'_w Z_w =>$$

$$R_{Z_W} = W * Z_w * Z'_w * W' = I; =>$$

$$R_{Z_W} = W * R_Z * W' = I =>$$

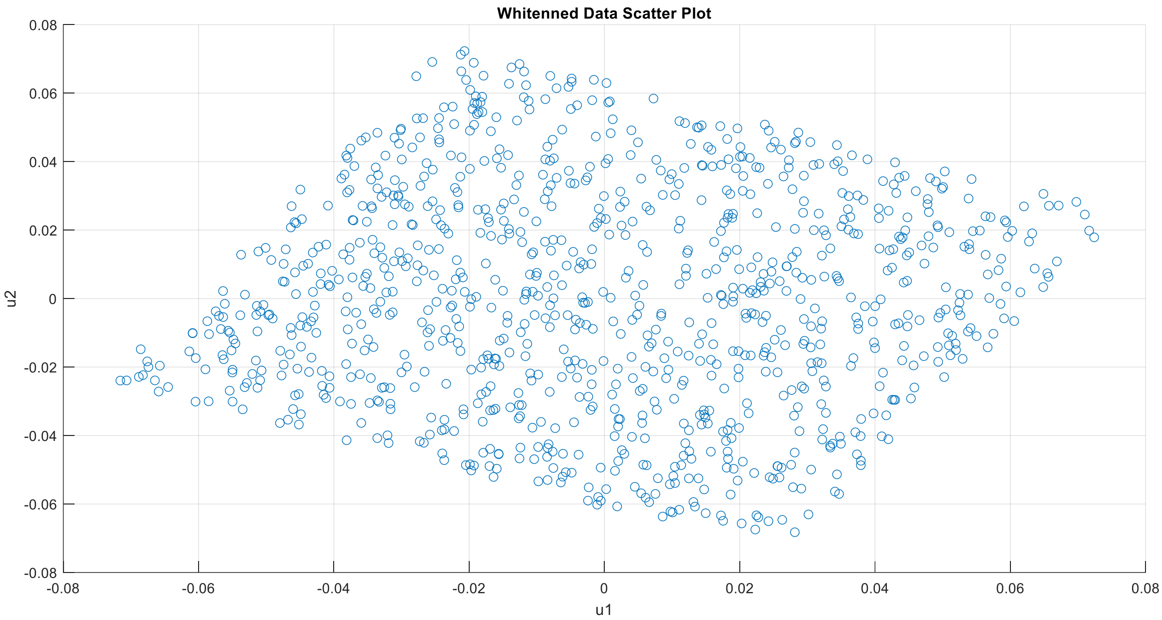
$$W * (R_z)^{\frac{1}{2}} * (R_z)^{\frac{1}{2}} * W' = I =>$$

$$W = (R_z)^{-\frac{1}{2}}; =>$$

$$or\ we\ have: W = chol(inv(R_z))$$

Rz_whitenned

1.0000	-0.0000
-0.0000	1.0000



شکل 4

با استفاده از دستور SVD به خروجی [U,S,V] = svd(A) می‌رسیم که در آن A = USV’.

در واقع در اینجا S یک ماتریس شامل مقادیر تکینی Aاست و SS^T به ما همان مقادیر ویژه‌ی A را می‌دهد.

همچنین Q همان U است که جای ستون‌هایش عوض شده است.

SQRT of Lambda:

0.0000	0	0
0	44.1498	0
0	0	223.7514

G is:

0 0 223.7514

0 44.1498 0

0.0000 0 0

می‌توان دید که این G دقیقا با رادیکال مقادیر ویژه برابر است.

بقیه مقادیر G برابر 0 اند.

می‌توان Z را توسط دو ستون از U توصیف کرد. ستون اول V همان سطر اول Z است با تغییر علامت.

ستون دوم V نیز مانند سطر دوم Z است. در واقع داریم:

```
Check = Z*V;
disp(sum(sum(abs(Check)>1e-10)));
    2
```

سوال-5:

ه) در قسمت ب دیدیم که u_1 و u_2 در فضای ستون های ماتریس A یعنی a_1 و a_2 قرار دارند. حال نشان دهید که سطرهای اول و دوم ماتریس V^T یعنی v_1^T و v_2^T یا همان $z_1(t)$ و $z_2(t)$ نیز در فضای سطر های ماتریس S یعنی s_1^T و s_2^T قرار دارند. معادل ریاضی این گزاره یعنی

$$S_{2\times T} = F_{2\times 2}\, Z_{2\times T}$$

درایه های ماتریس F را به دست آورید.

با توجه به این نتایج می توان دریافت که سیگنال منابع بر سطرهای سوم تا Tمُ ماتریس V^T عمود است.

F_z_w =

47.9591 -24.1904

-16.1704 -32.2396

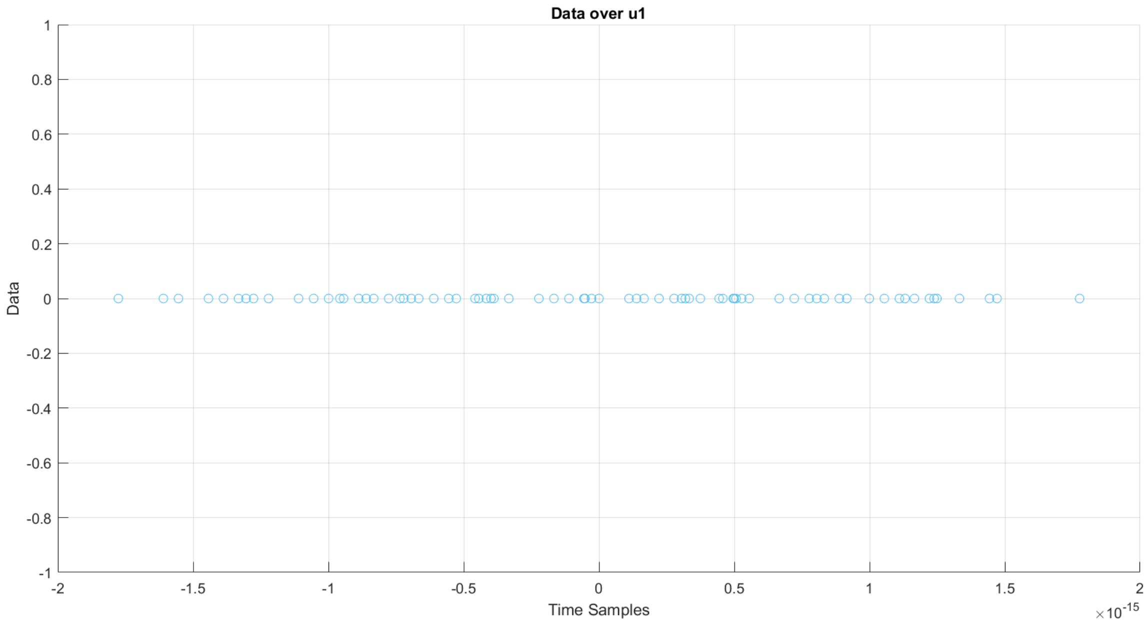
سوال-6:

یعنی در واقع رنج هردو ماتریس(فضا) با هم برابر است.

و) اگر از ما بخواهند که بُعد داده های اولیه X را تا حد ممکن کاهش دهید به گونه ای که حداقل ۹۰ درصد انرژی کل مشاهدات ($E_{tot}=E_1+E_2+E_3$) حفظ شود، چگونه این کار را انجام می دهید؟ داده ها را در فضای با بعد تقلیل یافته رسم کنید.

ترتیب وزنی داده‌ها روی محور های u1 تا u3 به صورت زیر است:

0.0000   0.0375   0.9625



شکل 5

صرفا کافیست که u1 را در نظر گرفته و داده‌ها رو نسبت به این محور رسم کنیم.

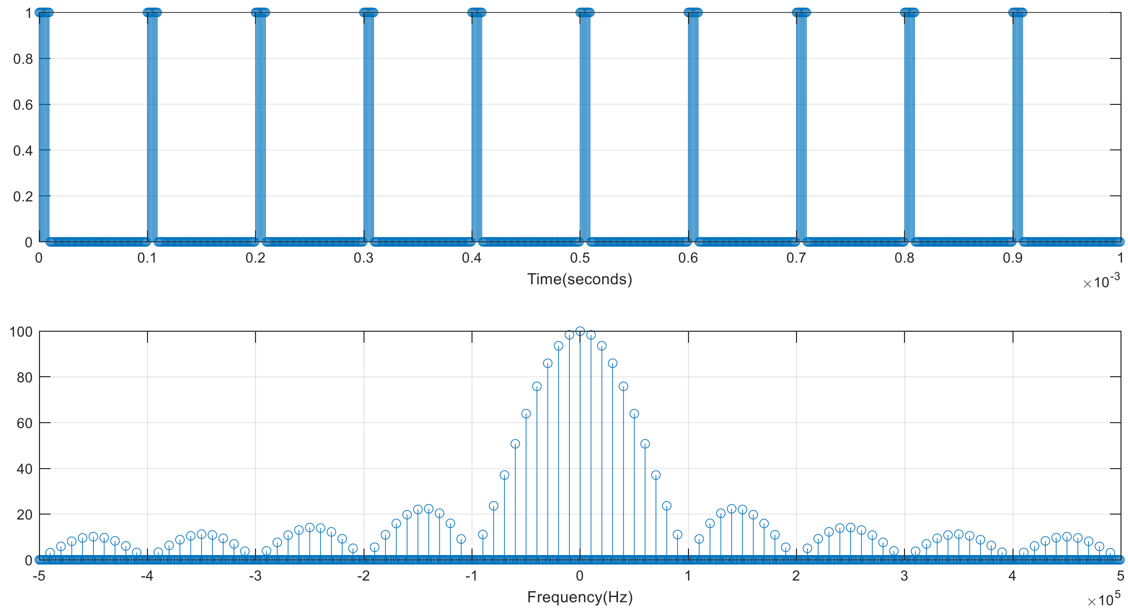
بخش-2:

۲- در گیرنده ای یک آرایه ی یکنواخت عمودی با M=10 المان و فواصل آنتن d=1 متر که سیگنال ها را با فرکانس fc=150 MHz پایین گذر می کند وجود دارد. دو منبع در زوایای ارتفاعی ۱۰ و ۲۰ درجه وجود دارند. سیگنال زمانی پایین گذر شده این دو منبع به صورت زیر است.

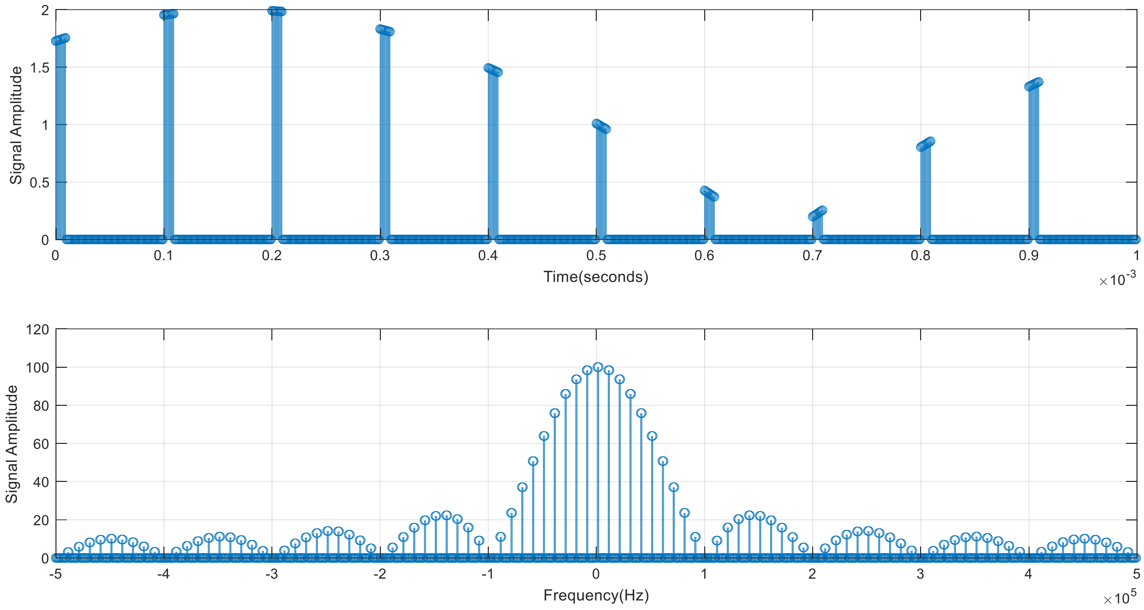
$$s_1(t) = exp(j2\pi\, f_1 t) \qquad f_1 = 20\ KHz$$

$$s_2(t) = exp(j2\pi\, f_2 t) \qquad f_2 = 10\ KHz$$

فرض کنید گیرنده مجموع سیگنال پایین گذر شده منابع و نویز را به مدت 1 میلی ثانیه و با فرکانس نمونه برداری $f_s = 1\ MHz$ ضبط می کند. همچنین فرض کنید نویزگوسی است و مستقل از منابع با میانگین صفر و واریانس 1 در هر آنتن به سیگنال اصلی پایین گذر شده اضافه می شود.



شکل 6



شکل 7

سوال-1:

الف) فرمول بندی مساله را با دید جداسازی کور منابع بنویسید.

$$y_1(t) = s(t)$$

$$y_2(t) = s(t - \tau_2)$$

$$y_3(t) = s(t - \tau_3)$$

...

$$y_M(t) = s(t - \tau_M)$$

در واقع آنتن اول را مرجع فاز گرفته و بقیه آنتن‌ها را بر حسب آن می‌نویسیم!

توی گیرنده داریم:

$$s(t) = Re\{s_L(t)e^{j2\pi f_c t}\}$$

که در آن s_L همان سیگنال پایین گذر ما است که توسط carrier در فرکانس fc به باند میانی منتقل شده است.

برای بقیه آنتن‌ها داریم:

$$s(t-\tau_i) = Re\left\{s_L(t-\tau_i)e^{j2\pi f_c(t-\tau_i)}\right\} =$$
$$= Re\left\{s_L(t-\tau_i)e^{j2\pi f_c(t)}e^{-j2\pi f_c(\tau_i)}\right\} =$$
$$Re\left\{s_L\left(t-\frac{d_i\sin(\theta)}{c}\right)e^{j2\pi f_c(t)}e^{-j2\pi f_c\left(\frac{d_i\sin(\theta)}{c}\right)}\right\}$$

در هر لحظه 10 نمونه دریافت می‌کنیم:

$$Y_{10*T} = a(\theta)_{10*1}s_{L_{1*T}};$$

حالا اینجا ما اومدیم دریافتی رو بر حسب یه سری المان رنک 1 نوشتیم!

حالا ما 2 تا منبع داریم و 10 تا گیرنده و تا زمانی که تعداد گیرنده ها از منابع بیشتر باشه ما یه مسئله‌ی BSS داریم!

اگر بیایم از SVD برای Y استفاده کنیم داریم:

$$Y_{10*T} = USV^T$$

دو مقدار ویژه اول متناظر با منابع اولیه اند و دو تا بردار ویژه اول متناظر با ستون های U اند.

از اینجا Beamforming و MUSIC رو میتونیم استفاده کنیم:

سوال-2:

ب) از روی مشاهدات و با استفاده از روش beamforming زوایای منابع را بیابید.

برای Beamforming داریم:

$$f(\theta) = ||a^{H}(\theta)U_{sig}\,||$$

با نمایش S پس از تجزیه SVD داریم:

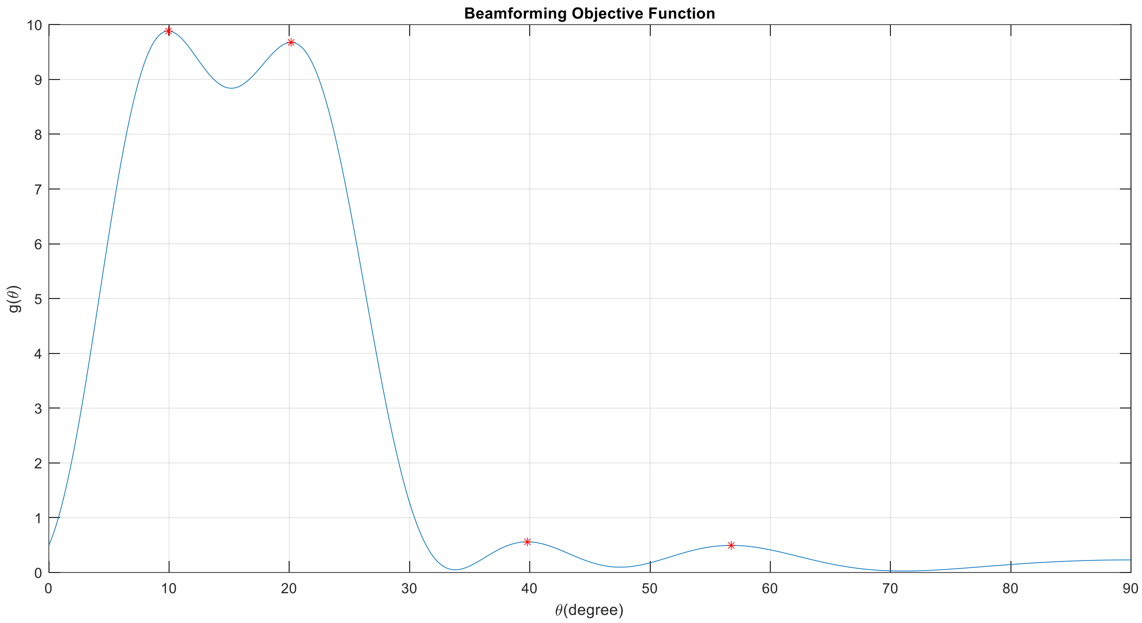
```
disp(S(:,1:20)) % M*T Matrix! --> Diagnal Elements have Values
  Columns 1 through 11

   46.8134         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0
         0   42.2510         0         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0   33.2502         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0   32.6159         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0   32.3360         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0   31.1713         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0   30.5524         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0   30.4630         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0   30.2054         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0         0   29.1231         0

  Columns 12 through 20
```

که مشاهده می‌شود فقط 2 مقدار اول تمایز داشته و از آن به بعد بقیه هناصردر واقع به نوعی وایانس نویز را نشان می‌دهند و مقادیر نزدیکی هستند.

با رسم نمودار برای Beamforming و انتخاب مکان‌هایی که تابع هدف در آن بیشینه می‌شود می‌توان زاویه یابی را به درستی انجام داد:



شکل 8

هر دو هدف به درستی در زاویه‌های 10 و 20 درجه تشخیص داده شده اند!

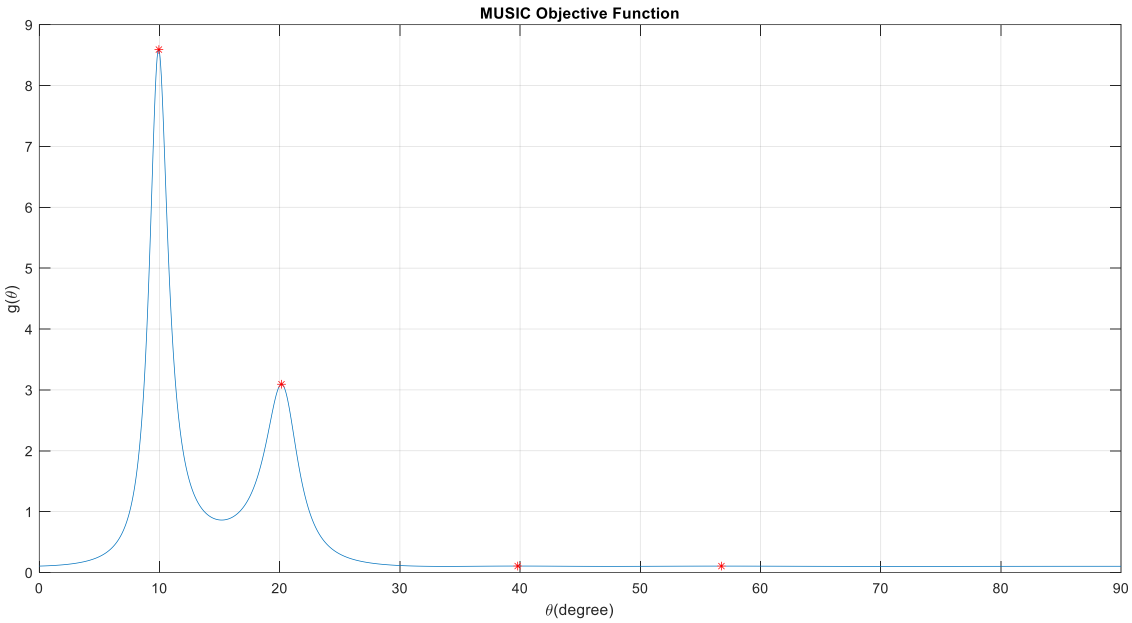
سوال-3:

ج) از روی مشاهدات و با استفاده از روش MUSIC زوایای منابع را بیابید.

برای روش MUSIC داریم:

ماکزیمم کردن تابع زیر:

$$g(\theta) = \frac{1}{||a^H(\theta)U_{null}||}$$



شکل 9

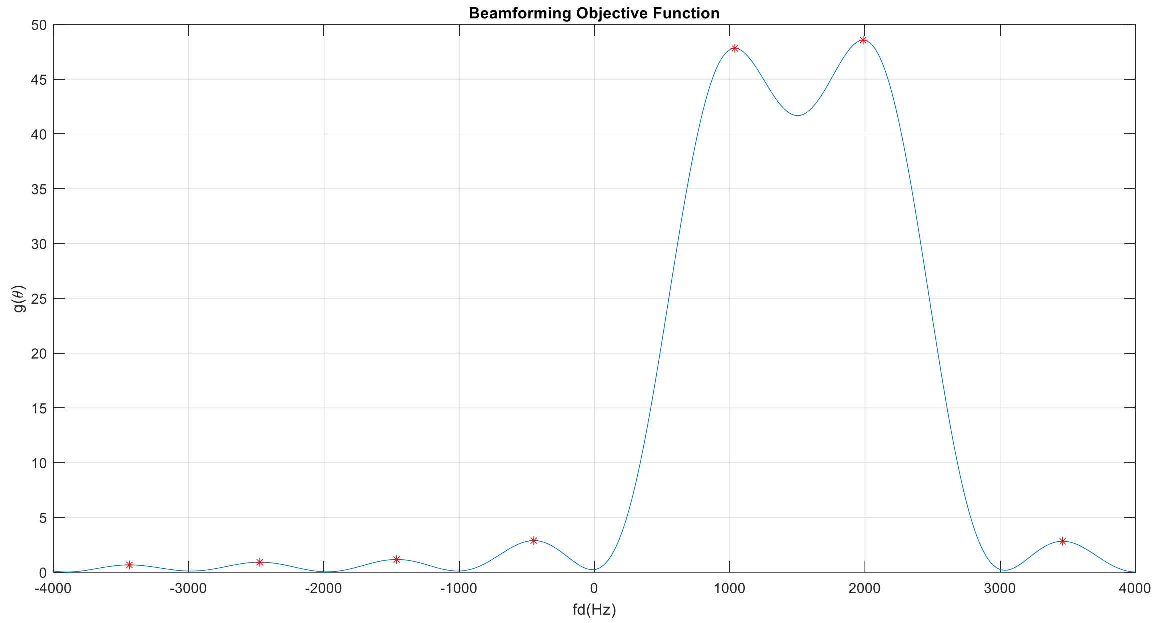
بازهم در زوایای 10 و 20 درجه به خوبی اهداف مشخص شده اند.

سوال-4:

د) فرض کنید که می دانیم سیگنال منابع سیگنال تک تُن (فرم $exp(j2\pi\, ft)$) بوده است. از روی مشاهدات و با استفاده از روش beamforming فرکانس سیگنال منابع را تخمین بزنید.

برای پیدا کردن داپلر اهداف، می‌توان از ماکزیمم کردن تابع زیر استفاده کرد:

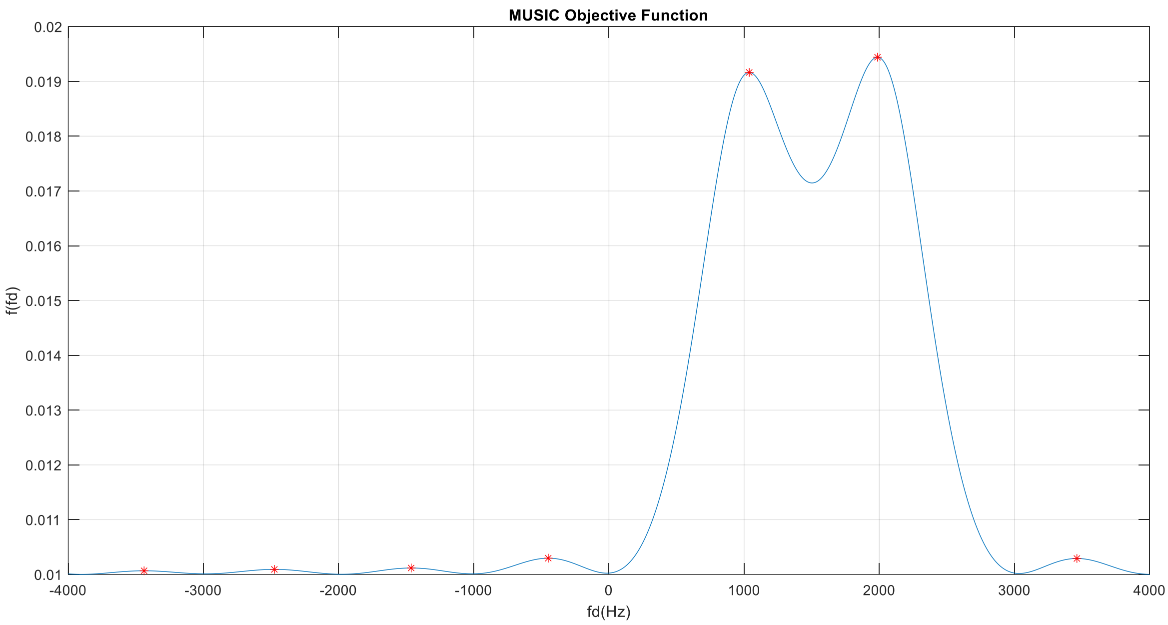
$$||s(R, f_d)' * V_{sig}||$$



شکل 10

سوال-5:

ه) فرض کنید که می دانیم سیگنال منابع سیگنال تک تُن بوده است. از روی مشاهدات و با استفاده از روش MUSIC فرکانس سیگنال منابع را تخمین بزنید.



شکل 11

تابع هدف در این روش، ماکزیمم کردن میزان:

$$1/||s(R,f_d)' * V_{Null}||$$

می‌باشد. بازهم فرکانس‌ها به درستی تخمین زده شده اند.

با تشکر