Antenna Array Processing

HW6

Mohammadreza Arani :::::::::::: 810100511

1401/08/30

سیگنال s_1 را که یک فرآیند تصادفی دارای توزیع یکنواخت بین [-2.5 2.5] می باشد با T=1000 نمونه و سیگنال s_2 را که یک فرآیند تصادفی دارای توزیع یکنواخت بین [-1.5 1.5] می باشد با T=1000 نمونه تولید کنید. در صورت وجود میانگین در منابع، میانگین منابع را حتما صفر کنید. این دو منبع را به صورت خطی و آنی توسط ماتریس مخلوط کننده $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2.2 & -1 \\ 3.1 & -2 \end{bmatrix}$ ترکیب کنید و مشاهدات y_1 و y_2 و y_3 را تولید کنید.

$$Y_{3\times T} = A_{3\times 2}\, S_{2\times T}$$

```
clear; clc; close all;
```

Q1:

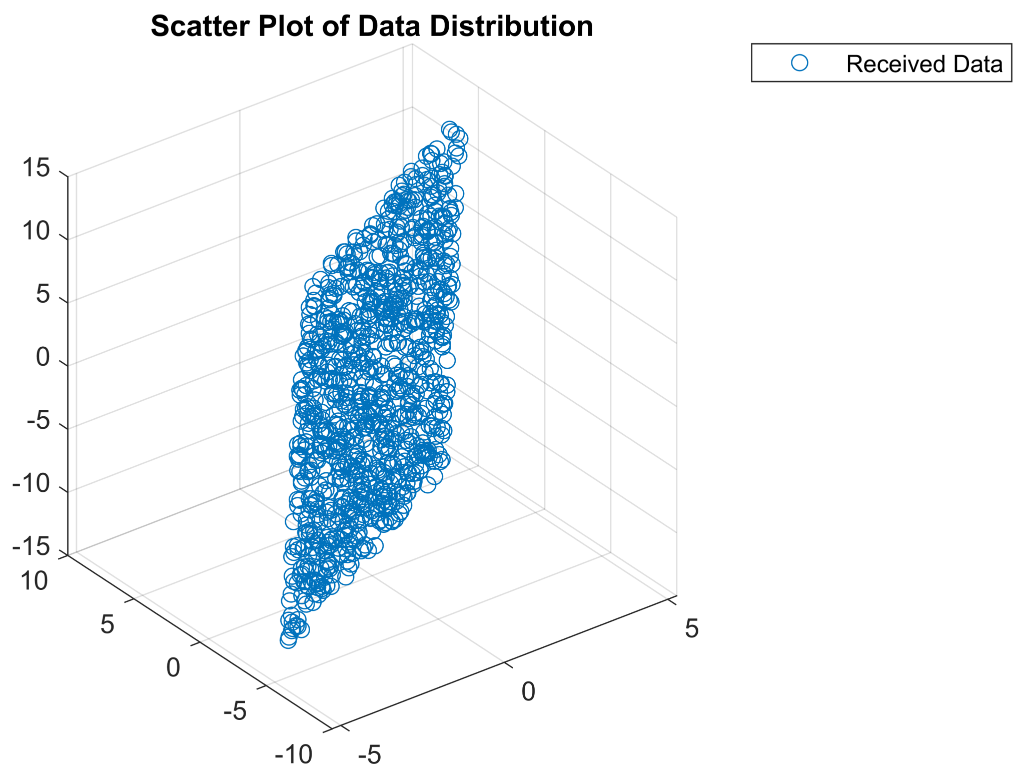
```
% Uniform Disttribution:
T = 1000;

a1 =-2.5*ones(1,T) ; b1 = 2.5*ones(1,T) ;
s1 = unifrnd(a1,b1);

a2 =-1.5*ones(1,T) ; b2 = 1.5*ones(1,T) ;
s2 = unifrnd(a2,b2);

% removing the bias from the distribution:
s1 = s1 - mean(s1);
s2 = s2 - mean(s2);
```

```
S = [s1 ; s2]; % 2*T

A = [1 -2; 2.2 -1; 3.1 -2]; % 3*2

Y = A*S ; % 3*T
```

A:

أ) پراکندگی مشاهدات را در فضای سه بعدی (دستور scatter3) رسم کنید. همان طور که مشاهده می کنید با این که مشاهدات سه بعدی هستند، اما عملا در یک فضای دو بعدی پراکنده شده اند. با محاسبه ی ماتریس R_x و اعمال تحلیل PCA (توسط دستور eig) ماتریس بردارهای ویژه (U) و ماتریس قطری مقدار ویژه (D) را به دست آورید.

```
figure(1)
scatter3(Y(1,:) , Y(2,: ) , Y(3,:))% scatter3(X,Y,Z)
grid on
title("Scatter Plot of Data Distribution")
legend("Received Data")
```



It is obvious that received data is distributed mainly in a plane that is orthogonal to X,Y Axis and parallel (kind of) to Z axis where d/dz of this disribution is almost 0! --> meaning we can find a plane where data has the most variance over that plane!

```
Rx = Y*Y' ; % YY^T
[U,Lambda] =  eig(Rx) ;
```

`[V,D] = eig(A)` returns diagonal matrix `D` of eigenvalues and matrix `V` whose columns are the corresponding right eigenvectors, so that `A*V = V*D`.

```
disp(size(U)) % Eigen-Vectors
```

```
     3     3
```

```
disp(size(Lambda)) % Eigen-Values
```

```
     3     3
```

```
disp("Trace of D: "+ trace(Lambda)+" and Trace of Rx: "+ trace(Rx)) % Trace of eigne-Values = T
```

```
Trace of D: 37485.1469 and Trace of Rx: 37485.1469
```

B:

ب) سعی کنید هر سه گزاره ی زیر را به صورت مفهومی درک کنید. بردار ویژه ها را متناظر با مقادیر ویژه از بزرگ به کوچک، به صورت u_1 ، u_2 و u_3 در نظر بگیرید.

❋ یکی از مقادیر ویژه صفر شده است (متناظر با u_3). این اتفاق یعنی داده ها در جهت u_3 تصویری ندارند یا به عبارت دیگر پراکندگی ندارند. معادل ریاضی این گزاره یعنی $u_3^T Y = 0$.

❋ u_3 بر ستون های ماتریس A عمود است زیرا این ستون ها هستند که داده ها را تولید کرده اند و در واقع داده ها در فضای این ستون ها هستند. معادل ریاضی این گزاره یعنی $u_3^T Y = 0$.

❋ u_1 و u_2 در همان فضای ستون های ماتریس A یعنی a_1 و a_2 قرار دارند. معادل ریاضی این گزاره یعنی $A = [u_1 \quad u_2 \,] \, C_{2\times 2}$. درایه های ماتریس C را به دست آورید.

```
u3 = U(:,1);  Lambda_3 = Lambda(1,1);
u2 = U(:,2);  Lambda_2 = Lambda(2,2);
u1 = U(:,3);  Lambda_1 = Lambda(3,3);

disp(u1); % The best Vector to map Data to --> Based on Lambda values
```

```
    0.3269
    0.5314
    0.7815
```

```
disp(u2); % Second Best Vector
```

```
    0.9157
   -0.3828
   -0.1227
```

```
disp(u3); % The worst!
```

```
    0.2339
    0.7557
   -0.6117
```

```
disp(Lambda_3) % we can see that the value of this parameter is 0 --> No Variation in this dire
```

```
-3.0757e-13
```

```
% It can be mentioned that u3 is orthogonal to data Space --> meaning
% describing a 2-D data with a 3-D coordinate system is possible but the
% rank of that system will be 2 and the nullity  of that system is 1 -->
% Nullity + Rank  = Dimension --> 1 + 2 = 3  ! u1 and u2 are the 2
% orthogonal basis that best describe our data! --> Range of A can be
% described and spanned using u1 , u2
%
```

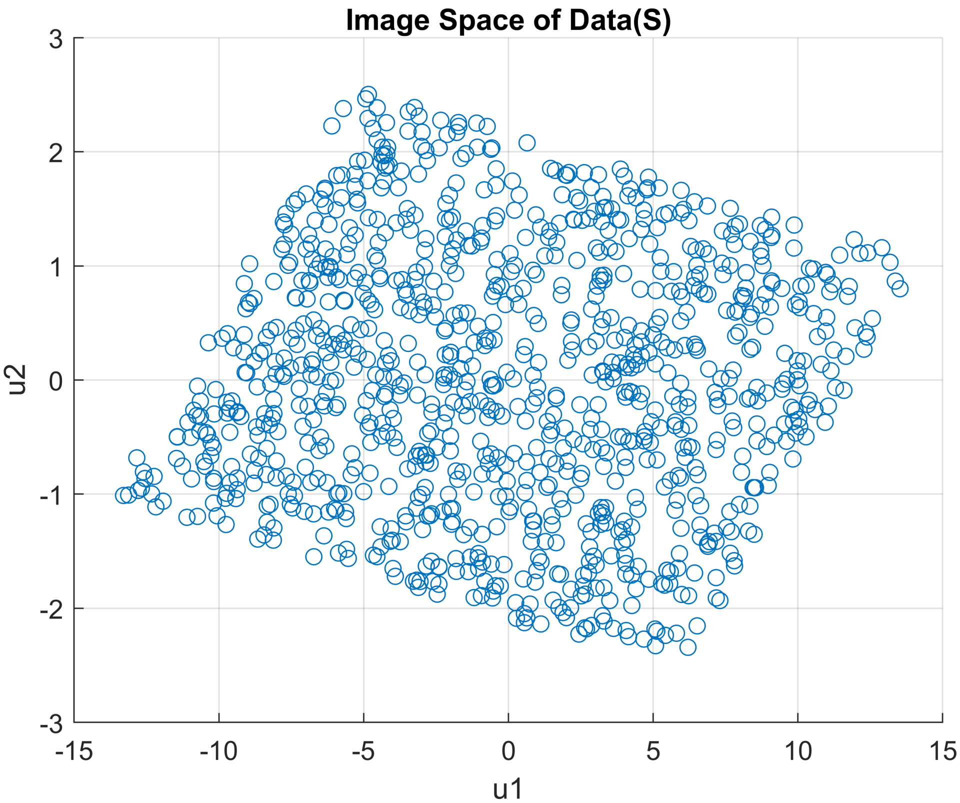
To Obtain C:

```
C = pinv([u1 , u2])*A;
```

C:

ج) چون یکی از مقادیر ویژه صفر است می توان بدون از دست دادن هیچ گونه اطلاعاتی، داده ها را به فضای دو بعدی برد. ماتریسی که می تواند بُعد اضافی داده ها را حذف کند و همچنین آنها را در فضای جدید سفید کند به دست آورید $(Z_{2\times T} = B_{2\times 3}X_{3\times T})$. داده های سفید شده $z_1(t)$ و $z_2(t)$ را رسم کنید. توجه داشته باشید داده ی سفید یعنی ماتریس همبستگی آن یک ماتریس همانی است!

```
% Before we had:   Y = A*S % 3*T
% Now we will map these data to a new space -->
Z = [u1 , u2]'*Y ; % New Space --> Image SPace

figure(2)
scatter(Z(1,:) , Z(2,:));
grid on
xlabel("u1")
ylabel("u2")
title("Image Space of Data(S)")
```




```
Rz = Z*Z';
[U_z , Lambda_z]  = eig(Rz);
% We can see the eigen vectors of the New Space:
disp(U_z)
```

```
     0     1
     1     0
```

```
% It is clear that we have 2 dimension and the U shall be rank-2 based on
% data dimension and 0 nullity --> It is satisfied! --> meaning we can span
% the data space using these 2 orthogonal vectors! Also means that the
% range of U matrix covers all the dimensions(2 dimensions)!
disp(Lambda_z)
```

```
   1.0e+04 *

    0.1250         0
         0    3.6235
```

```
% All eigen values are non zero! --> As expected
```

To whiten the data, we can assume a Whitening matrix, W to form:

Z_w = W*Z --> Z_w * Z_w' = W*Z*Z'*W' ----------- >>> for Z_w*Z_w' = I we get to have a whitened Z_w where Rz_w = I !

-------- >>>>> W * Rz * W' = I = Rz_w -------- >>> W =

`[U,S,V] = svd(A)` performs a singular value decomposition of matrix `A`, such that `A = U*S*V'`.

Suppose X is a random (column) vector with non-singular covariance matrix Σ and mean 0 .

Then the transformation Y= WX with a **whitening matrix** W satisfying the condition $W^T W = \Sigma^{-1}$ yields the whitened random vector Y with **unit diagonal covariance**.

There are infinitely many possible whitening matrices W that all satisfy the above condition.

Commonly used choices are:

1) W= Σ−1 / 2 (**Mahalanobis** or **ZCA** whitening),

2) W= L^T where L is the Cholesky decomposition of Σ^{-1} (Cholesky whitening),

3) or the eigen-system of Σ (**PCA whitening**).

`R = chol(A)` factorizes symmetric positive definite matrix `A` into an upper triangular `R` that satisfies `A = R'*R`. If `A` is nonsymmetric , then `chol` treats the matrix as symmetric and uses only the diagonal and upper triangle of `A`.

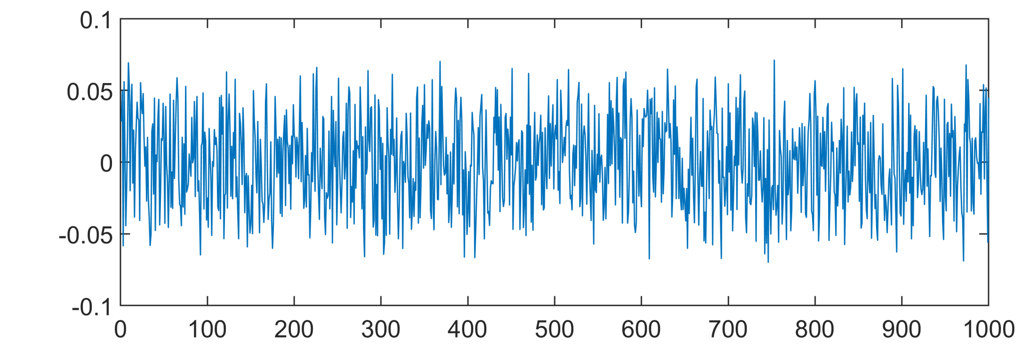
```
% whiten the Z data:
W = chol(inv(Rz));
```

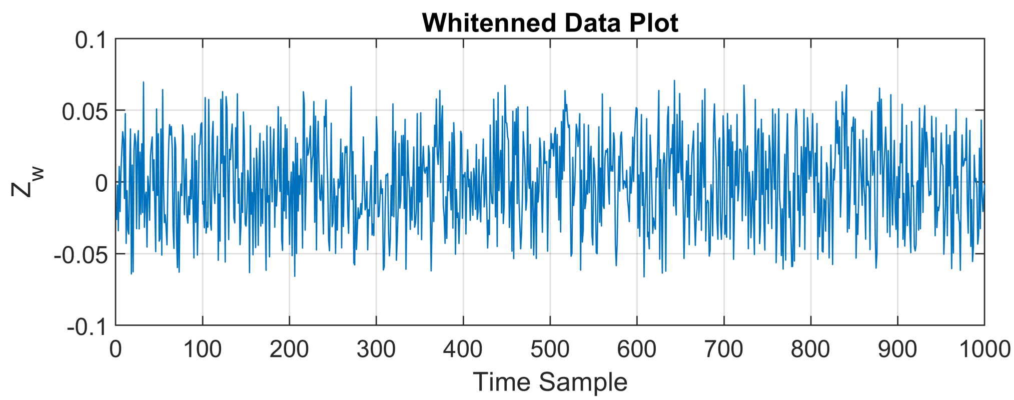
```
Z_w = W*Z ;
Rz_w = Z_w*Z_w';

disp(Rz_w) % It is obvious that we are dealing with I matrix!
```

```
    1.0000    0.0000
    0.0000    1.0000
```

```
figure(3)
scatter(Z_w(1,:),Z_w(2,:))
grid on
title("Whitenned Data Scatter Plot")
xlabel("u1");
ylabel("u2")
```


```
figure(4)
subplot(2,1,1)
plot(Z_w(1,:))
subplot(2,1,2)
plot(Z_w(2,:))
grid on
title("Whitenned Data Plot")
xlabel("Time Sample");
ylabel("Z_w")
```





D:

د) تبدیل SVD را $(Y = Q\ G\ V^T)$ روی ماتریس مشاهدات اولیه به صورت $[Q, G, V]$=svd(Y) اعمال کنید . رتبه (یا Rank) ماتریس Y چند است؟ رابطه ی ماتریس Q با U ، ماتریس G با D و ماتریس V^T با Z چیست؟

```
[Q,G,V] = svd(Y)
```

```
Q = 3×3
   -0.3269   -0.9157   -0.2339
   -0.5314    0.3828   -0.7557
   -0.7815    0.1227    0.6117
G = 3×1000
  190.3557         0         0         0         0         0         0         0 ···
         0   35.3533         0         0         0         0         0         0
         0         0    0.0000         0         0         0         0         0
V = 1000×1000
   -0.0283    0.0265    0.0589   -0.0546    0.0022    0.0357    0.0041   -0.0360 ···
   -0.0496    0.0023   -0.8904   -0.0144   -0.0102    0.0111    0.0046   -0.0012
    0.0583    0.0340   -0.0115    0.0062    0.0136   -0.0204   -0.0253   -0.0224
   -0.0561   -0.0108   -0.0067    0.9969   -0.0001    0.0021    0.0003   -0.0019
   -0.0086    0.0208   -0.0059   -0.0002    0.9996    0.0004    0.0004    0.0004
```

```
    0.0444   -0.0073    0.0022    0.0023    0.0004    0.9982   -0.0007    0.0008
    0.0163   -0.0217   -0.0021    0.0006    0.0006   -0.0009    0.9992   -0.0005
   -0.0219   -0.0350   -0.0033   -0.0016    0.0006    0.0006   -0.0006    0.9981
   -0.0692   -0.0292    0.0312   -0.0042   -0.0003    0.0032    0.0011   -0.0019
   -0.0529    0.0116    0.0016   -0.0027   -0.0006    0.0023    0.0010   -0.0008
      ⋮
```

```
disp(U)
```

```
    0.2339    0.9157    0.3269
    0.7557   -0.3828    0.5314
   -0.6117   -0.1227    0.7815
```

Singular value decomposition

`[U,S,V] = svd(A)` performs a singular value decomposition of matrix `A`, such that `A = U*S*V'`.

S matrix is the singular value matrix corresponding to Eigen vectors of matrix U for given matrix A. --- >>> SST gives the eigen values of Matrix A.

Also, S corresponding values determines the variation of data over eigenvectors in U.

It is Obvious that Q is exactly the same as U but the order of columns and their sign have been chnaged!

```
disp(abs(sqrt(Lambda)))
```

```
    0.0000         0         0
         0   35.3533         0
         0         0  190.3557
```

```
disp(G(:,1:3))
```

```
  190.3557         0         0
         0   35.3533         0
         0         0    0.0000
```

```
% We can see G(:,1:3) = abs(sqrt(Lambda)) -- >> eigen values of Ry
% Other columns of G are all 0!

disp(G(find(G>1e-10))) % Non-zero elements of diagnal Matrix G:
```

```
  190.3557
   35.3533
```

```
% Number of nonzero columns of G is 2 as can be observed!
rank_Y = rank(Y); % Non-zero Columns of diagnal Matrix G_d --> actually here, G_d is equal to G
% G is a diagnal matrix of singular values in descending form!
disp("Rank of Y is: "+rank_Y)
```

```
Rank of Y is: 2
```

This means Y is not Full-rank Matrix --> rank_Y + Nullity_Y = Dimension -- >>> 2 + 1 =3;

Z is described using first 2 rows of V:

```
% 2 First Rows of V' show Z
Check = Z*V;
disp(sum(sum(abs(Check)>1e-10)));
```

```
     2
     0
```

E:

ه) در قسمت ب دیدیم که u_1 و u_2 در فضای ستون های ماتریس A یعنی a_1 و a_2 قرار دارند. حال نشان دهید که سطرهای اول و دوم ماتریس V^T یعنی v_1^T و v_2^T یا همان $z_1(t)$ و $z_2(t)$ نیز در فضای سطر های ماتریس S یعنی s_1^T و s_2^T قرار دارند. معادل ریاضی این گزاره یعنی

$$S_{2\times T} = F_{2\times 2}\, Z_{2\times T}$$

درایه های ماتریس F را به دست آورید.

با توجه به این نتایج می توان دریافت که سیگنال منابع بر سطرهای سوم تا Tمُ ماتریس V^T عمود است.

```
% With respect to above relationship between S,F and Z:
F_z = S*pinv(Z);
F_z_w =  S*pinv(Z_w);
Temp =(S*V)';
disp(Temp(1:10,:)) % S is orthogonal to all rows of V but the first two of them!
```

```
  -41.2075   10.5079
   17.4809   24.9264
    0.0000    0.0000
    0.0000    0.0000
    0.0000   -0.0000
   -0.0000   -0.0000
    0.0000    0.0000
    0.0000    0.0000
    0.0000    0.0000
   -0.0000    0.0000
```

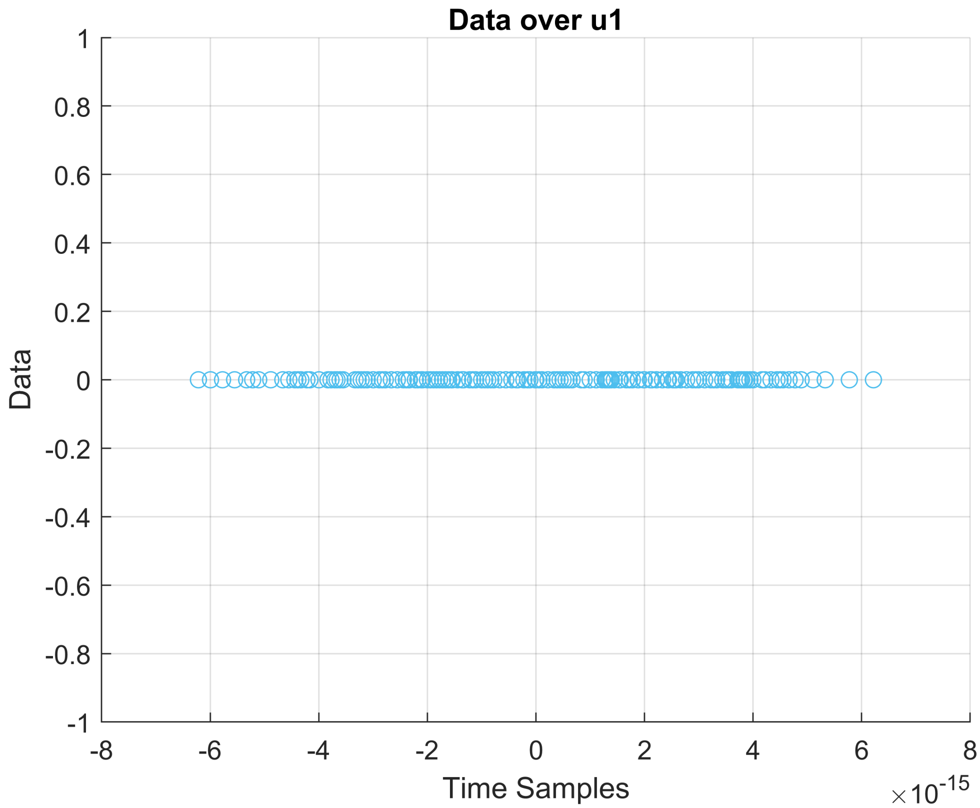
F:

ر از ما بخواهند که بُعد داده های اولیه X را تا حد ممکن کاهش دهید به گونه ای که حداقل ۹۰ درصد
رژی کل مشاهدات ($E_{tot}=E_1+E_2+E_3$) حفظ شود، چگونه این کار را انجام می دهید؟ داده ها را در
ضای با بعد تقلیل یافته بر حسب زمان رسم کنید.

```
% Total Energy of Received Signal:
Etot = trace(Lambda);

Proportional_E = [Lambda_1 , Lambda_2, Lambda_3 ] / Etot;
disp(Proportional_E); % with respect to Energy Values -- >> to contain at least 90% of energies
% in received Signal
```

```
    0.9667    0.0333   -0.0000
```

```
% It is wise to Map Data over u1 solely! == >>> This preserves 96% of the
% Energy , More than desired 90%
Y_PCA = U(:,1)'*Y; % Mapping Over u1
figure(5)
scatter(Y_PCA(1,:), zeros(length(Y_PCA)))
grid on
title("Data over u1")
xlabel("Time Samples")
ylabel("Data")
```


Data over u1
Data
Time Samples
×10^-15
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8