Convex Optimization	«HW 6»	810160511 محمدرضا آرانی

① Uniqueness of Projection

if $C \subseteq R^n$ is nonempty, closed, Convex

norm $\|.\|$ → strictly Convex - - → برای هر x_0 ← تنها یک → ① $x \in C$ → closest to x_0

In section 8.1 of the book, we can see the criteria of Projection being unique in some special cases. → having
① norm $\|.\|$ strictly convex
② closed
③ convex
④ non empty

برهان خلف:
حداقل ① عضو یا بیشتر در C → $\hat{x} \in C$ ⇒ projection → having minimum distance $\|x - x_0\|$ on

$C \cap \{x \mid \|x - x_0\| \le \|\hat{x} - x_0\|\}$

تعریف x_0 روی مجموعه C

تعریف را در نظر بگیریم

حاصل فاصله را در نظر بگیریم!

having 2 different Projections

if $\|x - x_0\| = \|\hat{x} - x_0\| = P_0$

⇒ because we have convexity and closed form and being non empty ⇒ norm is strictly convex ⇒ $\frac{1}{2}(x + \hat{x}) \in C$; having $x, \hat{x} \in C$

$\Rightarrow \|\frac{1}{2}(x + \hat{x}) - x_0\| = \|\frac{1}{2}(x - x_0) + (\frac{1}{2})(\hat{x} - x_0)\|$

$< \|\frac{1}{2}(x - x_0)\| + \|\frac{1}{2}(\hat{x} - x_0)\|$

نامساوی مثلثی $= \frac{1}{2} P_0 + \frac{1}{2} P_0 = P_0 \Rightarrow P_0 > P_0$ ✗ ⇒ $\boxed{\text{Projection in these conditions is unique}}$

② Maximum volume rectangle inside a polyhedron

$R = \{u \in R^n \mid l \leq u \leq u\}$

$u \geq l$ ← سه‌گوشه‌های درون منفی

$P = \{x \mid Ax \leq b\}$ Polyhedron

می‌توان گفت اگر گوشه‌های یک مستطیل درون گوشه‌های یک

Parameters are: $l, u \in R^n$

باشد درون موقع بیشترین حجم را داریم برای درون مستطیل که درون درون Polyhedron هست.

حجم مستطیل

$v = \left[\prod_{i=1}^{n} (u_i - l_i)\right]^{1/n} \quad Ax \leq b \rightarrow Av \leq b \longrightarrow m \times 2^n \rightarrow$ نامساوی داریم

مختصات گوشه‌ها — Polyhedron

طبق نقض فرمول این صورت قبول نیست!

$$\Rightarrow \begin{cases} \max & v \\ s.t. & Au \leq b \\ & l \leq u \leq u \end{cases}$$

برای راحتی بهتر

$\max v = \max \log(v) \xrightarrow{\text{monotone}}$ gives same point

$\max \log\left[\prod_{i=1}^{n} (u_i - l_i)\right]^{1/n} = \max \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(u_i - l_i) = \max \sum_{i=1}^{n} \log(u_i - l_i) \; ; \; Au \leq b \;\&\; l \leq u \leq u$

$\prod_{i=1}^{n}$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ \vdots & & & a_{mn} \end{pmatrix}$

می‌خواهیم بیشترین حجم را داشته باشیم => اگر a_{ij} مثبت بود دلیل کنیم به گوشه‌های u_j

برسیم و اگر منفی بود به l_j در این صورت بیشترین اختلاف بین سر ته هر ضلع مستطیل ایجاد می‌شود.

$\Rightarrow \quad u \in R^n \mid l \leq u \leq u \quad \subseteq x \mid Ax \leq b \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} (a_{ij} u_j - a_{ij} l_j) \leq b_i \quad i = 1, \dots, m$

اگر a_{ij} منفی بود => نباید در u_j مقدار زیادی بگیرد

=> آن را به u_j نسبت دهیم

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\max\{a_{ij}, 0\} \cdot u_j - \max\{-a_{ij}, 0\} l_j \right) \leq b_i \right\}$$

اگر a_{ij} مثبت بود

$\boxed{u_j = x_j}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max & \sum_{i=1}^{n} \log(u_i - l_i) \\ s.t. & \sum_{i=1}^{n} \left(\underbrace{\max\{a_{ij}, 0\}}_{a_{ij}^{g}} u_j - \underbrace{\max\{-a_{ij}, 0\}}_{a_{ij}^{l}} \cdot l_j \right) \leq b_i \end{cases}$$

با بازگشت به حالت اولیه

$$\begin{cases} \max & \left(\prod_{i=1}^{n} (u_i - l_i) \right)^{1/n} \\ s.t. & \sum_{i=1}^{n} (a_{ij}^{g} u_j) - (a_{ij}^{l}) l_j \leq b_i \end{cases}$$

(3) n teams $\longrightarrow a_j \in [0,1]$, $j = 1, \dots, n$

$\text{Prob}(a_j - a_k + v > 0)$

$v \to$ symmetric random variable

$$p(v) = \frac{2\sigma^{-1}}{(e^{v/6} + e^{-v/6})^2}$$

CDF $\Rightarrow F(t) = \int_{-\infty}^{t} p(v)\,dv = \dfrac{e^{t/6}}{e^{t/6} + e^{-t/6}}$

m تا داده $(j^{(i)}, k^{(i)}, y^{(i)})$, $i = 1, \dots, m$ $\to$ game i teams $j^{(i)}$, $k^{(i)}$

$y^{(i)} = 1 \to j^{(i)}$ won

$y^{(i)} = -1 \to k^{(i)}$ won

(a) find solution of this problem as a Convex opt. $\to$

$$A_{il} = \begin{cases} y^{(i)} & l = j^{(i)} \\ -y^{(i)} & l = k^{(i)} \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

game incidence matrix $\hookrightarrow A \in R^{m \times n}$

find Maximum likelihood

هر بازی نسبت به بازی بعدی مستقل هست

لذا iid اند

$\text{Prob}(a_j - a_k > v)$

$= 1 - \text{prob}(a_j - a_k < v)$

$$= 1 - F(a_j - a_k) = 1 - \frac{e^{\frac{a_j - a_k}{6}}}{e^{\frac{a_j - a_k}{6}} + e^{\frac{a_k - a_j}{6}}} = \frac{e^{\frac{-a_k + a_j}{6}}}{e^{\frac{a_j - a_k}{6}} + e^{\frac{a_k - a_j}{6}}}$$

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{e^{\frac{A_i \cdot \hat{a}}{6}}}{e^{-\frac{A_i \cdot \hat{a}}{6}} + e^{\frac{A_i \cdot \hat{a}}{6}}} \overset{\log}{\equiv} \sum_{i=1}^{n} \log e^{\frac{A_i \cdot \hat{a}}{6}} - \log\left(e^{-\frac{A_i \cdot \hat{a}}{6}} + e^{\frac{A_i \cdot \hat{a}}{6}}\right)$$

$A_i \cdot \hat{a} \to a_j - a_k$

monotone

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i \cdot \hat{a}}{6} - \log\left[e^{-\frac{A_i \cdot \hat{a}}{6}} + e^{\frac{A_i \cdot \hat{a}}{6}}\right]$$

$\hat{a} = [\hat{a}_1 \; \cdots \; \hat{a}_n]'$

s.t. $0 \leq a \leq 1$

احتمال همه مقادیر بین 0 و 1 دارد ← PDF

$A_{il} = [\,0 \;\; 1 \;\; 0 \cdots -1 \;\; 0\,]$

یک تیم برنده — یک تیم بازنده

$\Rightarrow A_{il} \cdot \hat{a} \longrightarrow a_j - a_k$

که j برنده و k بازنده است

اونی که 1 هست برنده است

" " -1 " بازنده "

④

(a) show that IRR is quasilinear in this case:

می دانیم → $P_V(x,r) = \sum_{i=0}^{n} (1+r)^{-i} x_i$

→ در نسبت به x خطی convex

IRR(x) تعریف شده با $\inf\{r \ge 0 \mid P_V(x,r) = 0\}$

تابع x روی r

بدون توجه به دامنه موجود x و inf خود کانوکس است

با توجه به ورودی آن به نیاز با دامنه ای کانوکس است.

با توجه به این تعریف ، توابع convex ، quasi convex هم هستند!

درهمان الهامی که تعریف کرده ایم IRR را ، پارامتره quasi concave هست!

→ هم quasi convex و concave ، quasilinear است.

(b)

cash flows → $x^{(i)} \in R^{n+1}$ $i = 1, \dots, k$

Let $w \in R_+^k$, $1^T w = 1$ $\xrightarrow{\text{blended}}$ $x = w_1 x^{(1)} + \dots + w_k x^{(k)}$

cash flow

show → $\boxed{IRR(x) \ge \max_i IRR(x^{(i)})}$

quasi convex از تعریف → $f(\theta x + (1-\theta)y) \le \max(f(x), f(y))$

for $\theta \le 1$ → $IRR(x + \theta y) \le \max(IRR(x), IRR(y-\theta))$

پیرو به راحتی اثبات شد!

⑥ Planing production with uncertain demand

$r_1, \dots, r_m \to$ amounts of raw materials

$q_1, \dots, q_n \to$ quantities of n different products

Product (j)

A_{ij} units of raw material (i)

$\boxed{r \geq Aq} \to c^T r \to$ total raw material cost

$A_{ij} \geq 0 \qquad c \in R_+^m$

$d_j \to$ demand for material (j)

$d_j - q_j \to$ unment demand

$s_j = \min\{q_j, d_j\}$

sold from (j)

$p^T s \;;\; p \in R_+^n$

product prices

(a) $p^T s - c^T r \to$ profit ; $A, c, p \to$ known

$d^{(1)}, \dots, d^{(k)} \longleftrightarrow \pi_1, \dots, \pi_k \to 1^T \pi = 1, \pi \geq 0$

(I) cost $\Rightarrow$ random variable $\Rightarrow E\{\text{profit}\} = E\{p^T s - c^T r\} = E\{p^T \min\{d, q\} - c^T r\}$

بیشترین سود با مدل احتمالی داده شده رو $d^{(i)}$ که iid اند.

$$= \sum_{i=1}^{k} \pi_i \left(p^T \min\{d^{(i)}, q\} - c^T r\right) \Rightarrow \begin{cases} \max & \sum_{i=1}^{k} \pi_i \left(p^T \min\{d^{(i)}, q\}\right) - c^T r \\ \text{s.t.} & q \geq 0 \\ & r \geq 0 \\ & r \geq Aq \end{cases}$$

تعداد و میزان

شرط d مثبت اند

میزان مواد خام برای تولید داشته باشیم

مسئله کانوکس!

(۱), (۲)

r ahead of time, q after d is known

(II) $\rightsquigarrow$ objective is to maximize the expected profit.

$\Rightarrow E\{\text{profit}\} = \sum_i \pi_i \left(p^T \min\{d^{(i)}, q^{(i)}\}\right) - c^T r \to$ known

$$\Rightarrow \begin{cases} \max & -c^T r + \sum_{i=1}^{k} \pi_i \left(p^T \min\{d^{(i)}, q^{(i)}\}\right) \\ \text{s.t.} & \begin{cases} r \geq 0 \\ r \geq Aq \\ q^{(i)} \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

فرض کردیم

$\min\{d^{(i)}, q^{(i)}\} = q^{(i)}$

میزان درخواست از میزان تولید همیشه بیشتر باشه!

مسئله خطی

$$\begin{cases} \max_{(r, q)} & \sum_{i=1}^{k} \pi_i p^T q^{(i)} - c^T r \\ \text{s.t.} & r \geq 0 \\ & r \geq Aq^{(i)} \\ & q^{(i)} \geq 0 \\ & q^{(i)} \leq d^{(i)} \end{cases}$$

7

n components $\rightarrow \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \rightarrow w^{min} \leq \omega_i \leq w^{max}$, $i = 1, \dots, n$

given Positive values

1- circuit power : $P(\omega)$
2- the circuit delay : $D(\omega)$
3- total circuit Area : $A(\omega)$

$\rightarrow$ Posynomial functions of ω — نسبت به ω تحدبی خواهید

(*) not convex $\xrightarrow{\text{but}}$ if $g(\omega) = \log f(\omega)$; $\omega = e^{x}$

know a set of k designs

$$\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)} \in R^n \longrightarrow P(\omega^{(j)}),\ D(\omega^{(j)}),\ A(\omega^{(j)}),\ j = 1, \dots, k$$

$P(\omega) \leq P_{spec}$
$D(\omega) \leq D_{spec}$
$A(\omega) \leq A_{spec}$

$\rightarrow$ given, known

(a)

$$\omega = \sum_{i=1}^{k} \theta_i \omega^{(i)} \quad \text{for } \begin{cases} \theta \geq 0, \\ 1^T\theta = 1 \end{cases}$$

یک ترکیب خطی از تک‌تک وزن‌ها

known

بین پایه‌ها.

Jensen's Inequality: مرتب

$$f(\omega) \leq \sum_{i=1}^{k} \theta_i f(\omega^{(i)})$$

(*) $\Rightarrow$ 1 $\log P(\omega) = \log P(e^{x}) \leq \sum_{i=1}^{k} \theta_i \log P(e^{x^{(i)}})$ $\quad \begin{cases} \theta \geq 0 \\ 1^T\theta = 1 \\ x^{(i)} = \log \omega^{(i)} \end{cases}$

same happens for $D, A \xrightarrow{\text{Like}} P$

Feasible set $\Rightarrow$ پیدا کردن

$$\begin{cases} \min_{\theta} & \text{const.} \\ \text{s.t.} & (1)\ \sum \theta_i \log(P(e^{x^{(i)}})) \leq \log P_{spec} \\ & (2)\ \sum \theta_i \log(D(e^{x^{(i)}})) \leq \log D_{spec} \\ & (3)\ \sum \theta_i \log(A(e^{x^{(i)}})) \leq \log A_{spec} \\ & (4)\ 1^T\theta = 1 \ ;\ (5)\ \theta \geq 0 \end{cases}$$

(b)

با توجه به داشتن تکرار k تا

$\Rightarrow$ ω معلوم ← با داشتن θ

از روی این سوال ← ω

معلوم می‌شود ← به شکلی که

محدوده‌ی ما (feasible ـه) مشخص نباشد!

(C) $\rightarrow$ in matlab CVX