۱) فضای فرضی جدید را این گونه تعریف کرده:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix}$$

الف) ماتریس M باید یک ماتریس ۳x۳ باشد و داریم:

$$x = \frac{R}{۲} + \frac{G}{۲} \quad \text{و} \quad y = G - B \quad \text{و} \quad z = \frac{R+G+B}{۳}$$

$$\rightarrow M = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$$

در واقع معادله x، ضرایب سطر اول و معادله y، ضرایب سطر دوم و ...

را به دست بیاورد.

ب)

$$\begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۰۰ \\ ۱۵۰ \\ ۲۰۰ \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{۱۰۰ + ۱۵۰}{۲} = \boxed{۱۲۵}$$

$$z = \frac{۴۵۰}{۳} = \boxed{۱۵۰}$$

$$y = ۱۵۰ - ۲۰۰ = \boxed{-۵۰}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boxed{(۱۲۵ \text{ و } -۵۰ \text{ و } ۱۵۰)}$$

درجستان

بازگشت پذیری

ج) برای [redacted] بودن باید ماتریس M معکوس پذیر باشد.

دترمینان ماتریس M را به دست آورده و داریم:

$$\det(M) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

چون $\det(M) \neq 0$ در نتیجه ماتریس M معکوس پذیر بوده و تبدیل خطی بازگشت پذیر است.

۲) الف) ابتدا برای پیکسل های آبی:

$$\frac{d}{dx} = \begin{bmatrix} ۲ & ۶ & ۷ \\ ۸ & ۴ & ۵ \\ ۷ & ۳ & ۷ \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dy} = \begin{bmatrix} ۲ & ۸ & ۱۱ \\ ۸ & ۵ & ۵ \\ ۷ & ۳ & ۷ \end{bmatrix}$$

برای پیکسل های قرمز:

$$\frac{d}{dx} = \begin{bmatrix} ۷ & ۶ & -۳ \\ ۸ & ۷ & -۷ \\ ۶ & ۵ & -۶ \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dy} = \begin{bmatrix} ۸ & ۸ & ۷ \\ ۶ & ۷ & ۵ \\ ۶ & ۴ & ۴ \end{bmatrix}$$

درخشان

ب) می دانیم که ماتریس M از رابطه ی زیر به دست آمده:

وداریم:

$$M = \sum_{x,y} W(x,y) \begin{bmatrix} I_x^2 & I_x I_y \\ I_x I_y & I_y^2 \end{bmatrix} =$$

$$g(\sigma) * \begin{bmatrix} I_x^2 & I_x I_y \\ I_x I_y & I_y^2 \end{bmatrix}$$

دقت شود که دراین مثال کرنل را ۳x۳ درنظر گرفته ایم و فیلترگوسی

با واریانس ∞ یا همان فیلتر جمعی ای (میانگین گیری) استفاده

شده. ابتدا R را برای پیکسل ی ی آبی به دست آورده وداریم:

$I_x^2 =$

٤	٣٦	٤٩
٦٤	١٦	٢٥
٤٩	٩	٤٩

$$M[1,1] = g(\infty) * I_x^2 = \frac{1}{9}\left(\underbrace{4+36+49}_{89} + \underbrace{64+16+25}_{105} + 107\right)$$

$$= \frac{301}{9}$$

$I_y^{۲} =$

۴	۶۴	۱۲۱
۶۴	۲۵	۲۵
۴۹	۹	۴۹

$M[۲,۲] = g(+\infty) * I_y^{۲} = \frac{۱}{۹}(۱۹۱ + ۱۱۴ + ۱۰۷) = \frac{۴۱۲}{۹}$

$I_x I_y =$

۴	۴۸	۷۷
۶۴	۲۰	۲۵
۴۹	۹	۴۹

$M[۱,۲] = M[۲,۱] = \frac{۱}{۹}(۱۲۹ + ۱۰۹ + ۱۰۷) = \frac{۳۴۵}{۹}$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{۳۰۱}{۹} & \frac{۳۴۵}{۹} \\ \frac{۳۴۵}{۹} & \frac{۴۱۲}{۹} \end{bmatrix}$$

$$\det(M) = \frac{۳۰۱ \times ۴۱۲}{۸۱} - \left(\frac{۳۴۵}{۹}\right)^{۲} \simeq ۶۱٫۶$$

Subject

$$(\text{trace}(M))^{۲} = \left(\frac{۳۰۱}{۹} + \frac{۴۱۲}{۹}\right)^{۲} = \left(\frac{۷۱۳}{۹}\right)^{۲} \simeq ۶۲۷۶$$

$$R = ۶۱{,}۶ - \frac{۴}{۱۰۰} \times ۶۲۷۶ = ۶۱{,}۶ - ۲۵۱{,}۰۴ = \boxed{-۱۸۹{,}۴۴}$$

محاسبه‌ی R برای پیکسل ۴ی قرمز:

$I_x^{۲} =$

۴۹	۳۶	۹
۶۴	۴۹	۴۹
۳۶	۲۵	۳۶

$$M[۱,۱] = \frac{۱}{۹}(۹۴ + ۱۶۲ + ۹۷) = \frac{۳۵۳}{۹}$$

$I_y^{۲} =$

۶۴	۶۴	۴۹
۳۶	۴۹	۲۵
۳۶	۱۶	۱۶

$$M[۲,۲] = \frac{۱}{۹}(۱۳۶ + ۱۲۹ + ۹۰) = \frac{۳۵۵}{۹}$$

$I_x I_y =$

۵۶	۴۸	-۲۱
۴۸	۴۹	-۳۵
۳۶	۲۰	-۲۴

$M[۱,۲] = M[۲,۱] = \frac{۱}{۹}(۸۳ + ۶۲ + ۳۲) = \frac{۱۷۷}{۹}$

$$M = \begin{bmatrix} ۳۹,۲ & ۱۹,۶ \\ ۱۹,۶ & ۳۹,۴ \end{bmatrix}$$

$\det(M) = ۱۵۴۴,۴۸ - ۳۸۴,۱۶ = ۱۱۶۰,۳۲$

$(\mathrm{trace}(M))^۲ = (۳۹,۲ + ۳۹,۴)^۲ = (۷۸,۶)^۲ = ۶۱۷۷,۹۶$

$R = ۱۱۶۰,۳۲ - \frac{۴}{۱۰۰} \times ۶۱۷۷,۹۶ = ۱۱۶۰,۳۲ - ۲۴۷,۱۱۸۴ \simeq \boxed{۹۱۳,۲}$

ج) مقادیر گوشه چون دارای λ_1 و λ_2 بزرگ هستند.

طبق رابطه‌ی $R = \lambda_1 \lambda_2 - k(\lambda_1 + \lambda_2)^2$ دارای $R>0$ و بزرگ

از طرفی نقاطی که تخت هستند ، ماتریس M آنها تمام درایه

هایش تقریباً صفر و در نتیجه R آنها نیز تقریبا صفر بوده .

از طرفی برای لبه ها چون یکی از λ ها از دیگری خیلی بزرگ تر بوده

، R آنها یک مقدار منفی است .

طبق گفته های قبل پیکسل قرمز یک گوشه است و

پیکسل آبی یک لبه است .

د) خیر ، چرا که نویز اضافه شده باعث نویزی شدن

مشتق شده و مشتق اشتباه محاسبه شده . باید تصویر را هموار کنید

می توان قبل از مشتق گیری از فیلتر های هموارساز استفاده کرد یا برای محاسبه

مشتق افقی و عمودی از Sobel استفاده کرد که هر ۲ را همزمان انجام دهیم .

درستان

Subject   Year:........ Month:........ Date:........

۳) الف) می‌دانیم که:

$$S_2\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = H\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

که $S_2 = h_{31}x_1 + h_{32}y_1 + h_{33}$ که در اینجا برابر است با:

$$S_2 = 0x_1 + 0y_1 + 1 = 1$$

همانطور که می‌بینید S_2 به مقادیر x_1 و y_1 وابسته نیست و می‌توان نوشت که

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 25 \\ 0 & 2 & 45 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه این یک تبدیل affine است.

ب) $(x_1, y_1) = (100, 50)$:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 25 \\ 0 & 2 & 45 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 100 \\ 50 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 + 25 \\ 100 + 45 \end{bmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{bmatrix} 125 \\ 145 \end{bmatrix}}$$

درستیان

۴) الف)

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

از روی ۳ نقطه‌ی A و B و D و تبدیل آنها که به ما ۶ معادله می‌دهند

می‌توانیم ماتریس مجهولمان را به دست آوریم و داریم:

A: $(0,0) \rightarrow (3,2)$

$3 = t_x$ ✓

$2 = t_y$ ✓

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

B: $(1,0) \rightarrow (4,1)$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 3 \\ a_{21} & a_{22} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 4 = a_{11} + 3 \\ 1 = a_{21} + 2 \end{matrix}$$

$\longrightarrow a_{11} = 1$ ✓ و $a_{21} = -1$ ✓

D: $(1,2) \rightarrow (1,2)$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & 3 \\ -1 & a_{22} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 + 2a_{12} + 3 = 1 \\ -1 + 2a_{22} + 2 = 2 \end{matrix}$$

$a_{12} = -\frac{3}{2}$ و $a_{22} = \frac{1}{2}$

ماتریس تبدیل affine برابرست با:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 3 \\ -1 & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

ب)

$$E': \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 3 \\ -1 & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} + 3 \\ \frac{1}{2} + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

$$C': \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 3 \\ -1 & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 - \frac{3}{2} + 3 \\ -2 + \frac{1}{2} + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 0/5 \end{bmatrix}$$