بسم الله الرّحمن الرّحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده برق و کامپیوتر

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: مسعود عمومی

حل تمرین شماره ۵ _ تابستان ۱۴۰۱

با سلام خدمت دانشجویان محترم

۱ اطلاعات زیر درباره‌ی دنباله‌ی متناوب $x[n]$ داده شده است:

الف) $x[n]$ یک دنباله‌ی حقیقی و زوج است.

ب) دوره‌ی تناوب اصلی دنباله، $N = 10$ و ضرایب سری فوریه‌ی آن a_k است.

ج) $a_{11} = 5$.

د) $\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{9}|x[n]|^2 = 50$

ضابطه‌ی این دنباله را به صورت $x[n] = A\cos(Bn + C)$ بنویسید.

$$x[n] = x^*[n] = x[-n] \Rightarrow a_k = a_{-k}^* = a_{-k}$$

ضرائب سری فوریه هم حقیقی و زوج هستند.

$$N = 10 \Rightarrow a_k : \{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_9\}$$

$$a_{11} = 5 \Rightarrow a_1 = 5 \Rightarrow a_{-1} = a_9 = 5$$

رابطه پارسوال : $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1}|a_k|^2$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{9} |a_k|^2 = 50 \quad \Rightarrow \quad 25 + 25 + \sum_{\substack{k=0 \\ (k \neq 1,9)}}^{9} |a_k|^2 = 50$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{k=0 \\ (k \neq 1,9)}}^{9} |a_k|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_k = 0 \;,\; \forall k \neq 1,9 \;,\; 0 \leq k < 9$$

$$\Rightarrow \quad x[n] = a_1 e^{j\left(\frac{2\pi}{10}\right)n} + a_9 e^{j9\left(\frac{2\pi}{10}\right)n}$$

$$= 5 e^{j\frac{2\pi}{10}n} + 5 e^{-j\frac{2\pi}{10}n}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{x[n] = 10 \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) \quad \Rightarrow \quad A = 10 \;,\; B = \frac{\pi}{5} \;,\; C = 0}$$

۲ ضرایب سری فوریه‌ی دنباله‌های متناوب زیر را بدست آورید. (N دوره‌ی تناوب اصلی دنباله است)

الف) $x[n] = \sin\left(\frac{3\pi}{5}n\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}n + \frac{\pi}{4}\right)$

$$N_1 = m\left(\frac{2\pi}{\frac{3\pi}{5}}\right) = m\left(\frac{10}{3}\right) \xrightarrow{m=3} N_1 = 10$$

$$N_2 = m\left(\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}}\right) = m(3) \xrightarrow{m=1} N_2 = 3$$

$$\Rightarrow N = \mathrm{lcm}(N_1, N_2) = 30 \checkmark = 3N_1 = 10N_2$$

$$x[n] = \sin\left(\frac{3\pi}{5}n\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}n + \frac{\pi}{4}\right)$$

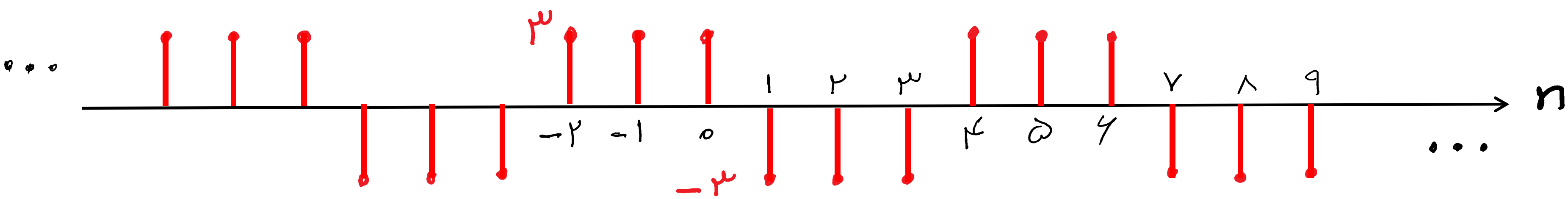
$$= \frac{1}{2j}\left[e^{j\frac{3\pi}{5}n} - e^{-j\frac{3\pi}{5}n}\right] + \left[e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}n} + e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}n}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{29} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$\pm\frac{3\pi}{5}=k\left(\frac{2\pi}{30}\right)\Rightarrow \underline{k=\pm 9}\quad \text{و}\quad \pm\frac{2\pi}{3}=k\left(\frac{2\pi}{30}\right)\Rightarrow \underline{k=\pm 10}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a_9=\dfrac{1}{2j}\ , & a_{-9}=a_{21}=a_9^{*}=-\dfrac{1}{2j}\\[2mm] a_{10}=e^{j\frac{\pi}{4}}\ , & a_{-10}=a_{20}=a_{10}^{*}=e^{-j\frac{\pi}{4}}\\[2mm] a_k=0\ , & \forall k\neq 9,10,20,21\ ,\quad 0\leq k\leq 29\end{cases}$$

ب) $x[n]=\begin{cases}3\,, & -2\leq n\leq 0\\ -3\,, & 1\leq n\leq 3\end{cases}\ ,\ N=6$



یادآوری

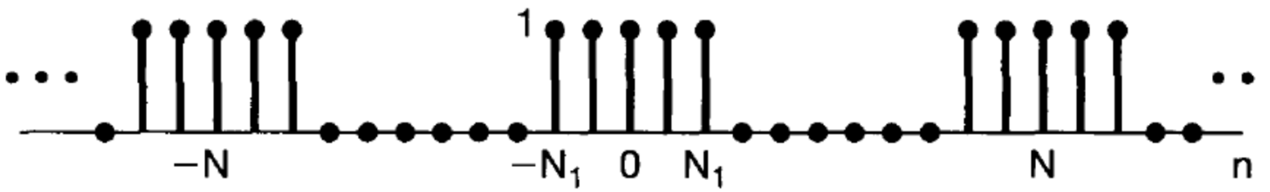


Figure 3.16 Discrete-time periodic square wave.

$$a_k = \frac{1}{N}\frac{\sin[2\pi k(N_1 + 1/2)/N]}{\sin(\pi k/N)}, \quad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$$

$$a_k = \frac{2N_1 + 1}{N}, \quad k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots.$$

$$g[n] = \begin{cases} 1, & -1 \leq n \leq 1 \\ 0, & -2 \leq n \leq 3, \quad n \neq 0, \pm 1 \end{cases}$$

$$N_1 = 1, \quad N = 4 \quad \checkmark \quad \xrightarrow{FS} a_k$$

$$x[n] = 3g[n+1] - 3g[n-1] \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k = 3\left(e^{jk\frac{\pi}{2}} - e^{-jk\frac{\pi}{2}}\right) a_k$$

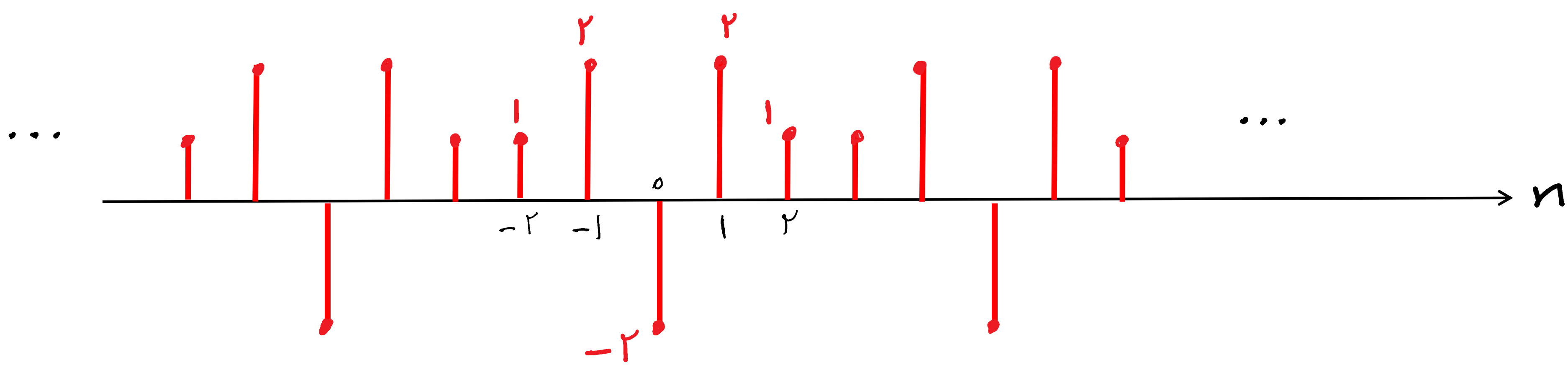
$$\Rightarrow b_k = (3)\left(2j\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)\right) a_k$$

$$N = 6,\ N_1 = 1 \Rightarrow a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{6}\, \dfrac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{6}\right)} & ,\ k \neq 0, \pm 6, \pm 12 \\ \dfrac{1}{2} & ,\ k = 0, \pm 6, \pm 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b_k = \begin{cases} j\, \dfrac{\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{6}\right)} & ,\ k \neq 0, \pm 6, \pm 12 \\ 0 & ,\ k = 0, \pm 6, \pm 12 \end{cases}$$

ج)

$$x[n] = \begin{cases} -2\,, & n = 0 \\ 2\,, & n = \pm 1 \\ 1\,, & n = \pm 2 \end{cases} \quad , \; N = 5$$



$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]\, e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$a_k = \frac{1}{5} x[-2]\, e^{j\frac{4\pi}{5}k} + \frac{1}{5} x[-1]\, e^{j\frac{2\pi}{5}k} + \frac{1}{5} x[0] + \frac{1}{5} x[1]\, e^{-j\frac{2\pi}{5}k} + \frac{1}{5} x[2]\, e^{-j\frac{4\pi}{5}k}$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{5}\left(e^{j\frac{4\pi}{5}k} + e^{-j\frac{4\pi}{5}k}\right) + \frac{2}{5}\left(e^{j\frac{2\pi}{5}k} + e^{-j\frac{2\pi}{5}k}\right) - \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \underline{a_k = \frac{2}{5}\cos\left(\frac{4\pi}{5}k\right) + \frac{2}{5}\cos\left(\frac{2\pi}{5}k\right) - \frac{2}{5}}$$

۳ دنباله‌های متناوب متناظر با ضرایب سری فوریه‌ی زیر را بدست آورید.

الف) $k =< 11 >$, $a_k = \cos(\frac{8\pi}{11}k)$

$N = 11 \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{11}$ ✓

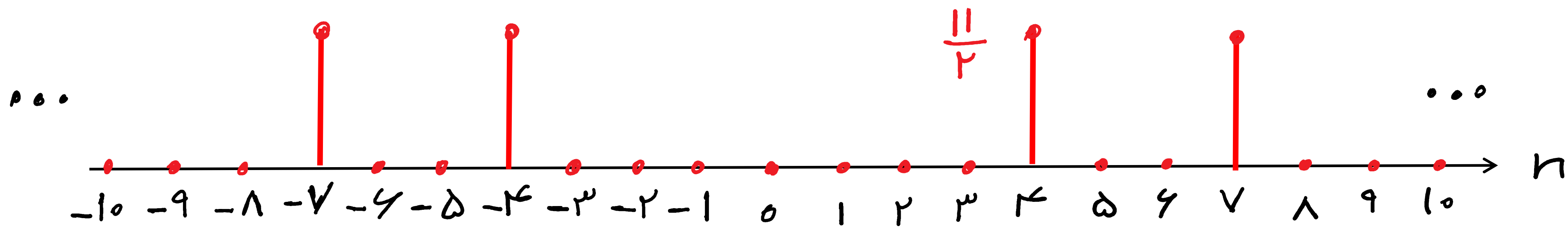
$$a_k = \frac{1}{11}\sum_{n=\langle 11\rangle} x[n]e^{-jk(\frac{2\pi}{11})n} = \cos\left(\frac{8\pi}{11}k\right) = \frac{1}{2}\underbrace{e^{j\frac{8\pi}{11}k}}_{n=-4} + \frac{1}{2}\underbrace{e^{-j\frac{8\pi}{11}k}}_{n=4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{11}x[4] = \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{1}{11}x[-4] = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x[4] = \frac{11}{2} \checkmark \quad , \quad x[-4] = x[7] = \frac{11}{2} \checkmark$$

در سایر زمان های $0 \le n \le 10$ و $n \neq 4, 7$ مقدار $x[n]$ صفر است.

$$\Rightarrow \quad x[n] = x[n+11] = \begin{cases} \frac{11}{2} & , \; n = 4, 7 \\ 0 & , \; 0 \le n \le 10 \;, \; n \neq 4, 7 \end{cases}$$



$x[n]$ حقیقی و زوج و در نتیجه a_k هم حقیقی و زوج است،

$N = 6$

ب) $a_k = \begin{cases} (\frac{1}{3})^{|k|}, & -2 \le k \le 2 \\ 0, & k = 3 \end{cases}, \quad k = <6>$

$$\left\{ a_0 = 1 ,\ a_1 = \frac{1}{3} ,\ a_2 = \frac{1}{9} ,\ a_3 = 0 ,\ a_4 = a_{-2} = \frac{1}{9} ,\ a_5 = a_{-1} = \frac{1}{3} \right\}$$

$$a_{k+6} = a_k$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{5} a_k e^{jk(\frac{\pi}{3})n} = 1 + \frac{1}{3} e^{j\frac{\pi}{3}n} + \frac{1}{9} e^{j\frac{2\pi}{3}n} + 0 + \frac{1}{9} \underline{e^{j\frac{4\pi}{3}n}} + \frac{1}{3} \underline{e^{j\frac{5\pi}{3}n}}$$

$$= \frac{1}{3} e^{j\frac{\pi}{3}n} + \frac{1}{3} \underline{e^{-j\frac{\pi}{3}n}} + \frac{1}{9} e^{j\frac{2\pi}{3}n} + \frac{1}{9} \underline{e^{-j\frac{2\pi}{3}n}} + 1$$

$$\Rightarrow \underline{x[n] = \frac{2}{3} \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \frac{2}{9} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + 1}$$

$N=۴$ $\qquad a_k = \begin{cases} 2, & -1 \le k \le 1 \\ 0, & k = 2 \end{cases}$ ، $k =< 4 >$ ج)

$\{a_0 = ۲,\ a_1 = ۲,\ a_۲ = 0,\ a_۳ = a_{-1} = ۲\}$ ، $a_{k+۴} = a_k$

$x[n] = \sum_{k=0}^{۳} a_k e^{jk(\frac{\pi}{۲})n} = ۲ + ۲e^{j(\frac{\pi}{۲}n)} + 0 + ۲e^{j(\frac{۳\pi}{۲}n)}$ *

$= ۲ + ۲e^{j(\frac{\pi}{۲}n)} + ۲e^{-j(\frac{\pi}{۲}n)}$ *

$\Rightarrow \underline{x[n] = ۲ + ۴\cos(\frac{\pi}{۲}n)}$

۴ تبدیل فوریه‌ی دنباله‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n+2]$

$$x[n] = 9\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} u[n+2]$$

$$\Rightarrow X(e^{j\omega}) = 9 \times e^{j2\omega} \, F\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]\right\}$$

$$\Rightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{9e^{j2\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

ب) $x[n] = (\frac{1}{5})^{|n|}$

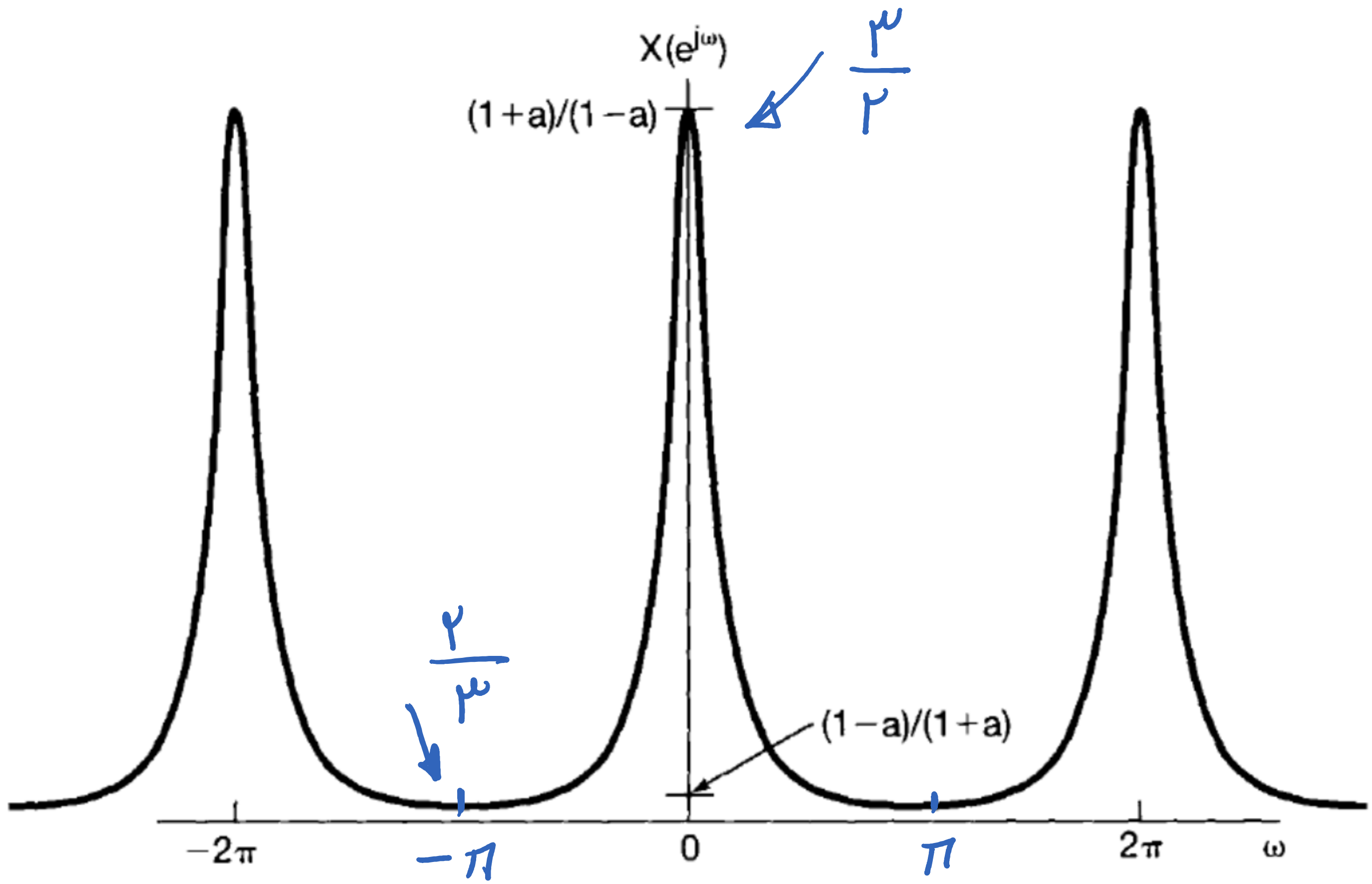
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (\frac{1}{۵})^{-n} e^{-j\omega n} + \sum_{n=۰}^{\infty} (\frac{1}{۵})^{n} e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} (\frac{1}{۵})^{m} e^{j\omega m} + \sum_{n=۰}^{\infty} (\frac{1}{۵})^{n} e^{-j\omega n}$$

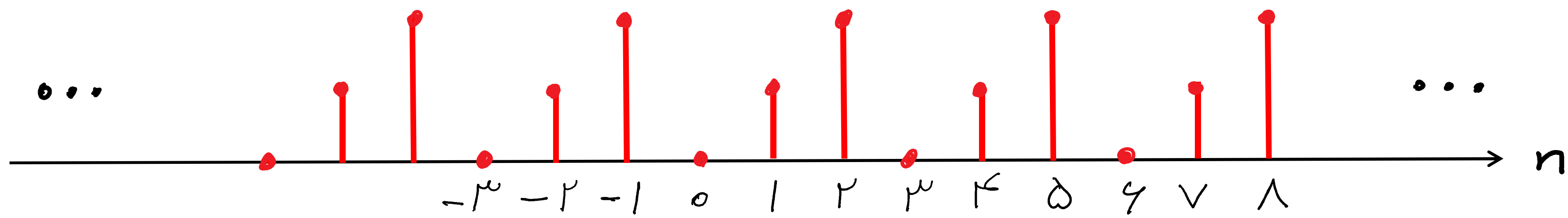
$$= \frac{\frac{1}{۵} e^{j\omega}}{1 - \frac{1}{۵} e^{j\omega}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{۵} e^{-j\omega}} = \frac{1 - \frac{1}{۲۵}}{1 - \frac{1}{۵} e^{-j\omega} - \frac{1}{۵} e^{j\omega} + \frac{1}{۲۵}}$$

$$= \frac{۲۴/۲۵}{1 - \frac{۲}{۵} \cos(\omega) + \frac{1}{۲۵}}$$

$a = \frac{1}{۵}$



ج) $x[0] = 0, x[1] = 1, x[2] = 2$ *and* $x[n+3] = x[n]$ دنباله متناوب



$N = 3 \quad , \quad F.S\{x[n]\} = a_k \quad , \quad k = \langle 3 \rangle$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{2} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{3})n} \Rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\frac{2\pi}{3})$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2} x[n]\, e^{-jk\left(\frac{2\pi}{3}\right)n}$$

$$= \frac{1}{3}(1)\, e^{-j\frac{2\pi}{3}k} + \frac{1}{3}(2)\, e^{-j\frac{4\pi}{3}k}$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{3}e^{-j\frac{2\pi}{3}k} + \frac{2}{3}e^{j\frac{2\pi}{3}k} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}k\right) + \frac{1}{3}e^{j\frac{2\pi}{3}k}$$

۵ دنباله‌های زمانی متناظر با تبدیل فوریه‌های داده‌شده را به دست آورید.

الف) $X(e^{j\omega}) = \cos^2(\omega) + \sin^2(3\omega)$

$$X(e^{j\omega}) = \cos^2\omega + \sin^2 3\omega = \frac{1}{4}(e^{j\omega} + e^{-j\omega})^2 - \frac{1}{4}(e^{j3\omega} - e^{-j3\omega})^2$$

$$= \frac{1}{4}(e^{j2\omega} + 2 + e^{-j2\omega}) - \frac{1}{4}(e^{j6\omega} - 2 + e^{-j6\omega})$$

$$= \frac{1}{4}e^{j2\omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\omega} - \frac{1}{4}e^{j6\omega} - \frac{1}{4}e^{-j6\omega} + 1$$

$$\Rightarrow \underline{x[n] = \delta[n] + \frac{1}{4}(\delta[n+2] + \delta[n-2] - \delta[n+6] - \delta[n-6])}$$

ب) $$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-j2\omega}}$$

$$X(e^{j\omega})=\frac{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}=\frac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{B}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$\Rightarrow \cdots \Rightarrow A=\frac{2}{9}\ ,\ B=\frac{7}{9}$ محاسبه مانده‌های نظیر قطب‌های ساده

مشابه به روش طرح شده قبلی

$$\Rightarrow x[n]=F^{-1}\left\{X(e^{j\omega})\right\}=\frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+\frac{7}{9}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]$$

ج) $X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k \delta(\omega - k\frac{\pi}{2})$

یادآوری: اگر $x[n]$ متناوب با دورهٔ تناوب N و فرکانس اصلی $\frac{2\pi}{N}$ و دارای ضرایب سری فوریهٔ $\{a_k : k = \langle N \rangle\}$ باشد، تبدیل فوریهٔ $x[n]$ بصورت یک قطار ضربه متناوب به فواصل $\frac{2\pi}{N}$ و با دامنه‌های $2\pi a_k$ است.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\frac{2\pi}{N})$$

تطابق با $X(e^{j\omega})$ داده شده $\Rightarrow \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow N = 4$ و $a_k = \frac{(-1)^k}{2\pi}$

$$a_k = \frac{e^{jk\pi}}{2\pi} = \frac{e^{jk(\frac{\pi}{2})(2)}}{2\pi} = e^{jk(\frac{\pi}{2})(2)} b_k$$

و $y[n] \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k$

$$\Rightarrow x[n] = y[n+2]$$

$$b_k = \frac{1}{2\pi} = F.S\{y[n]\} \Rightarrow$$ $y[n]$ هم قطار ضربه با دوره تناوب ۴ است

$$\Rightarrow y[n] = \frac{N}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN] \xrightarrow{F.S} b_k = \frac{N}{2\pi}\times\frac{1}{N} = \frac{1}{2\pi}$$

$$\Rightarrow y[n] = \frac{2}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-4k]$$

$$\Rightarrow x[n] = y[n+2] = \frac{2}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n+2-4k]$$

۶ ورودی یک سیستم LTI زمان‌گسسته با پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ ، سیگنال

(ورودی) $N=۴$ $\longleftarrow$ $$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-4k] \xrightarrow{F.S} a_k$$

و خروجی آن سیگنال

(خروجی) $N=۴$ $$y[n]=\cos(\frac{5\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}) \xrightarrow{F.S} b_k$$

است. مطلوبست تعیین مقادیر $H\left(e^{jk\pi/2}\right)$ ، برای $k=0,1,2,and\ 3$.

$$b_k = H(e^{jk\frac{۲\pi}{N}})\,a_k = H(e^{jk\frac{\pi}{۲}})\,a_k$$

$$\Rightarrow H(e^{jk\frac{\pi}{۲}}) = \frac{b_k}{a_k} \quad , \quad ۰\leq k\leq ۳$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-4k] = \sum_{k=0}^{3} \left(\frac{1}{4}\right) e^{jk\frac{\pi}{2}n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} = \frac{1}{4} \quad , 0 \leq k \leq 3$$: به عبارت دیگر

$$y[n] = \cos\left(\frac{5\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} e^{j\pi/4} \underbrace{e^{j\frac{5\pi}{2}n}}_{k=5} + \frac{1}{2} e^{-j\pi/4} \underbrace{e^{-j\frac{5\pi}{2}n}}_{k=-5}$$

$$\begin{cases} b_1 = b_5 = \frac{1}{2} e^{j\pi/4} \\ b_3 = b_{-5} = \frac{1}{2} e^{-j\pi/4} \\ b_0 = b_2 = 0 \end{cases} \qquad b_k = b_{k+4} \quad , \forall k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H(e^{j0}) = \dfrac{b_0}{a_0} = 0 \quad , \quad H(e^{j\pi}) = \dfrac{b_2}{a_2} = 0 \\[2ex] H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = \dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{\frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}}{\frac{1}{4}} = 2e^{j\frac{\pi}{4}} \\[2ex] H(e^{j\frac{3\pi}{2}}) = \dfrac{b_3}{a_3} = \dfrac{\frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}}{\frac{1}{4}} = 2e^{-j\frac{\pi}{4}} \end{cases}$$

۷ یک سیستم LTI زمان‌گسسته با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ ، توسط معادله‌ی تفاضلی زیر توصیف شده است:

$$y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]=x[n]$$

مطلوبست تعیین ضرایب نمایش سری فوریه‌ی خروجی متناظر با هر یک از ورودی‌های زیر:

$$\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)Y(z)=X(z) \Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

اگر $ROC: |z|>\frac{1}{4} \Rightarrow$ سیستم پایدار است و $H(e^{j\omega})$ وجود دارد

اگر $ROC: |z|<\frac{1}{4} \Rightarrow$ سیستم ناپایدار است و $H(e^{j\omega})$ وجود ندارد

با فرض پایداری سیستم $\Rightarrow b_k=H(e^{jk\omega_0})\,a_k$ ✓

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

پاسخ فرکانسی سیستم

الف) $x[n] = \sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$

$$N = m\left(\frac{2\pi}{\frac{3\pi}{4}}\right) = m\left(\frac{8}{3}\right) \xrightarrow{m=3} \underline{N=8} \quad \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

$$x[n] = \frac{1}{2j}\left(\underbrace{e^{j\frac{3\pi}{4}n}}_{k=3} - \underbrace{e^{-j\frac{3\pi}{4}n}}_{k=-3}\right)$$

$$\begin{cases} a_3 = \frac{1}{2j} \\ a_{-3} = a_5 = a_3^* = -\frac{1}{2j} \\ a_k = 0 \quad , \quad 0 \le k \le 7 \\ \qquad (k \neq 3,5) \end{cases}$$

$$b_k = a_k H(e^{jk\frac{\pi}{4}})$$

$$b_3 = \left(\frac{1}{2j}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\frac{3\pi}{4}}} \quad , \quad b_{-3} = b_5 = \left(-\frac{1}{2j}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{j\frac{3\pi}{4}}}$$

$$b_k = 0 \quad , \quad 0 \le k \le 7 \quad , \quad k \neq 3,5$$

ب) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$

$$N_1 = m\left(\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}\right) = 8m \longrightarrow N_1 = 8$$

$$N_2 = m\left(\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}\right) = 4m \longrightarrow N_2 = 4$$

$$\Rightarrow N = \operatorname{lcm}(N_1, N_2) = 8$$

$$x[n] = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{e^{j\frac{\pi}{4}n}}_{k=1} + \underbrace{e^{-j\frac{\pi}{4}n}}_{k=-1}\Big) + \Big(\underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}n}}_{k=2} + \underbrace{e^{-j\frac{\pi}{2}n}}_{k=-2}\Big)$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{-1} = a_7 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = 1, \quad a_{-2} = a_6 = 1$$

و $a_0 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$

$$b_k = a_k H\left(e^{j\frac{k\pi}{4}}\right) \Rightarrow \begin{cases} b_1, b_2, b_6, b_7 \neq 0 \\ b_0 = b_3 = b_4 = b_5 = 0 \end{cases}$$

تعیین می‌شوند