بسم الله الرّحمن الرّحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده برق و کامپیوتر

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: مسعود عمومی

حل تمرین شماره ۲ _ تابستان ۱۴۰۱

با سلام خدمت دانشجویان محترم

۱ حاصل جمع کانولوشن بین زوج سیگنال‌های زیر را محاسبه و رسم کنید.

الف) $h[n] = u[n+3] - u[n-1]$ $\qquad$ $x[n] = (-1)^n . (\, u[n-1] - u[n-4])$

$$x[n] = \begin{cases} (-1)^n , & 1 \leqslant n \leqslant 3 \\ 0 , & oth. \end{cases} = -\delta[n-1] + \delta[n-2] - \delta[n-3]$$

$$h[n] = \begin{cases} 1 , & -3 \leqslant n \leqslant 0 \\ 0 , & oth. \end{cases} = \delta[n+3] + \delta[n+2] + \delta[n+1] + \delta[n]$$

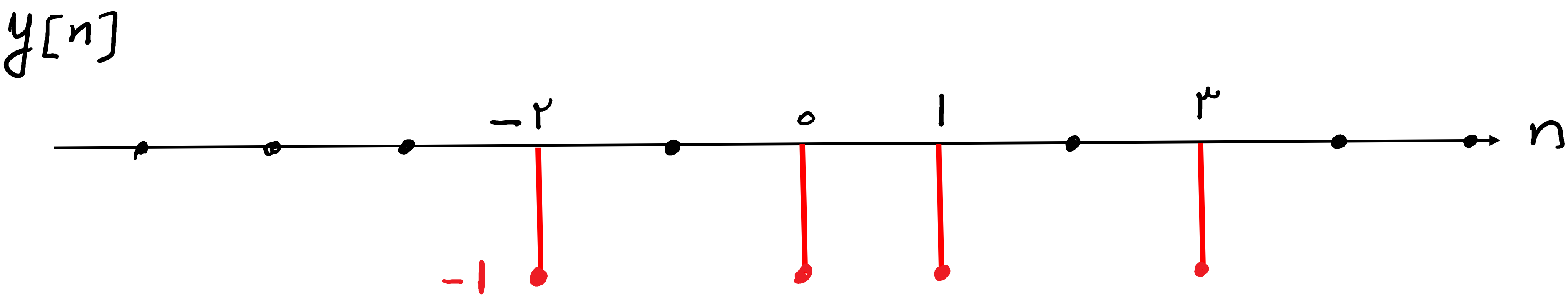
$$x[n] * h[n] = -h[n-1] + h[n-2] - h[n-3]$$

$$\checkmark \; -h[n-1] = -\delta[n+2] - \delta[n+1] - \delta[n] - \delta[n-1]$$

✓ $h[n-2] = \cancel{\delta[n+1]} + \cancel{\delta[n]} + \cancel{\delta[n-1]} + \cancel{\delta[n-2]}$

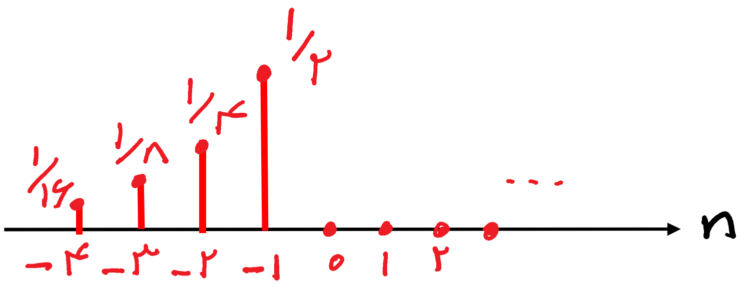
✓ $-h[n-3] = -\delta[n] - \delta[n-1] - \cancel{\delta[n-2]} - \delta[n-3]$

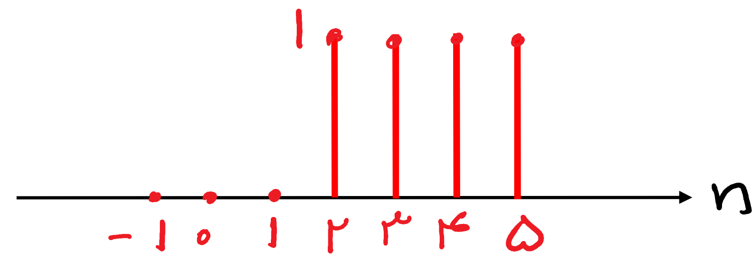
$$\Rightarrow y[n] = x[n] * h[n] = -\delta[n+2] - \delta[n] - \delta[n-1] - \delta[n-3]$$



ب)

$$h[n] = u[n-2] \qquad x[n] = (2)^n u[-n-1]$$





$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (2)^k \underbrace{u[-k-1]}_{\geqslant 0} \, \underbrace{u[n-k-2]}_{\geqslant 0}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$k \leqslant -1 \quad \& \quad k \leqslant n-2$$

$$\Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\min(-1,n-2)} 2^k$$

اگر $n-2 \leq -1 \quad (n \leq 1) \quad \Rightarrow \quad \min(-1, n-2) = n-2$

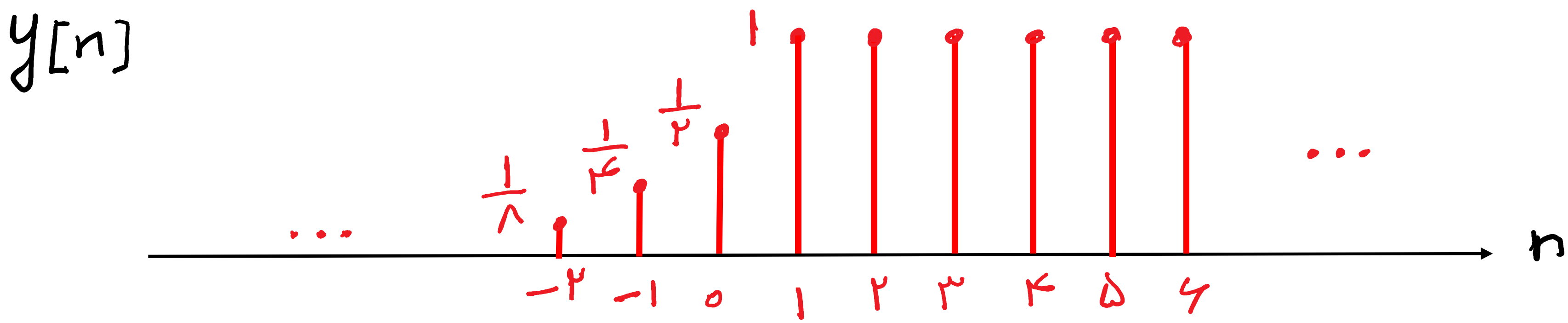
اگر $n-2 > -1 \quad (n > 1) \quad \Rightarrow \quad \min(-1, n-2) = -1$

حالت اول : $n \leq 1 \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-2} (2)^k \qquad (m = -k)$

$$\Rightarrow y[n] = \sum_{m=2-n}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2-n}}{1-\frac{1}{2}} = (2)\left(\frac{1}{2}\right)^{2-n} = 2^{n-1} \quad ✓$$

حالت دوم : $n > 1 \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{-1} (2)^k = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$

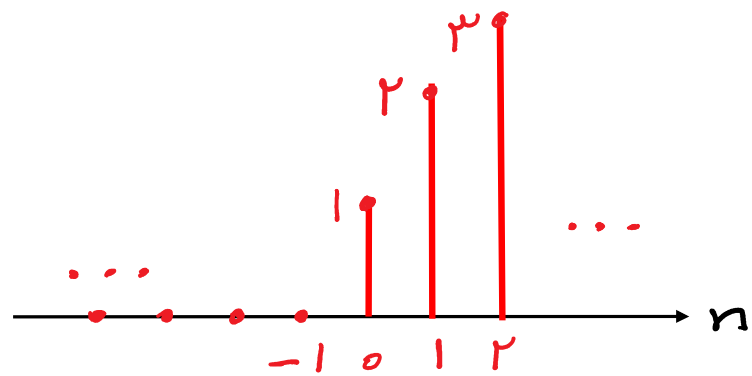
$$= 1 \quad ✓$$

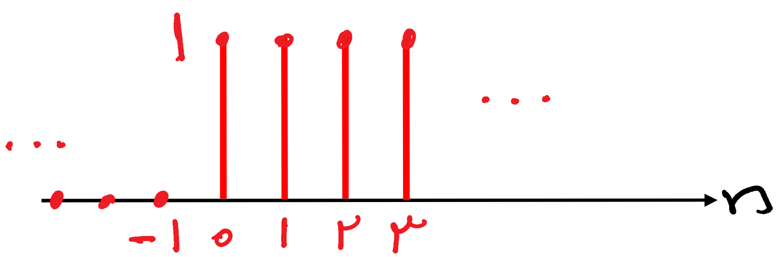


ج)

$$h[n] = (n+1)u[n]$$

$$x[n] = u[n]$$





$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, x[n-k]$$

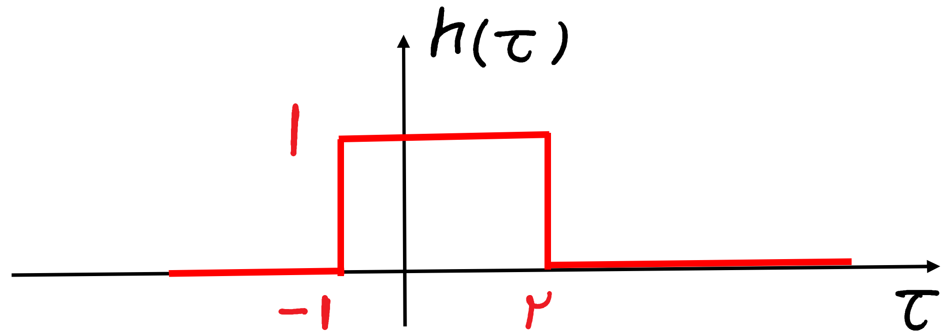
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k+1)\underbrace{u[k]}_{\geq 0}\ \&\ \underbrace{u[n-k]}_{\geq 0}\ (k \leq n) = \sum_{k=0}^{n} (k+1)$$

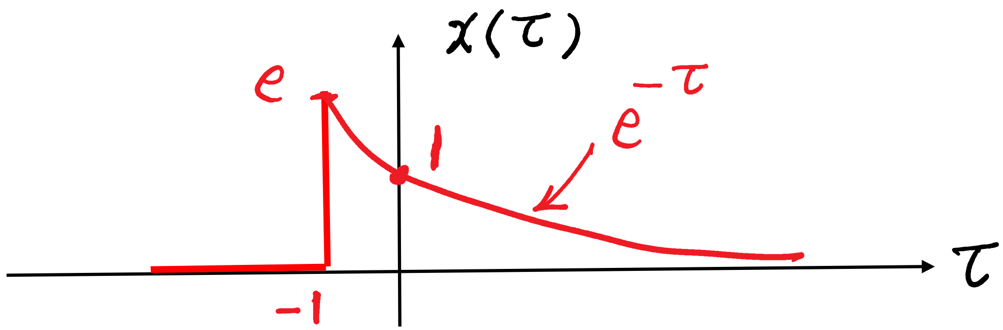
$$= \begin{cases} 0 & , \quad n < 0 \\ (1) + (2) + (3) + \cdots + (n+1) \\ = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) & , \quad n \geq 0 \end{cases}$$

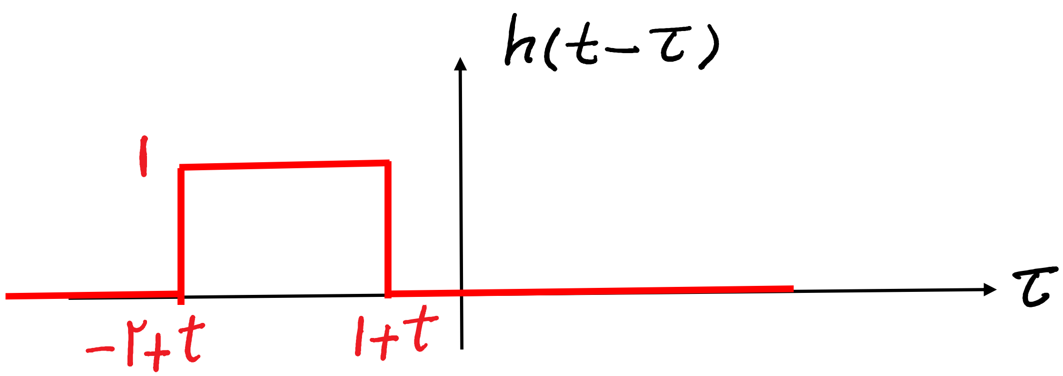
$$\Rightarrow y[n] = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)u[n] \checkmark$$

۲ حاصل انتگرال کانولوشن بین زوج سیگنال‌های زیر را محاسبه و رسم کنید.

الف) $h(t) = u(t+1) - u(t-2)$ $\qquad$ $x(t) = e^{-t}u(t+1)$







✓ حالت اول: اگر $1+t < -1$

$\Rightarrow \underline{t < -2}$

$\Rightarrow x(\tau)h(t-\tau) = 0$

$\Rightarrow \underline{y(t) = 0}$

حالت دوم: اگر $1+t \geqslant -1$ ولی $-2+t \leqslant -1$ $\Leftarrow$ $-2 \leqslant t \leqslant 1$

$$\Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-1}^{1+t} e^{-\tau}d\tau = -e^{-\tau}\Big|_{-1}^{1+t}$$

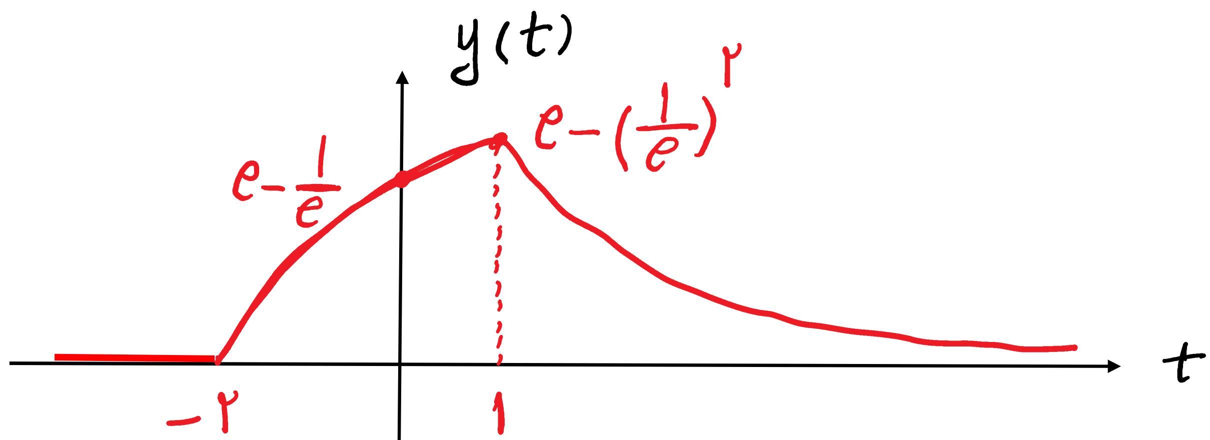
$$\Rightarrow y(t) = -e^{-(1+t)} + e$$

حالت سوم: اگر $-2+t \geqslant -1$ $\Leftarrow$ $t \geqslant 1$

$$\Rightarrow y(t) = \int_{-2+t}^{1+t} e^{-\tau}d\tau = -e^{-\tau}\Big|_{-2+t}^{1+t} = e^{2-t} - e^{-1-t}$$

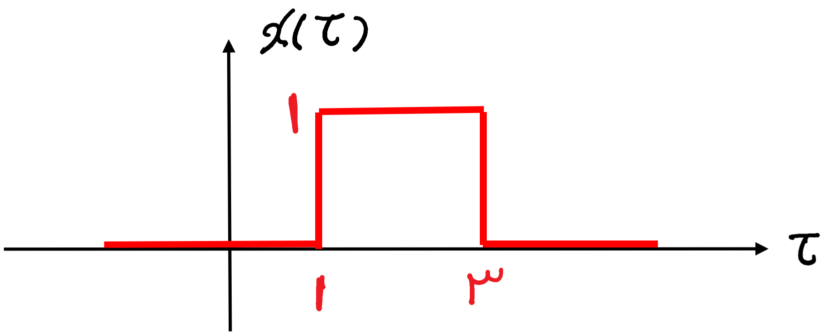
$$\Rightarrow y(t) = e^{-t}(e^{2} - e^{-1})$$

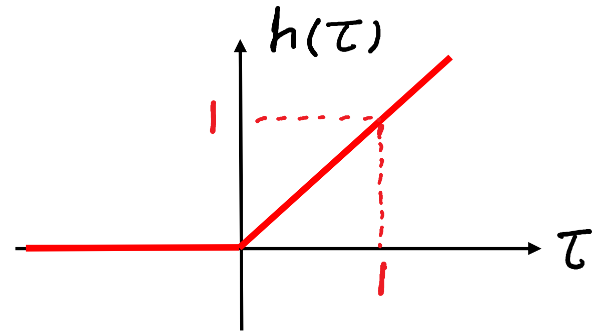
$$\Rightarrow \quad y(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \leqslant -2 \\ e - e^{-(t+1)} & , \quad -2 \leqslant t \leqslant 1 \\ e^{-t}(e^{2} - e^{-1}) & , \quad t \geqslant 1 \end{cases}$$



ب) $h(t) = r(t) = tu(t)$

$x(t) = u(t-1) - u(t-3)$



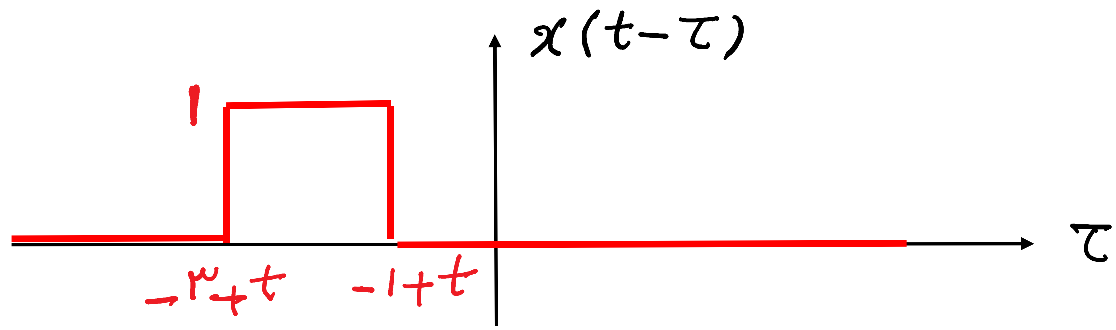


حالت اول: اگر $-1+t < 0$

$\Rightarrow \underline{t < 1}$

$\Rightarrow h(\tau)x(t-\tau) = 0$

$\Rightarrow \underline{y(t) = 0}$



✓ حالت دوم: اگر $-1+t \geq 0$ ولی $-3+t < 0$ $\Leftarrow$ $1 \leq t \leq 3$

$$\Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau = \int_{0}^{-1+t} (\tau)\, d\tau$$

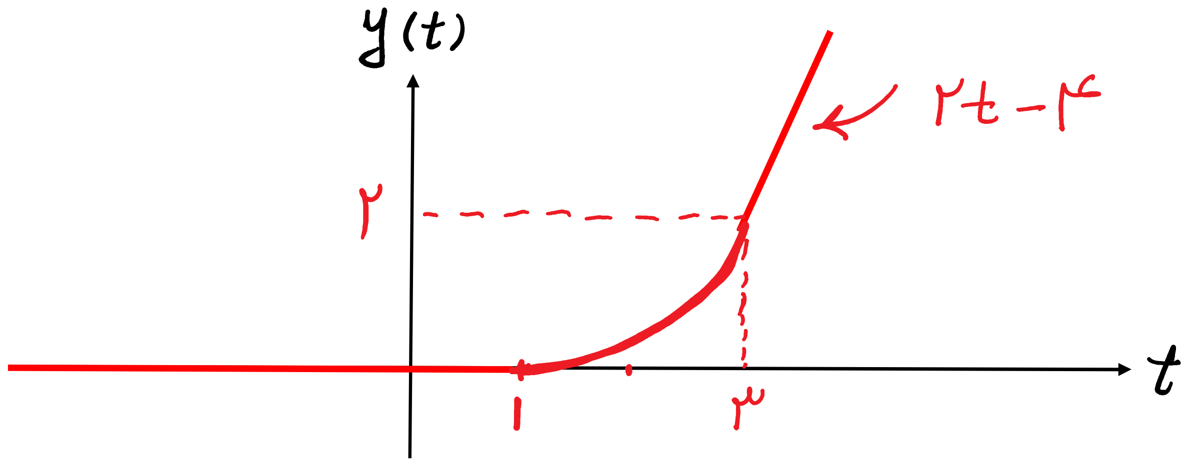
$$= \frac{1}{2}\tau^2 \Big|^{-1+t} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}(t-1)^2$$

✓ حالت سوم: اگر $-3+t \geq 0$ $\Leftarrow$ $t \geq 3$

$$\Rightarrow y(t) = \int_{-3+t}^{-1+t} \tau\, d\tau = \frac{1}{2}\tau^2 \Big|_{-3+t}^{-1+t} = \frac{1}{2}\left[(t-1)^2 - (t-3)^2\right]$$

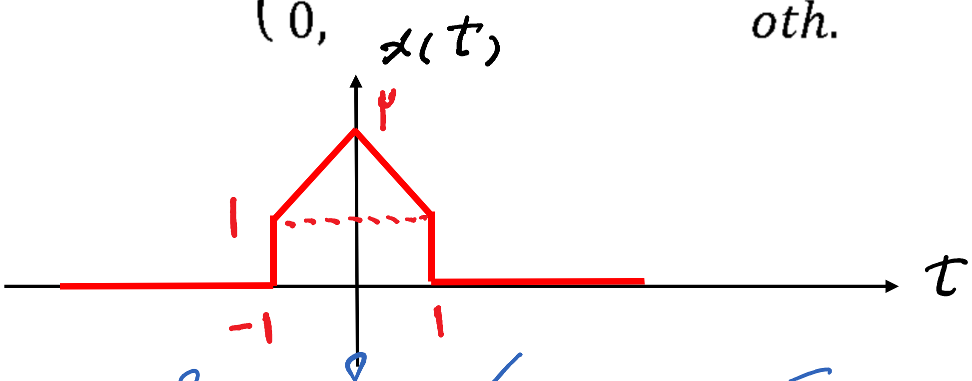
$$\Rightarrow y(t) = 2t-4$$

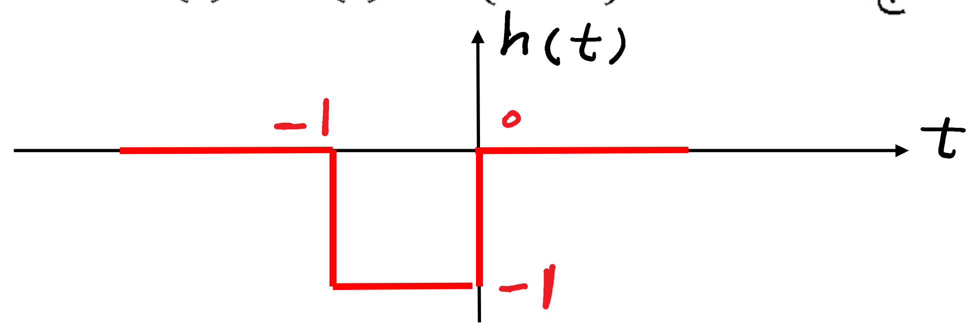
$$\Rightarrow \; y(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \leq 1 \\ \frac{1}{2}(t-1)^2 & , \quad 1 \leq t \leq 3 \\ 2t-4 & , \quad t \geq 3 \end{cases}$$



$$x(t)=\begin{cases} t+2, & -1\le t\le 0\\ 2-t, & 0\le t\le 1\\ 0, & oth.\end{cases}$$

ج) $h(t)=u(t)-u(t+1)$





شاید راه حل ساده‌تر در مقایسه با روش مستقیم، استفاده از خواص کانولوشن باشد.

$$x(t)=u(t+1)+r(t+1)-2r(t)+r(t-1)-u(t-1)$$

$$=\begin{cases} 0+0-0+0-0=0 & t<-1\\ 1+(t+1)-0+0-0=t+2 & -1\le t\le 0\\ 1+t+1-2t+0-0=2-t & 0\le t\le 1\\ 1+t+1-2t+t-1-1=0 & t>1\end{cases}$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = x(t) * [u(t) - u(t+1)]$$

$$= \underbrace{x(t) * u(t)} - \underbrace{x(t) * u(t+1)} = z(t) - z(t+1)$$

$$z(t) = x(t) * u(t) = [u(t+1) + r(t+1) - 2r(t) + r(t-1) - u(t-1)] * u(t)$$

$$= r(t+1) + \frac{1}{2}(t+1)^2 u(t+1) - t^2 u(t) + \frac{1}{2}(t-1)^2 u(t-1) - r(t-1)$$

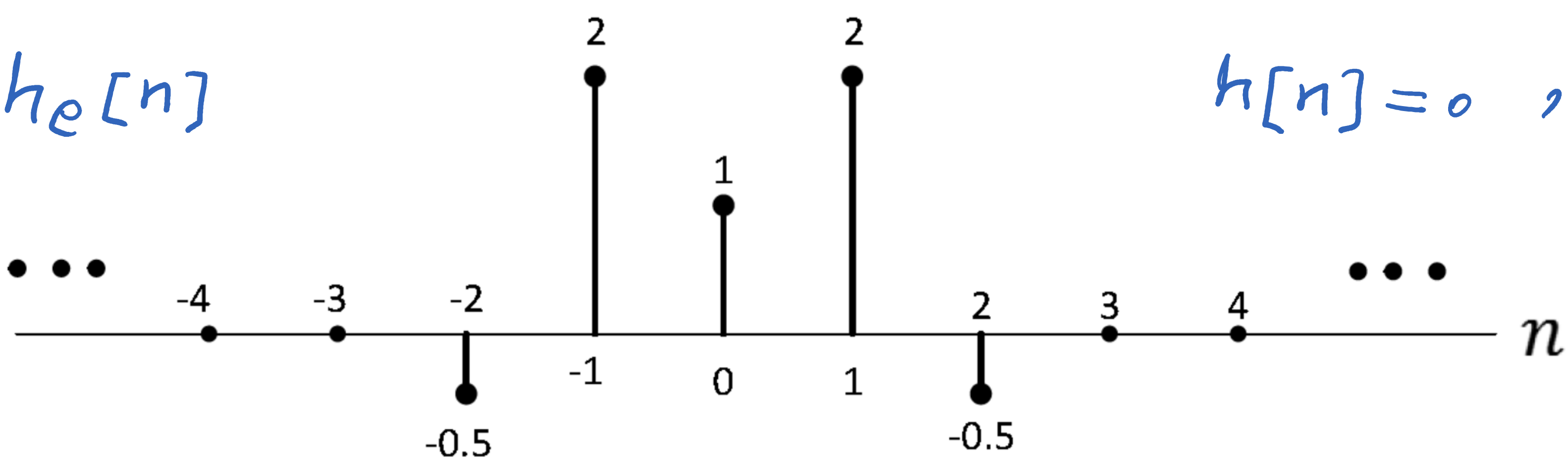
$$z(t+1) = \dots\dots$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = z(t) - z(t+1) \quad \checkmark$$

رسم شکل بر عهده شما

۳ شکل زیر قسمت زوج پاسخ ضربه‌ی یک سیستم زمان‌گسستهٔ علّی و LTI را نشان می‌دهد.

$h_e[n]$ $\qquad h[n]=0 \ , \ \forall n<0$



الف) پاسخ ضربه‌ی $h[n]$ و قسمت فرد آن را تعیین و رسم کنید.

$$h_e[n]=\frac{1}{2}\{h[n]+h[-n]\}$$

$$\Rightarrow h[0]=h_e[0]=1 \ , \ h[1]=2h_e[1]=4 \ , \ h[2]=2h_e[2]=-1$$

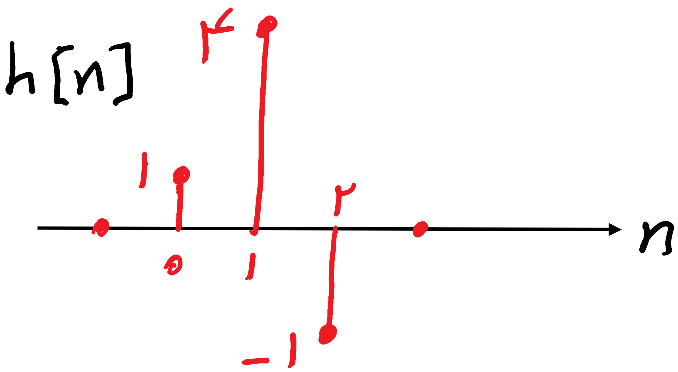
$$h[n]=2h_e[n]=0 \ , \ \forall n\geqslant 3 \qquad , \ h[n]=0 \ , \ \forall n<0$$

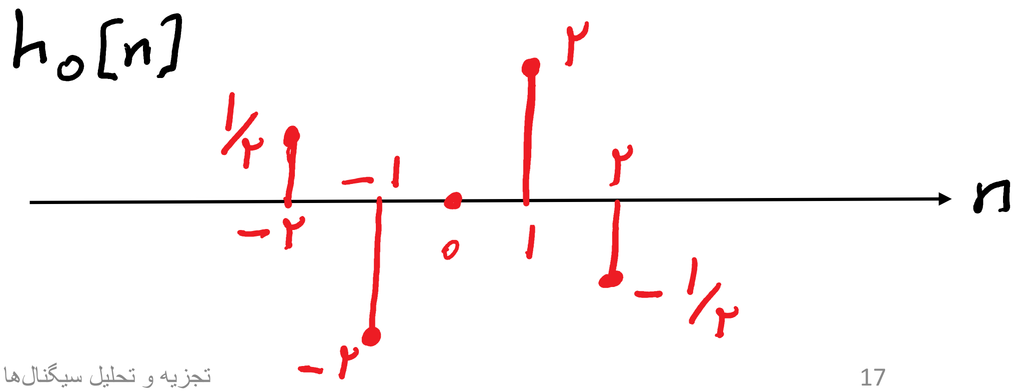
$$\Rightarrow \quad h[n] = \delta[n] + 4\delta[n-1] - \delta[n-2]$$

$$h_o[n] = \frac{1}{2}\{h[n] - h[-n]\}$$

$$= \frac{1}{2}\{\delta[n] + 4\delta[n-1] - \delta[n-2]\} - \frac{1}{2}\{\overset{\delta[n]}{\delta[-n]} + 4\overset{\delta[n+1]}{\delta[-n-1]} - \overset{\delta[n+2]}{\delta[-n-2]}\}$$

$$= 2\delta[n-1] - 2\delta[n+1] - \frac{1}{2}\delta[n-2] + \frac{1}{2}\delta[n+2]$$





ب) پاسخ پله‌ی واحد این سیستم را به دست آورید.

پاسخ سیستم به ورودی پله واحد :

$$s[n] = u[n] * h[n]$$
$$= u[n] * \{\delta[n] + 4\delta[n-1] - \delta[n-2]\}$$
$$\Rightarrow \underline{s[n] = u[n] + 4u[n-1] - u[n-2]}$$

ج) پاسخ این سیستم را به ورودی $x[n] = u[n+1] - u[n-1]$ به دست آورید.

$$y[n] = x[n] * h[n] = x[n] * \{\delta[n] + 4\delta[n-1] - \delta[n-2]\}$$
$$= x[n] + 4x[n-1] - x[n-2] = u[n+1] - u[n-1]$$
$$+ 4u[n] - 4u[n-2] - u[n-1] + u[n-3]$$

$$\Rightarrow x[n] = u[n+1] + 4u[n] - 2u[n-1] - 4u[n-2] + u[n-3]$$

۴ الف) نشان دهید که دو سیستم LTI زمان‌گسسته با پاسخ‌های ضربه‌ی $h_1[n]$ و $h_2[n]$ زیر، وارون یکدیگرند.

$h_1[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$ و $h_2[n] = (n+1)u[n]$

ب) برای این دو سیستم در حالت زمان‌پیوسته، چه مشابهی می‌توان در نظر گرفت؟ توضیح دهید.

الف) بایستی نشان دهیم که: $h[n] = h_1[n] * h_2[n] = \delta[n]$

$$h_2[n] * \{\delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2]\} = h_2[n] - 2h_2[n-1] + h_2[n-2]$$

$$\Rightarrow h[n] = (n+1)u[n] - 2n\,u[n-1] + (n-1)u[n-2]$$

اولاً: برای $n<0$، $h[n]$ برابر صفر است.

ثانیاً: برای $n \geq 2$ داریم:

$$h[n] = (n+1) - 2n + (n-1) = 0$$

ثالثاً: اگر $n=1 \Rightarrow h[1] = 2u[1] - 2u[0] = 2-2 = 0$

رابعاً: اگر $n=0 \Rightarrow h[0] = u[0] = 1$

$$\Rightarrow h[n] = \delta[n] \Rightarrow$$

دو سیستم فوق وارون هم هستند.

ب) $h_1[n]$ پاسخ ضربه سیستم حاصل از اتصال سری دو تفاضل‌گیر مرتبه اول است.

$$h_1[n] = (\delta[n] - \delta[n-1]) * (\delta[n] - \delta[n-1])$$

$$= \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$$

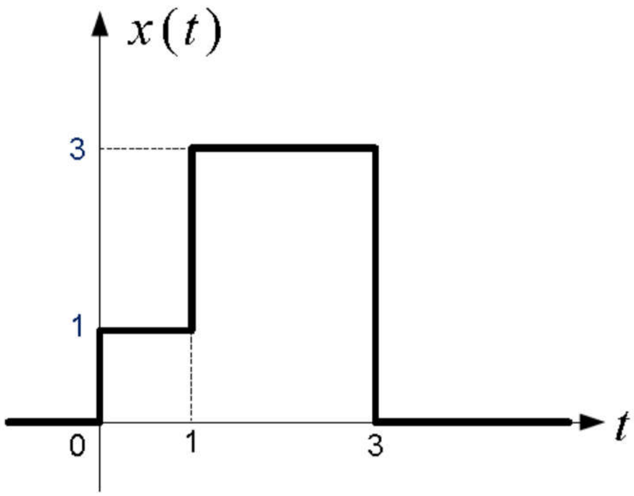
$h_2[n]$ پاسخ ضربه سیستم حاصل از اتصال سری دو انباره است.

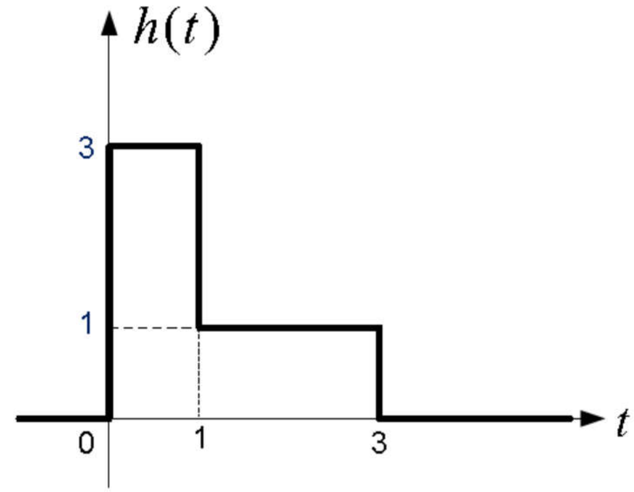
$$h_2[n] = u[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] = \sum_{k=0}^{n} u[k]$$

$$= \begin{cases} 0 & , \quad n<0 \\ \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n+1 \text{ مرتبه}} = n+1 & \quad n \geq 0 \end{cases} = (n+1)u[n]$$

در حالت پیوسته، مشابه h_1، سیستم مشتق‌گیر مرتبه دوم و مشابه h_2 سیستم انتگرال‌گیر مرتبه دوم است که وارون یکدیگرند.

۵ الف) سیگنال‌های $x(t)$ و $h(t)$ نشان داده شده در شکل را برحسب سیگنال پله‌ی واحد بنویسید.





$x(t)=u(t)+۲u(t-۱)-۳u(t-۳)$

$h(t)=۳u(t)-۲u(t-۱)-u(t-۳)$

ب) حاصل انتگرال کانولوشن بین $x(t)$ و $h(t)$ را با استفاده از خواص کانولوشن، محاسبه و رسم کنید.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \underbrace{u(t) * h(t)}_{y_1(t)} + \underbrace{2u(t-1) * h(t)}_{2y_1(t-1)} - \underbrace{3u(t-3) * h(t)}_{3y_1(t-3)}$$

$$y_1(t) = u(t) * h(t) = u(t) * [3u(t) - 2u(t-1) - u(t-3)]$$

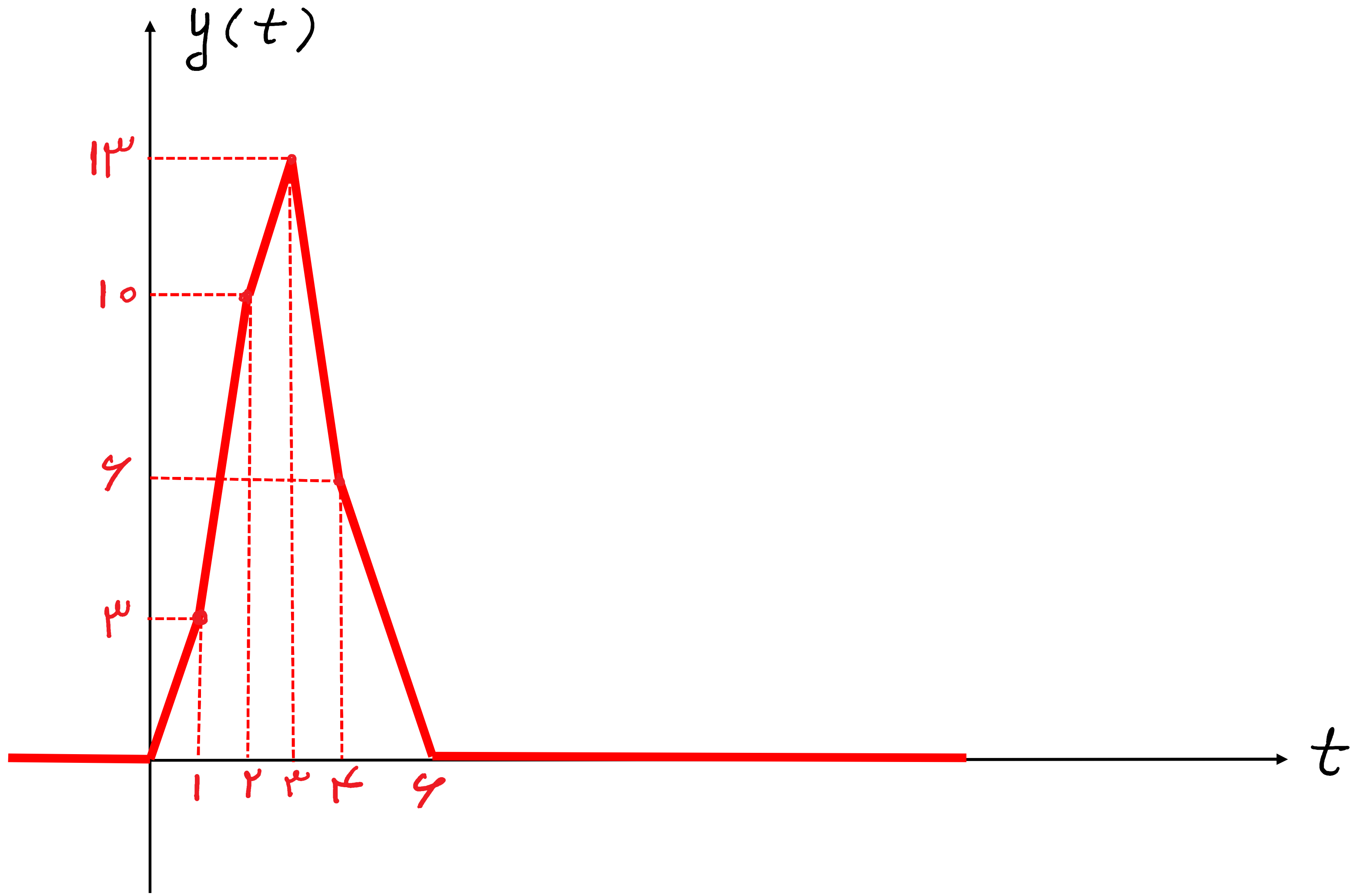
$$= 3r(t) - 2r(t-1) - r(t-3)$$

$$y(t) = y_1(t) + 2y_1(t-1) - 3y_1(t-3)$$

$$\Rightarrow y(t) = ۳r(t) - ۲r(t-۱) - r(t-۳) + ۶r(t-۱) - ۴r(t-۲) - ۲r(t-۴) - ۹r(t-۳) + ۶r(t-۴) + ۳r(t-۶)$$

$$\Rightarrow y(t) = ۳r(t) + ۴r(t-۱) - ۴r(t-۲) - ۱۰r(t-۳) + ۴r(t-۴) + ۳r(t-۶)$$

$$= \begin{cases} ۰ & t \leqslant ۰ \\ ۳t & ۰ \leqslant t \leqslant ۱ \\ ۳t + ۴(t-۱) = ۷t - ۴ & ۱ \leqslant t < ۲ \\ ۷t - ۴ - ۴(t-۲) = ۳t + ۴ & ۲ \leqslant t \leqslant ۳ \\ ۳t + ۴ - ۱۰(t-۳) = -۷t + ۳۴ & ۳ \leqslant t \leqslant ۴ \\ -۷t + ۳۴ + ۴(t-۴) = -۳t + ۱۸ & ۴ \leqslant t < ۶ \\ -۳t + ۱۸ + ۳(t-۶) = ۰ & t \geqslant ۶ \end{cases}$$


y(t)
۱۳
۱۰
۶
۳
t
۱
۲
۳
۴
۶

۶ نشان دهید:

الف) سیستم حاصل از اتصال سری دو سیستم LTI و پایدار، یک سیستم LTI پایدار است.

شرط پایداری :

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h_1(t)|<M<\infty \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^{\infty}|h_2(t)|\,dt<N<\infty$$

$$h(t)=h_1(t)*h_2(t) \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|\,dt \overset{?}{<} \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}h_1(\tau)h_2(t-\tau)\,d\tau\right|\,dt$$

$$<\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|h_1(\tau)||h_2(t-\tau)|\,d\tau\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}|h_1(\tau)|\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty}|h_2(t-\tau)|\,dt\right]}_{<N}d\tau$$

$$<N\int_{-\infty}^{\infty}|h_1(\tau)|\,d\tau<NM<\infty$$

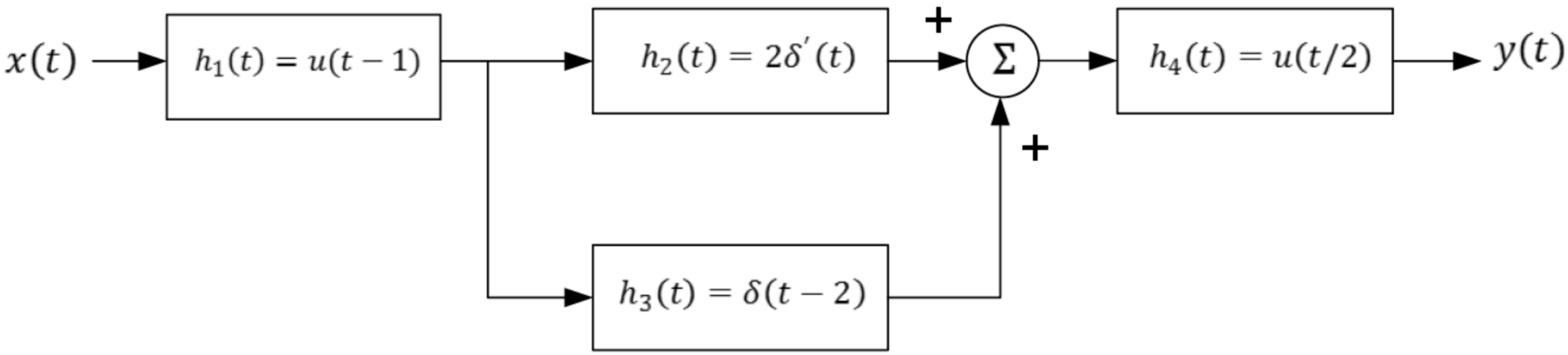
ب) سیستم حاصل از اتصال موازی دو سیستم LTI و پایدار، یک سیستم LTI پایدار است.

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt \overset{?}{<} \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |h_1(t) + h_2(t)|\,dt < \int_{-\infty}^{\infty} \left[|h_1(t)| + |h_2(t)| \right] dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |h_1(t)|\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} |h_2(t)|\,dt < M + N < \infty$$

۷ ترکیب چهار سیستم خطّی و تغییرناپذیر با زمان را در شکل زیر در نظر بگیرید.



الف) $h(t)$ پاسخ ضربه‌ی سیستم معادل را به دست آورده و رسم کنید.

$$u\left(\frac{t}{۲}\right) = \begin{cases} ۰ \;, & \frac{t}{۲} < ۰ \quad (t<۰) \\ ۱ \;, & \frac{t}{۲} > ۰ \quad (t>۰) \end{cases} = u(t) \Rightarrow h_{۴}(t) = u(t)$$

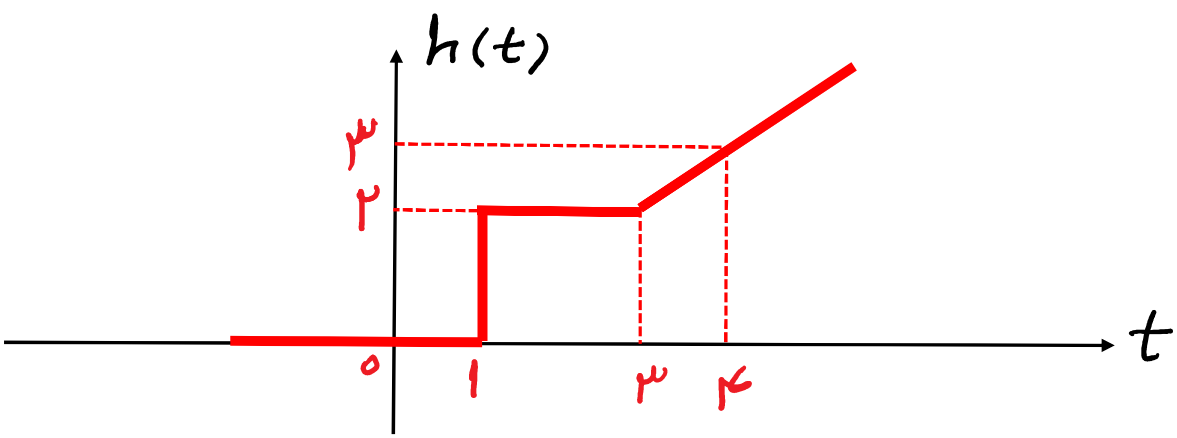
$$h(t) = h_{۱}(t) * [h_{۲}(t) + h_{۳}(t)] * h_{۴}(t)$$

$$\Rightarrow h(t) = u(t-1) * \left[2\delta'(t) + \delta(t-2)\right] * u(t)$$

$$= \left[u(t-1) * 2\delta'(t) + u(t-1) * \delta(t-2)\right] * u(t)$$

$$= \left[2\delta(t-1) + u(t-3)\right] * u(t)$$

$$\Rightarrow \underline{h(t) = 2u(t-1) + r(t-3)} = \begin{cases} 0 & , \quad t<1 \\ 2 & , \quad 1<t<3 \\ t-1 & , \quad t>3 \end{cases}$$



ب) در مورد پایداری و علّیت سیستم معادل، با ذکر دلیل توضیح دهید.

$h(t)=0 \quad , \forall t<1 \quad \Longrightarrow$ سیستم علّی است.

اگر $t \to \infty \Rightarrow h(t) \longrightarrow \infty \Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt \longrightarrow \infty$

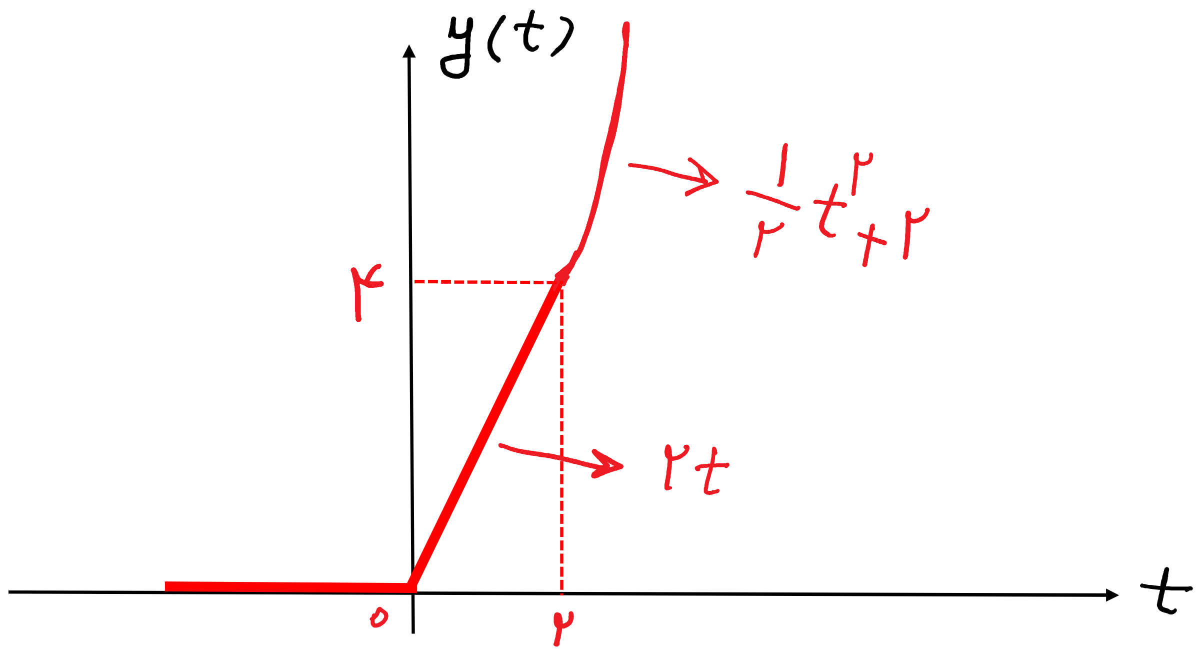
$\Longrightarrow$ سیستم معادل ناپایدار است.

ج) پاسخ سیستم معادل را به ورودی $x(t) = u(t+1)$ به دست آورده و رسم کنید.

$$y(t) = x(t) * h(t) = u(t+1) * [2u(t-1) + r(t-3)]$$

$$= 2r(t) + \frac{1}{2}(t-2)^2 u(t-2)$$

$$\Rightarrow\ y(t)=\begin{cases} 0 & , \quad t\leqslant 0 \\ 2t & , \quad 0\leqslant t\leqslant 2 \\ 2t+\frac{1}{2}(t-2)^2=\frac{1}{2}t^2+2 & , \quad t\geqslant 2 \end{cases}$$



۸ سیستمی LTI ، توصیف‌شده با معادله‌ی دیفرانسیل زیر در نظر بگیرید:

$$y''(t) - 3y'(t) - 10y(t) = x(t)$$

الف) نشان دهید وقتی $\forall t:\ x(t) = 0$ آنگاه پاسخ معادله به صورت $Ae^{5t} + Be^{-2t}$ است.

$$y'' - 3y' - 10y = 0 \Rightarrow s^2 - 3s - 10 = 0 \Rightarrow (s-5)(s+2) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{s = 5\ ,\ s = -2}$$

$\Rightarrow$ پاسخ طبیعی : $y_h(t) = Ae^{5t} + Be^{-2t}$

ب) در صورتی که سیستم علّی باشد، پاسخ ضربه‌ی سیستم را بدست آورید.

سیستم علّی $\Rightarrow \quad h(t) = 0 \ ,\ \forall t < 0$

$$h'' - 3h' - 10h = \delta(t) \qquad \Rightarrow h(t) = (Ae^{5t} + Be^{-2t})u(t)$$

$$\Rightarrow h'(t) = (5Ae^{5t} - 2Be^{-2t})u(t) + (A+B)\delta(t)$$

$$\Rightarrow h''(t) = (25Ae^{5t} + 4Be^{-2t})u(t) + (5A - 2B)\delta(t) + (A+B)\delta'(t)$$

$$h'' - 3h' - 10h = \delta(t) \Rightarrow (25\cancel{A}e^{5t} + 4\cancel{B}e^{-2t} - 15\cancel{A}e^{5t} + 6\cancel{B}e^{-2t} - 10\cancel{A}e^{5t}$$
$$- 10\cancel{B}e^{-2t})u(t) + (5A - 2B - 3A - 3B)\delta(t) + (A+B)\delta'(t) = \delta(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \Rightarrow B = -A \\ 2A - 5B = 1 \Rightarrow 7A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{7}, \quad B = -\frac{1}{7} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{h(t) = \left(\frac{1}{7}e^{5t} - \frac{1}{7}e^{-2t}\right)u(t)} \checkmark$$

ج) در صورتی که سیستم پایدار باشد، پاسخ ضربه‌ی سیستم را بدست آورید.

سیستم پایدار در نتیجه لازم است:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$$

$$\Rightarrow h(t) = Ae^{5t}u(-t) + Be^{-2t}u(t)$$

$$\Rightarrow h'(t) = 5Ae^{5t}u(-t) - Ae^{5t}\delta(t) - 2Be^{-2t}u(t) + Be^{-2t}\delta(t)$$

$$= 5Ae^{5t}u(-t) - 2Be^{-2t}u(t) + (B-A)\delta(t)$$

$$\Rightarrow h''(t) = 25Ae^{5t}u(-t) + 4Be^{-2t}u(t) + (-5A-2B)\delta(t) + (B-A)\delta'(t)$$

$$h'' - 3h' - 10h = \delta(t) \Rightarrow (-5A - 2B - 3B + 3A)\delta(t) + (B-A)\delta'(t) = \delta(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B - A = 0 \\ -2A - 5B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = B = -\frac{1}{7}$$

$$h(t) = -\frac{1}{7}e^{5t}u(-t) - \frac{1}{7}e^{-2t}u(t)$$