بسم الله الرّحمن الرّحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده برق و کامپیوتر

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: مسعود عمومی

حل تمرین شماره ۳ _ تابستان ۱۴۰۱

با سلام خدمت دانشجویان محترم

۱ تبدیل لاپلاس سیگنال‌های زمان‌پیوسته‌ی زیر را محاسبه و ناحیه‌ی همگرایی آنها را تعیین کنید.

الف) $x_1(t) = 3e^{-t}u(t) + 2e^{t}u(-t)$

روابط :

$$\begin{cases} e^{at}u(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{s-a}, & Re\{s\} > Re\{a\} \\ -e^{at}u(-t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{s-a}, & Re\{s\} < Re\{a\} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-t}u(t)\} = \frac{1}{s+1}, \quad Re\{s\} > -1$$

$$\mathcal{L}\{-e^{t}u(-t)\} = \frac{1}{s-1}, \quad Re\{s\} < 1$$

$$\Rightarrow X_1(s) = \frac{۳}{s+1} - \frac{۲}{s-1} = \frac{s-۵}{s^{۲}-1}, \quad -1 < Re\{s\} < 1$$

ب) $x_2(t) = |t|e^{-2|t|}u(-t)$

$$x_2(t) = \begin{cases} -te^{2t} & , \quad t<0 \\ 0 & , \quad t>0 \end{cases} = -te^{2t}u(-t)$$

$$\mathcal{L}\{e^{2t}u(-t)\} = \frac{-1}{s-2}, \quad Re\{s\}<2$$

رابطه: $-t\,x(t) \longleftrightarrow \frac{d}{ds}X(s), \quad ROC = ROC_x$

$$\mathcal{L}\{-te^{2t}u(-t)\} = \frac{d}{ds}\left[\frac{-1}{s-2}\right] = \frac{1}{(s-2)^2}, \quad Re\{s\}<2$$

$$\Rightarrow X_2(s) = \frac{1}{(s-2)^2}, \quad Re\{s\}<2$$

ج) $$x_3(t)=\begin{cases} t, & 0\le t\le 3\\ 6-t, & 3\le t\le 6\\ 0, & oth.\end{cases}$$

سیگنال با پهنای زمانی محدود است و در نتیجه ROC تمام صفحه s خواهد بود.

$$\Rightarrow x_3(t)=r(t)-2r(t-3)+r(t-6)$$

$$=\begin{cases} 0 &, t\leqslant 0\\ t &, 0\leqslant t\leqslant 3\\ t-2(t-3)=-t+6 &, 3\leqslant t\leqslant 6\\ (-t+6)+t-6=0 &, t\geqslant 6\end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{r(t)\}=\mathcal{L}\{t\,u(t)\}=\frac{1}{s^2}, \quad Re\{s\}>0$$

$$\mathcal{L}\{r(t-t_0)\}=\frac{e^{-st_0}}{s^2}, \quad Re\{s\}>0$$

$$\Rightarrow X_3(s)=\frac{1}{s^2}\left(1-2e^{-3s}+e^{-6s}\right), \quad \forall s$$

نکته: در اثر ترکیب خطی سه تابع شیب، ROC گسترش یافته و شامل کل صفحه s می‌شود.

$$X_3(0)=\frac{0}{0} \rightarrow \text{رفع ابهام}: \quad X_3(0)=\cdots=9$$

$$x_4(t) = e^{-|t|}\cos(t)$$ (د

$$x_۴(t) = e^{-t}\cos(t)u(t) + e^{t}\cos(t)u(-t)$$

$$\mathcal{L}\{e^{-t}\cos(t)\,u(t)\} = \frac{s+1}{(s+1)^۲+1} \quad , \quad Re\{s\} > -1$$

$$\mathcal{L}\{-e^{t}\cos(t)\,u(-t)\} = \frac{s-1}{(s-1)^۲+1} \quad , \quad Re\{s\} < 1$$

$$\Rightarrow X_۴(s) = \frac{s+1}{(s+1)^۲+1} - \frac{s-1}{(s-1)^۲+1} \quad , -1 < Re\{s\} < 1$$

$$= \frac{-۲s^۲+۴}{s^۴+۴} \quad , \quad //$$

۲ تبدیل z دنباله‌های زیر را محاسبه و ناحیه‌ی همگرایی آنها را تعیین کنید.

الف) $x_1[n] = 2^n u[n+1] + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n]$

روابط :

$$\begin{cases} a^n u[n] \longleftrightarrow \dfrac{1}{1-az^{-1}}, & |z|>|a| \\ -a^n u[-n-1] \longleftrightarrow \dfrac{1}{1-az^{-1}}, & |z|<|a| \end{cases}$$

$$x[n-n_0] \longleftrightarrow z^{-n_0} X(z)$$

$$۲^n u[n+1] = \frac{1}{۲}(۲)^{n+1} u[n+1] \longleftrightarrow \left(\frac{1}{۲}\right)\frac{z}{1-۲z^{-1}}, \quad ۲<|z|<\infty$$

$$۳\left(\frac{1}{۲}\right)^n u[-n] = \frac{۳}{۲}\left(\frac{1}{۲}\right)^{n-1} u[-n] \longleftrightarrow -\left(\frac{۳}{۲}\right)\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{۲}z^{-1}}, \quad |z|<\frac{1}{۲}$$

$ROC_1 \cap ROC_۲ = \emptyset \Rightarrow$ دنبالۀ $x_1[n]$ تبدیل z ندارد.

ب) $x_2[n] = |n|\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|}$

$$x_2[n] = n\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - n\left(\frac{1}{3}\right)^{-n} u[-n-1]$$

روابط :

$$n\,x[n] \longleftrightarrow -z\frac{d}{dz}X(z)$$

$$a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}\ ,\ |z|>|a|$$

$$-a^n u[-n-1] \longleftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}\ ,\ |z|<|a|$$

$$n\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \longleftrightarrow -z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-\frac{1}{3}}\right] = \frac{\frac{1}{3}z}{\left(z-\frac{1}{3}\right)^2}\ ,\ |z|>\frac{1}{3}$$

$$-n(3)^n u[-n-1] \longleftrightarrow -z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-3}\right] = \frac{3z}{(z-3)^2}\ ,\ |z|<3$$

$$\Rightarrow \quad X_2(z) = \frac{1}{3}\,\frac{z}{\left(z-\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{3z}{(z-3)^2} \quad , \quad \frac{1}{3} < |z| < 3$$

ج)

$$x_3[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n \{u[n+2] - u[n-2]\}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+2] = 16\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} u[n+2] \longleftrightarrow \frac{16z^3}{z-\frac{1}{4}} \quad , \quad \frac{1}{4} < |z| < \infty$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n-2] = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} u[n-2] \longleftrightarrow \left(\frac{1}{16}\right)\frac{z^{-1}}{z-\frac{1}{4}} \quad , \quad |z| > \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad X_3(z) = \frac{16z^3}{z-\frac{1}{4}} - \frac{1}{16z\left(z-\frac{1}{4}\right)} = \frac{(16z^2)^2-1}{16z\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

$$= \frac{(16z^2-1)(16z^2+1)}{4z(4z-1)} = \frac{(4z+1)(16z^2+1)}{4z} = 16z^2+4z+1+\frac{1}{4}z^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad X_3(Z) = 16Z^2 + 4Z + 1 + \frac{1}{4}Z^{-1} \quad , \quad 0 < |Z| < \infty$$

روش دوم : چون دنبالهٔ $x_3[n]$ پهنای زمانی محدود دارد ، ناحیهٔ همگرایی $X_3(Z)$ تمام صفحهٔ Z (مگر احتمالاً $Z=0$ و $Z=\infty$) است. چون دنباله هم برای زمان های منفی و هم زمان های مثبت مقدار دارد ، صفر و بی‌نهایت هم در ROC نیستند. با استفاده از تعریف می توان نوشت:

$$X_3(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_3[n] Z^{-n} = \sum_{n=-2}^{1} \left(\frac{1}{4}Z^{-1}\right)^{n} = 16Z^2 + 4Z + 1 + \frac{1}{4}Z^{-1}$$

$$0 < |Z| < \infty$$

د) $x_4[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(2n)u[n]$

$$x_4[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[\frac{1}{2}\left(e^{j2n} + e^{-j2n}\right)\right] u[n] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}e^{j2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}e^{-j2}\right)^n\right] u[n]$$

$$\Rightarrow \quad X_4(z) = \frac{1}{2} \, \frac{z}{z - \frac{1}{2}e^{j2}} + \frac{1}{2} \, \frac{z}{z - \frac{1}{2}e^{-j2}} \quad , \quad |z| > \left|\frac{1}{2}e^{\pm j2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad X_4(z) = \cdots = \frac{z^2 - \frac{1}{2}(\cos 2)z}{z^2 - (\cos 2)z + \frac{1}{4}} \quad , \quad |z| > \frac{1}{2}$$

۳ سیگنال زمانی متناظر با هریک از تبدیل لاپلاس‌های زیر را با توجه به ناحیه‌ی همگرایی آنها به دست آورید.

الف) $F_1(s) = \frac{s^2+4}{s^2+8s+15} \quad , \quad -5 < Re(s) < -3$

$$F_1(s) = 1 - \frac{8s+11}{s^2+8s+15} = 1 - \frac{8s+11}{(s+3)(s+5)} = 1 + \frac{\frac{13}{2}}{s+3} - \frac{\frac{29}{2}}{s+5}$$

با توجه به ROC داده شده، $f_1(t)$ یک سیگنال دوسمتی است.

$$f_1(t) = \delta(t) - \frac{13}{2} e^{-3t} u(-t) - \frac{29}{2} e^{-5t} u(t)$$

ب) $F_2(s) = \frac{1}{(s+1)^4} \quad , \quad Re(s) < -1$

$$\frac{1}{s^n}, \; Re\{s\} < 0 \longleftrightarrow -\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u(-t)$$

$$\frac{1}{(s+a)^n}, \; Re\{s\} < -a \longleftrightarrow -\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(-t)$$

$$\Rightarrow \underline{f_2(t) = -\frac{t^3}{6} e^{-t} u(-t)}$$

ج) $F_3(s)=\frac{s^2+2}{(s+1)^2} \quad , \quad Re(s)>-1$

$$F_3(s)=\frac{s^2+2}{s^2+2s+1}=1-\underbrace{\frac{2s-1}{s^2+2s+1}}_{Y(s)}=1-\left[\frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s+1)^2}\right]$$

$$B=(s+1)^2Y(s)\Big|_{s=-1}=[2s-1]\Big|_{s=-1}=-3$$

$$A=\frac{d}{ds}\left[(s+1)^2Y(s)\right]\Big|_{s=-1}=2$$

$$\Rightarrow F_3(s)=1-\frac{2}{s+1}+\frac{3}{(s+1)^2} \quad , \quad Re\{s\}>-1$$

$$\Rightarrow f_3(t)=\delta(t)-2e^{-t}u(t)+3te^{-t}u(t)$$

۴ دنباله‌ی متناظر با هریک از تبدیل z های زیر را با توجه به ناحیه‌ی همگرایی آنها به دست آورید.

الف) $$F_1(z) = \frac{1+4z^{-2}}{1+\frac{9}{2}z^{-1}+2z^{-2}} \quad , \quad \frac{1}{2} < |z| < 4$$

$$F_1(z) = \frac{z^2+4}{z^2+\frac{9}{2}z+2} \Rightarrow X(z) = \frac{F_1(z)}{z} = \frac{z^2+4}{z(z+4)(z+\frac{1}{2})}$$

که گویا و مناسب X(z) را به صورت مجموع کسرهای جزئی گسترش می‌دهیم.

$$X(z) = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z+4} + \frac{A_3}{z+\frac{1}{2}}$$

$$A_1 = z\,X(z)\Big|_{z=0} = 2 \qquad A_2 = (z+4)X(z)\Big|_{z=-4} = \frac{10}{7}$$

$$A_3 = (z+\tfrac{1}{2})X(z)\Big|_{z=-1/2} = -\frac{17}{7}$$

$$\Rightarrow X(z)=\frac{F_1(z)}{z}=\frac{2}{z}+\frac{10/7}{z+4}-\frac{17/7}{z+\frac{1}{2}} \quad , \quad \frac{1}{2}<|z|<4$$

$$\Rightarrow F_1(z)=\underset{\forall z}{2}+\underset{|z|<4}{\frac{\frac{10}{7}z}{z+4}}-\underset{|z|>\frac{1}{2}}{\frac{\frac{17}{7}z}{z+\frac{1}{2}}} \quad , \quad \frac{1}{2}<|z|<4$$

$$\Rightarrow f_1[n]=2\delta[n]-\left(\frac{10}{7}\right)(-4)^n u[-n-1]-\left(\frac{17}{7}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$ (دوسمتی)

ب) $$F_2(z)=\frac{z^3}{(z-1)^3} \quad , \quad |z|>1$$

روابط:

$$u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1} \quad , \quad |z|>1$$

$$x_1[n] * x_2[n] \longleftrightarrow X_1(z)X_2(z)$$

$$F_2(z) = \frac{z^3}{(z-1)^3} \Rightarrow f_2[n] = u[n] * u[n] * u[n]$$

$$x[n] = u[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] = \sum_{k=0}^{n} u[k]$$

$$= \begin{cases} n+1 & , \quad n \geq 0 \\ 0 & , \quad n < 0 \end{cases} \Rightarrow x[n] = (n+1)\,u[n]$$

$$f_2[n] = u[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = \sum_{k=0}^{n} (k+1)\,u[k]$$

$$= \begin{cases} 1+2+3+\cdots+n+1 & , \quad n \geq 0 \\ 0 & , \quad n < 0 \end{cases} \Rightarrow f_2[n] = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\,u[n]$$

(سمت راستی)

$$F_3(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \quad , \quad |z| < \frac{1}{3}$$ (ج

$$F_3(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z}{z - \frac{1}{3}} \Rightarrow X(z) = \frac{F_3(z)}{z} = \frac{1 - \frac{1}{3}z}{z\left(z - \frac{1}{3}\right)}$$

که گویا و مناسب $X(z)$ را به صورت مجموع کسرهای جزئی گسترش می‌دهیم.

$$X(z) = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z - \frac{1}{3}}$$

$$A_1 = z\,X(z)\Big|_{z=0} = -3 \checkmark \quad \text{و} \quad A_2 = \left(z - \frac{1}{3}\right)X(z)\Big|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{8}{3} \checkmark$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{F_3(z)}{z} = \frac{-3}{z} + \frac{\frac{8}{3}}{z - \frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow F_3(z) = -3 + \frac{\frac{8}{3}z}{z-\frac{1}{3}} \quad , \quad |z|<\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \underline{f_3[n] = -3\delta[n] - \left(\frac{8}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]} \qquad \text{(سمت چپی)}$$

۵ تبدیل لاپلاس خروجی یک سیستم خطّی و تغییرناپذیر با زمان در پاسخ به ورودی $x(t) = 2u(t)$ ، به صورت زیر است:

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2+6s+13}$$

الف) مقادیر $y(\infty)$ و $y(0^+)$ را به دست آورید.

$$y(0^+) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2+s}{s^2+6s+13} = 1$$

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s^2+s}{s^2+6s+13} = 0$$

ب) تابع انتقال این سیستم را تعیین کنید.

$$H(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{S+1}{S^2+6S+13} \times \frac{S}{2} = \frac{\frac{1}{2}(S^2+S)}{S^2+6S+13}$$

$$\Rightarrow H(S) = \frac{1}{2}\,\frac{S^2+S}{(S+3)^2+4} \qquad \Rightarrow \quad P_1, P_2 = -3 \pm j2$$

ج) با فرض پایدار و علّی بودن سیستم، پاسخ ضربه‌ی آن را به دست آورید.

$$H(s) = \frac{1}{2}\,\frac{s^2+s}{s^2+6s+13} \quad , \quad Re\{s\} > -3$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{5s+13}{s^2+6s+13}\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{5(s+3)-2}{(s+3)^2+4}\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)\frac{s+3}{(s+3)^2+4} + \frac{1}{(s+3)^2+4}$$

$$\Longrightarrow h(t) = \frac{1}{2}\delta(t) - \left[\frac{5}{2}e^{-3t}\cos(2t) - \frac{1}{2}e^{-3t}\sin(2t)\right]u(t)$$

د) پاسخ سیستم به ورودی $x(t) = 5\cos(t)$ را به دست آورید.

$$x(t) = 5\cos(t) = \frac{5}{2}\left(e^{jt} + e^{-jt}\right) = K\left(e^{s_1 t} + e^{s_2 t}\right)$$

تابع e^{st} برای هر سیستم LTI یک تابع ویژه است.

$$y(t) = T\{e^{s_0 t}\} = e^{s_0 t} * h(t) = H(s_0)\, e^{s_0 t}$$

بشرط آن که s_0 در ناحیه همگرایی $H(s)$ باشد.

$$H(s) = \frac{1}{2}\,\frac{s^2+s}{s^2+6s+13}\,, \quad Re\{s\} > -3 \Rightarrow \pm j \in ROC$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{5}{2} H(j)\, e^{jt} + \frac{5}{2} H(-j)\, e^{-jt}$$

$$H(j) = H^{*}(-j) = \frac{-۱+j}{۲۴+۱۲j} = \frac{\sqrt{۲}\ \measuredangle\ ۱۳۵^{\circ}}{۲۶/۸۳۳\ \measuredangle\ ۲۶/۵۷^{\circ}} \simeq ۰/۰۵۳\ \measuredangle\ ۱۰۸/۴۳^{\circ}$$

$$\Rightarrow y(t) \simeq \left(۰/۱۳۲۵\, e^{j۱۰۸/۴۳^{\circ}}\right) e^{jt} + \left(۰/۱۳۲۵\, e^{-j۱۰۸/۴۳^{\circ}}\right) e^{-jt}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{y(t) = ۰/۲۶۵ \cos\left(t + ۱۰۸/۴۳^{\circ}\right)}$$

۶ اطلاعات زیر درباره‌ی یک سیستم LTI زمان‌گسسته با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ داده شده است:

۱. اگر $x[n] = (-2)^n$ برای هر n، آنگاه $y[n] = 0$ برای هر n.

۲. اگر $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ برای هر n، آنگاه $y[n]$ برای هر n به صورت زیر است:

$$y[n] = \delta[n] + a(\frac{1}{4})^n u[n]$$

که در آن a یک عدد ثابت است.

الف) مقدار a را تعیین کنید.

$$x[n] = z^n \xrightarrow{\text{LTI سیستم}} y[n] = H(z)z^n$$

$$x[n] = (-۲)^n \Rightarrow y[n] = H(-۲)(-۲)^n = ۰ \quad \forall n \Rightarrow H(-۲) = ۰$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad , |z| > \frac{1}{2}$$

$$y[n] = \delta[n] + a\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \Rightarrow Y(z) = 1 + \frac{a}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \quad , |z| > \frac{1}{4}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\left(a+1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$H(-2) = 0 \Rightarrow \frac{\left(a+1+\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)}{1+\frac{1}{8}} = 0 \Rightarrow \underline{a = -\frac{9}{8}}$$

ب) پاسخ این سیستم به ورودی ثابت $x[n] = 1$ برای هر n، را تعیین کنید.

$$H(z) = \frac{\left(-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} = \frac{-2z^2-3z+2}{16z^2-4z}$$

$$x[n] = 1 = 1^n \Rightarrow y[n] = H(1) \times 1 = H(1) = -\frac{1}{4}$$

ج) پاسخ این سیستم به ورودی $x[n] = \cos(2n)$ برای هر n، را تعیین کنید.

$$x[n] = \cos(2n) = \frac{1}{2}e^{j2n} + \frac{1}{2}e^{-j2n}$$

$$\Rightarrow y[n] = \frac{1}{2}H(e^{j2})e^{j2n} + \frac{1}{2}H(e^{-j2})e^{-j2n}$$

$H(z)$ کسر گویا با چند جمله‌ای های با ضرائب حقیقی است درنتیجه:

$$H(e^{-j2}) = H^*(e^{j2}) \Rightarrow y[n] = |H(e^{j2})| \cos(2n + \measuredangle H(e^{j2}))$$

$$H(z)=\frac{-۲z^{۲}-۳z+۲}{۱۶z^{۲}-۴z}\Rightarrow H(e^{j۲})=\frac{-۲e^{j۴}-۳e^{j۲}+۲}{۱۶e^{j۴}-۴e^{j۲}}$$

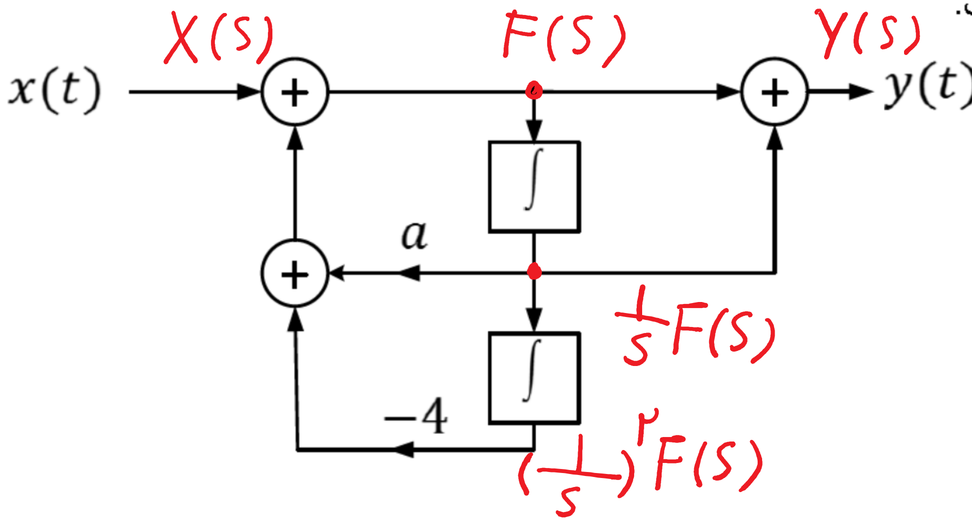
$$=\frac{-۲e^{j۲}-۳+۲e^{-j۲}}{۱۶e^{j۲}-۴}=\frac{-۳-j۴\sin۲}{(۱۶\cos۲-۴)+j۱۶\sin۲}$$

$$\cos(۲)\simeq-۰٫۴۱۶ \quad و \quad \sin(۲)\simeq۰٫۹۰۹$$

$$\Rightarrow H(e^{j۲})\simeq\frac{-۳-j۳٫۶۳۶}{-۱۰٫۶۵۶+j۱۴٫۵۴۴}\simeq۰٫۲۶۱۴\measuredangle۱٫۸۱۹۴^{\,rad}$$

$$\Rightarrow \underline{y[n]\simeq۰٫۲۶۱۴\cos(۲n+۱٫۸۱۹۴)}$$

۷ نمودار بلوکی یک سیستم LTI ، با استفاده از جمع‌کننده‌ها، انتگرال‌گیرهای مرتبه‌ی اول و ضرب‌کننده‌های در عدد ثابت، در شکل زیر نشان داده شده است.



الف) تابع انتقال $H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$ و معادله‌ی دیفرانسیل توصیف‌کننده‌ی رابطه‌ی ورودی-خروجی این سیستم را بر حسب پارامتر a به دست آورید.

$$Y(S) = F(S) + \frac{1}{S}F(S) = \left(1+\frac{1}{S}\right)F(S) \qquad (۱)$$

$$F(S) = X(S) + \frac{a}{S}F(S) - \frac{۴}{S^{۲}}F(S) \Rightarrow \left[1-\frac{a}{S}+\frac{۴}{S^{۲}}\right]F(S) = X(S) \qquad (۲)$$

$$1, 2 \Rightarrow Y(s) = \left(1+\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{a}{s}+\frac{4}{s^2}}\right)X(s)$$

$$= \left(\frac{s+1}{s}\right)\left(\frac{s^2}{s^2-as+4}\right)X(s)$$

$$\Rightarrow \quad H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2+s}{s^2-as+4}$$

ب) اگر پاسخ این سیستم به سیگنال $x(t) = e^t$ ، سیگنال $y(t) = \frac{1}{5}e^t$ باشد، مقدار ثابت a را تعیین کنید.

$$\underset{(\text{تابع ویژه})}{x(t) = e^t} \Rightarrow y(t) = H(1)e^t = \frac{1}{5}e^t \Rightarrow H(1) = \frac{1}{5}$$

$$H(1)=\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1+1}{1-a+4}=\frac{1}{5} \Rightarrow 5-a=10 \Rightarrow a=-5$$

ج) با فرض مقدار $a=-5$ و **پایدار بودن** سیستم، پاسخ ضربه‌ی آن را تعیین کنید.

$$H(s)=\frac{s^2+s}{s^2+5s+4}=\frac{s(s+1)}{(s+4)(s+1)}=\frac{s}{s+4}$$

$$=1-\frac{4}{s+4} \quad , \quad ROC: \ Re\{s\}>-4$$

$$\Rightarrow h(t)=\delta(t)-4e^{-4t}u(t)$$

د) پاسخ سیستم بند ج را به سیگنال ورودی $x(t)=2e^{-3t}u(t)$ تعیین کنید.

$$x(t) = 2e^{-3t}u(t) \Rightarrow X(s) = \frac{2}{s+3}, \quad Re\{s\} > -3$$

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{2}{s+3} \times \frac{s}{s+4} = \frac{2s}{s^2+7s+12}, \quad Re\{s\} > -3$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{-6}{s+3} + \frac{8}{s+4}, \quad Re\{s\} > -3$$

$$\Rightarrow \underline{y(t) = \left[-6e^{-3t} + 8e^{-4t}\right]u(t)}$$

۸ رابطه‌ی ورودی-خروجی یک سیستم LTI توسط معادله‌ی تفاضلی زیر توصیف شده است:

$$y[n-2]+\frac{7}{2}y[n-1]-2y[n]=x[n-1]-x[n]$$

پاسخ ضربه‌ی سیستم را در هر یک از حالت‌های زیر تعیین کنید.

با گرفتن تبدیل Z از طرفین معادله تفاضلی داریم:

$$\left(z^{-2}+\frac{7}{2}z^{-1}-2\right)Y(z)=\left(z^{-1}-1\right)X(z)$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z^{-1}-1}{z^{-2}+\frac{7}{2}z^{-1}-2}=\frac{-z^{2}+z}{-2z^{2}+\frac{7}{2}z+1}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\frac{z^{2}-z}{z^{2}-\frac{7}{4}z-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\,\frac{z^{2}-z}{(z-2)\left(z+\frac{1}{4}\right)}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{\frac{2}{9}z}{z-2} + \frac{\frac{5}{18}z}{z+\frac{1}{4}}$$

الف) سیستم علّی و ناپایدار باشد. در این حالت ROC بایستی خارج از دایره به شعاع ۲ باشد.

$$|z| > 2 \quad \Rightarrow h[n] = \frac{2}{9}(2)^n u[n] + \frac{5}{18}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

ب) سیستم غیرعلّی (Noncausal) و پایدار باشد. در این حالت ROC بایستی حلقه‌ای بین دو دایره به شعاع $\frac{1}{4}$ و ۲ باشد.

$$\frac{1}{4} < |z| < 2 \quad \Rightarrow h[n] = -\frac{2}{9}(2)^n u[-n-1] + \frac{5}{18}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

ج) سیستم ضدعلّی (Anticausal) و ناپایدار باشد.

دراین حالت ROC بایستی داخل دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{4}$ باشد.

$$|z| < \frac{1}{4} \Rightarrow h[n] = -\frac{2}{9}(2)^n u[-n-1] - \frac{5}{18}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[-n-1]$$

د) در بند الف، پاسخ این سیستم به ورودی $x[n] = (\frac{1}{3})^n u[n]$ برای هر n ، را تعیین کنید.

بافرض سیستم علّی و ناپایدار:

$$H(z) = \frac{\frac{2}{9}z}{z-2} + \frac{\frac{5}{18}z}{z+\frac{1}{4}}, \quad |z| > 2$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \Rightarrow X(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{3}}, \quad |z| > \frac{1}{3}$$

$$Y(z) = X(z)H(z) = \left(\frac{z}{z-\frac{۱}{۳}}\right)\left(\frac{\frac{۱}{۲}(z^{۲}-z)}{(z-۲)(z+\frac{۱}{۴})}\right) \qquad , |z| > ۲$$

$$F(z) = \frac{Y(z)}{z} = \frac{\frac{۱}{۲}(z^{۲}-z)}{(z-\frac{۱}{۳})(z-۲)(z+\frac{۱}{۴})} = \frac{A_{۱}}{z-\frac{۱}{۳}} + \frac{A_{۲}}{z-۲} + \frac{A_{۳}}{z+\frac{۱}{۴}}$$

$$A_{۱} = (z-\tfrac{۱}{۳})F(z)\Big|_{z=\frac{۱}{۳}} = \frac{۴}{۳۵}$$

$$A_{۲} = (z-۲)F(z)\Big|_{z=۲} = \frac{۴}{۱۵}$$

$$A_{۳} = (z+\tfrac{۱}{۴})F(z)\Big|_{z=-\frac{۱}{۴}} = \frac{۵}{۴۲}$$

$$\Rightarrow \quad Y(z) = \frac{\frac{۴}{۳۵}z}{z-\frac{۱}{۳}} + \frac{\frac{۴}{۱۵}z}{z-۲} + \frac{\frac{۵}{۴۲}z}{z+\frac{۱}{۴}} \quad , \quad |z| > ۲$$

$$\Rightarrow \quad y[n] = \left[\left(\frac{۴}{۳۵}\right)\left(\frac{۱}{۳}\right)^n + \left(\frac{۴}{۱۵}\right)(۲)^n + \left(\frac{۵}{۴۲}\right)\left(-\frac{۱}{۴}\right)^n\right]u[n]$$