بسم الله الرّحمن الرّحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده برق و کامپیوتر

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: مسعود عمومی

حل تمرین شماره ۴ _ تابستان ۱۴۰۱

با سلام خدمت دانشجویان محترم

۱ الف) اگر بدانیم $x(t)$ یک سیگنال حقیقی متناوب با دوره‌ی تناوب $T = 8$ و تنها ضرایب غیرصفرسری فوریه a_k این سیگنال عبارتند از:

$$a_1 = a_{-1}{}^* = 1 + j2, a_3 = a_{-3} = 3$$

ضابطه‌ی سیگنال $x(t)$ را به سه شکل مختلف بنویسید.

$$x(t) = x^*(t) = x(t+8) \quad , \quad T = 8 \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} a_1 = 1+j2 \ , \ a_{-1} = 1-j2 \ , \ a_3 = a_{-3} = 3 \\ a_k = 0 \ , \ \forall k \neq \pm 1, \pm 3 \end{cases}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = a_{-3} e^{-j\frac{3\pi}{4}t} + a_{-1} e^{-j\frac{\pi}{4}t} + a_1 e^{j\frac{\pi}{4}t} + a_3 e^{j\frac{3\pi}{4}t}$$

$$\Rightarrow \underline{x(t) = 3e^{-j\frac{3\pi}{4}t} + (1-j2)e^{-j\frac{\pi}{4}t} + (1+j2)e^{j\frac{\pi}{4}t} + 3e^{j\frac{3\pi}{4}t}} \quad (1)$$

$$x(t) = 6\cos\frac{3\pi}{4}t + 2\cos\frac{\pi}{4}t - 4\sin\frac{\pi}{4}t \qquad (2)$$

$$1+j2 = \sqrt{5}\, e^{j\, tg^{-1}(2)} \quad , \quad 1-j2 = \sqrt{5}\, e^{-j\, tg^{-1}(2)}$$

$$x(t) = \sqrt{5}\, e^{j\left(\frac{\pi}{4}t + tg^{-1}2\right)} + \sqrt{5}\, e^{-j\left(\frac{\pi}{4}t + tg^{-1}2\right)} + 6\cos\frac{3\pi}{4}t$$

$$\Rightarrow x(t) = 2\sqrt{5}\cos\left(\frac{\pi}{4}t + tg^{-1}2\right) + 6\cos\frac{3\pi}{4}t \qquad (3)$$

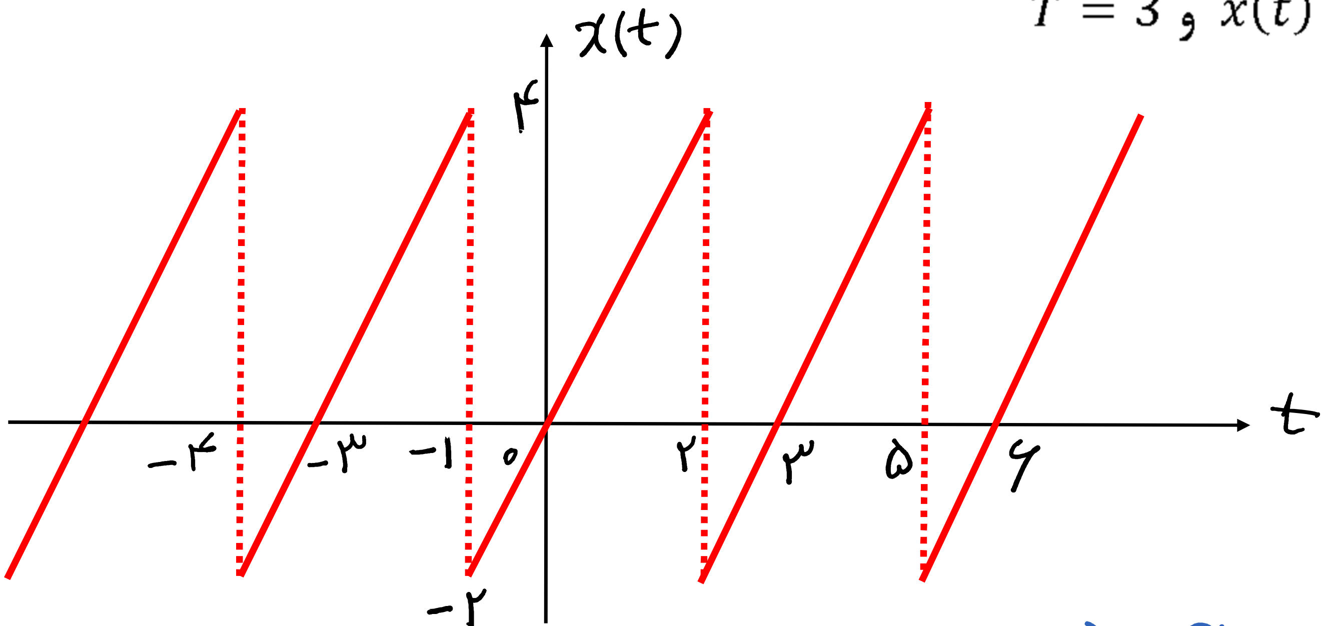
ب) ضرائب سری فوریه‌ی سیگنال $y(t) = x(t-t_0) - x(t+t_0)$ چه رابطه‌ای با ضرائب a_k دارند؟

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k \Rightarrow x(t \pm t_0) \xleftrightarrow{FS} e^{\pm jk\omega_0 t_0} a_k$$

$$y(t) \xleftrightarrow{FS} b_k \Rightarrow b_k = a_k\left[e^{-jk\omega_0 t_0} - e^{jk\omega_0 t_0}\right] = -2j a_k \sin(k\omega_0 t_0)$$

۲ ضرایب سری فوریه‌ی سیگنال‌های متناوب زیر را بدست آورید. (T دوره‌ی تناوب اصلی سیگنال است)

الف) $T = 3$ و $x(t) = 2t \ , -1 \leq t \leq 2$



$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} 2t\,dt = \frac{t^2}{3}\Big|_{-1}^{2}$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3}$$

$$y(t) = x'(t) \xleftrightarrow{F.S} b_k$$

$$\Rightarrow b_k = jk\omega_0 a_k \quad , \quad k \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad a_k = \frac{b_k}{jk\frac{2\pi}{3}}, \quad k \neq 0$$

(قطار ضربه متناوب با دامنهٔ ۶- در نقاط $3k+2$)

$$y(t) = x'(t) = 2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-6)\,\delta(t-3k-2)$$

قطار ضربه : $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-3k) \xleftrightarrow{FS} \frac{1}{3}, \quad \forall k$

$$\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-3k-2) \xleftrightarrow{F.S} \frac{1}{3} e^{-jk\left(\frac{2\pi}{3}\right)(2)}, \quad \forall k$$

$$\begin{cases} b_0 = 2 + (-6)\left(\frac{1}{3}\right)e^{-jk\frac{4\pi}{3}} = 2 - 2e^{-jk\frac{4\pi}{3}} = 2 - 2e^{jk\frac{2\pi}{3}} \\ b_k = -2e^{-jk\frac{4\pi}{3}} = -2e^{jk\frac{2\pi}{3}} \quad \forall k \neq 0 \end{cases}$$

$\left(\frac{4\pi}{3} = 2\pi - \frac{2\pi}{3}\right)$

$$a_k = \begin{cases} 1 & , \quad k=0 \\ \dfrac{-2e^{jk\frac{2\pi}{3}}}{jk\frac{2\pi}{3}} & , \quad k\neq 0 \end{cases}$$

ب) $x(t) = 2sin\left(\frac{3}{2}t\right) + cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right) + 1$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{3}$$

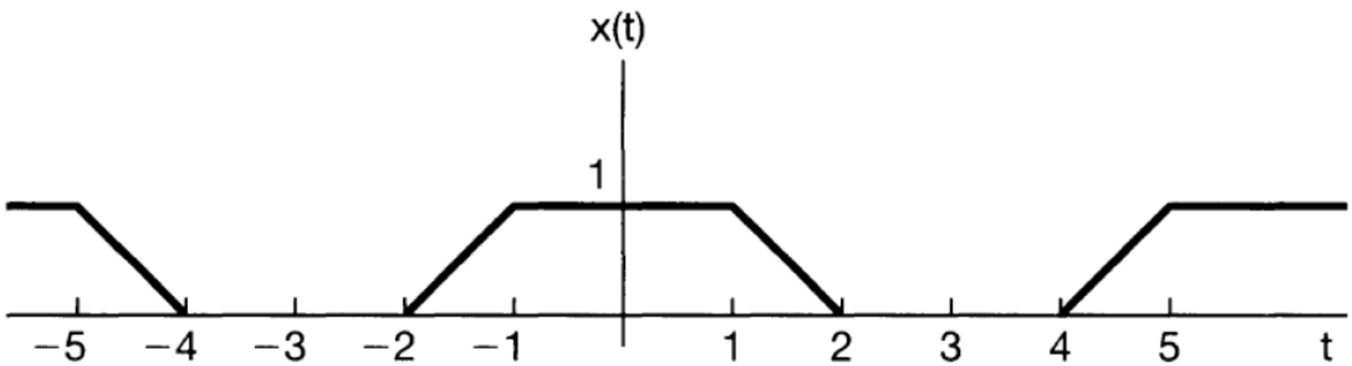
$$T_2 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

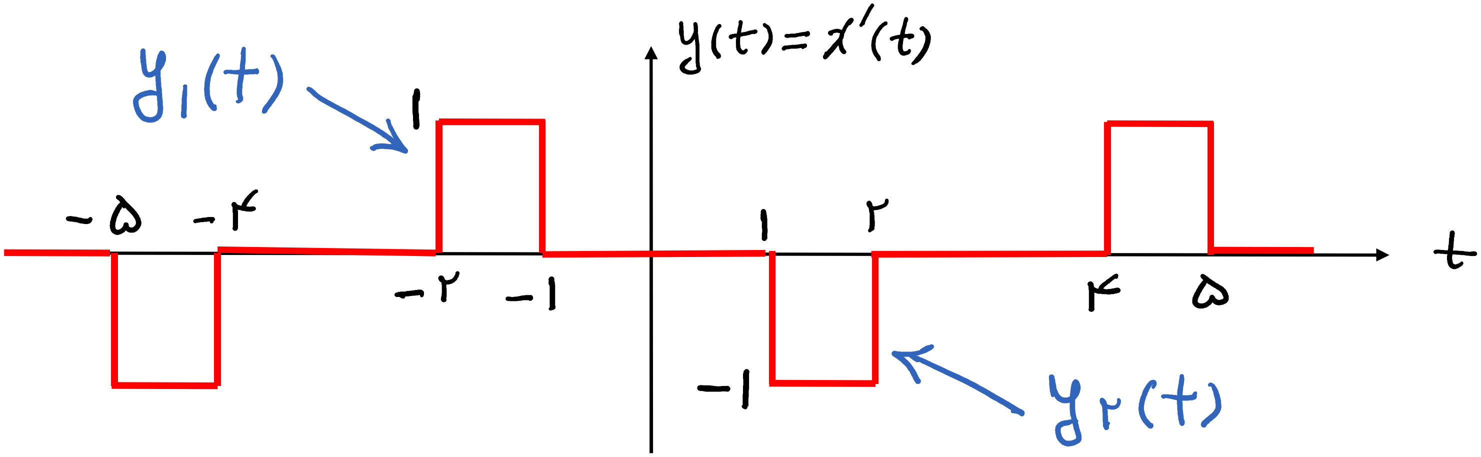
$$T = lcm\left(\underbrace{\frac{4\pi}{3}}_{T_1}, \underbrace{2\pi}_{T_2}\right) = 4\pi = 3T_1 = 2T_2$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{2} \checkmark$$

$$x(t) = \frac{1}{j}\left(\underbrace{e^{j\frac{3}{2}t}}_{a_3} - \underbrace{e^{-j\frac{3}{2}t}}_{a_{-3}}\right) + \frac{1}{2}\left(\underbrace{e^{jt}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}}_{a_2} + \underbrace{e^{-jt}\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}}_{a_{-2}}\right) + \underbrace{1}_{a_0}$$

$$\Rightarrow\ a_0 = 1\ ,\qquad a_2 = a_{-2}^{*} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\ ,\qquad a_3 = a_{-3}^{*} = \frac{1}{j} = -j$$





ج)

$$T = 6$$

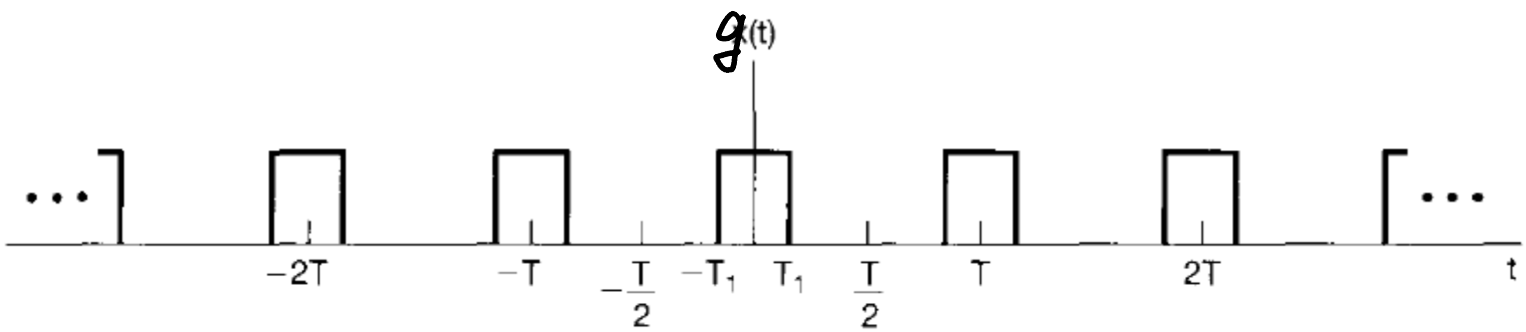
$$\Rightarrow\ \omega_0 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$a_0 = \frac{1}{6}\int_{-3}^{3} x(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\ a_0 = \frac{1}{2}$$

The periodic square wave, $g(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}, \quad \longleftrightarrow \quad b_k$



$$b_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}, \qquad k \neq 0, \qquad\qquad b_0 = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T}.$$

$$\begin{cases} y_1(t) = g\left(t + \frac{3}{2}\right) \quad \text{و} \quad y_2(t) = -g\left(t - \frac{3}{2}\right) \\ T_1 = \frac{1}{2}, \; T = 4 \end{cases} \Rightarrow b_k = F.S\{g(t)\} = \frac{\sin\left(k\frac{\pi}{4}\right)}{k\pi}$$

$$y(t) = x'(t) = y_1(t) + y_2(t) = g\left(t + \frac{3}{2}\right) - g\left(t - \frac{3}{2}\right)$$

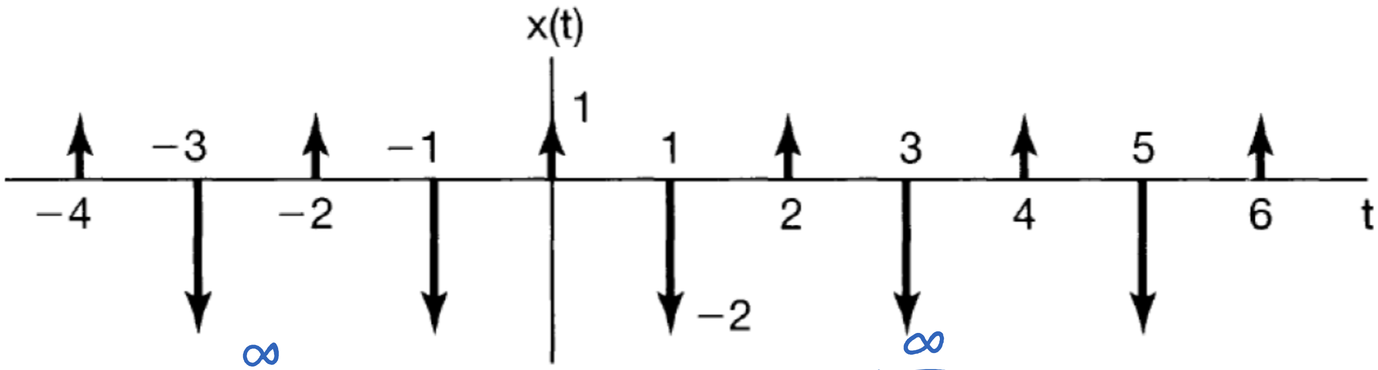
$$c_k = F.S\{y(t)\} = \left[e^{jk\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)} - e^{-jk\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)}\right] b_k$$

$$\Rightarrow c_k = 2j \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)}{k\pi} \quad , \quad k \neq 0$$

$$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k \quad , \quad y(t) = x'(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} c_k \Rightarrow a_k = \frac{c_k}{jk\omega_0}$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{2 \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)}{(k\pi)\left(k\frac{\pi}{3}\right)} \quad , \quad k \neq 0$$

د)



$T = 2$

$\Rightarrow \omega_0 = \pi$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2n) - 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 1 - 2n)$$

$$a_k \qquad b_k = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} \qquad c_k = e^{-jk\omega_0} b_k \quad (t_0 = 1)$$

$$\Rightarrow a_k = b_k - 2e^{-jk\omega_0} b_k = (1 - 2e^{-jk\pi})\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - (-1)^k$$

$$\Rightarrow a_k = \begin{cases} -1/2 \ , & k \text{ زوج} \\ 3/2 \ , & k \text{ فرد} \end{cases}$$

۳ یک سیستم LTI و علّی توصیف‌شده توسط معادله‌ی دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = x(t)$$

مطلوب است محاسبه‌ی ضرایب سری فوریه سیگنال خروجی $y(t)$ در پاسخ به سیگنال ورودی:

$$x(t) = 1 + cos(3\pi t) + sin(8\pi t + \frac{\pi}{3})$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \Longrightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$sY(s) + ۴Y(s) = X(s) \Rightarrow (s+۴)Y(s) = X(s)$$

تابع سیستم : $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \Rightarrow H(s) = \frac{1}{s+۴}$, $Re\{s\} > -۴$

$$x(t) = ۱ + \underbrace{\cos(۳\pi t)}_{T_۱} + \underbrace{\sin\left(۸\pi t + \frac{\pi}{۳}\right)}_{T_۲}$$

$$T_۱ = \frac{۲\pi}{۳\pi} = \frac{۲}{۳} \quad , \quad T_۲ = \frac{۲\pi}{۸\pi} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow T = \operatorname{lcm}(T_۱, T_۲) = ۲$$

$$= ۳T_۱ = ۸T_۲$$

$$T = ۲ \Rightarrow \omega_۰ = \frac{۲\pi}{T} = \pi$$

$$x(t) = \underbrace{۱}_{a_۰} + \frac{۱}{۲}\left(\underbrace{e^{j۳\pi t}}_{a_۳} + \underbrace{e^{-j۳\pi t}}_{a_{-۳}}\right) + \frac{۱}{۲j}\left(\underbrace{e^{j۸\pi t} \cdot e^{j\frac{\pi}{۳}}}_{a_۸} - \underbrace{e^{-j۸\pi t} \cdot e^{-j\frac{\pi}{۳}}}_{a_{-۸}}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_۰ = ۱ \quad , \quad a_۳ = a_{-۳} = \frac{۱}{۲} \\ a_۸ = a_{-۸}^{*} = \frac{۱}{۲j} e^{j\pi/۳} \end{cases} , \quad a_k = ۰ \quad \forall k \neq ۰, \pm۳, \pm۸$$

$$H(s)=\frac{1}{s+4}\ ,\ Re\{s\}>-4 \Rightarrow H(jk\omega_0)=H(jk\pi)=\frac{1}{jk\pi+4}$$

ضرائب سری فوریه خروجی :

$$\begin{cases} b_0 = H(0)\,a_0 = \left(\frac{1}{4}\right)(1) = \frac{1}{4} \\ b_3 = H(j3\pi)\,a_3 = \frac{1}{4+j3\pi} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8+j6\pi} \\ b_{-3} = H(-j3\pi)\,a_{-3} = \frac{1}{4-j3\pi} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8-j6\pi} = b_3^* \\ b_8 = H(j8\pi)\,a_8 = \frac{1}{4+j8\pi} \times \frac{1}{2j} e^{j\frac{\pi}{3}} \\ b_{-8} = H(-j8\pi)\,a_{-8} = \frac{1}{4-j8\pi} \times \left(\frac{-1}{2j} e^{-j\frac{\pi}{3}}\right) = b_8^* \end{cases}$$

۴ اگر $x(t)$ یک سیگنال متناوب با دوره‌ی تناوب اصلی $T=4$ و ضرایب سری فوریه a_k باشد و بدانیم که:

۱. $x(t)$ حقیقی و فرد است.

۲. به ازای $|k|>1$ ، $a_k=0$.

۳. $\int_1^9 |x(t)|^2 dt = 2$.

سیگنال‌های ممکن برای $x(t)$ را تعیین کنید.

۱) $x(t) = x^*(t) = -x(-t) \Rightarrow a_k = a_{-k}^* = -a_{-k}$

ضرائب a_k موهومی محض و فرد هستند، در نتیجه $a_0 = 0$.

۲) تنها ضرائب غیرصفر عبارتند از: a_1 و a_{-1} .

$a_1 = a_{-1}^* = -a_{-1}$

۳) $\int_1^9 |x(t)|^2 dt = 2 \underset{T=4}{\Rightarrow} 2\int_4 |x(t)|^2 dt = 2 \Rightarrow \int_4 |x(t)|^2 dt = 1$

رابطهٔ پارسوال : $\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \times 1 = |a_{-1}|^2 + |a_1|^2 \quad , \quad a_1 = jA \, , \, a_{-1} = -jA$

(موهومی محض)

$\Rightarrow \frac{1}{4} = 2A^2 \Rightarrow A^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow A = \frac{\pm 1}{2\sqrt{2}}$ ✓

$x(t) = a_{-1} e^{-j\omega_0 t} + a_1 e^{j\omega_0 t} \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$$= \begin{cases} -j\frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{2}t} + j\frac{1}{2\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{2}t} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) & ✓ \\ j\frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{2}t} - j\frac{1}{2\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{2}t} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) & ✓ \end{cases}$$

۵ سیگنال $x(t)$ دارای تبدیل فوریه‌ی $X(j\omega)$ است. تبدیل فوریه‌ی هریک از سیگنال‌های زیر را بر حسب $X(j\omega)$ به دست آورید.

الف) $e^{jt}x(4t-1)$

$$y_1(t) = x(t-1) \Rightarrow Y_1(j\omega) = e^{-j\omega}X(j\omega)$$

$$y_2(t) = y_1(4t) = x(4t-1) \Rightarrow Y_2(j\omega) = \frac{1}{4}Y_1\left(j\frac{\omega}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}e^{-j\frac{\omega}{4}}X\left(j\frac{\omega}{4}\right)$$

$$y(t) = e^{jt}y_2(t) = e^{jt}x(4t-1) \Rightarrow Y(j\omega) = Y_2(j(\omega-1))$$

$$\Rightarrow \underline{Y(j\omega) = \frac{1}{4}e^{-j\frac{1}{4}(\omega-1)}X\left(j\frac{1}{4}(\omega-1)\right)}$$

ب) $\int_{t-2}^{t+2} x(\tau)d\tau$

$$y(t)=\int_{t-2}^{t+2} x(\tau)d\tau = \underbrace{\int_{-\infty}^{t+2} x(\tau)d\tau}_{g(t+2)} - \underbrace{\int_{-\infty}^{t-2} x(\tau)d\tau}_{g(t-2)}$$

$$G(j\omega)=F\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$$

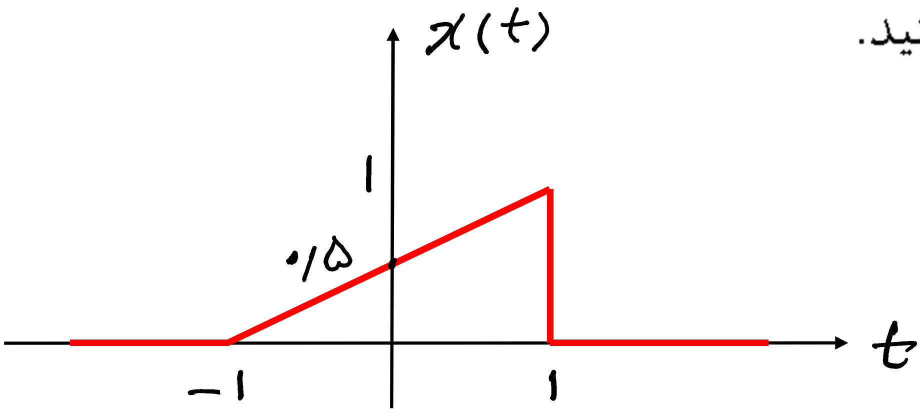
$$\Rightarrow Y(j\omega)=\left(e^{j2\omega}-e^{-j2\omega}\right)G(j\omega) = 2j\sin(2\omega)\,G(j\omega)$$

$$= \frac{2\sin(2\omega)}{\omega}X(j\omega)+\underbrace{2\pi j\sin(2\omega)X(0)\delta(\omega)}_{=0}$$

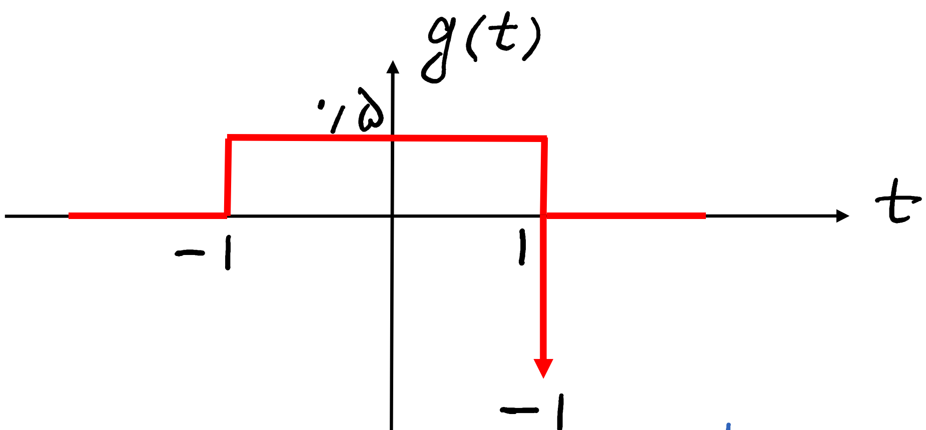
$$\Rightarrow Y(j\omega)=\frac{2}{\omega}\sin(2\omega)X(j\omega)$$

۶ تبدیل فوریه‌ی هر یک از سیگنال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف)
$$x(t) = \begin{cases} 0 \,, & |t| > 1 \\ \frac{t+1}{2}, & |t| \le 1 \end{cases}$$



$$g(t) = x'(t)$$
$$= \frac{1}{2} rect\left(\frac{t}{2}\right) - \delta(t-1)$$



$$G(j\omega) = j\omega\, X(j\omega)$$
$$\Rightarrow X(j\omega) = \frac{1}{j\omega}\, G(j\omega)$$

$$rect(t) = \begin{cases} 1 \,, & |t| < \frac{1}{2} \\ 0 \,, & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{2} F\{rect(\frac{t}{2})\} - e^{-j\omega}$$

$$F\{rect(t)\} = Sinc(\frac{\omega}{2\pi}) = \frac{2Sin(\frac{\omega}{2})}{\omega}$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{2}(\frac{4Sin(\omega)}{2\omega}) - e^{-j\omega} = \frac{Sin(\omega)}{\omega} - e^{-j\omega}$$

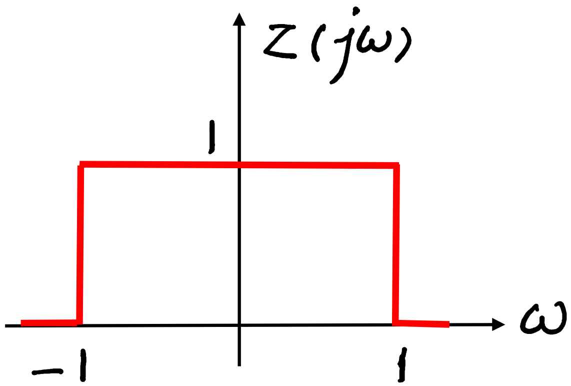
$$\Rightarrow X(j\omega) = \frac{Sin(\omega)}{j\omega^2} - \frac{e^{-j\omega}}{j\omega}$$

ب) $$x(t) = t(\frac{\sin t}{\pi t})^2$$

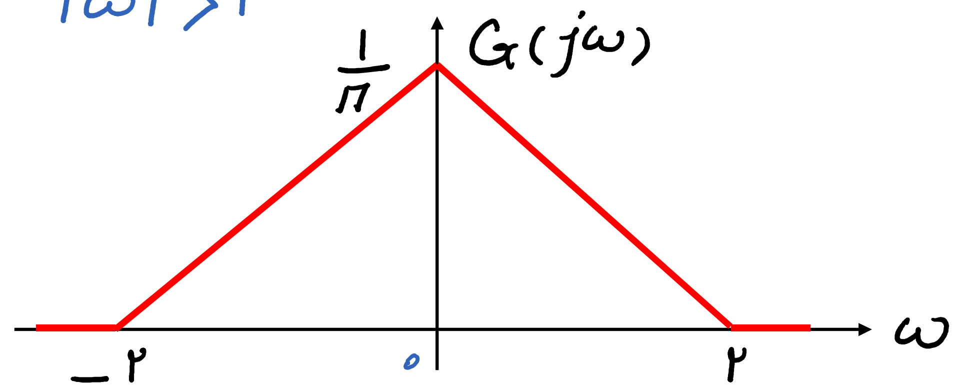
$$x(t) = t\,g(t) \Rightarrow X(j\omega) = j\frac{d}{d\omega} G(j\omega) \qquad g(t) = (\frac{Sin\,t}{\pi t})^2$$

$$g(t) = \left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^2 = z^2(t) \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{2\pi} Z(j\omega) * Z(j\omega)$$

$$Z(j\omega) = F\left\{\frac{\sin t}{\pi t}\right\} = \begin{cases} 1 , & |\omega| < 1 \\ 0 , & |\omega| > 1 \end{cases} = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

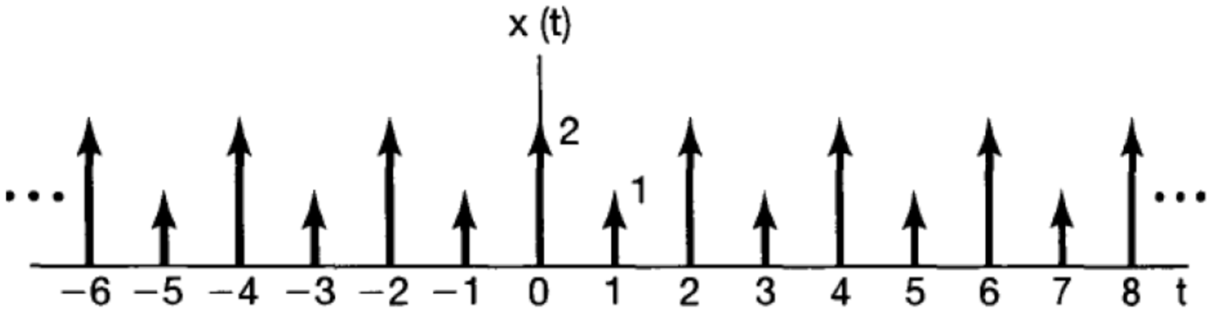


$\Rightarrow$



$$X(j\omega) = j\frac{d}{d\omega} G(j\omega) = \begin{cases} j/2\pi , & -2 < \omega < 0 \\ -j/2\pi , & 0 < \omega < 2 \\ 0 , & oth. \end{cases}$$

ج)

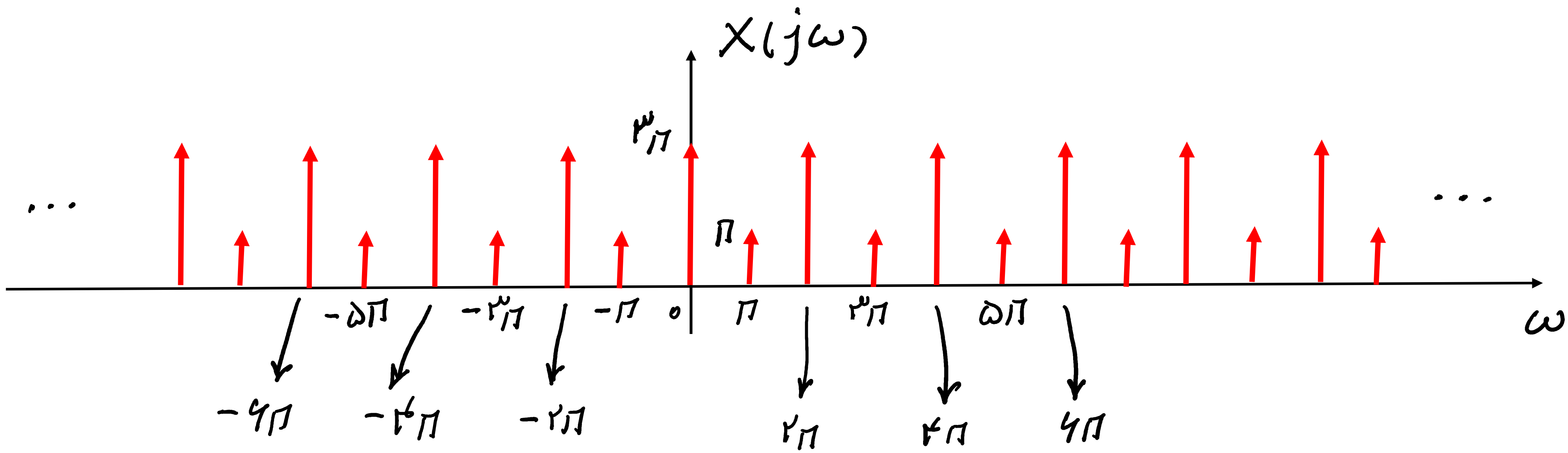


$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\delta(t-2n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-1-2n) \quad , T=2 \ , \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) \qquad \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \qquad a_k = \frac{1}{T} \text{ for all } k$$

$$X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\pi) + \pi e^{-j\omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\pi)$$

$$= \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (2 + e^{-j\omega})\delta(\omega - k\pi) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (2 + e^{-jk\pi})\delta(\omega - k\pi)$$



۷ برای هر یک از تبدیل فوریه‌های زیر، سیگنال زمانی متناظر را به دست آورید.

الف) $$X(j\omega) = \frac{d}{d\omega}\left\{\frac{\sin 3\omega - j\cos 3\omega}{\frac{1}{2}+j\omega}\right\}$$

$$\sin 3\omega - j\cos 3\omega = -j(\cos 3\omega + j\sin 3\omega) = -j e^{j3\omega}$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = -j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{e^{j۳\omega}}{\frac{1}{۲}+j\omega}\right) = -j\frac{d}{d\omega}Z(j\omega)$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{\frac{1}{۲}+j\omega} \Rightarrow g(t) = e^{-\frac{1}{۲}t}u(t)$$

$$Z(j\omega) = e^{j۳\omega}G(j\omega) \Rightarrow z(t) = g(t+۳) = e^{-\frac{1}{۲}(t+۳)}u(t+۳)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{x(t) = -tz(t) = -t\,e^{-\frac{1}{۲}(t+۳)}u(t+۳)}$$

ب) $X(j\omega) = \frac{1-j\omega}{(1+j\omega)^2}$

$$X(j\omega) = \underbrace{\frac{1}{(1+j\omega)^2}}_{X_1(j\omega)} - \underbrace{\frac{j\omega}{(1+j\omega)^2}}_{X_2(j\omega)}$$

$$x_1(t) = te^{-t}u(t) \quad , \quad x_2(t) = \frac{d}{dt}\left[te^{-t}u(t)\right]$$

$$\Rightarrow x_2(t) = (e^{-t} - te^{-t})u(t) + \underbrace{te^{-t}\delta(t)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \underline{x(t) = x_1(t) - x_2(t) = (2t-1)e^{-t}u(t)}$$

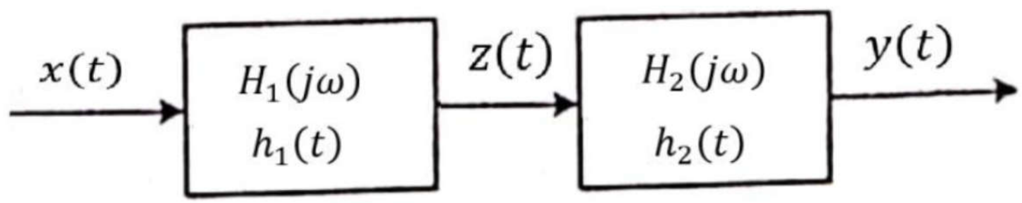
ج) $X(j\omega) = \cos(2\omega + \frac{\pi}{6})$

$$X(j\omega) = \frac{1}{2} e^{j(2\omega + \frac{\pi}{6})} + \frac{1}{2} e^{-j(2\omega + \frac{\pi}{6})}$$

$$= \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{6}} \cdot e^{j2\omega} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{6}} \cdot e^{-j2\omega}$$

$$\Rightarrow \underline{x(t) = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{6}} \delta(t+2) + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{6}} \delta(t-2)}$$

۸ در شکل زیر:



اگر $H_1(j\omega) = \begin{cases} -4\omega^2, & |\omega| < 8 \\ 0 \quad , & 8 < |\omega| \end{cases}$ و $H_2(j\omega) = e^{-j2\omega}$ به ترتیب پاسخ فرکانسی سیستم‌های اول و دوم باشند،
خروجی $y(t)$ را به ازای ورودی $x(t) = 3 + 2\cos(2t + \frac{\pi}{4})$ به دو روش زیر بدست آورید.

الف) با تحلیل در حوزه‌ی فرکانس

$$H_1(j\omega) = -4\omega^2 \,\text{rect}\left(\frac{\omega}{16}\right) = 4(j\omega)(j\omega)\,\text{rect}\left(\frac{\omega}{16}\right)$$

سیستم ۱ ورودی های خود را در بازهٔ فرکانسی $|\omega|<8$ ، دو بار مشتق می‌گیرد و در ۴ ضرب می‌کند. در واقع یک نوع مشتق‌گیر مرتبه دوم پایین‌گذر با فرکانس قطع $\omega_c = 8$ است.

$$H_2(j\omega) = e^{-j2\omega} \Rightarrow h_2(t) = \delta(t-2)$$: تأخیردهنده زمانی

$$x(t) = 3 + 2\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) = 3 + 2\cos(2t)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2\sin(2t)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 3 + \sqrt{2}\cos(2t) - \sqrt{2}\sin(2t)$$

$$X(j\omega) = 6\pi\delta(\omega) + \pi\sqrt{2}\left[\delta(\omega-2) + \delta(\omega+2)\right] - \frac{\pi}{j}\sqrt{2}\left[\delta(\omega-2) - \delta(\omega+2)\right]$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = 6\pi\delta(\omega) + \pi\sqrt{2}(1+j)\delta(\omega-2) + \pi\sqrt{2}(1-j)\delta(\omega+2)$$

مؤلفه های فرکانسی $X(j\omega)$ فقط در فرکانس های صفر و ۲ و ۲- قرار دارند.

$$\Rightarrow Z(j\omega) = -4\omega^2 X(j\omega)$$

$$= -4\omega^2 \left[\cancel{6\pi\delta(\omega)} + \pi\sqrt{2}(1+j)\delta(\omega-2) + \pi\sqrt{2}(1-j)\delta(\omega+2)\right]$$

$$\Rightarrow Z(j\omega) = 0 - 16\pi\sqrt{2}(1+j)\delta(\omega-2) - 16\pi\sqrt{2}(1-j)\delta(\omega+2)$$

$$Z(j\omega) = (-16\pi\sqrt{2})(\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}})\delta(\omega-2) - (16\pi\sqrt{2})(\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}})\delta(\omega+2)$$

$$z(t) = -16e^{j(2t+\frac{\pi}{4})} - 16e^{-j(2t+\frac{\pi}{4})} = -32\cos(2t+\frac{\pi}{4})$$

$$Y(j\omega) = e^{-j2\omega}Z(j\omega) \Rightarrow y(t) = z(t-2)$$

$$\Rightarrow \underline{y(t) = -32\cos(2t - 4 + \pi/4)}$$

ب) با تحلیل در حوزه‌ی زمان

نکته: توجه کنید که طیف سیگنال ورودی $x(t)$ فقط در فرکانس‌های $\omega=0$ و $\omega=\pm 2$ مقدار دارد که همگی درون باند عبور فیلتر مشتق‌گیر مرتبه دوم $(|\omega|<8)$ قرار گرفته‌اند.

$$\Rightarrow z(t) = 4\frac{d^2}{dt^2}x(t) \Rightarrow z(t) = 4\frac{d^2}{dt^2}\left[3+2\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 4\frac{d}{dt}\left[-4\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\right] = -32\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$y(t) = z(t-2) \Rightarrow \underline{y(t) = -32\cos\left(2t-4+\frac{\pi}{4}\right)}$$