دانشگاه زنجان

دانشکده مهندسی

گروه مکانیک

عنوان:

گزارش نهایی پروژه درس ورق و پوسته‌ها

عنوان مقاله :

بررسی تئوری ارتعاشات غیرخطی ورقهای کامپوزیتی الیاف فلز

دانشجو:

محمد مهدی محمدی نژاد

شماره دانشجویی:

4014831118

استاد:

دکتر امید رحمانی

مرداد1402

در این مقاله، معادلات حرکت غیرخطی صفحات مستطیلی کامپوزیت چند لایه بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT) که شامل تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی است، استخراج شد و سپس با معرفی یک تابع نیرو، این معادلات به مجموعه ای از معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی جفت شده (PDEs) و یک معادله سازگاری تقلیل یافت. با استفاده از روش گلرکین برای اولین بار معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی (ODE)به دست می آید که شامل اینرسی غیرخطی و سختی غیرخطی است. با استفاده از روش مقیاس های زمانی چندگانه (multiple scales)، روابط تحلیلی برای فرکانس غیرخطی و جابجایی عرضی به دست آمد. نتایج با پژوهش های موجود مقایسه شده و انطباق خوبی برای فرکانس‌های خطی و غیرخطی به دست آمد . پس از اثبات اعتبار روابط برای صفحات مستطیلی همسانگرد و صفحات مستطیلی چند لایه، ارتعاش آزاد خطی و غیرخطی پانل Glare 3 مورد بررسی قرار گرفت. همچنین تأثیر برخی از پارامترهای سیستم بر فرکانس غیرخطی بررسی گردید.

استخراج معادلات

تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

میدان جابه جایی

استفاده از تئوری کلاسیک برای تحلیل ورق های نازک مناسب است، در حالی که با افزایش ضخامت ورق، دقت تحلیل صورت گرفته با تئوری کلاسیک کاهش مییابد. در ورقهای ضخیم استفاده از تئوری برشی مرتبه اول، با توجه به اینکه کرنشهای برشی عرضی γ_{xz} و γ_{yz} صفر نمیباشند، نسبت به تئوری کلاسیک نتایج دقیقتری را ارائه میکند.

در تئوری برشی مرتبه اول فرض میشود که:

- خطوط مستقیمی که قبل از تغییر شکل بر سطح میانی عمود هستند، پس از تغییر شکل هم مستقیم باقی میمانند.
- نرمالهای عرضی افزایش طول نمی یابند.

دو فرض فوق بیان میکنند که جابجایی عرضی مستقل از مختصات در راستای ضخامت بوده و کرنش نرمال عرضی ε_z برابر صفر است.

تحت فرضیات و محدودیتهای مطرح شده، جابجایی ها در تئوری مرتبه اول به صورت زیر به دست میآیند:

$$u(x,y,z,t) = u_0(x,y,t) + z\phi_x(x,y,t)$$

$$v(x,y,z,t) = v_0(x,y,t) + z\phi_y(x,y,t)$$

$$w(x,y,z,t) = w_0(x,y,t)$$

معادله 1

که u_0 ، v_0 ، w_0 ، φ_x و φ_y تغییر مکانهای تعمیم یافته بوده و توابع مجهولی هستند که باید تعیین شوند. u_0 ، v_0 ، w_0 تغییر مکانهای یک نقطه از ورق در صفحه $z = 0$ را نشان میدهند. میدان تغییر مکان ارائه شده در رابطه 1 باعث ساده سازی مطالعه سه بعدی ورق به مطالعه تغییر شکل صفحه میانی میشود. وقتی که تغییر مکانهای صفحه میانی معلوم شوند، تغییر مکانهای هر نقطه دلخواه x ، y و z در محیط پیوسته سه بعدی را می توان با استفاده از رابطه 1 تعیین کرد.

کرنش های غیرخطی متناظر با تئوری برشی مرتبه اول توسط رابطه زیر حاصل میشوند:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^{(0)}\\ \varepsilon_y^{(0)}\\ \gamma_{yz}^{(0)}\\ \gamma_{xz}^{(0)}\\ \gamma_{xy}^{(0)}\end{Bmatrix}+z\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^{(1)}\\ \varepsilon_y^{(1)}\\ \gamma_{yz}^{(1)}\\ \gamma_{xz}^{(1)}\\ \gamma_{xy}^{(1)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\\ \frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2\\ \frac{\partial w_0}{\partial y}+\phi_y\\ \frac{\partial w_0}{\partial x}+\phi_x\\ \frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}\end{Bmatrix}+z\begin{Bmatrix}\frac{\partial \phi_x}{\partial x}\\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y}\\ 0\\ 0\\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y}+\frac{\partial \phi_y}{\partial x}\end{Bmatrix}$$

معادله 2

مشاهده میشود که در تئوری برشی مرتبه اول، کرنش های ε_y ، ε_x و γ_{yx} در راستای ضخامت به صورت خطی تغییر میکنند. از طرف دیگر، کرنشهای برشی عرضی γ_{xz} و γ_{yz} دارای مقادیر ثابتی میباشند.

معادلات حرکت در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول بر اساس روابط کار مجازی و اصل همیلتون به صورت زیر استخراج میگردد:

$$0=\int_0^T\left(\delta U+\delta V-\delta K\right)dt$$

معادله 3

که در عبارت بالا δU ، δV و δK به ترتیب بیانگر انرژی کرنشی ، کار نیروی خارجی و انرژی جنبشی می باشد. از معادله 3 و جایگذاری مقادیر با توجه به FSDT خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}\delta U=&\int_{\Omega_0}\left\{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left[\sigma_{xx}\left(\delta\varepsilon_{xx}^{(0)}+z\delta\varepsilon_{xx}^{(1)}\right)+\sigma_{yy}\left(\delta\varepsilon_{yy}^{(0)}+z\delta\varepsilon_{yy}^{(1)}\right)\right.\right.\\&\left.\left.+\ \sigma_{xy}\left(\delta\gamma_{xy}^{(0)}+z\delta\gamma_{xy}^{(1)}\right)+\sigma_{xz}\delta\gamma_{xz}^{(0)}+\sigma_{yz}\delta\gamma_{yz}^{(0)}\right]dz\right\}dxdy\\ \delta V=&-\int_{\Omega_0}\left[\left(q_b+q_t\right)\delta w_0\right]dxdy-\int_{\Gamma_\sigma}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left[\hat{\sigma}_{nn}\left(\delta u_n+z\delta\phi_n\right)\right.\\&\left.+\ \hat{\sigma}_{ns}\left(\delta u_s+z\delta\phi_s\right)+\hat{\sigma}_{nz}\delta w_0\ \right]dzds\\ \delta K=&\int_{\Omega_0}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho_0\left[\left(\dot{u}_0+z\dot{\phi}_x\right)\left(\delta\dot{u}_0+z\delta\dot{\phi}_x\right)+\left(\dot{v}_0+z\dot{\phi}_y\right)\left(\delta\dot{v}_0+z\delta\dot{\phi}_y\right)\right.\\&\left.+\ \dot{w}_0\delta\dot{w}_0\right]dz\ dxdy\end{aligned}$$

معادله 4

که در عبارت بالا q_b ، نیروی وارده از سطح پایین صفحه و q_t نیروی وارده بر سطح بالایی صفحه است. همچنین $(\hat{\sigma}_{nn},\hat{\sigma}_{ns},\hat{\sigma}_{nz})$ مقدار تنش موجود در قسمت Γ_a از مرز Γ میباشند. $(\delta u_{0n},\delta u_{0s})$ جابهجایی مجازی در جهت عمود و مماس بر مرزΓ و ρ_0 چگالی ماده سازنده ورق هستند. با جایگذاری معادله 4 در 3 و جایگذاری متنجه ها از رابطه 6 خواهیم داشت :

$$
\begin{aligned}
0=\int_0^T\Bigg\{\int_{\Omega_0}\Big[&N_{xx}\delta\varepsilon_{xx}^{(0)}+M_{xx}\delta\varepsilon_{xx}^{(1)}+N_{yy}\delta\varepsilon_{yy}^{(0)}+M_{yy}\delta\varepsilon_{yy}^{(1)}+N_{xy}\delta\gamma_{xy}^{(0)}+M_{xy}\delta\gamma_{xy}^{(1)}\\
&+Q_x\delta\gamma_{xz}^{(0)}+Q_y\delta\gamma_{yz}^{(0)}-q\delta w_0-I_0\left(\dot{u}_0\delta\dot{u}_0+\dot{v}_0\delta\dot{v}_0+\dot{w}_0\delta\dot{w}_0\right)\\
&-I_1\left(\dot{\phi}_x\delta\dot{u}_0+\dot{\phi}_y\delta\dot{v}_0+\delta\dot{\phi}_x\dot{u}_0+\delta\dot{\phi}_y\dot{v}_0\right)-I_2\left(\dot{\phi}_x\delta\dot{\phi}_x+\dot{\phi}_y\delta\dot{\phi}_y\right)\Big]\,dxdy\\
-\int_{\Gamma_\sigma}&\left(\hat{N}_{nn}\delta u_n+\hat{N}_{ns}\delta u_s+\hat{M}_{nn}\delta\phi_n+\hat{M}_{ns}\delta\phi_s+\hat{Q}_n\delta w_0\right)ds\Bigg\}dt
\end{aligned}
$$

معادله 5

$$
\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix} N_{xx}\\ N_{yy}\\ N_{xy}\end{Bmatrix}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}dz,\quad \begin{Bmatrix} M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\end{Bmatrix}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}z\ dz\\
&\begin{Bmatrix}\hat{N}_{nn}\\ \hat{N}_{ns}\end{Bmatrix}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\begin{Bmatrix}\hat{\sigma}_{nn}\\ \hat{\sigma}_{ns}\end{Bmatrix}dz,\quad \begin{Bmatrix}\hat{M}_{nn}\\ \hat{M}_{ns}\end{Bmatrix}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\begin{Bmatrix}\hat{\sigma}_{nn}\\ \hat{\sigma}_{ns}\end{Bmatrix}z\ dz\\
&\begin{Bmatrix} I_0\\ I_1\\ I_2\end{Bmatrix}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\begin{Bmatrix}1\\ z\\ z^2\end{Bmatrix}\rho_0\ dz,\qquad \hat{Q}_n=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\hat{\sigma}_{nz}\ dz
\end{aligned}
$$

معادله 6

همانطور که در معادله 5 مشاهده میشود علاوه بر منتجه های تنش (N_{xy}, N_{yy}, N_{xx}) و منتجه های گشتاور (M_{xy}, M_{yy}, M_{xx}) ، جملات (Q_x, Q_y) نیز نمایان شدند که بیانگر منتجه های نیروی عرضی می باشند. این منتجه ها از طریق رابطه 7 ، به همراه ضریب اصلاحی به نام ضریب اصلاح برش (K) تعریف میگردند.

$$
\begin{Bmatrix} Q_x\\ Q_y\end{Bmatrix}=K\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\begin{Bmatrix}\sigma_{xz}\\ \sigma_{yz}\end{Bmatrix}dz
$$

معادله 7

با استفاده از معادله 5 و روش حساب تغییرات، میتوان جملات را بر حسب جابه جایی ها مرتب نمود تا رابطه زیر بدست آید:

$$
\begin{aligned}
0=\int_0^T\int_{\Omega_0}\Big[&-\left(N_{xx,x}+N_{xy,y}-I_0\ddot{u}_0-I_1\ddot{\phi}_x\right)\delta u_0\\
&-\left(N_{xy,x}+N_{yy,y}-I_0\ddot{v}_0-I_1\ddot{\phi}_y\right)\delta v_0\\
&-\left(M_{xx,x}+M_{xy,y}-Q_x-I_2\ddot{\phi}_x-I_1\ddot{u}_0\right)\delta\phi_x\\
&-\left(M_{xy,x}+M_{yy,y}-Q_y-I_2\ddot{\phi}_y-I_1\ddot{v}_0\right)\delta\phi_y\\
&-\left(Q_{x,x}+Q_{y,y}+\mathcal{N}(w_0)+q-I_0\ddot{w}_0\right)\delta w_0\Big]dxdy\\
+\int_0^T\int_\Gamma\Big[&\left(N_{nn}-\hat{N}_{nn}\right)\delta u_n+\left(N_{ns}-\hat{N}_{ns}\right)\delta u_s+\left(Q_n-\hat{Q}_n\right)\delta w_0\\
&+\left(M_{nn}-\hat{M}_{nn}\right)\delta\phi_n+\left(M_{ns}-\hat{M}_{ns}\right)\delta\phi_s\Big]dsdt
\end{aligned}
$$

معادله 8

$$\mathcal{N}(w_0)=\frac{\partial}{\partial x}\left(N_{xx}\frac{\partial w_0}{\partial x}+N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial x}+N_{yy}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)$$

معادله 9

اکنون با صفر در نظر گرفتن ضرایب معادله بالا ،5 معادله حرکت کوپل و با صفر کردن ضرایب انتگرال روی مرز شرایط مرزی استخراج خواهد شد

برای معادله حاکم بر حرکت ورق خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=I_0\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}+I_1\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}=I_0\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}+I_1\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(N_x\frac{\partial w_0}{\partial x}+N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial y}\left(N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial x}+N_y\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)+q=I_0\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=I_2\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}+I_1\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}-Q_y=I_2\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}+I_1\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

معادله 10

با توجه به تعریف I_1 به صورت تابعی فرد نسبت به z ، $I_1=0$ قرار خواهد گرفت. همچنین از اثرات اینرسی صفحه ای$(u_{0,tt}, v_{0,tt})$ صرف نظر خواهد شد.تا معادلات به صورت زیر در آیند :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(N_x\frac{\partial w_0}{\partial x}+N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial y}\left(N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial x}+N_y\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)+q=I_0\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=I_2\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}-Q_y=I_2\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

معادله 11

با وجود معادله 11 معادلات حاکم بر حرکت صفحه با استفاده از FSDT بدست آمده است . معادله ی حاضر یک دستگاه معادلاتی مشتقات جزئی غیر خطی کوپل شده است که نمیتوان با روش های موجود به حل آن پرداخت اما در این مقاله سعی شده است با تعریف تابع تنش ایری (Airry) و استفاده از عملیات جبری عملگرهای دیفرانسیلی ، معادلات ساده تر شده اند.

با تعریف تابع تنش به صورت زیر :

$$N_x = \psi_{,yy} \quad , \quad N_y = \psi_{,xx} \quad , \quad N_{xy} = -\psi_{,xy}$$

معادله 12

دو عبارت اول معادله 11 ارضا خواهند شد و معادله به 3 معادله کاهش میابد. حال باری حل معادله حرکت یک معادله دیگر به دستگاه اضافه خواهد شد تا نتایج به دست آیند. این معادله چهارم ، معادله سازگاری موجود در روابط الاستیسیته به صورت زیر است :

$$\varepsilon^{(0)}_{x,yy} + \varepsilon^{(0)}_{y,xx} - \varepsilon^{(0)}_{xy,xy} = w^2_{0,xy} - w_{0,xx}w_{0,yy}$$

معادله 13

برای بیان ممانهای موجود در روابط بر حسب تابع نیرو و چرخش ها، از معکوس جزئی رابطه ماتریسی استفاده میشود:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{0}} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^* & \mathbf{B}^* \\ -(\mathbf{B}^*)^T & \mathbf{D}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = K \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{0,y} + \varphi_y \\ w_{0,x} + \varphi_x \end{Bmatrix}$$

معادله 14

$$\{\boldsymbol{\kappa}\} = \left\{ \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \quad \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \quad \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \right\}^T$$
$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^* = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^* = \mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

معادله 15

با جایگذاری روابط 14 و 15 در معادله ی 11 و 13 خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} &K[A_{45}w_{,xy} + A_{45}\varphi_{y,x} + A_{55}w_{,xx} + A_{55}\varphi_{x,x}] + K[A_{44}w_{,yy} \\ &\quad + A_{44}\varphi_{y,y} + A_{45}w_{,xy} + A_{45}\varphi_{x,y}] + \psi_{,yy}w_{,xx} + \psi_{,xx}w_{,yy} \\ &\quad - 2\psi_{,xy}w_{,xy} + q = I_0\ddot{w} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &D^*_{11}\varphi_{x,xx} + D^*_{12}\varphi_{y,xy} + D^*_{16}\varphi_{x,xy} + D^*_{16}\varphi_{y,xx} + D^*_{16}\varphi_{x,xy} \\ &\quad + D^*_{26}\varphi_{y,yy} + D^*_{66}\varphi_{x,yy} + D^*_{66}\varphi_{y,xy} - K[A_{45}w_{,y} + A_{45}\varphi_y \\ &\quad + A_{55}w_{,x} + A_{55}\varphi_x] = I_2\ddot{\varphi}_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &D^*_{16}\varphi_{x,xx} + D^*_{26}\varphi_{y,yy} + D^*_{66}\varphi_{x,xy} + D^*_{66}\varphi_{y,xx} + D^*_{12}\varphi_{x,xy} \\ &\quad + D^*_{22}\varphi_{y,yy} + D^*_{26}\varphi_{x,yy} + D^*_{26}\varphi_{y,xy} - K[A_{44}w_{,y} + A_{44}\varphi_y \\ &\quad + A_{45}w_{,x} + A_{45}\varphi_x] = I_2\ddot{\varphi}_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &A^*_{22}\psi_{,xxxx} - 2A^*_{26}\psi_{,xxxy} + (2A^*_{12} + A^*_{66})\psi_{,xxyy} - 2A^*_{16}\psi_{,xyyy} + A^*_{11}\psi_{,yyyy} \\ &\quad = w^2_{,xy} - w_{,xx}w_{,yy} \end{aligned}$$

معادله 16

همانطور که در روند روش همیلتون دیده شد شرایط مرزی به طور به خصوص بررسی نگردید اما در این قسمت برای تعریف یک تابع تغییر مکان عرضی آزمایشی، شرایط مرزی به صورت تکیه گاه ساده و بدون امکان حرکت صفحه ای در لبه ها در نظرگرفته میشوند :

$$w = w_{,xx} = \psi_{,xy} = u_0 = 0 \quad (x = 0, a)$$
$$w = w_{,yy} = \psi_{,xy} = v_0 = 0 \quad (y = 0, b)$$

معادله 17

$$w = hf(t)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

معادله 18

تابع آزمایشی فوق از ضرب یک تابع زمانی F(t) در یک تابع فضایی، به شرطی که این تابع شرایط مرزی هندسی را ارضا کند، تشکیل شده است. در این رابطه m و n نشانگر مود حرکت میباشند.

با استفاده از تابع تغییر مکان عرضی آزمایشی، و حل معادله سازگاری 16 تابع تنش آزمایشی بدست خواهد آمد :

$$\psi = k_1 x^2 + k_2 y^2 + \frac{h^2 f^2(t)}{32}\left\{\frac{(n/b)^2}{A_{22}^*(m/a)^2}\cos\left(\frac{2m\pi x}{a}\right) + \frac{(m/a)^2}{A_{11}^*(n/b)^2}\cos\left(\frac{2n\pi y}{b}\right)\right\}$$

$$k_1 = -\frac{h^2 f^2(t)}{16}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 A_{12}^* - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 A_{11}^*\right]\left(A_{11}^* A_{22}^* - {A_{12}^*}^2\right)^{-1}$$

$$k_2 = \frac{h^2 f^2(t)}{16}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 A_{22}^* - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 A_{12}^*\right]\left(A_{11}^* A_{22}^* - {A_{12}^*}^2\right)^{-1}$$

معادله 19

حال با استفاده از معادلات 16b و 16c و تعریف عملگر های دیفرانسیلی ، عبارت های زیر بدست خواهد آمد :

$$\left(D_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2} - I_2\frac{\partial^2}{\partial t^2} - KA_{55}\right)\phi_x + \left((D_{12} + D_{66})\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right)\phi_y = KA_{55}\frac{\partial}{\partial x}w$$

$$\left((D_{12} + D_{66})\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right)\phi_x + \left(D_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2} - I_2\frac{\partial^2}{\partial t^2} - KA_{44}\right)\phi_y = KA_{44}\frac{\partial}{\partial y}w$$

معادله 20

سپس، با حل دستگاه فوق به صورت جبری، مجهولات φ_x و φ_y به دست می آیند:

$$\phi_x = \left[\frac{KA_{55}\frac{\partial}{\partial x}\left(D_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+D_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-I_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}-KA_{44}\right)-KA_{44}\frac{\partial}{\partial y}\left((D_{12}+D_{66})\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)}{\left(D_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+D_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-I_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}-KA_{55}\right)\left(D_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+D_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-I_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}-KA_{44}\right)-K^2A_{44}A_{55}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}}\right]w$$

$$\phi_y = \left[\frac{KA_{44}\frac{\partial}{\partial y}\left(D_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+D_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-I_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}-KA_{55}\right)-KA_{55}\frac{\partial}{\partial x}\left((D_{12}+D_{66})\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)}{\left(D_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+D_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-I_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}-KA_{55}\right)\left(D_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+D_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-I_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}-KA_{44}\right)-K^2A_{44}A_{55}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}}\right]w$$

معادله 21

$$L_1^* = D_{11}\tfrac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{66}\tfrac{\partial^2}{\partial y^2} - I_2\tfrac{\partial^2}{\partial t^2} - KA_{55},\ L_2^* = L_4^* = (D_{12}+D_{66})\tfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}$$

$$L_3^* = KA_{55}\tfrac{\partial}{\partial x},\ L_5^* = D_{66}\tfrac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{22}\tfrac{\partial^2}{\partial y^2} - I_2\tfrac{\partial^2}{\partial t^2} - KA_{44},\ L_6^* = KA_{44}\tfrac{\partial}{\partial y},$$

معادله 22

با جایگذاری معادله 21 در معادله 16a خواهیم داشت :

$$\Big\{K\Big[A_{55}\tfrac{\partial}{\partial x}(L_2^*L_6^* - L_3^*L_5^*) + A_{44}\tfrac{\partial}{\partial y}(L_3^*L_4^* - L_1^*L_6^*) + \Big(A_{55}\tfrac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{44}\tfrac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)(L_2^*L_4^* - L_1^*L_5^*)\Big] + \Big(\tfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\cdot\tfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \tfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\cdot\tfrac{\partial^2}{\partial y^2} - 2\tfrac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\cdot\tfrac{\partial^2}{\partial x\partial y} - I_0\tfrac{\partial^2}{\partial t^2}\Big)(L_2^*L_4^* - L_1^*L_5^*)\Big\}w + (L_2^*L_4^* - L_1^*L_5^*)q = 0$$

معادله 23

رابطه 23 یک معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی بر حسب ψ و w ، که توابعی معلوم بر حسب توابع معلوم $F(t)$ هستند، میباشد. این معادله برای چندلایه ای الیاف فلز متقارن که لایه های کامپوزیتیِ الیاف - متقاطع دارد، نیز صادق است.

روش گلرکین

روش گلرکین توسط معادله زیر اعمال میشود :

$$\iint_A L\cdot\sin\left(\tfrac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\tfrac{n\pi y}{b}\right)dxdy = 0$$

معادله 24

درعبارت بالا L برابر با سمت چپ معادله 23 میباشد. در روش گلرکین، تابعی که برای w فرض میشود، فقط باید شرایط مرزی هندسی را ارضا کند. نتایجی که در این تحقیق ارائه میشود را نمیتوان برای ورق هایی با شرایط مرزی گیردار یا ورق های چندلایهای متقارن الیاف - مورب به کار برد زیرا در مورد ورق با شرایط مرزی گیردار، تابع فضایی که برای w فرض میشود، با تابع شکل ورق متفاوت است (در حالی که در شرایط مرزی ساده، معادله 18 نشان دهنده تابع شکل ورق نیزمی باشد). در ورق چندلایه ای متقارن الیاف - مورب، مولفه های سفتی A16 ، A 26، D 16 و D 26 مساوی صفر نیستند، در نتیجه کوپلینگ کشش – برش (به خاطر A16 وA26) و کوپلینگ خمش - پیچش (به خاطر D16و

D23) وجود دارند. بنابراین واضح است که فرض تابع فضایی به صورت سینوس برای تکیه گاه ساده کاملاً متفاوت از تابع شکل این ورق میباشد. در نتیجه نتایج حاصل تفاوت زیادی در مقایسه با مقادیر دقیق خواهند داشت .البته در ورق چندلایه ای الیاف - مورب برای تعداد لایه های بیشتر (مثلاً 5 لایه)، مقادیر حاصل شده تا حدی قابل قبول بودند. علت این است که در این نوع از چندلایه ای ها، سفتی های A16، A26، D 16 وD 26 به ازای $N = 3$ بیشترین مقدار را دارند و با افزایش تعداد لایه ها ، مقدار این سفتی ها متناسب با $\frac{1}{N}$ کاهش می یابند.

برای جایگذاری معادله 23 در رابطه گلرکین از برنامه تجاری Maple ، با استفاده از کد زیر استفاده گردیده است.

restart;

with(LinearAlgebra) :
with(VectorCalculus) :

local D :

\# Define symbolic functions
$alias(F = F(t), W = W(x, y, t), S = S(x, y, t), P = P(x, y, t))$:
\# Define symbolic matrices and vectors
\# Define symbolic matrices and vectors

\#variables

$$Q11 := \frac{E_1}{(1 - v_{12} \cdot v_{21})} :$$
$$Q12 := \frac{(v_{12} \cdot E_2)}{(1 - v_{12} \cdot v_{21})} :$$
$$Q22 := \frac{E_2}{(1 - v_{12} \cdot v_{21})} :$$
$$Q66 := G_{12} :$$
$$Q44 := G_{23} :$$
$$Q55 := G_{13} :$$
$$A := Matrix(3, 3, [[h \cdot Q11 \cdot 2, h \cdot Q12, 0], [h \cdot Q12, h \cdot Q22 \cdot 2, 0], [0, 0, h \cdot Q66]]);$$
$$A44 := h \cdot Q44 :$$
$$A55 := h \cdot Q55 :$$
$$A45 := 0 :$$
$$\mathrm{D} := Matrix(3, 3, [[h\hat{}3/12*Q11, h\hat{}3/12*Q12, 0], [h\hat{}3/12*Q12, h\hat{}3/12*Q22, 0], [0, 0, h\hat{}3/12*Q66]]);$$
$$Zero3x3 := Matrix([[0, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 0]]) :$$
$$Zero3x3\_2 := Matrix([[0, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 0]]) :$$
$$U := Array([[A, Zero3x3], [Zero3x3\_2, \mathrm{D}]]);$$

$$K_1 := -\frac{h^2 \cdot F^2 \cdot \left(\left(\frac{m \cdot \mathrm{Pi}}{a} \right)^2 \cdot A[1, 2] - \left(\frac{n \cdot \mathrm{Pi}}{b} \right)^2 \cdot A[1, 1] \right)}{16 \cdot (A[1, 1] \cdot A[2, 2] - (A[1, 2])^2)} :$$
$$K_2 := \frac{h^2 \cdot F^2 \cdot \left(\left(\frac{m \cdot \mathrm{Pi}}{a} \right)^2 \cdot A[2, 2] - \left(\frac{n \cdot \mathrm{Pi}}{b} \right)^2 \cdot A[1, 2] \right)}{16 \cdot (A[1, 1] \cdot A[2, 2] - (A[1, 2])^2)} :$$
$$W := h \cdot F \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \mathrm{Pi} \cdot x}{a} \right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \mathrm{Pi} \cdot y}{b} \right) :$$
$$S := K_1 \cdot x^2 + K_2 \cdot y^2 + \left(\frac{h^2 \cdot F^2}{32} \right) \cdot \left(\left(\left(\frac{\left(\frac{n}{b} \right)^2}{A[2, 2] \cdot \left(\frac{m}{a} \right)^2} \right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot m \cdot \mathrm{Pi} \cdot x}{a} \right) \right) + \left(\left(\frac{\left(\frac{m}{a} \right)^2}{A[1, 1] \cdot \left(\frac{n}{b} \right)^2} \right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot n \cdot \mathrm{Pi} \cdot y}{b} \right) \right) \right) :$$

$$L7 := -K \cdot A55 \cdot J \cdot \frac{\partial^3}{\partial x \, \partial t^2}(W) + K \cdot A55 \cdot \mathrm{D}[3, 3] \cdot \frac{\partial^3}{\partial x^3}(W) + K \cdot A55 \cdot \mathrm{D}[2, 2] \cdot \frac{\partial^3}{\partial x \, \partial y^2}(W) - K \cdot A44 \cdot K \cdot A55 \cdot \frac{\partial}{\partial x}(W) - K \cdot A44 \cdot (\mathrm{D}[3, 3] + \mathrm{D}[1, 2]) \cdot \frac{\partial^3}{\partial x \, \partial y^2}(W);$$

$$L8 := -J \cdot \mathrm{D}[1, 1] \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^2 \, \partial t^2}(W) - J \cdot \mathrm{D}[3, 3] \cdot \frac{\partial^4}{\partial y^2 \, \partial t^2}(W) + J \cdot K \cdot A55 \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}(W) - J \cdot \mathrm{D}[3, 3] \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^2 \, \partial t^2}(W) + \mathrm{D}[3, 3] \cdot \mathrm{D}[1, 1] \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^4}(W) + \mathrm{D}[3, 3] \cdot \mathrm{D}[3, 3] \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^2 \, \partial y^2}(W) - \mathrm{D}[3, 3] \cdot K \cdot A55 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}(W) - \mathrm{D}[2, 2] \cdot J \cdot \frac{\partial^4}{\partial y^2 \, \partial t^2}(W) + \mathrm{D}[2, 2] \cdot \mathrm{D}[1, 1] \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^2 \, \partial y^2}(W) + \mathrm{D}[2, 2] \cdot \mathrm{D}[3, 3] \cdot \frac{\partial^4}{\partial y^4}(W) - \mathrm{D}[2, 2] \cdot K \cdot A55 \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2}(W) + K \cdot A44 \cdot J \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}(W) - K \cdot A44 \cdot \mathrm{D}[1, 1] \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}(W) - K \cdot A44 \cdot \mathrm{D}[3, 3] \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2}(W) + K \cdot A55 \cdot K \cdot A44 \cdot (W) - (\mathrm{D}[3, 3] + \mathrm{D}[1, 2])^2 \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^2 \, \partial y^2}(W);$$

$$L9 := -K \cdot A44 \cdot J \cdot \frac{\partial^3}{\partial y \, \partial t^2}(W) + K \cdot A44 \cdot \mathrm{D}[1, 1] \cdot \frac{\partial^3}{\partial y \, \partial x^2}(W) + K \cdot A44 \cdot \mathrm{D}[3, 3] \cdot \frac{\partial^3}{\partial y^3}(W) - K \cdot A44 \cdot K \cdot A55 \cdot \frac{\partial}{\partial y}(W) - K \cdot A55 \cdot (\mathrm{D}[3, 3] + \mathrm{D}[1, 2]) \cdot \frac{\partial^3}{\partial y \, \partial x^2}(W);$$

$$L10 := -J \cdot \mathrm{D}[1, 1] \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^2 \, \partial t^2}(S) - J \cdot \mathrm{D}[3, 3] \cdot \frac{\partial^4}{\partial y^2 \, \partial t^2}(S) + J \cdot K \cdot A55 \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}(S) - J \cdot \mathrm{D}[3, 3] \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^2 \, \partial t^2}(S) + \mathrm{D}[3, 3] \cdot \mathrm{D}[1, 1] \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^4}(S) + \mathrm{D}[3, 3] \cdot \mathrm{D}[3, 3] \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^2 \, \partial y^2}(S) - \mathrm{D}[3, 3] \cdot K \cdot A55 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}(S) - \mathrm{D}[2, 2] \cdot J \cdot \frac{\partial^4}{\partial y^2 \, \partial t^2}(S) + \mathrm{D}[2, 2] \cdot \mathrm{D}[1, 1] \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^2 \, \partial y^2}(S) + \mathrm{D}[2, 2] \cdot \mathrm{D}[3, 3] \cdot \frac{\partial^4}{\partial y^4}(S) - \mathrm{D}[2, 2] \cdot K \cdot A55 \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2}(S) + K \cdot A44 \cdot J \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}(S) - K \cdot A44 \cdot \mathrm{D}[1, 1] \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}(S) - K \cdot A44 \cdot \mathrm{D}[3, 3] \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2}(S) + K \cdot A55 \cdot K \cdot A44 \cdot (S) - (\mathrm{D}[3, 3] + \mathrm{D}[1, 2])^2 \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^2 \, \partial y^2}(S);$$

$$P1 := K \cdot \left(\left(A55 \cdot \frac{\partial}{\partial x}(L7) + A45 \cdot \frac{\partial}{\partial y}(L7) \right) + \left(A45 \cdot \frac{\partial}{\partial x}(L9) + A44 \cdot \frac{\partial}{\partial y}(L9) \right) \right) :$$
$$P2 := K \cdot \left(2 \cdot A45 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y}(L8) + A55 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}(L8) + A44 \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2}(L8) \right);$$
$$P3 := \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}(L10) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}(L8) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(L10) \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2}(L8) \right) :$$
$$P4 := \left(-2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y}(L10) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y}(L8) - I0 \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}(L8) \right) :$$

$$O\_r := \int_0^b \int_0^a \left(P1 \cdot \left(\sin\left(\frac{n \cdot \mathrm{Pi} \cdot x}{a} \right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \mathrm{Pi} \cdot y}{b} \right) \right) \right) dx \, dy;$$
$$O\_r2 := \int_0^b \int_0^a \left(P2 \cdot \left(\sin\left(\frac{n \cdot \mathrm{Pi} \cdot x}{a} \right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \mathrm{Pi} \cdot y}{b} \right) \right) \right) dx \, dy;$$
$$O\_r3 := \int_0^b \int_0^a \left(P3 \cdot \left(\sin\left(\frac{n \cdot \mathrm{Pi} \cdot x}{a} \right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \mathrm{Pi} \cdot y}{b} \right) \right) \right) dx \, dy;$$
$$O\_r4 := \int_0^b \int_0^a \left(P4 \cdot \left(\sin\left(\frac{n \cdot \mathrm{Pi} \cdot x}{a} \right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \mathrm{Pi} \cdot y}{b} \right) \right) \right) dx \, dy;$$

$$eq := O\_r + O\_r2 + O\_r3 + O\_r4;$$
$$eq := subs(\sin(n \cdot \mathrm{Pi}) = 0, eq) :$$
$$eq := subs(\sin(m \cdot \mathrm{Pi}) = 0, eq) :$$
$$eq := subs(\cos(n \cdot \mathrm{Pi}) = 1, eq) :$$
$$eq := subs(\cos(m \cdot \mathrm{Pi}) = 1, eq);$$

با اعمال روش گلرکین و با توجه به این که در ارتعاش آزاد $q = 0$ است، معادله زیر به دست میآید:

$$Z_1\ddot{f}(t) + Z_2 f(t) + Z_3 f^3(t) + Z_4 \ddot{f}(t) f^2(t) + Z_5 \dot{f}^2(t) f(t) = 0$$

معادله 25

در رابطه فوق،Z_i ضرایب ثابتی هستند که تابع خواص ورق میباشند؛ Z_1 ،Z_4 و Z_5 تابع چگالی و مولفه های سفتی ورق بوده و واحدشان $\frac{Kg^3 mm}{s^4}$ باشد، در حالی که، Z_2 و Z_3 فقط تابع مولفه های سفتی ورق بوده و واحدشان $\frac{Kg^3 mm}{s^6}$ میباشد.

به عنوان مثال این ضرایب بر حسب سفتی های ورق های متقارن (چندلای های متقارن و چندلای های الیاف فلز متقارن) به دست آمدهاند و مقادیر آنها به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned}
Z_1 = \frac{-h}{4a^3b^3}\Big\{ & I_0\big(\pi^4 D_{22}D_{66}a^4 + \pi^2 KA_{44}D_{66}b^2a^4 + b^4\pi^4 D_{66}D_{11} + \pi^2 KA_{55}D_{22}b^2a^4 \\
& \pi^2 KA_{44}D_{11}a^2b^4 - \pi^4 D_{12}^2 b^2a^2 + K^2 A_{44}A_{55}b^4a^4 + \pi^4 D_{22}D_{11}b^2a^2 \\
& -2\pi^4 D_{66}D_{12}b^2a^2 + \pi^2 KA_{55}D_{66}a^2b^4\big) \\
& I_2 K\big(\pi^4 A_{44}D_{66}a^2(a^2+b^2) + \pi^4 A_{55}D_{22}b^2a^2 + \pi^4 A_{44}D_{11}b^2a^2 + \\
& \pi^4 A_{55}D_{11}b^4 + \pi^2 KA_{44}A_{55}a^2b^2(a^2+b^2) + \pi^4 A_{55}D_{66}b^2(a^2+b^2) \\
& +\pi^4 A_{44}D_{22}a^4\big)\Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_2 = \frac{-Kh\pi^4}{4a^5b^5}\Big\{ & \pi^2\big(A_{55}b^6D_{66}D_{11} + A_{44}a^6D_{22}D_{66} + A_{55}b^2a^4D_{22}D_{66} + A_{44}D_{22}D_{11}a^4b^2 \\
& A_{55}b^4D_{22}D_{11}a^2 - A_{44}a^4D_{12}^2b^2 + A_{44}a^2b^4D_{66}D_{11} - A_{55}b^4D_{12}^2a^2 \\
& -2A_{55}b^4D_{66}D_{12}a^2 - 2A_{44}a^4D_{66}D_{12}b^2\big) + KA_{44}A_{55}a^2b^2\big(4b^2a^2D_{66} + \\
& 2a^2b^2D_{12} + b^4D_{11} + a^4D_{22}\big)\Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_3 = \frac{-\pi^4h^3}{64b^7a^7A_{22}A_{11}}\Big\{ & \big(-A_{12}^2a^4A_{22} + 3A_{22}^2a^4A_{11} - A_{12}^2b^4A_{11} + 4A_{12}a^2b^2A_{11}A_{22} + 3A_{11}^2b^4A_{22}\big) \\
& \times\big(a^4\pi^2KA_{55}D_{22}b^2 + a^4K^2A_{44}A_{55}b^4 + a^4\pi^4D_{22}D_{66} + a^4\pi^2KA_{44}D_{66}b^2 \\
& -a^2\pi^4D_{12}^2b^2 - 2a^2\pi^4D_{66}D_{12}b^2 + a^2\pi^2KA_{44}D_{11}b^4 + a^2\pi^2KA_{55}D_{66}b^4 \\
& +a^2\pi^4D_{22}D_{11}b^2 + \pi^4D_{66}D_{11}b^4\big)\Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_4 = \frac{-3\pi^4h^3I_2}{64b^5a^5A_{22}A_{11}}\Big\{ & \big(-A_{12}^2a^4A_{22} + 3A_{22}^2a^4A_{11} - A_{12}^2b^4A_{11} + 4A_{12}a^2b^2A_{11}A_{22} + 3A_{11}^2b^4A_{22}\big) \\
& \times\big(a^2\pi^2(D_{22}+D_{66}) + a^2b^2K(A_{44}+A_{55}) + b^2\pi^2(D_{11}+D_{66})\big)\Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_5 = \frac{-3\pi^4h^3I_2}{32b^5a^5A_{22}A_{11}}\Big\{ & \big(-A_{12}^2a^4A_{22} + 3A_{22}^2a^4A_{11} - A_{12}^2b^4A_{11} + 4A_{12}a^2b^2A_{11}A_{22} + 3A_{11}^2b^4A_{22}\big) \\
& \times\big(a^2\pi^2(D_{22}+D_{66}) + a^2b^2K(A_{44}+A_{55}) + b^2\pi^2(D_{11}+D_{66})\big)\Big\}
\end{aligned}$$

معادله 26

رابطه ی 25 را میتوان به صورت بی بعد دوباره نویسی نمود:

$$f_{,\tau\tau}+\omega^2 f+\alpha_1^2 f^3+\beta_1^2 f_{,\tau\tau} f^2+\gamma_1^2 f_{,\tau}^2 f=0$$

معادله 27

در عبارت بالا ، ω فرکانس طبیعی خطی بی بعد، $\alpha_1{}^2$ ضریب جمله سفتی غیرخطی، $\beta_1{}^2$ و $\gamma_1{}^2$ ضرایب جملات اینرسی غیرخطی ای میباشند. f^3 ، جمله سفتی غیرخطی است ، زیرا ضریب آن فقط شامل مولفه های ماتریس های سفتی ورق مستطیلی میباشد، در حالی که $f^2\ f_{,\tau\tau}$ و $f\ f_{,\tau}{}^2$، به علت اینکه ضرایب شان علاوه بر مولفه های سفتی، شامل چگالی نیز هستند، جملات اینرسی غیرخطی میباشند.

زمان بی بعد در رابطه 27 عبارت است از:

$$\tau=\frac{1}{a^2}\sqrt{\Lambda}t$$

معادله 28

که برای ورق ایزوتروپ $\Lambda=\frac{E\,h^2}{2\rho_0(1+\nu)}$ ، برای ورق چندلایهای الیاف – متقاطع $\Lambda=\frac{E\,h^2}{\rho_0}$ و برای ورق چندلایه ای الیاف فلز $\Lambda=\frac{D_{11}^*}{I_0}$ در نظر گرفته شده اند.

روش مقیاس های چندگانه

برای اینکه بتوان معادله 27 را با استفاده از روش مقیاس های چندگانه حل کرد، باید جملات غیرخطی این معادله در یک پارامتر بی بعد کوچک و مثبت ضرب شده باشند. برای این منظور، با توجه به اینکه ضرایب جملات غیرخطی دارای عبارت h^2 می باشند، با تقسیم کردن جملات معادله بر a^2 ضریب کوچک و بی بعدی به صورت $(\frac{h}{a})^2$ برای جملات غیرخطی میشود. اگر این ضریب بی بعد با ε نشان داده شود، رابطه 27 به صورت زیر در میآید:

$$f_{,\tau\tau}+\omega^2 f+\varepsilon\left(\alpha^2 f^3+\beta^2 f_{,\tau\tau} f^2+\gamma^2 f_{,\tau}^2 f\right)=0$$

معادله 29

در روش مقیاسهای چندگانه، متغیرهای مستقل زمان به صورت زیر تعریف میشوند:

$$T_n=\varepsilon^n\tau \qquad (n=0,1,2,\dots)$$

معادله 30

با وجود این تعریف از متغیر زمان تابع زمانی F نیز به صورت زیر خواهد بود :

$$f(\tau;\varepsilon)=f_0(T_0,T_1,T_2,\dots)+\varepsilon f_1(T_0,T_1,T_2,\dots)+\varepsilon^2 f_2(T_0,T_1,T_2,\dots)+\cdots$$

معادله 31

اگر بسط تا مرتبه سه انجام بگیرد ، میتوان مشتقات جزئی T_n را به صورت زیر نوشت :

$$\frac{d}{d\tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2)$$

معادله 32

که دراین معادله $\mathrm{D_n}$ به طورت زیر تعریف خواهد شد :

$$D_0 \equiv \frac{\partial}{\partial T_0},\ D_1 \equiv \frac{\partial}{\partial T_1},\ \ D_2 \equiv \frac{\partial}{\partial T_2}$$

حال با دوباره نویسی معادله 29 با تغییر مقیاس های زمانی و همچنین مساوی هم قرار دادن ضرایب در معادله حاصل، سه رابطه زیر به دست میآیند:

$$D_0^2 f_0 + \omega^2 f_0 = 0$$

$$D_0^2 f_1 + \omega^2 f_1 = -2D_0 D_1 f_0 - \alpha^2 f_0^3 - \beta^2 f_0^2 (D_0^2 f_0) - \gamma^2 f_0 (D_0 f_0)^2$$

$$\begin{aligned} D_0^2 f_2 + \omega^2 f_2 = {} & -(D_1^2 + 2D_0 D_2) f_0 - 2D_0 D_1 f_1 - 3\alpha^2 f_0^2 f_1 - \beta^2 [2 f_0^2 (D_0 D_1 f_0) + \\ & f_0^2 (D_0^2 f_1) + 2 f_0 f_1 (D_0^2 f_0)] - \gamma^2 [f_1 (D_0 f_0)^2 + 2 f_0 (D_0 f_0)(D_0 f_1) + \\ & 2 f_0 (D_0 f_0)(D_1 f_0)] \end{aligned}$$

معادله 33

برای این محاسبات میتوان از دستور ساده زیر استفاده نمود و سپس با حذف جملات مرتبه بالا ، روابط 33 به دست خواهد آمد.

$restart;$

$f := f_0 + o \cdot f_1 + o^2 \cdot f_2 :$

$DF := \mathrm{D}_0 \cdot f + o \cdot \mathrm{D}_1 \cdot f + o^2 \cdot \mathrm{D}_2 \cdot f :$

$D2F := \mathrm{D}_0^{\,2} \cdot f + 2 \cdot o \cdot \mathrm{D}_0 \cdot \mathrm{D}_1 \cdot f + o^2 \cdot \left(\mathrm{D}_1^{\,2} \cdot f + 2 \cdot \mathrm{D}_0 \cdot \mathrm{D}_2 \cdot f\right) :$

$R := D2F + w^2 \cdot f + o \cdot \{a^2 \cdot F^3 + b^2 \cdot (D2F) \cdot f^2 + y^2 \cdot (DF) \cdot f\};$

$expand(R);$

حال جواب معادله دیفرانسیل جزئی 29 را میتوان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$f_0 = A_1(T_1, T_2)\exp(i\omega T_0) + cc$$

معادله 34

که در این رابطه ، $\mathrm{A_1}$ تابعی مختلط از $\mathrm{T_1}$ و $\mathrm{T_2}$ بوده و cc به معنی مزدوج مختلط جملات قبلی است.

با توجه به اینکه در روابطی که در ادامه ذکر میشوند از جایگذاری $\gamma^2 = 2\,\beta^2$ استفاده خواهد شد، پس از جایگذاری رابطه 34 در رابطه 33b به دست می آید:

$$D_0^2 f_1 + \omega^2 f_1 = (-2i\omega D_1 A_1 - 3A_1^2 \bar{A}_1 \alpha^2 + \omega^2 A_1^2 \bar{A}_1 \beta^2)\exp(i\omega T_0) + (3\omega^2\beta^2 - \alpha^2)A_1^3 \exp(3i\omega T_0) + cc$$

معادله 35

در عبارت بالا ، $\bar{A}_1$ مزدوج مختلط A_1 می باشد و برای اینکه f_1 پریودیک باشد، باید جملات منفرد (secular terms) در رابطه بالا مساوی صفر قرار داده بشوند . از همین رو خواهیم داشت :

$$D_0^2 f_1 + \omega^2 f_1 = (3\omega^2\beta^2 - \alpha^2)A_1^3 \exp(3i\omega T_0) + cc$$

معادله 36

$$-2i\omega D_1 A_1 - (3\alpha^2 - \omega^2\beta^2)A_1^2 \bar{A}_1 = 0$$

معادله 37

جواب خصوصی رابطه 36 عبارت است از:

$$f_1 = \frac{1}{8\omega^2}(\alpha^2 - 3\omega^2\beta^2)A_1^3 \exp(3i\omega T_0) + cc$$

معادله 38

حال با مراجعه به رابطه 33c و جایگذاری معادلات بدست آمده برای f_1 و f_0 خواهیم داشت :

$$D_0^2 f_2 + \omega^2 f_2 = [(\omega^2\beta^2 - 3\alpha^2)X\bar{A}_1^2 + i\omega(-2D_2A_1 - 4\beta^2 A_1\bar{A}_1 D_1 A_1 - 2\beta^2 A_1^2 D_1 \bar{A}_1) - D_1^2 A_1]\exp(i\omega T_0) + [-6\alpha^2 A_1 \bar{A}_1 X - \beta^2(-18\omega^2 X A_1 \bar{A}_1 + 6i\omega A_1^2 D_1 A_1 - 2i\omega A_1^2 D_1 \bar{A}_1) - 6i\omega D_1 X]\exp(3i\omega T_0) + [-3\alpha^2 A_1^2 X + 25\beta^2\omega^2 X A_1^2]\exp(5i\omega T_0) + cc$$

معادله 39

$$X = \frac{1}{8\omega^2}(\alpha^2 - 3\omega^2\beta^2)A_1^3$$

معادله 40

حذف جملات منفرد از رابطه 39 منجر به رابطه زیر میشود:

$$\frac{1}{8\omega^2}(\alpha^2 - 3\omega^2\beta^2)(\omega^2\beta^2 - 3\alpha^2)A_1^3\bar{A}_1^2 + i\omega(-2D_2A_1 - 4\beta^2A_1\bar{A}_1D_1A_1 - 2\beta^2A_1^2D_1\bar{A}_1) - D_1^2A_1 = 0$$

معادله 41

حال با بیان A_1 به صورت قطبی و جایگذاری آن در روابط 37 و 41 خواهیم داشت :

$$A_1 = \frac{1}{2}p\exp(iq)$$

معادله 42

$$-\omega\frac{\partial p}{\partial T_1} = 0$$

$$p\omega\frac{\partial q}{\partial T_1} + \frac{1}{8}(-3\alpha^2 + \beta^2\omega^2)p^3 = 0$$

$$-\omega\frac{\partial p}{\partial T_2} = 0$$

$$\omega p\frac{\partial q}{\partial T_2} = -\left(\frac{(\beta^2\omega^2-3\alpha^2)(\alpha^2-3\beta^2\omega^2)}{256\omega^2} + \frac{(-3\alpha^2+\beta^2\omega^2)^2}{128\omega^2} + \frac{\beta^2(-3\alpha^2+\beta^2\omega^2)}{16}\right)p^5$$

معادله 43

حال با توجه به این موضوع که p و q توابع حقیقی بر حسب T_1 و T_2 میباشند و با توجه به روابط معادله 43 خواهیم داشت :

$$p = p_0$$

معادله 44

$$q = \frac{p_0^2}{16\omega}\left[2q_1\varepsilon + \left(\frac{q_2}{2} + \frac{q_3}{8} + q_4\right)p_0^2\varepsilon^2\right]\tau + q_0$$

معادله 45

که p_0 و q_0 ثابت بوده و سایر ضرایب عبارتند از:

$$q_1 = 3\alpha^2 - \beta^2\omega^2$$

$$q_2 = \frac{1}{8\omega^2}(3\alpha^2 - \beta^2\omega^2)(\alpha^2 - 3\beta^2\omega^2)$$

$$q_3 = \frac{-1}{\omega^2}(3\alpha^2 - \beta^2\omega^2)^2$$

$$q_4 = -\beta^2(3\alpha^2 - \beta^2\omega^2)$$

معادله 46

جواب خصوصی معادله 39 پس از حذف جملات منفرد به صورت زیر میباشد:

$$f_2 = \frac{X_1}{8\omega^2}p_0^2 A_1^3 \exp(3i\omega T_0) + \frac{X_2}{24\omega^2}A_1^5 \exp(5i\omega T_0) + cc$$

$$X_1 = \frac{3}{32\omega^2}(3\beta^2\omega^2 - \alpha^2)(3\beta^2\omega^2 + \alpha^2) + \frac{3}{4}\beta^2(\beta^2\omega^2 - 3\alpha^2)$$

$$X_2 = \frac{1}{8\omega^2}(\alpha^2 - 3\beta^2\omega^2)(3\alpha^2 - 25\beta^2\omega^2)$$

معادله 47

حال با جایگذاری عبارات بدست آمده برای f_0 و f_1 و f_2 و جایگذاری آن در رابطه 31 خواهیم داشت :

$$f = \; p_0\cos(\widehat{\omega}\tau + q_0) + \varepsilon p_0^3 X_3 \cos(3\widehat{\omega}\tau + 3q_0) + \varepsilon^2 p_0^5[X_4\cos(3\widehat{\omega}\tau + 3q_0) + X_5\cos(5\widehat{\omega}\tau + 5q_0)] + O(\varepsilon^3)$$

معادله 48

حال با جایگذاری مقدار $\varepsilon = (\frac{h}{a})^2$ در عبارت بالا ، بدست می آید که :

$$f = p_0\cos(\widehat{\omega}\tau + q_0) + \left(\frac{h}{a}\right)^2 p_0^3 X_3\cos(3\widehat{\omega}\tau + 3q_0) + \left(\frac{h}{a}\right)^4 p_0^5[X_4\cos(3\widehat{\omega}\tau + 3q_0) + X_5\cos(5\widehat{\omega}\tau + 5q_0)]$$

معادله 49

به طوریکه :

$$X_3 = \left[\frac{1}{32\omega^2}(\alpha^2 - 3\beta^2\omega^2)\right], \quad X_4 = \frac{-X_1}{32\omega^2}, X_5 = \frac{-X_2}{384\omega^2},$$
$$\widehat{\omega} = \omega + \frac{p_0^2}{16\omega}\left(\frac{h}{a}\right)^2 \left\{2q_1 + \left[\frac{q_2}{2} + \frac{q_3}{8} + q_4\right]\left(\frac{h}{a}\right)^2 p_0^2\right\} + q_0$$

معادله 50

نسبت فرکانس غیرخطی را به صورت زیر میتوان نوشت:

$$\frac{\widehat{\omega}}{\omega} = \left[1 + \frac{q_1}{4\omega^2}\left(\frac{h}{a}\right)^2 p_0^2 + \frac{1}{8\omega^2}\left(\frac{h}{a}\right)^4 \left(\frac{q_1^2}{8\omega^2} + \frac{q_2}{2} + \frac{q_3}{8} + q_4\right) p_0^4\right]^{1/2}$$

معادله 51

حال با وجود معادله 49 میتوان تغییر مکان عرضی هر نقطه از ورق را با استفاده از رابطه 18 بدست آورد .

نتایج عددی :

نتایج عددی موجود در مقاله در دو حالت خطی و غیر خطی به بررسی دقت روش پیشنهادی در مقایسه با پژوهش های موجود میپردازد.

نتایج خطی

حالت اول : ورق ایزوتروپ مستطیلی

فرکانس بی بعد شده خطی از طریق تعریف فرکانس دورانی خطی با توجه به رابطه $\omega_0 = (\frac{z_2}{z_1})^{\frac{1}{2}}$ و ضرایب معادله 25 بدست می آید. که برای یک ورق مستطیلی ایزوتروپ برابر با عبارت زیر است :

$$\omega_0^2 = \frac{-KE\pi^4 h^2 (m^2b^2+n^2a^2)^2 [\pi^2 h^2 (m^2b^2+n^2a^2) + 12Ka^2b^2]}{\rho_0 (1+\nu) a^2 b^2} \times \{12Kh^2\pi^2a^2(m^2b^4 + n^2a^2b^2)(K\nu + \nu - K - 3) + 144K^2a^4b^4(\nu - 1) + h^4\pi^4(m^2b^2 + n^2a^2)^2(K\nu - 3K - 2)\}^{-1}$$

معادله 52

جدول 1 فرکانس خطی بی بعد یک ورق ایزوتروپ مربعی شکل را برای مودهای مختلف نشان میدهد. نسبت ضخامت به طول و ضریب پواسون این ورق، به ترتیب، برابر 0.1 و 0.3 در نظر گرفته شده است. فرکانس خطی بی بعد با استفاده از رابطه زیر به دست آمده است:

$$\omega = \omega_0 \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{2(1+\nu)}{E} \rho_0}$$

معادله 53

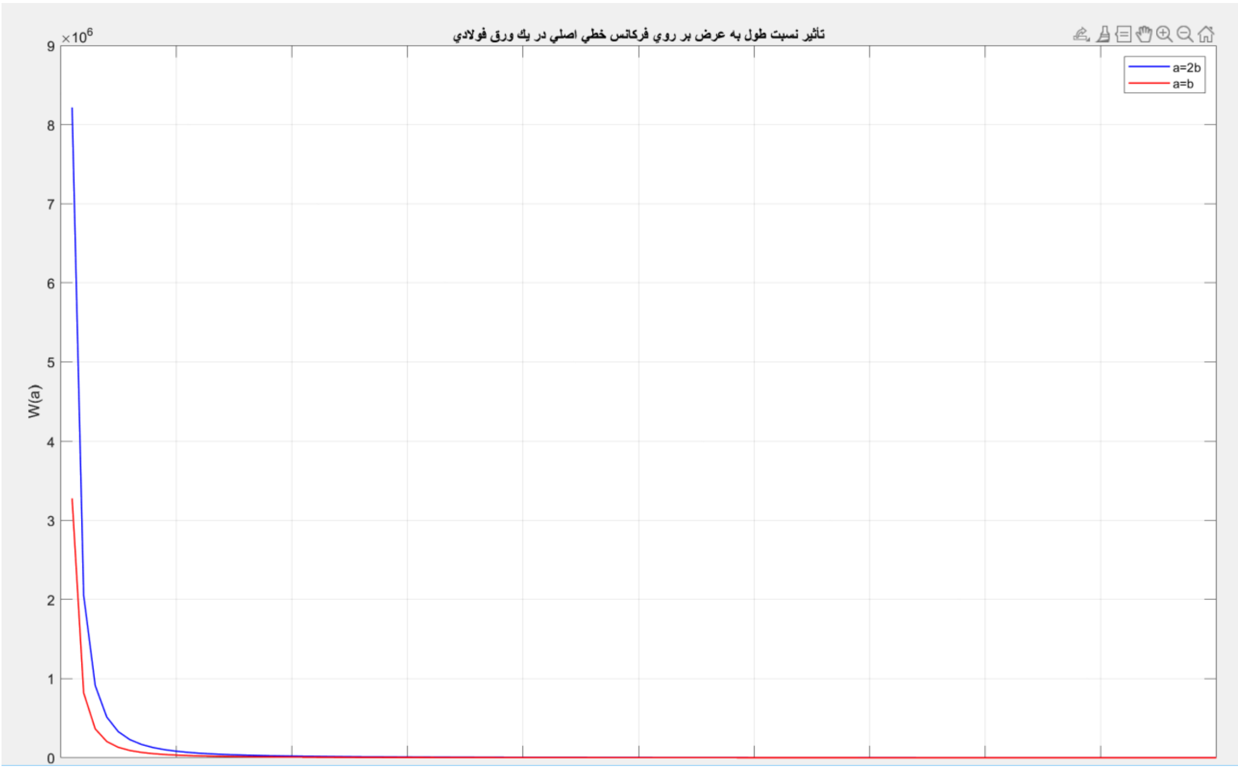
کد متلب زیر برای استخراج جدول زیر استفاده گردیده است.

```
K=1;
E=1;
a=1;
b=a;
h=0.1*a;
p0=1;
v=0.3;
w=zeros(3);
Er=zeros(3);
we=[9.315, 22.260, 41.715 ; 22.260, 34.207, 52.391 ; 41.714, 52.391, 1 ];

for n=1:3
    for m=1:3
     w01=(((-
K*E*(pi^4)*h^2)*((m^2)*(b^2)+(n^2)*(a^2))^2)*(pi^2*h^2*((m^2)*(b^2)+(n^2)*(a^2))+12*K*a^2*b^2)/(p0*(1+v)*a^2*b^2));
     w02=12*K^2*v*h^2*pi^2*a^2*(((m^2)*(b^4))+(n^2)*(a^2)*(b^2));
     w03=12*K*v*h^2*pi^2*a^2*((m^2)*(b^4)+(n^2)*(a^2)*(b^2));
     w04=(-12*K^2*h^2*pi^2*a^2*((m^2)*(b^4)+(n^2)*(a^2)*(b^2))-
36*K*h^2*pi^2*a^2*((m^2)*(b^4)+(n^2)*(a^2)*(b^2))+K*v*h^4*pi^4*(((m^2)*(b^2)+(n^2)*(a^2))^2)+144*K^2*a^4*b^4*(v-1)-
2*h^4*pi^4*(((m^2)*(b^2)+(n^2)*(a^2))^2)-3*K*h^4*pi^4*(((m^2)*(b^2)+(n^2)*(a^2))^2));
     w0=w01*(1/(w02+w03+w04));
     w(n,m)=sqrt(w0)*((a^2)/h)*sqrt((2*(1+v)*p0)/E);
     Er(n,m)=((w(n,m)-we(n,m))*100)/we(n,m);
    end
end
```

روش حل	(1،1)	(1،2)	(2،1)	(2،2)	(1،3)	(3،1)	(2،3)	(3،2)
جواب دقیق	9.315	22.260	22.260	34.207	41.714	41.714	52.391	52.391
پژوهش حاضر	9.337	22.326	22.326	34.249	41.679	41.679	52.137	52.137
خطا	0.236	0.296	0.296	0.123	-0.084	-0.084	-0.485	-0.485
استخراج شده	9.336666132759682	22.325787336144150	22.325787336144150	34.249317859511535	41.679154781297150	41.679154781297150	52.137284497076420	52.137284497076420

1 Table

نمودار نشان داده شده در شکل با استفاده از رابطه 52 برای فرکانس خطی اصلی رسم شده است و نشان میدهد که برای نسبت طول به عرض های $\frac{a}{b}$ بزرگتر، فرکانس خطی اصلی بزرگتری به دست می آید.



1 Figure

کد متلب زیر برای استخراج شکل یک استفاده گردیده است.

```
clc;
clear all

% Define symbolic variables
syms a;

% Define the numerical array for 'a'
a_vals = 0:1:100;

% Initialize an array to store the results of W(a) calculations
w_values = zeros(size(a_vals));
w1_values = zeros(size(a_vals));

% Calculate W(a) for each value of 'a'
for i = 1:length(a_vals)
    w_values(i) = W(a_vals(i));
end
% Calculate W(a) for each value of 'a'
for i = 1:length(a_vals)
    w1_values(i) = W1(a_vals(i));
end

% Plot the results
plot(a_vals, w_values, 'b-', 'LineWidth', 1)
hold on
plot(a_vals, w1_values, 'r-', 'LineWidth', 1)
hold off

xlabel('a')
ylabel('W(a)')
title('تأثير نسبت طول به عرض بر روي فركانس خطي اصلي در يك ورق فولادي')
legend('a=2b', 'a=b')
grid on

function w = W(a)
 K=1;
```

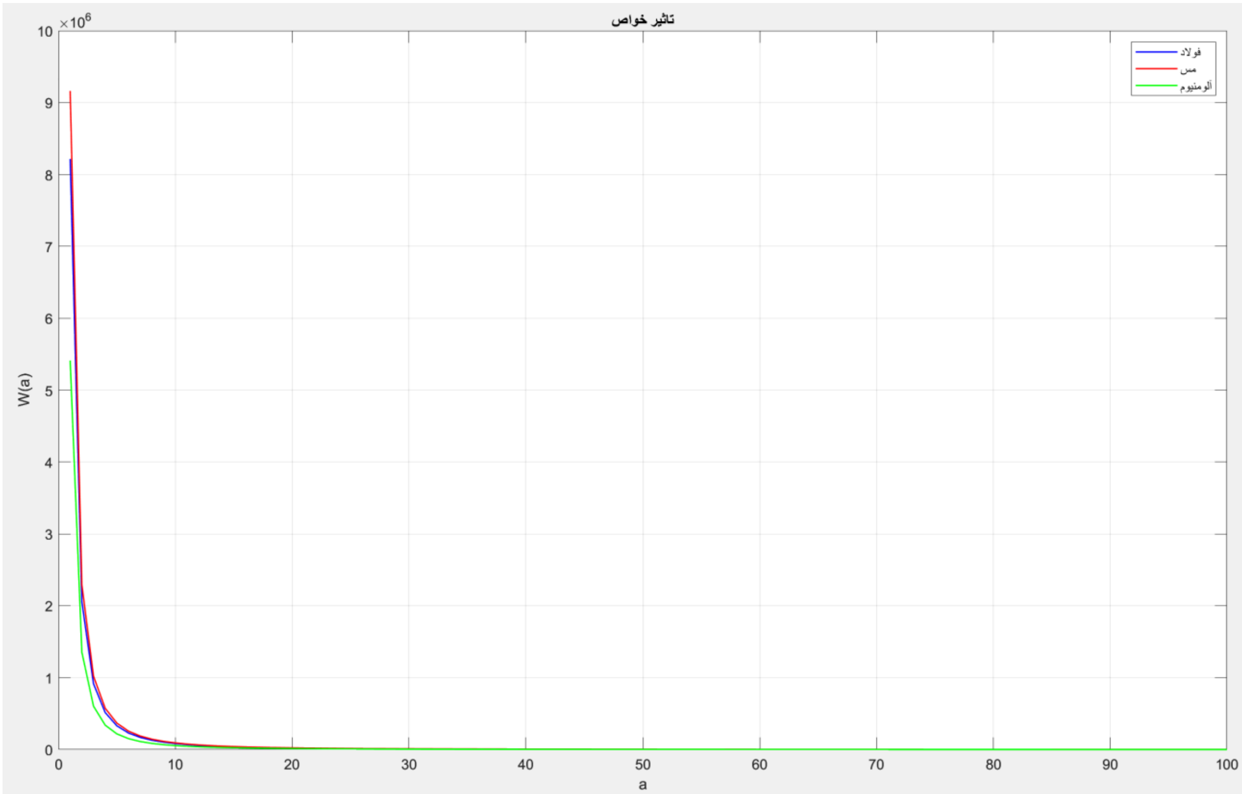
```
 E=200*10^9;
 m=1;
 n=1;
 b=a;
 h=0.1*a;
 p0=7860;
 v=0.226;
 w01=(((-
K*E*(pi^4)*h^2)*((m^2)*(b^2)+(n^2)*(a^2))^2)*(pi^2*h^2*((m^2)*(b^2)+(n^2)*(a^2))+12*K*a^2*b^2)/(p0*(1+v)*a^2*b^2));
 w02=12*K^2*v*h^2*pi^2*a^2*(((m^2)*(b^4))+(n^2)*(a^2)*(b^2));
 w03=12*K*v*h^2*pi^2*a^2*((m^2)*(b^4)+(n^2)*(a^2)*(b^2));
 w04=(-12*K^2*h^2*pi^2*a^2*((m^2)*(b^4)+(n^2)*(a^2)*(b^2))-
36*K*h^2*pi^2*a^2*((m^2)*(b^4)+(n^2)*(a^2)*(b^2))+K*v*h^4*pi^4*(((m^2)*(b^2)+(n^2)*(a^2))^2)+144*K^2*a^4*b^4*(v-1)-
2*h^4*pi^4*(((m^2)*(b^2)+(n^2)*(a^2))^2)-3*K*h^4*pi^4*(((m^2)*(b^2)+(n^2)*(a^2))^2));
 w=w01*(1/(w02+w03+w04));
end

function w1 = W1(a)
 K=1;
 E=200*10^9;
 m=1;
 n=1;
 b=2*a;
 h=0.1*a;
 p0=7860;
 v=0.226;
 w01=(((-
K*E*(pi^4)*h^2)*((m^2)*(b^2)+(n^2)*(a^2))^2)*(pi^2*h^2*((m^2)*(b^2)+(n^2)*(a^2))+12*K*a^2*b^2)/(p0*(1+v)*a^2*b^2));
 w02=12*K^2*v*h^2*pi^2*a^2*(((m^2)*(b^4))+(n^2)*(a^2)*(b^2));
 w03=12*K*v*h^2*pi^2*a^2*((m^2)*(b^4)+(n^2)*(a^2)*(b^2));
 w04=(-12*K^2*h^2*pi^2*a^2*((m^2)*(b^4)+(n^2)*(a^2)*(b^2))-
36*K*h^2*pi^2*a^2*((m^2)*(b^4)+(n^2)*(a^2)*(b^2))+K*v*h^4*pi^4*(((m^2)*(b^2)+(n^2)*(a^2))^2)+144*K^2*a^4*b^4*(v-1)-
2*h^4*pi^4*(((m^2)*(b^2)+(n^2)*(a^2))^2)-3*K*h^4*pi^4*(((m^2)*(b^2)+(n^2)*(a^2))^2));
 w1=w01*(1/(w02+w03+w04));
end
```

مقادیر مربوط به خواص مواد به کار رفته در بررسی عددی، در جدول 2 ارائه شده اند.

مواد	مدول کشسانی (گیگا پاسکال)		مدول برش (گیگا پاسکال)		چگالی (کیلوگرم بر متر مکعب)	ضریب پواسون
آلیاژ آلومینیوم 2024-T3	72.4		28		2700	0.33
فولاد ASTM-A242	200		79		7860	0.266
کامپوزیت تقویت شده با الیاف شیشه	E_1 E_2	55.8979 13.7293	G_{12} G_{13} G_{23}	5.5898 5.5898 4.9033	2550	0.277

2 Table

همچنین برای بررسی تاثیر خواص مواد سازنده روی فرکانس خطی اصلی نمودار 2 قابل ارائه است .



2 Figure

نمودار بالا از طریق کد متلب زیر استخراج گردیده است.

```
clc;
clear all

% Define symbolic variables
syms a;
% Define the numerical array for 'a'
a_vals = 0:1:100;
% Calculate W(a) for each value of 'a'
w_values1 = arrayfun(@W, a_vals);
w_values2 = arrayfun(@W1, a_vals);
w_values3 = arrayfun(@W2, a_vals);
% Plot the results
plot(a_vals, w_values1, 'b-', 'LineWidth', 1)
hold on
plot(a_vals, w_values2, 'r-', 'LineWidth', 1)
plot(a_vals, w_values3, 'g-', 'LineWidth', 1)
hold off
```

```
xlabel('a')

ylabel('W(a)')

title('تاثیر خواص')

legend('فولاد', 'مس', 'آلومنیوم')

grid on

function w = W(a)

 K=1;

 E=200*10^9;

 m=1;

 n=1;

 b=a;

 h=0.1*a;

 p0=7860;

 v=0.226;

 w01=(((-
K*E*(pi^4)*h^2)*((m^2)*(b^2)+(n^2)*(a^2))^2)*(pi^2*h^2*((m^2)*(b^2)+(n^2)*(a^2))+12*K*a^2*b^2)/(p0*(1+v)*a^2*b^2));

 w02=12*K^2*v*h^2*pi^2*a^2*(((m^2)*(b^4))+(n^2)*(a^2)*(b^2));

 w03=12*K*v*h^2*pi^2*a^2*((m^2)*(b^4)+(n^2)*(a^2)*(b^2));

 w04=(-12*K^2*h^2*pi^2*a^2*((m^2)*(b^4)+(n^2)*(a^2)*(b^2))-
36*K*h^2*pi^2*a^2*((m^2)*(b^4)+(n^2)*(a^2)*(b^2))+K*v*h^4*pi^4*(((m^2)*(b^2)+(n^2)*(a^2))^2)+144*K^2*a^4*b^4*(v-1)-
2*h^4*pi^4*(((m^2)*(b^2)+(n^2)*(a^2))^2)-3*K*h^4*pi^4*(((m^2)*(b^2)+(n^2)*(a^2))^2));

 w=w01*(1/(w02+w03+w04));

end


function w1 = W1(a)

 K=1;

 E=72.4*10^9;

 m=1;

 n=1;

 b=a;

 h=0.1*a;

 p0=2700;

 v=0.33;

 w01=(((-
K*E*(pi^4)*h^2)*((m^2)*(b^2)+(n^2)*(a^2))^2)*(pi^2*h^2*((m^2)*(b^2)+(n^2)*(a^2))+12*K*a^2*b^2)/(p0*(1+v)*a^2*b^2));

 w02=12*K^2*v*h^2*pi^2*a^2*(((m^2)*(b^4))+(n^2)*(a^2)*(b^2));

 w03=12*K*v*h^2*pi^2*a^2*((m^2)*(b^4)+(n^2)*(a^2)*(b^2));

 w04=(-12*K^2*h^2*pi^2*a^2*((m^2)*(b^4)+(n^2)*(a^2)*(b^2))-
36*K*h^2*pi^2*a^2*((m^2)*(b^4)+(n^2)*(a^2)*(b^2))+K*v*h^4*pi^4*(((m^2)*(b^2)+(n^2)*(a^2))^2)+144*K^2*a^4*b^4*(v-1)-
2*h^4*pi^4*(((m^2)*(b^2)+(n^2)*(a^2))^2)-3*K*h^4*pi^4*(((m^2)*(b^2)+(n^2)*(a^2))^2));

 w1=w01*(1/(w02+w03+w04));
```

```
end


function w2 = W2(a)

 K=1;

 E=120*10^9;

 m=1;

 n=1;

 b=a;

 h=0.1*a;

 p0=8860;

 v=0.5;

 w01=(((-
K*E*(pi^4)*h^2)*((m^2)*(b^2)+(n^2)*(a^2))^2)*(pi^2*h^2*((m^2)*(b^2)+(n^2)*(a^2))+12*K*a^2*b^2)/(p0*(1+v)*a^2*b^2));

 w02=12*K^2*v*h^2*pi^2*a^2*(((m^2)*(b^4))+(n^2)*(a^2)*(b^2));

 w03=12*K*v*h^2*pi^2*a^2*((m^2)*(b^4)+(n^2)*(a^2)*(b^2));

 w04=(-12*K^2*h^2*pi^2*a^2*((m^2)*(b^4)+(n^2)*(a^2)*(b^2))-
36*K*h^2*pi^2*a^2*((m^2)*(b^4)+(n^2)*(a^2)*(b^2))+K*v*h^4*pi^4*(((m^2)*(b^2)+(n^2)*(a^2))^2)+144*K^2*a^4*b^4*(v-1)-
2*h^4*pi^4*(((m^2)*(b^2)+(n^2)*(a^2))^2)-3*K*h^4*pi^4*(((m^2)*(b^2)+(n^2)*(a^2))^2));

 w2=w01*(1/(w02+w03+w04));

end
```

حالت دوم : ورق چندلایه ای الیاف – متقاطع

ورق چندلایهای مورد نظر یک ورق مربع شکل با ضخامت کل h میباشد، به طوری که ضخامت لایه ها یکسان است. خواص هر لایه به صورت زیر در نظر گرفته شده اند:

$$G_{12} = G_{13} = 0.6E_2,\ \ G_{23} = 0.5E_2,\ \ \nu_{12} = 0.25$$

در حالی که مقدار $\frac{E_1}{E_2}$ متغیر است.

$$\omega = \frac{\omega_0 a^2}{h}\sqrt{\frac{\rho_0}{E_2}}$$

معادله 54

فرکانس طبیعی اصلی ورق مربعی -3 لایه ای [0/90/0] برای نسبت های مختلف طول به ضخامت چندلایه ای تعیین شده و نتایج در جدول آورده شده اند.

ω	Solution	$\frac{a}{h}$
5.205 5.197 5.196832276147464	Reddy تحقیق حاضر	2

	استخراج شده	
10.290 10.704 10.704310911154073	Reddy تحقیق حاضر استخراج شده	5
14.767 14.825 14.825287337482763	Reddy تحقیق حاضر استخراج شده	10
18.981 18.829 14.825287337482763	Reddy تحقیق حاضر استخراج شده	100

3 Table

نتایج بالا با استفاده از کد متلب زیر استخراج شده اند.

```
clc;
clear all
E2=1;
p0=1;
h=1;
E1=E2*40;
G12=0.6*E2;
G13=G12;
G23=0.5*E2;
v12=0.25;
k=[1,1,sqrt(3)/2,5/6];
n=[2,5,10,100];
w=zeros(1,4);
w0=zeros(1,4);
w0a=zeros(1,4);
w0b=zeros(1,4);
for i=1:4
    a=n(i)*h;
    w0a(i)=pi^4*h^2*k(i)*(-1458*h^2*pi^2*E2*E1*G12*v12*(G23+G13)*(E1-E2*v12^2) ...
    +7776*k(i)*a^2*G12*((E1-E2*v12^2)^2)*(G23^2+G13^2) ...
    +1944*k(i)*a^2*E1*(G23^2+G13^2)*(E1^2+E2*E1*(1-v12^2+2*v12) ...
    -E2^2*v12^2*(1+2*v12))+677*h^2*pi^2*E2*E1^3*(G23 ...
    +G13)+729*h^2*pi^2*E1*(G23+G13)*(E2*E1*G12*(1-v12^2) ...
    -E2^2*v12^2*(E1+G12)+E1^2*G12)+26*h^2*pi^2*E1^2*(G23+G13)*(E1^2 ...
    +E2^2)+19440*k(i)*a^2*G23*G13*G12*(E1-E2*v12^2)^2 ...
    +4860*k(i)*a^2*E1*G23*G13*(E1^2+E2*E1*(1+2*v12-v12^2) ...
```

```
    -E2^2*v12^2*(1+v12)));
    w0b(i)=(a^2*p0*(729*k(i)*h^4*pi^4*E1*(G23+G13) ...
    *(E2*E1*(1-v12^2)+E1^2-E2^2*v12^2)+23328*k(i)^2*a^4*((E1 ...
    -E2*v12^2)^2)*(G13^2+G23^2)+9720*k(i)^2*a^2*G13*G23*(E1- ...
    E2*v12^2)^2*(6*a^2+h^2*pi^2)+3888*k(i)^2*a^2*h^2*pi^2*((E1- ...
    E2*v12^2)^2)*(G13^2+G23^2)+677*h^4*pi^4*E2*E1^3 ...
    +5724*k(i)*a^2*h^2*pi^2*E1*(E1^2*G23+E2*E1*G13-E2*E1*G23*v12^2 ...
    -E2^2*G13*v12^2)+8748*k(i)*a^2*h^2*pi^2*G12*((E1-E2*v12^2)^2)*(G23 ...
    +G13)+3024*k(i)*a^2*h^2*pi^2*E1*(E1^2*G13+E2*E1*G23 ...
    -E2*E1*G13*v12^2-E2^2*G23*v12^2)+1458*k(i)*h^4*pi^4*G12*((E1 ...
    -E2*v12^2)^2)*(G23+G13)-729*h^4*pi^4*E2^2*E1*G12*v12^2*(1-2*v12) ...
    +729*h^4*pi^4*E1^2*G12*(E1-2*E2*v12-E2*v12^2) ...
    +729*h^4*pi^4*E2*E1^2*(G12-E2*v12^2)+26*h^4*pi^4*E1^2*(E1^2+E2^2)));
    w0(i)=w0a(i)/w0b(i);
    w(i)=sqrt(w0(i))*(a^2/h)*sqrt(p0/E2);
end
```

اثرات نسبت طول به ضخامت چندلایه ای و نسبت ضرایب کشسانی بر روی فرکانس طبیعی اصلی یک ورق 4 – لایه ای [0/90/90/0] مربعی شکل بررسی شده و نتایج در جدول 4 ارائه شده اند .جدول 4 نشان میدهد که افزایش نسبت ضرایب کشسانی (همانند افزایش نسبت طول به ضخامت) باعث افزایش فرکانس طبیعی بی بعد میشود. در جدول ، فرکانس طبیعی بی بعد با استفاده از رابطه 54 به دست آمده است.

$\frac{E_1}{E_2}$				solution	$\frac{a}{h}$
40	30	20	10		
10.938 11.258 10.704310911154073	10.416 10.664 10.240466736814609	9.671 9.821 9.549343132649730	8.421 8.439 8.335890145462512	ژیانگ و همکاران پژوهش حاضر استخراج شده	5
15.213 15.192 14.825287337482763	13.943 13.928 13.673249116124653	12.316 12.261 12.116609846212253	9.912 9.862 9.816420473377548	ژیانگ و همکاران پژوهش حاضر استخراج شده	10

4 Table

نتایج بالا از طریق کد متلب زیر استخراج گشته اند.

```
clc;
clear all
k=[1,sqrt(3)/2];
E2=1;
p0=1;
h=1;
G12=0.6*E2;
G13=G12;
```

```
G23=0.5*E2;
v12=0.25;
n=[5,10];
m=[10,20,30,40];
w=zeros(1,4);
w0=zeros(2,4);
w0a=zeros(2,4);
w0b=zeros(2,4);
for i=1:2
    a=n(i)*h;
    for j=1:4
        E1=m(j)*E2;
        w0a(i,j)=pi^4*h^2*k(i)*(-1458*h^2*pi^2*E2*E1*G12*v12*(G23+G13)*(E1-E2*v12^2) ...
        +7776*k(i)*a^2*G12*((E1-E2*v12^2)^2)*(G23^2+G13^2) ...
        +1944*k(i)*a^2*E1*(G23^2+G13^2)*(E1^2+E2*E1*(1-v12^2+2*v12) ...
        -E2^2*v12^2*(1+2*v12))+677*h^2*pi^2*E2*E1^3*(G23 ...
        +G13)+729*h^2*pi^2*E1*(G23+G13)*(E2*E1*G12*(1-v12^2) ...
        -E2^2*v12^2*(E1+G12)+E1^2*G12)+26*h^2*pi^2*E1^2*(G23+G13)*(E1^2 ...
        +E2^2)+19440*k(i)*a^2*G23*G13*G12*(E1-E2*v12^2)^2 ...
        +4860*k(i)*a^2*E1*G23*G13*(E1^2+E2*E1*(1+2*v12-v12^2) ...
        -E2^2*v12^2*(1+v12)));
        w0b(i,j)=(a^2*p0*(729*k(i)*h^4*pi^4*E1*(G23+G13) ...
        *(E2*E1*(1-v12^2)+E1^2-E2^2*v12^2)+23328*k(i)^2*a^4*((E1 ...
        -E2*v12^2)^2)*(G13^2+G23^2)+9720*k(i)^2*a^2*G13*G23*(E1- ...
        E2*v12^2)^2*(6*a^2+h^2*pi^2)+3888*k(i)^2*a^2*h^2*pi^2*((E1- ...
        E2*v12^2)^2)*(G13^2+G23^2)+677*h^4*pi^4*E2*E1^3 ...
        +5724*k(i)*a^2*h^2*pi^2*E1*(E1^2*G23+E2*E1*G13-E2*E1*G23*v12^2 ...
        -E2^2*G13*v12^2)+8748*k(i)*a^2*h^2*pi^2*G12*((E1-E2*v12^2)^2)*(G23 ...
        +G13)+3024*k(i)*a^2*h^2*pi^2*E1*(E1^2*G13+E2*E1*G23 ...
        -E2*E1*G13*v12^2-E2^2*G23*v12^2)+1458*k(i)*h^4*pi^4*G12*((E1 ...
        -E2*v12^2)^2)*(G23+G13)-729*h^4*pi^4*E2^2*E1*G12*v12^2*(1-2*v12) ...
        +729*h^4*pi^4*E1^2*G12*(E1-2*E2*v12-E2*v12^2) ...
        +729*h^4*pi^4*E2*E1^2*(G12-E2*v12^2)+26*h^4*pi^4*E1^2*(E1^2+E2^2)));
        w0(i,j)=w0a(i,j)/w0b(i,j);
        w(i,j)=sqrt(w0(i,j))*(a^2/h)*sqrt(p0/E2);
    end
end
```

مقایسه فرکانس طبیعی بی‌بعد برای نسبت‌های جانبی برای ضخامت ورق های ضخیم تا ورقه‌های نازک در جدول زیر امده است.

$\frac{a}{h}$				Solution
100	10	4	2	
18.8352	15.0721	9.1988	5.3211	ماستوناگا
18.8362	15.1921	9.7281	5.6054	تحقیق حاضر
18.829460228319114	14.825287337482763	9.163382524848343	5.196832276147464	استخراج شده

5 Table

نتایج بالا از طریق کد متلب زیر استخراج گردیده است.

```
clc;
clear all
K=1;
E2=1;
p0=1;
h=1;
E1=E2*40;
G12=0.6*E2;
G13=G12;
G23=0.5*E2;
v12=0.25;
n=[2,4,10,100];
w=zeros(1,4);
w0=zeros(1,4);
w0a=zeros(1,4);
w0b=zeros(1,4);
for i=1:4
    a=n(i)*h;
    w0a(i)=pi^4*h^2*K*(-1458*h^2*pi^2*E2*E1*G12*v12*(G23+G13)*(E1-E2*v12^2) ...
    +7776*K*a^2*G12*((E1-E2*v12^2)^2)*(G23^2+G13^2) ...
    +1944*K*a^2*E1*(G23^2+G13^2)*(E1^2+E2*E1*(1-v12^2+2*v12) ...
    -E2^2*v12^2*(1+2*v12))+677*h^2*pi^2*E2*E1^3*(G23 ...
    +G13)+729*h^2*pi^2*E1*(G23+G13)*(E2*E1*G12*(1-v12^2) ...
    -E2^2*v12^2*(E1+G12)+E1^2*G12)+26*h^2*pi^2*E1^2*(G23+G13)*(E1^2 ...
    +E2^2)+19440*K*a^2*G23*G13*G12*(E1-E2*v12^2)^2 ...
    +4860*K*a^2*E1*G23*G13*(E1^2+E2*E1*(1+2*v12-v12^2) ...
    -E2^2*v12^2*(1+v12)));
```

```
    w0b(i)=(a^2*p0*(729*K*h^4*pi^4*E1*(G23+G13) ...
    *(E2*E1*(1-v12^2)+E1^2-E2^2*v12^2)+23328*K^2*a^4*((E1 ...
    -E2*v12^2)^2)*(G13^2+G23^2)+9720*K^2*a^2*G13*G23*(E1- ...
    E2*v12^2)^2*(6*a^2+h^2*pi^2)+3888*K^2*a^2*h^2*pi^2*((E1- ...
    E2*v12^2)^2)*(G13^2+G23^2)+677*h^4*pi^4*E2*E1^3 ...
    +5724*K*a^2*h^2*pi^2*E1*(E1^2*G23+E2*E1*G13-E2*E1*G23*v12^2 ...
    -E2^2*G13*v12^2)+8748*K*a^2*h^2*pi^2*G12*((E1-E2*v12^2)^2)*(G23 ...
    +G13)+3024*K*a^2*h^2*pi^2*E1*(E1^2*G13+E2*E1*G23 ...
    -E2*E1*G13*v12^2-E2^2*G23*v12^2)+1458*K*h^4*pi^4*G12*((E1 ...
    -E2*v12^2)^2)*(G23+G13)-729*h^4*pi^4*E2^2*E1*G12*v12^2*(1-2*v12) ...
    +729*h^4*pi^4*E1^2*G12*(E1-2*E2*v12-E2*v12^2) ...
    +729*h^4*pi^4*E2*E1^2*(G12-E2*v12^2)+26*h^4*pi^4*E1^2*(E1^2+E2^2)));
    w0(i)=w0a(i)/w0b(i);
    w(i)=sqrt(w0(i))*(a^2/h)*sqrt(p0/E2);
end
```

در مورد بقیه نمودار های موجود در پژوهش حاضر با توجه به حجم بسیار زیاده محاسبات مربوط به هر مورد و عدم وجود سیستم پردازش مناسب الگوریتم های متناسب با هر کدام در پیوست ارائه میگردند اما نتایج گزارش نشده اند. به عنوان مثال در مورد جدول شماره 4 موجود در مقاله که در مورد بررسی 3 مود اول حرکت عرضی ورق است با توجه به این نکته که فرمول مستقیمی برای محاسبه فرکانس دورانی خطی با در نظر گرفتن پارامترهای m و n مربوط به مودها ، با استفاده از رابطه $\omega_0 = (\frac{z_2}{z_1})^{\frac{1}{2}}$ میتوان فرکانس دورانی خطی را بدست آورد. برای پیدا کردن ضرایب z_1 و z_2 مربوطه میتوان از فایل Maple پیوست شده (.......) استفاده نمود. در کد زیر با جایگذاری هر m و n و شرایط فیزیکی مسئله میتوان مود های مورد نظر حرکت را بدست آورد. قابل توجه است در کد بالا به ترم های $\frac{d^4F}{d\,t^4}$ و $F\cdot(\frac{d^2F}{d\,t^2})^2$ به دلیل وجود ضرایب دارای ضرب گشتاور های سطح صفر خواهند شد.