NAMN:______________________________ KLASS:__________

Del A: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

1) Låt $f(x) = 3\sin(x) + b$.
För vilka värden på
b är $f(x) > 0$ för alla x?

Endast svar fordras 1/0/0

2) En konisk behållare läcker vatten. Behållarens mått framgår av nedanstående figur.
Låt *V* beteckna vattnets volym vid tiden *t*. Vid en viss tidpunkt, när vattnets höjd är 1,9 dm, läcker det ut 0,022 liter/min.

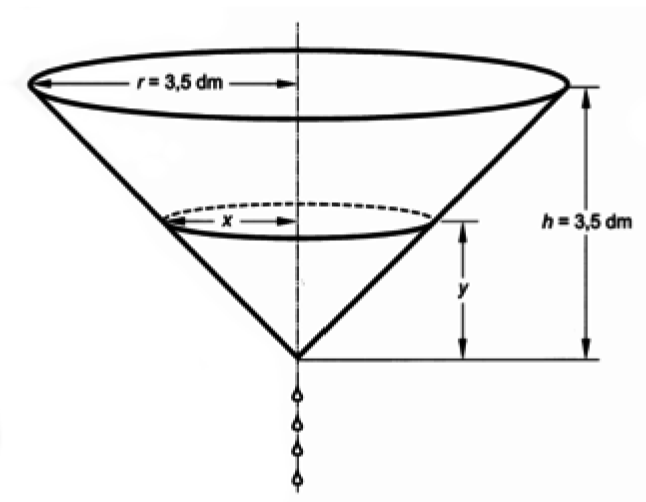
Ett av följande påståenden är korrekt. Vilket? *Endast svar krävs*

A) $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -0,022 \text{ liter/ min}$ B) $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y} = -0,022 \text{ liter/ min}$

C) $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -0,022 \text{ liter/ min}$ D) $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = 0,022 \text{ liter/ min}$

E) $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y} = 0,022 \text{ liter/ min}$ F) $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0,022 \text{ liter/ min}$

G) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -1,9 \text{ dm/ min}$ H) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1,9 \text{ dm/ min}$



1/0/0

3) Ange det minsta värde som funktionen $g\left(x\right)=3+\left|x-1\right|$ kan anta. 1/0/0

4) Låt $f\left(x\right)=\ln\left(3+x\right)-2x$

a) Bestäm derivatan till funktionen f.

Endast svar fordras

b) Lös ekvationen $f'\left(x\right)=0$ 2/0/0

5) Derivera

a) $f\left(x\right)=\dfrac{\cos\ x}{2x+1}$

b) $g\left(x\right)=x\cdot e^{x}$

2/0/0

6) Visa att $y=x\cdot\sin x$ är en lösning till differentialekvationen
$x\cdot y'-y=x^{2}\cdot\cos x$ 2/0/0

7) En fågelunge faller från en 8,0 m hög klippa. För att förenklat beskriva fallrörelsen kan följande differentialekvation ställas upp:

$v'+5v=10$ där v är fallhastigheten i m/s efter tiden t sekunder.

Visa att $v(t)=2-2\mathrm{e}^{-5t}$ är en lösning till differentialekvationen. 2/0/0

8) Förenkla $f\left(x\right)-f''\left(x\right)$ om $f\left(x\right)=4\sin\left(3x\right)-5\cos\left(x\right)$.

2/0/0

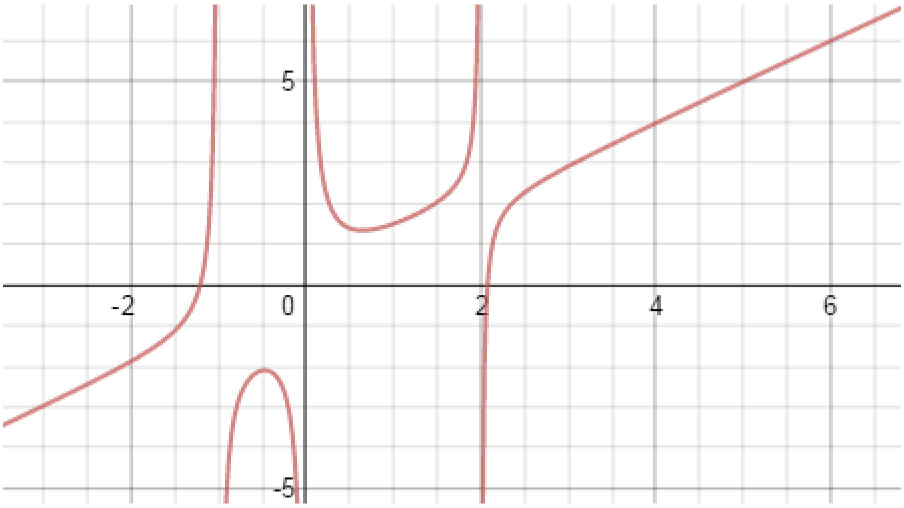
9) a) Uttryck 210° i radianer.

b) Uttryck -3π i grader. 2/0/0

10) Bestäm talet a så att $y = a \cdot e^{2x}$ blir en lösning till differentialekvationen $y' + y = e^{2x}$

2/0/0

11) Funktionen nedan har flera asymptoter vilka?



3/0/0

12) Derivera

a) $y = x \sin x$

b) $y = 2x \cdot \ln x$

c) $y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

6/0/0

13) I tabellen nedan anges några värden för funktionerna f och g samt deras derivator.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	-4	0	4	2
$g(x)$	1	2	0	-2	-1
$f'(x)$	-7	2	5	2	-7
$g'(x)$	$3{,}5$	-1	$-2{,}5$	-1	$3{,}5$

a) Bestäm $h'(-2)$ om $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

b) Bestäm $s'(-1)$ om $s(x) = f(g(x))$.

3/1/0

14) Derivera

a) $f(x) = 3\ln(2x)$

b) $g(x) = (3x+7)^4$

c) $h(x) = x^2 e^{3x}$

d) $p(x) = \cos^2 3x$

3/1/0

15) Temperaturen i en sjö uppmättes under ett molnigt sommardygn. Temperaturen visade sig följa funktionen $y(t) = 15 + 2\sin(0,26t)$ där t är antalet timmar efter kl. 12.00.

a) Bestäm $y'(t)$

b) Beräkna $y'(10)$

c) Tolka resultatet från b-uppgiften.

2/1/0

16) Skissa grafen till funktionen: $f(x) = 2x^2 + 2x + 2$.

Var noga med att rita ut:

- var funktionen skär y-axeln
- tangent där $x = 0$
- eventuella max och minpunkter (med koordinater)
- eventuella asymptoter.

2/1/0

17) Bestäm konstanten k så att $f'(3) = 0$ då $f(x) = \ln\ x - kx$. 1/1/0

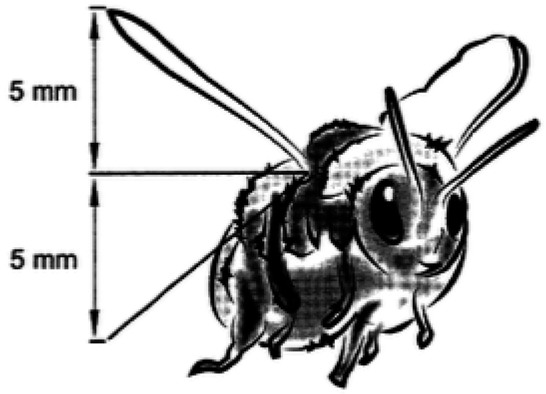
18) Funktionen f är definierad genom $f(x) = x^2 - \sin 3x$. Bestäm det största värde som andraderivatan $f''(x)$ kan anta.

1/1/0

19) En humlas vingar rör sig periodiskt när den flyger. Vingspetsens rörelse i vertikalled kan beskrivas med funktionen:

$y = 5 \cdot \sin(390\pi t)$
$y =$ vingspetsens läge i vertikalled i mm.
$t =$ tiden i sekunder.

Hur många vingslag per sekund gör humlan? 1 vingslag motsvarar 1 period.



1/1/0

20) Bestäm samtliga asymptoter till funktionen $f(x) = 2x + \dfrac{8}{x-3}$.

1/1/0

21) Bestäm en funktion som har asymptoterna $x = 0, x = 5, x = -1$ och $y = 3$.

0/1/0

22) Rita grafen till

a) $y = |x|$ *Endast ritad graf krävs*

b) $y = |2x - 6|$ *Visa dina beräkningar*

1/2/0

23) Nålen på en symaskin rör sig upp och ner när man syr. Nålspetsens höjd över stygnplattan som funktion av tiden kan beskrivas av

$$h(t) = 1,6\cos(20\pi \cdot t) + 0,2$$

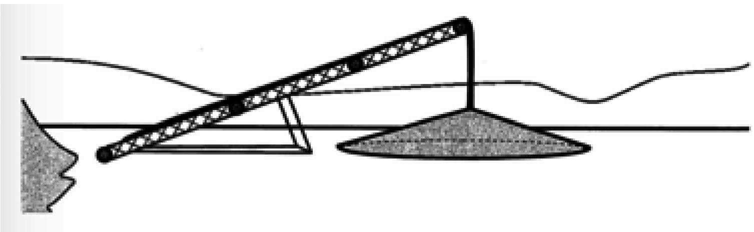
där h är höjden i cm och t är tiden i sekunder.

a) Bestäm nålspetsens största höjd över stygnplattan.

b) Hur många gånger per sekund befinner sig nålspetsen i sitt högsta läge? 1/2/0

24) Derivera funktionen $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ och bestäm derivatans nollställe. 0/2/0

25) Vid ett grustag leds gruset fram till en plan lagringsplats med hjälp av ett transportband. Från transportbandet faller gruset ner och bildar en hög i form av en kon. Högens volym ökar med hastigheten 0,01 m³/s och högens höjd är hela tiden 30 % av dess radie.



Med vilken hastighet ökar radien när radien är 1,0 m? 0/2/0

26) Rebecka blåser upp en sfärisk såpbubbla. När bubblans radie är 5,0 cm ökar radien med hastigheten 0,30 cm/s. Hur snabbt ökar då volymen per sekund? 0/2/0

27) Funktionen $f(x) = \cos\ x$ och polynomet $p(x) = a + bx + cx^2$ är givna. Bestäm konstanterna a, b och c så att $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$ och $p''(0) = f''(0)$.

0/2/0

28) Utanför den franska staden Saint Malo som ligger vid kusten mot Engelska kanalen, har man funnit att vattendjupet y meter under en viss tid varierar enligt sambandet $y\left(t\right)=8,0-5,0\sin\frac{\pi t}{6}$, där *t* är tiden i timmar räknat från kl 08.00.

a) Hur stort är vattendjupet kl 16.30?

b) När under dygnet är vattendjupet minst?

c) Vilken är den största hastighet som vattendjupet ökar med?

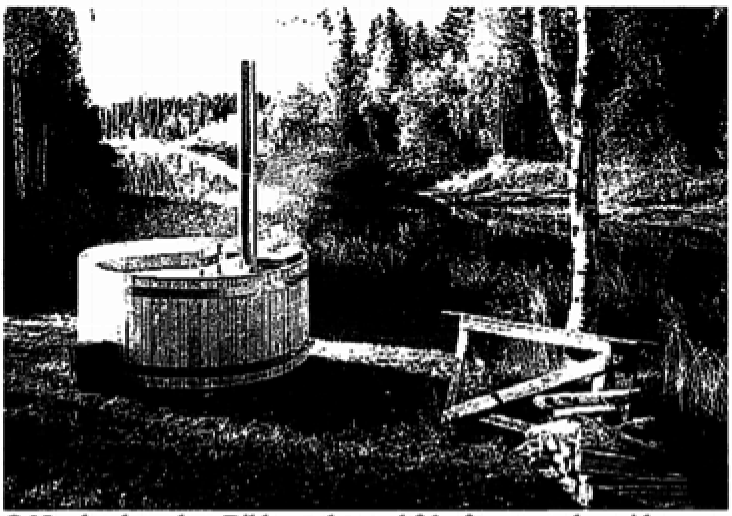
2/3/0

29) Bestäm koordinaterna för eventuella lokala maximipunkter och minimipunkter på grafen till funktionen $f\left(x\right)=\frac{x^2-5x+12}{x+3}$

Bestäm också karaktär för respektive punkt, det vill säga om det är en maximi-, minimi- eller terrasspunkt.

1/3/0

30) Figuren till höger visar en cylindrisk vedeldad badtunna. När man tömmer tunnan rinner vattnet ut snabbt till en början för att sedan rinna ut allt långsammare när vattendjupet minskar. Enligt en fysikalisk modell gäller då differentialekvationen: $\frac{dV}{dt}=-k\sqrt{V}$ där $k>0$



© Norrlandspoolen. Bilden är hämtad från företagets hemsida.

V är den kvarvarande vattenvolymen i m^3 och tiden *t* räknas i minuter.

a) Motivera varför $k>0$ i detta fall.

$V\left(t\right)=\frac{1}{4}\left(C-kt\right)^2$ är den allmänna lösningen till differentialekvationen.

b) Antag att $V\left(0\right)=5,56$ och $V'\left(0\right)=-0,79$
Hur lång tid tar det att tömma tunnan?

0/3/0

31) Bestäm eventuella maximi- och minimipunkter för funktionen f där
$f\,(x) = -x\ln x,\ x > 0$ 0/1/1

32) Funktionerna f och g är deriverbara.
Man bildar en ny funktion
$h\,(x) = (f\,(x))^2 + (g\,(x))^2$
För funktionerna f och g gäller

- $f\,(0) = 2$ och $g\,(0) = 1$
- $f'\,(x) = g\,(x)$ och $g'\,(x) = -f\,(x)$

Bestäm $h'\,(x)$ och använd resultatet till att visa att $h\,(x) = 5$ för alla x. 0/2/2

33) Lasse och Niklas ska lösa följande uppgift:

Undersök om funktionen $f(x) = \dfrac{1}{2x-5}$ antar något största värde då $x \geq 0$

Lasse löser uppgiften så här:

$f(x) = \dfrac{1}{2x-5}$

$f'(x) = -\dfrac{2}{(2x-5)^2} < 0$ för alla x.

Då är f avtagande och har sitt största värde i den vänstra ändpunkten, d.v.s. för $x = 0$.

$f(0) = -\dfrac{1}{5}$

<u>Svar:</u> Det största värdet är $-\dfrac{1}{5}$

Niklas säger att Lasses svar är fel eftersom funktionen kan anta större värden än $-\dfrac{1}{5}$. Till exempel antar funktionen värdet 1 då $x = 3$

Utred vilket fel Lasse gör i sin lösning och lös den givna uppgiften. 0/0/3

34) Från en punkt *P* på kurvan $y = 3x^2 - 2\ln(2x) + 2 \ (x > 0)$ drar man linjer som är vinkelräta mot *x*-axeln respektive *y*-axeln. Dessa linjer avgränsar tillsammans med axlarna en rektangel.

a) Teckna ett uttryck för rektangelns omkrets som funktion av *x*-koordinaten för punkten *P*.

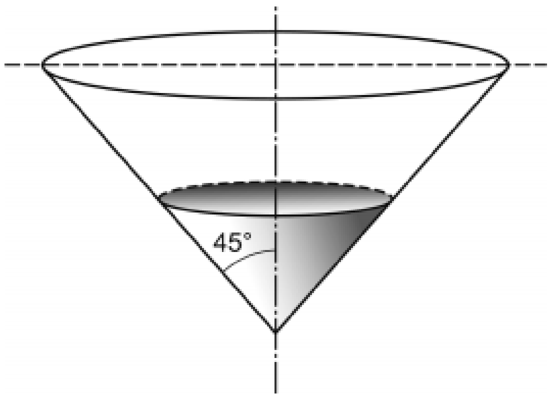
b) Bestäm omkretsens minsta värde med hjälp av derivata.

0/0/3

35) Lasse och Marcus ska lösa följande uppgift:

En behållare har formen av en kon som figuren visar. Behållaren är tom från början. Vatten tillförs med hastigheten $(25 + 0,2t)$ liter/min, där t är tiden i minuter från påfyllningens start.

Med vilken hastighet stiger behållarens vattennivå då den är 7,0 dm?



Lasse räknar först ut att det tar 13,6 minuter för vattennivån att bli 7,0 dm.

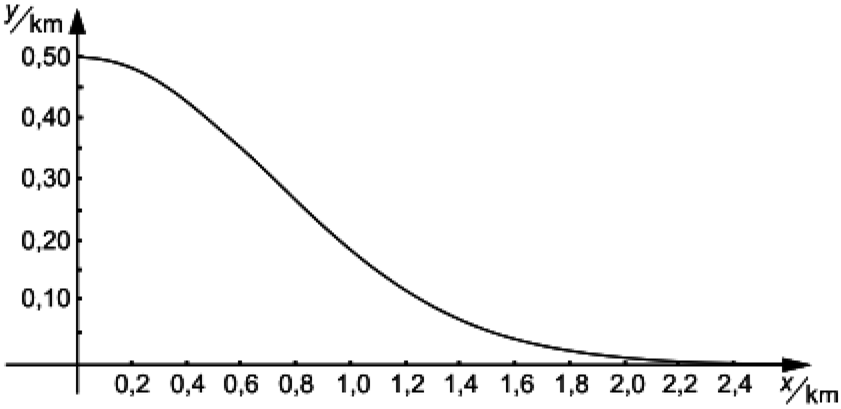
Marcus ska använda Lasses resultat för att lösa resten av uppgiften. Marcus börjar med att beteckna vattennivån med h och bestämmer volymen i behållaren uttryckt i h. Sedan beräknar han den efterfrågade hastigheten.

a) Utgå från Lasses resultat och genomför Marcus del av lösningen.

b) Visa att Lasse har räknat rätt, det vill säga att vattennivån efter 13,6 minuter är 7,0 dm.

0/2/3

36) En skidbacke har fallhöjden 500 meter. Banprofilen ser du i bilden nedan.



Höjden *y* km är en funktion av sträckan *x* km. Sambandet mellan *y* och *x* ges av
$y = 0,5e^{-x^2}$, $0 \leq x \leq 2,5$

a) Bestäm backens lutning för $x = 0,8$

Ett allmänt sätt att beskriva backar med liknande banprofil som ovan ges av funktionen
$y = 0,5e^{-ax^2}$, $0 \leq x \leq 2,5$
där *a* är en positiv konstant.

b) Ställ upp en ekvation för bestämning av *x*-värdet i den punkt där backar med en sådan banprofil är brantast.

c) Bestäm a så att backen är brantast för $x = 1,0$

0/4/3

Bedömningsanvisningar

1) $b > 3$

Korrekt svar. + E_B

2) C) $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -0,022 \text{ liter/ min}$

Korrekt svar. + E_M

3) 3

Korrekt svar. + E_B

4) a) $f'(x) = \frac{1}{3+x} - 2$

Korrekt svar. + E_P

b) $x = -\frac{5}{2}$

Korrekt lösning. + E_P

5) a) $f'(x) = \frac{-2x \sin\ x - \sin x - 2\cos x}{4x^2 + 4x + 1}$

Korrekt svar. + E_P

b) $g'(x) = e^x + x \cdot e^x$

Korrekt svar. + E_P

6) Korrekt derivering $(y' = \sin x + x \cdot \cos x)$ + E_P

med korrekt genomförd verifiering. + E_P

7) Godtagbar ansats, till exempel deriverar $v(t)$ + E_P

Tydlig lösning där eleven visar att $Vl = HL$. + E_K

8) $40\sin(3x) - 10 \cdot \cos(x)$

Godtagbar ansats, t ex korrekt beräknad y'' + E_P

med godtagbar fortsättning och korrekt svar. + E_P

9) a) $\dfrac{7\pi}{6}$

Korrekt svar + E_P

b) -540°

Korrekt svar + E_P

10) $a = \dfrac{1}{3}$

Godtagbar ansats, sätter in $y = a \cdot e^{2x}$ och $y' = 2a \cdot e^{2x}$ i differentialekvationen + E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar + E_{PL}

11) $x = -1,\ x = 0,\ x = 2$ samt $y = x$

Beskriver minst 1 asymptot korrekt + E_B

Beskriver minst 3 asymptoter korrekt + E_P

Samtliga asymptoter korrekt angivna. + E_P

12) a) $\sin x + x \cos x$

Använder korrekt deriveringsregel. + E_P

Korrekt svar. + E_P

b) $2 \ln x + 2$

Använder korrekt deriveringsregel. + E_P

Korrekt svar. + E_P

c) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$

Använder korrekt deriveringsregel. + E_P

Korrekt svar. + E_P

13) a) -14

Redovisad godtagbar ansats + E_B

med korrekt svar. + E_B

b) 7

Redovisad godtagbar ansats + E_B

med korrekt svar. + C_B

14) a) $f'(x) = 3/x$

Korrekt svar. + E_P

b) $g'(x) = 12(3x+7)^3$

Korrekt svar. + E_P

c) $h'(x) = xe^{3x}(2+3x)$

Korrekt svar + E_P

d) $p'(x) = -6\sin 3x \cos 3x$

Korrekt svar + C_P

15) a) $y'(t) = 0,52\cos(0,26t)$

Korrekt svar. + E_P

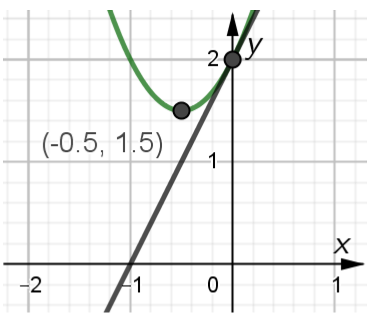
b) $-0,45$

Korrekt svar. + E_P

c) Temperaturen minskar med 0,45 grader/timme efter 10 timmar.

Godtagbar tolkning, även med rimliga följdfel från b-uppgiften + C_M

16)



Skissar en kurva som korrekt skär y-axeln med rätt plats och lutning. + E_P

Skissar en andragradskurva med extrempunkt i andra kvadranten. + E_P

Anger korrekt koordinat för extrempunkt. + C_P

17)

$k = \frac{1}{3}$

Korrekt derivering av *f*, $f'(x) = \frac{1}{x} - k$ + E_P

med korrekt bestämning av *k*. + C_{PL}

18) 11

Korrekt bestämning av $f''(x)$, $f''(x) = 2 + 9\sin 3x$ + E_P

med godtagbar motivering och korrekt svar. + C_{PL}

19) 195 vingslag per sekund

Godtagbar ansats till lösning + E_M

med fullständig lösning samt korrekt svar. + C_M

20) Lodrät asymptot $x = 3$, sned asymptot $y = 2x$

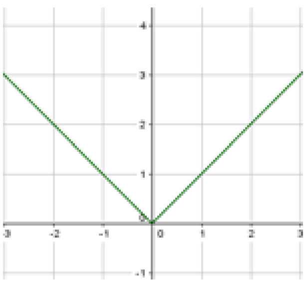
Hittar en korrekt asymptot + E_B

Hittar båda asymptoterna korrekt + C_B

21) $f(x) = \frac{1}{x(x+1)(x-5)} + 3$

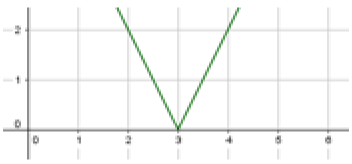
Korrekt svar. + C_{PL}

22) a)



Godtagbar ritad graf + E_P

b)



Godtagbar ritad graf + C_P

Med godtagbar redovisning av de två möjligheterna: + C_R

$$y = \begin{cases} 2x - 6 & om\ x \geq 3 \\ -2x + 6 & om\ x < 3 \end{cases}$$

23) a) 1,8 cm

Godtagbar lösning med korrekt svar + E_P

b) 10

Godtagbar ansats, t ex ställer upp ett uttryck för perioden + C_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar + C_P

24) $f'(x) = \frac{1}{x^2}(1 - \ln\ x)$

Derivatans nollställe = e

Korrekt derivering av funktionen, + C_P

med godtagbar bestämning av derivatans nollställe. + C_P

25) 0,01 m/s

Redovisad godtagbar ansats t ex tecknad kedjeregel $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ + C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning. + C_{PL}

26) 94 cm^3/s

Redovisad godtagbar metod med korrekt derivata $\left(\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}\right)$

eller godtagbar differenskvot. + C_{PL}

med godtagbart svar. + C_{PL}

27) $a = 1,\ b = 0$ och $c = -0,5$

Godtagbar ansats, gör minst tre korrekta deriveringar + C_P

med korrekt lösning och svar. + C_{PL}

28) a) 12,8 m

Redovisad godtagbar metod med godtagbart svar. + E_{PL}

b) kl 11.00 och kl 23.00

Bestämmer den ena tidpunkten. + E_{PL}

Bestämmer även den andra tidpunkten. + C_{PL}

c) 2,6 m/h

Redovisat godtagbar metod + C_R

med godtagbart svar. + C_{PL}

29) Maximipunkt (−9, −23) och Minimipunkt (3, 1)

Godtagbar ansats, deriverar funktionen huvudsakligen korrekt. + E_P

Korrekt derivering, + C_P

med godtagbar fortsättning, bestämmer extrempunkterna ($x_1 = -9$ och $x_2 = 3$) + C_B

Bestämmer koordinaterna korrekt och verifierar dessa. + C_P

30) a) "Derivatan måste vara negativ för att volymen ska minska och då måste *k* vara större än 0"

Godtagbar motivering. + C_R

b) 14 minuter

Redovisad godtagbar bestämning av konstanterna, t ex $C = 2\sqrt{5,56}$ och $k = \dfrac{0,79}{\sqrt{5,56}}$ + C_{PL}

med redovisad godtagbar bestämning av tidpunkten då tunnan är tömd. + C_{PL}

31) Maximipunkt i $\left(\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right)$

Godtagbar ansats, deriverar funktionen och sätter $f'(x) = 0$ + C_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar. + A_P

32)

Korrekt bestämning av $h'(x)$ + C_{PL}

och visat att $h'(x) = 0$. + C_{PL}

Motiverat att $h(x)$ är konstant. + A_R

Visat att $h(x) = 5$ + A_{PL}

33) T ex "Nej, den har inget största värde"

Godtagbar ansats, t ex anger att felet beror på att Lasse inte tar hänsyn + A_R

till att det finns ett x-värde där funktionen inte är definierad

med i övrigt godtagbart slutfört resonemang med godtagbar slutsats. $+ \mathrm{A_R}$

Lösningen kommuniceras på A-nivå. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer vara likhetstecken, $f(x)$, $f'(x)$, paranteser, lim, tydlig skiss, termer såsom nollställe, derivata, största värde, definierad, graf, asymptot, x-axel etc. $+ \mathrm{A_K}$

34) a) $O(x) = 6x^2 + 2x - 4\ln(2x) + 4$

Korrekt tecknad omkrets. $+ \mathrm{A_M}$

b) $\dfrac{13}{2}$ l.e

Korrekt x-värde som visats ge minimum. $+ \mathrm{A_{PL}}$

Korrekt minsta omkrets. $+ \mathrm{A_{PL}}$

35) a) 0,18 dm/min

Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ett korrekt uttryck för volymen uttryckt i h och ställer upp kedjeregeln, $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h} \cdot \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ $+ \mathrm{C_{PL}}$

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar. $+ \mathrm{A_{PL}}$

b)

Godtagbar ansats, tecknar ett integraluttryck för den volym som tillförs eller bestämmer volymen, 360 dm^3, då höjden är 7,0 dm $+ \mathrm{C_{PL}}$

med i övrigt godtagbar lösning som visar att vattennivån efter 13,6 minuter är 7,0 dm. $+ \mathrm{A_{PL}}$

Lösningen (deluppgift a och b) är lätt att följa och förstå, i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt innehåller endast relevanta delar. Matematiska symboler och representationer är använda med god anpassning till syfte och situation. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer vara likhetstecken, integraltecken, derivatabeteckningar, integraluttryck, termer såsom integral, integrationsgränser, hänvisning till kedjeregeln etc. $+ \mathrm{A_K}$

36) a) -0,4

Redovisat godtagbar metod $+ \mathrm{C_P}$

med godtagbart svar. $+ \mathrm{C_{PL}}$

b)

Beräknat andraderivatan $\left(y'' = a\mathrm{e}^{-ax^2}(2ax^2 - 1)\right)$. $+ \mathrm{C_P}$

Tecknat ekvationen $y'' = 0$. + C_P

Genom att klara uppgiften visar eleven kvaliteter på A-nivå genom att använda generella metoder + A_P

och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång. + A_{PL}

c) $a = \dfrac{1}{2}$

Bestämt a. + A_{PL}