Engineeling optamiZed

هي الطريقة المستخدمة لتحسين الجودة وتقليل التكاليف للحصول على الحل الأمثل

* تركز ال optamiZation على :
⇐ جعل الأشياء أفضل
⇐ تحقيق ربح أكثر
⇐ انجاز أشياء أكثر بأقل التكاليف

* optimization
⇐ هي عملية رياضية تهدف للوصول الى max / min قيمة لدالة
معينة function بواسطة مجموعة من الشروط

⇐ هي techniques تساعد على اتخاذ القرار

مثال

$$f(x) \quad , \quad X = [x_1, x_2, x_3, \dots] \quad , g(x) \le 0$$

objective function $\Leftarrow f(x)$

design Variable $\Leftarrow x_1, x_2, x_3, \dots$

stc (subject to Constrains) constrains $\Leftarrow g(x) \le 0$

design Variable

optimal design مجموعة من العوامل المستخدمة للوصول الى

Constrains

هي القيم الرقمية للشروط المحددة

* solve this LPP to obtain optimal solution

* max $Z = x_1 + x_2$

s.t.c

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$5x_1 \leq 10$$

$$x_1 + x_2 \leq 18$$

$$-x_1 + x_2 \geq 4$$

$x_1 \; x_2 \geq 0 \Rightarrow$ called non negativity constrains

ملاحظات

* اذا طرأ تغيير على design Variable فإن القيم ستتغير

* LPP هي linear programming problem وهي طريقتين:

⇐ analytical : تستخدم في حالة كان design variable أكثر من two

⇐ graphical : تستخدم عندما يكون لدينا على الأكثر اثنين من design variable

Solution

* $3x_1 + 2x_2 \leq 12$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 6 \qquad \boxed{x_1 = 0} \quad \boxed{x_2 = 6} \qquad (0, 6)$

$x_2 = 0 \quad x_1 = 4 \qquad \boxed{x_1 = 4} \quad \boxed{x_2 = 0} \qquad (4, 0)$

* $5x_1 \leq 10$

$x_2 = 0 \quad x_1 = 2 \qquad (2, 0)$

* $x_1 + x_2 \leq 18$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 18 \qquad \boxed{x_1 = 0} \quad \boxed{x_2 = 18} \qquad (0, 18)$

$x_2 = 0 \quad x_1 = 18 \qquad \boxed{x_1 = 18} \quad \boxed{x_2 = 0} \qquad (18, 0)$

* $-x_1 + x_2 \geq 4$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 4 \qquad \boxed{x_1 = 0} \quad \boxed{x_2 = 4} \qquad (0, 4)$

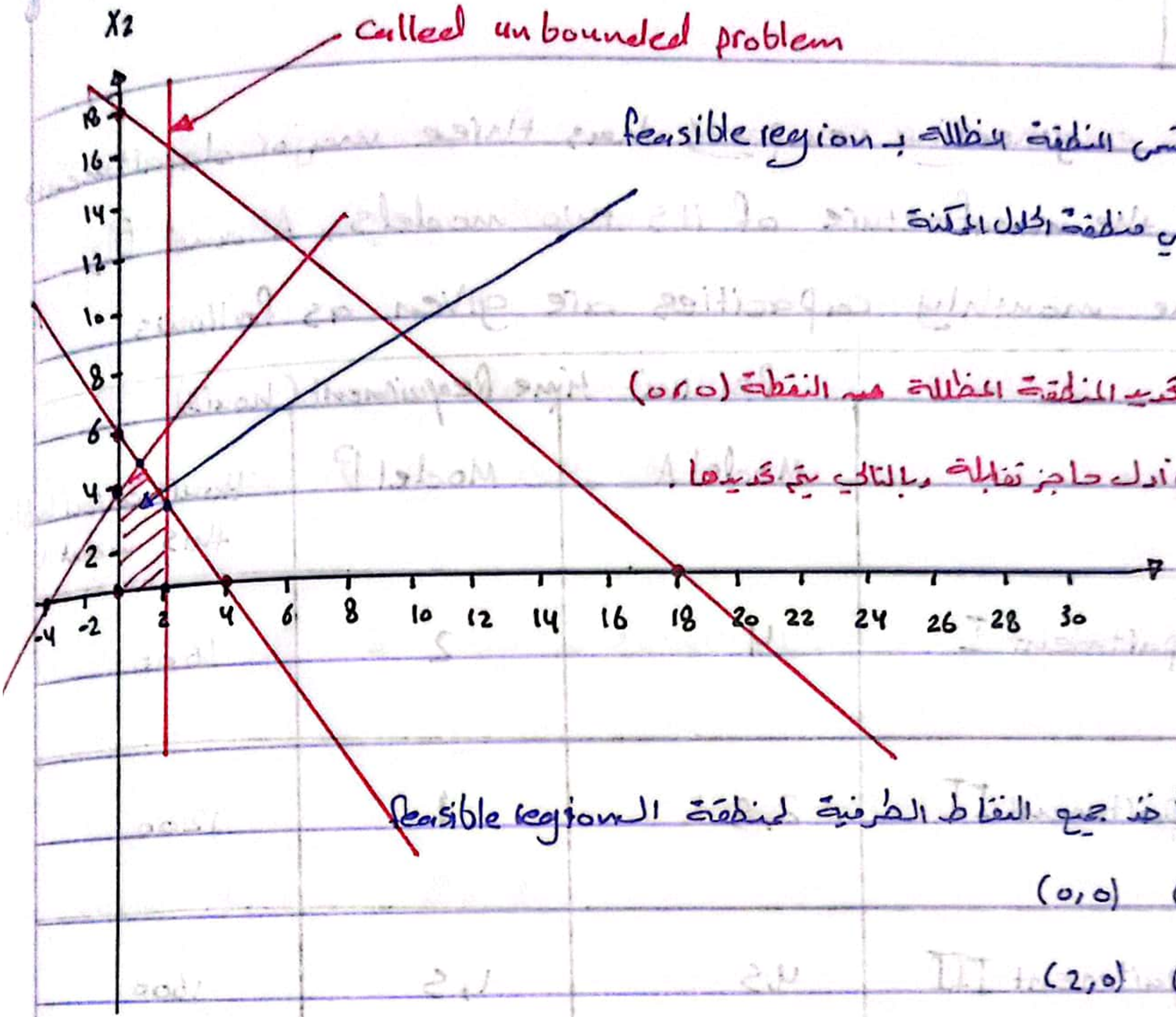
$x_2 = 0 \quad x_1 = -4 \qquad \boxed{x_1 = -4} \quad \boxed{x_2 = 0} \qquad (-4, 0)$

* $x_1 \; x_2 \geq 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \qquad (0, 0)$

التاريخ: / /　　اليوم:　　الدرس:

Called unbounded problem



تسمى المنطقة المظللة بـ feasible region

وهي منطقة الحلول الممكنة

يتم تحديد المنطقة المظللة من النقطة (0,0)

حتى أول حاجز تقابله وبالتالي يتم تحديدها .

نأخذ جميع النقاط الطرفية لمنطقة الـ feasible region

① (0,0)

② (2,0)

③ (0,4)

④ (4,0)

⑤ (2,6)

ثم نعوض بهذه الحلول في الدالة Z للحصول على أقصى max قيمة

$(0,0) \Rightarrow Z = x_1 + x_2 = 0,0 = 0$

$(2,0) \Rightarrow Z = 2 + 0 = 2$

$(0,4) \Rightarrow Z = 0 + 4 = 4$

$(4,0) \Rightarrow Z = 4 + 0 = 4$

$(2,6) \Rightarrow Z = 2 + 6 = 8$ max value

the optimal solution when Z = 8

Q1

a engineering company has three major departments for the manufacture of its two models, A and B, The monthly capacities are given as follows

	Per unit time Requirment (hours)		
	Model A	Model B	Hours available this month
Department I	4	2	1600
Department II	2,5	1	1200
Department III	4,5	1,5	1600

The marginal profit per unit from model A is $100 and from model B is $400

a) Find the optimal solution and the maximum profit

b) Determine the slack time in the three departments and the type of the constrains

© Determine the range of the profit contributions of product "B" in the objective function.

ⓓ If the company decreases revenue of each of model A by 15% does the solution change! Explain.

شركة تحتوي على 3 أقسام لصناعة نموذجين A ، B حسب القيم بالجدول

: Solution

$\boxed{\text{أولاً}}$ نحدد الـ design variable :

asume $A = X_1$, $B = X_2$

$\boxed{\text{ثانياً}}$ نحدد الـ objective function

$$\max Z = 100 X_1 + 400 X_2$$

$\boxed{\text{ثالثاً}}$ نحدد الـ subject to constrains (s.t.c)

$$4 X_1 + 2 X_2 \leq 1600$$

$$2.5 X_1 + X_2 \leq 1200$$

$$4.5 X_1 + 1.5 X_2 \leq 1600$$

$X_1 \; X_2 \geq 0$ ⇒ Non negativity

رابعاً نحول الـ LPP (formulation)

نحل المعادلة

$\Rightarrow 4x_1 + 2x_2 \leq 1600$

when $x_1 = 0$ $x_2 = 800$

when $x_2 = 0$ $x_1 = 400$

$\Rightarrow 2{,}5x_1 + x_2 \leq 1200$

when $x_1 = 0$ $x_2 = 1200$

when $x_2 = 0$ $x_1 = 480$

$\Rightarrow 4{,}5x_1 + 1{,}5x_2 \leq 1600$

when $x_1 = 0$ $x_2 = 1066{,}6$

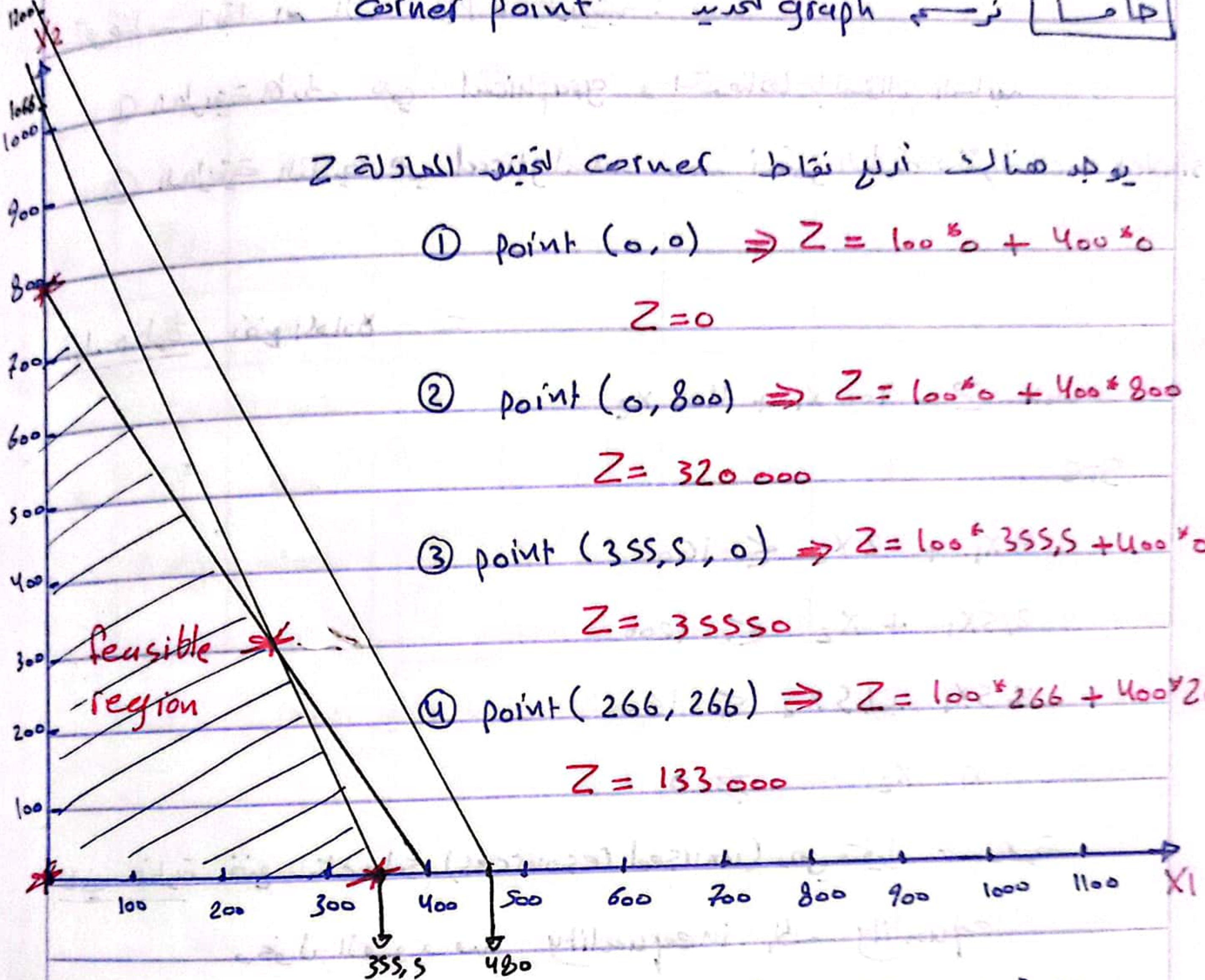
when $x_2 = 0$ $x_1 = 355{,}5$

$\Rightarrow x_1\ x_2 \geq 0$

$x_1 = 0$ $x_2 = 0$

x_1	x_2
400	800
480	1200
355,5	1066,6
0	0

خامساً نرسم graph لتحديد corner point



يوجد هناك أربع نقاط corner لتعويض المعادلة Z

① point (0,0) $\Rightarrow Z = 100*0 + 400*0$

$Z = 0$

② point (0,800) $\Rightarrow Z = 100*0 + 400*800$

$Z = 320\,000$

③ point (355,5 , 0) $\Rightarrow Z = 100*355{,}5 + 400*0$

$Z = 35550$

④ point (266, 266) $\Rightarrow Z = 100*266 + 400*266$

$Z = 133\,000$

من القيم أعلاه نلاحظ أن أقصى قيمة Z عند النقطة (0,800)

وتحقق ربح جاري 320000

∴ the optimal solution when $\boxed{\text{point } (0,800)}$

and the profit $\boxed{320\,000}$

وبهذا الطريقة يتم تحقيق البند a.

تعرفنا سابقاً أن ال LPP طريقتين :

① الطريقة الأولى هي graphical واستخدمناها بالسؤال السابق

② الطريقة الثانية هي analytical ومن أشهر الطرق simplex method منشرحها

أول خطوة نضع المعادلات

$$\max Z = 100x_1 + 400x_2$$

StC

$$4x_1 + 2x_2 \leq 1600$$

$$2{,}5x_1 + x_2 \leq 1200$$

$$4{,}5x_1 + 1{,}5x_2 \leq 1600$$

$$x_1 \quad x_2 \geq 0$$

ثاني خطوة نضع slack (unused resources) وهي متغيرات وهمية ونحول القيود من ال inequality لـ equality

$$\max Z = 100x_1 + 400x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$4x_1 + 2x_2 + S_1 = 1600$$

$$2{,}5x_1 + x_2 + S_2 = 1200$$

$$4{,}5x_1 + 1{,}5x_2 + S_3 = 1600$$

$$x_1 \; x_2 \; S_1 \; S_2 \; S_3 \geq 0$$

ملاحظة non negativity قيد لا يدخل بالحل

$$Z - 100X_1 - 400X_2 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 = 0$$

ثالث خطوة نذهب الى الجدول ونضع القيم داخله

B	BV	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS Right Hand side
0	S_1	40	$\boxed{2}$	1	0	0	1600
0	S_2	2,5	1	0	1	0	1200
0	S_3	4,5	1,5	0	0	1	1600
	$Z-Cj$	-100	-400	0	0	0	

من الجدول سنستخرج الـ entering Variable (المتغير الداخلي) وال leaving Variable (المتغير الخارجي).

⇐ كيفية الحصول على الـ entering Variable :

نذهب الى المعادلة $Z-Cj$ و نبحث عن المتغير الذي يحمل أعلى سالبية وهو -400 والمتغير الذي يحملها هو X_2

<u>ملاحظة</u>

اذا كانت المعادلة $Z \Leftarrow max$ نبحث على أكبر قيمة سالبة

اذا كانت المعادلة $Z \Leftarrow min$ نبحث على أكبر قيمة موجبة

الدرس: اليوم: التاريخ: / /

⇐ كيفية الحصول على leaving variable

نقسم قيم الطرف الأيمن RHS على قيم ال entering variable
، والقيمة الأقل يكون ال row فيها يحتوي على leaving variable

$1066 = \frac{1600}{1.5}$ $1200 = \frac{1200}{1}$ $800 = \frac{1600}{2}$

أقل قيمة هي 800 وتكون في السطر الذي يحتوي على S_1

leaving variable ⇒ S_1

S_1 سوف تغادر

∴ المتغير الأقل قيمة سوف يخرج وهو S_1 ونعوض عنه بالمتغير الذي يوجد بال entering Variable ، وهو X_2

نبحث الآن عن العنصر المحوري pivot element وهو عبارة عن تقاطع intersection بين عمود ال entering مع سطر ال leaving

ونقسم هذا السطر (أي سطر ال leaving) إلى النصف

العنصر المحوري pivot element بالجدول السابق هو 2

BV		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
400	X_2	2	1	0,5	0	0	800
0	S_2	D = 0,5	B = 0	N = -0,5	M = 1	R = 0	w = 400
0	S_3	2,5	1,5	-0,5	0	1	800
	Z-cj	700	0	200	0	0	320000

⇐ نقسم السطر الذي يحتوي ال leaving بالجدول السابق إلى النصف

ملاحظة

كل سطر له pivot element واحد ولكن الجدول بأكمله له pivot row

لتعبئة باقي القيم بالجدول نستخدم هذا القانون

new element = old element - (pivot element * القيمة المقابل بالجدول الجديد)

$D = 2,5 - (1 * 2) = 0,5$

$B = 1 - (1 * 1) = 0$

$N = 0 - (1 * 0,5) = -0,5$

$M = 1 - (1 * 0) = 1$

$R = 0 - (1 * 0) = 0$

$w = 1200 - (1 * 800) = 400$

ونكمل باقي الجدول بهذه الطريقة.

حساب قيم $Z - cj$

$-100 - (-400 * 2) = 700$

$-400 - (-400 * 1) = 0$

$0 - (-400 * 0,5) = 200$

$0 - (-400 * 0) = 0$

$0 - (-400 * 0) = 0$

$0 - (-400 * 800) = 320\,000$

نلاحظ أنه قيم $Z - cj$ هو قيم موجبة لذا سنتوقف، ولكن إذا حصلنا على قيمة سالبة فإننا سنكرر نفس الخطوات.

ملاحظة

شرط التوقف هو أنه تكون قيمة $Z - cj$ إما صفر أو قيمة موجبة.