حل المسائل وطرق البرهان

د. خالد العمر

محاور المحاضرة :

- مراجعة لما سبق (المسلمة ، الاستدلال ، الاستتباع ، التحويل للشكل النظامي "Convert to CNF").
- طرق حل المسائل : (الشكل المباشر ، نقض الفرض).
- أمثلة وتطبيقات حول الأفكار الرئيسية .
- Horn clauses : 1/ Forward chaining السلسلة الأمامية
  2/ Backward chaining السلسلة الخلفية

تذكرة بمفاهيم مرّت معنا :

- Tautology :

متى نقول عن عبارة\علاقة ما أنها مسلّمة Tautology ؟

✓ إذا كانت قيمة الخرج فيها true دائما مهما كانت قيمة الدخل.

➢ **مثال:**

- $A \cup \neg A \quad \rightarrow T$
- $A \cup T \quad \rightarrow T$
- $(p \cup q) \cup (\neg p \cap \neg q)$

- هل هذه العبارة Tautology ؟

➢ الحل: نبرهن باستخدام جدول الحقيقة.

p	q	$p \cup q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \cap \neg q$	$(p \cup q) \cup (\neg p \cap \neg q)$
T	T	T	F	F	F	T
T	F	T	F	F	F	T
F	T	T	T	F	F	T
F	F	F	T	T	T	T

جميعها T

إذاً من جدول الحقيقة نلاحظ أن العبارة المعطاة مسلّمة.

الاستتباع : Entailment

تعرفنا في المحاضرات السابقة على الاستتباع : $k\beta \vDash \alpha$ ← استتباع

If α is true in all cases $\vDash$ β is true

أي يجب أن تكون $\alpha = true$ في جميع الحالات التي تكون فيها $k\beta = true$ أما إذا كانت $k\beta = false$ فلا تهم قيمة α.

➢ **مثال:**

- $\neg(P \cup Q) \vDash (\neg P \cap \neg Q)$

▪ هل يوجد استتباع (أي هل الطرف الأيمن يتبع الطرف الأيسر)؟

➢ **الحل:** نبرهن باستخدام جدول الحقيقة:

P	Q	$\neg(P \cup Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \cap \neg Q$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

نلاحظ من جدول الحقيقة أنه يوجد استتباع.

الاستدلال : Inference

أيضاً تعرّفنا عليه فيما سبق وللتذكرة : $k\beta \vdash_p \alpha$

- α ناتجة عن $k\beta$ بواسطة الإجراء p, فعندما $k\beta = True$ يجب أن تكون $\alpha = True$.
- حيث يمكن اشتقاق الجملة α من قاعدة المعرفة $k\beta$ باستخدام الإجراء p وذلك يكون حسب قواعد الاستدلال (المذكورة في نهاية المحاضرة الأولى).

▪ التحويل للشكل النظامي "CNF":

تذكرة : (مشروحة أيضاً في المحاضرة الأولى):

1/ حذف التكافؤ

2/ حذف اللاقتضاء

3/ تقليص مجال النفي

4/ توزيع or على and بتطبيق قانون التوزيع

➢ **مثال:** حول إلى الشكل النظامي " Covert to CNF " :

1. لا يوجد تكافؤ إذاً نحذف الاقتضاء ونعوض عنه بما يناسبه.
2. نقلص مجال النفي.
3. نوزع.

- $\neg(P \to Q) \lor (R \to P)$
- $\neg(\neg P \lor Q) \lor (\neg R \lor P)$
- $(P \lor \neg Q) \lor (\neg R \lor P)$
- $(P \lor \neg R \lor P) \land (\neg Q \lor \neg R \lor P)$

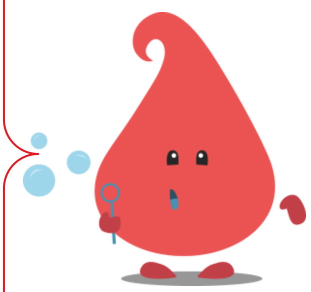
الشكل النظامي: $(P \lor \neg R \land (\neg Q \lor \neg R \lor P)$

ملاحظة: عند حذف اللاقتضاء نعوض عنه بـ : $P \to Q / \neg P \lor Q$

طرق حل / إثبات المسائل:

الطريقة المباشرة:

يتم الانطلاق من مقدمات المسألة بعد النمذجة ونقوم بتطبيق قوانين الاستدلال للوصول إلى الهدف المطلوب برهانه.



طريقة نقض الفرض:

بداية حول مقدمات المسألة للشكل النظامي ، ثم نقوم بنفي الهدف المطلوب برهانه ومن ثم نقوم بإضافته لمقدمات المسألة ونطبق قوانين الاستدلال إلى أن نصل لحالة تناقض وهذا يعني أن الهدف الذي تم رفضه غير صحيح وبالتالي الهدف الأساسي صحيح.

1. مسألة:

1) It is not sunny this afternoon and it is colder than yesterday.
2) If we go swimming it is sunny.
3) If we don't go swimming then we will take a trip.
4) If we take a trip then we will be home by sunset.

Note:

النمذجة:

نختار الـ facts

ثم نحول لـ Rules.

الهدف المراد برهانه "We will be home by sunset"

- ➢ **الحل:**
  - نمذجة المسألة: -->

Facts:

p: It is sunny this afternoon.

q: It is colder than yesterday.

r: We go swimming.

s: We will take a trip

t: We will be home by sunset.

الهدف المطلوب برهانه.

ملاحظة: لا داعي للتحويل للشكل النظامي (يتم التحويل عند تعارض أو عدم تناسب العبارات مع الـ Rules).

Rules:

$\neg p \wedge q$, $r \to p$, $\neg r \to s$, $s \to t$

- الحل بالطريقة المباشرة:

Steps:

[1 $\neg p \wedge q$ تم الاختصار بالاعتماد على فرضية simplification ونتج عنها 2

[2 $\neg p$

[3 $r \rightarrow p$ باختصار 2 و 3 تبعا لنظرية **modustollens** تنتج العبارة 4

[4 $\neg r$

[5 $\neg r \rightarrow s$ باختصار 4 و5 باستخدام فرضية modus ponens فنجد 6

[6 s

[7 $s \rightarrow t$ باختصار 6 و 7 باستخدام فرضية modus ponens فنجد 8 الهدف

[8 t

مسألة الذراع والروبوت.

لدينا ذراع روبوت تعمل على البطارية وتقوم بحمل كتل ذات أوزان معينة، ولدينا Knowledge base\قاعدة المعرفة التالية :

Facts:

1- Battery_ok — البطارية مشحونة.

2- ¬moves — الذراع لا تتحرك.

3- (Battery_ok ∧ liftable) → moves — إذا كانت البطارية مشحونة والكتلة قابلة للحمل فالذراع ستتحرك.

برهن أن α: ¬ liftable

(في قاعدة المعرفة البطارية مشحونة ولكن الذراع لا تتحرك, يبدو أن الكتلة غير قابلة للحمل)

- الحل بطريقة نقض الفرض:

1. نحول 3 للشكل النظامي CNF.

3. ¬ Battary - ok ∨ ¬ lifetable ∨ moves

2. نقوم بنفي الهدف المطلوب برهانه:

4. Liftable

3. نضيف الفرض المنفي إلى مقدمات المسألة وفي حال الوصول لتناقض هذا يعني أن البرهان صحيح.

➢ من 3 و 4 نجد (بتطبيق الـ Resolution) -->

5. ¬ Battary - ok ∨ moves

➢ من 2 و 5 نجد (بتطبيق الـ Resolution) -->

6. ¬ Battary - ok

➢ من 1 و 6 نجد تناقض إذاً ما نحاول برهانه صحيح --> α: ¬ lifetable

liftable　　¬ Battery - ok ∨ ¬ liftable ∨ moves

¬ Battery_ok ∨ moves　　¬ moves

¬ Battery_ok　　Battery_ok

Null تناقض

- Notes:
- Resolution:

$[(p \lor q) \land (\neg p \lor r) \to (q \lor r)]$

عبارات هورن Horn clauses

1. وُجدت عبارات Horn لتبسيط العبارات, فاعتمد العلماء على مجموعة جزئية لتخفيض التعقيد الحسابي بحيث يكون لدينا في الطرف الأيمن ذرة واحدة فقط غير منفية وهذه الحالة هي الحالة الأكثر تداولاً في الحياة العملية إذ نقوم بجمع عدة ذرات $(p_1 , p_2 , \ldots)$ باستخدام and / or لتعطينا نتيجة واحدة محققة .

2. **الشكل الأساسي لها:**

$$p_1 \land p_2 \land p_3 \ldots . p_n \to Q$$
$$\equiv \neg p_1 \lor \neg p_2 \lor \neg p_3 \ldots . \neg p_n \lor Q$$

تذكرة: $p \to Q \equiv \neg p \lor Q$

خوارزميات لبرهنة المسائل (طرق البرهان المستنتجة من عبارات Horn):

السلسلة الأمامية Forward chaining

السلسلة الخلفية Backward chaining

طريقة Forward chaining

للبرهان بهذه الطريقة نقوم بالبحث عن القاعدة التي يكون الطرف الأيسر لها محقق (أي موجود ضمن قاعدة المعرفة KB) فإذا كان محقق نضيف طرفها الأيمن إلى قاعدة المعرفة لدينا ، يتم تكرار هذه الخوارزمية في كل مرة نضيف حقيقة جديدة إلى قاعدة المعرفة إلى أن تصبح جميع ذرات العلاقة المراد برهانها مضافة إلى قاعدة المعرفة ومنه برهنت العبارة المطلوبة.

مثال (Forward chaining):

Goal H

Rules:

1. $A \cap B \to C$
2. $A \to D$
3. $C \cap D \to E$
4. $B \cap E \cap F \to G$
5. $A \cap E \to H$
6. $D \cap E \cap H \to I$

Facts:

1. A
2. B
3. F

القواعد المطبقة Applied Rules	القواعد القابلة Rules trigged للتطبيق	الحقائق المتاحة Facts
1	1, 2	A, B, F
2	2	A, B, F, C
3	3	A, B, C, D, F
4	4, 5	A, B, C, D, E, F
5	5	A, B, C, D, E, F, G

Iteration 1:

إن الطرف الأيسر للعلاقة 1 محقق لأن B=True و A=True لأنهما ضمن قاعدة المعرفة، فنستنتج أنC=True ونضيفها ل KB .

KB=A,B,C,F

Iteration 2:

إن الطرف الأيسر للعلاقة 2 محقق لأن A=True ، فنستنتج أن D=True ونضيفها ل KB .

KB=A,B,C,D,F

Iteration 3:

إن الطرف الأيسر للعلاقة 3 محقق لأن D=True و C=True ، فنستنتج أن E=True ونضيفها ل KB .

KB=A,B,C,D,E,F

Iteration 4:

إن الطرف الأيسر للعلاقة 4 محقق لأن E=TruegB=True و F=True ، فنستنتج أن G=True ونضيفها ل KB .

KB=A,B,C,D,E,F,G

Iteration 5:

إن الطرف الأيسر للعلاقة 5 محقق لأن E=True و A=True ، فنستنتج أن H=True ونضيفها ل KB .

KB=A,B,C,D,E,F,G,H

A, B, C, D, E, F, G, H	**6**	6
A, B, C, D, E, F, G, H, I	-	**-**

ملاحظات حول المثال السابق:

- نلاحظ أن شرط التوقف هو إما المرور بشكل تسلسلي على جميع ال Rules، أو الوصول للهدف.
- نعتبر أنه يوجد حلقة For تمر على كافة ال Rules وفي حال وجود أحد القوانين غير قابلة للتنفيذ ننتقل لما بعدها ومن ثم نقوم بإعادة ال parse والمرور من جديد ليتم مسح كافة ال Rules وهكذا.
- في بعض الحالات (التي ستمر معنا لاحقاً) يتم استخدام وتطبيق ال Rules بناءً على أولويات معينة وسينفذ ال Rule ذو الأولوية الأعلى.

طريقة Backward chaining

إن هذه الطريقة أشبه بالتابع العودي ، حيث نبدأ من المطلوب برهانه أي من الطرف الأيمن للبرهان ثم نرى إن كان طرفه الأيسر ضمن قاعدة المعرفة أم لا ، فإن كان غير موجود يصبح هدفنا الجديد البحث عن طريقة برهان هذا الهدف الجديد ونكمل على هذا المنوال إلى أن نصل إلى حقيقة موجودة ضمن قاعدة المعرفة ثم نعود لإثبات الهدف الأساسي.

إعادة حل المثال باستخدام الـ Backward chaining :

ويصبح الجدول على الشكل:

حقائق Facts	أهداف Goals	أهداف Rules
A, B, F	H	$5(4)$
A, B, F	E	$3(3)$
A, B, F	D, C	$1(1)$
A, B, C, F	D	$2(2)$
A, B, C, D, F	E	
A, B, C, D, E, F	H	

ملاحظة: يتم استخدام بنية المعطيات Stack لتخزين الأهداف حيث First in هو Last out.

E
H

- نريد برهان H لذلك ستتم إضافتها لمكدس الطلبات، لبرهان H نحتاج لبرهان E التي سنضيفها أيضا إلى مكدس الطلبات فهي غير موجودة في قاعدة المعرفة
- الآن هدفنا البحث عن E (العنصر الذي يقع في قمة المكدس يكون هو الهدف الحالي) نبحث عن قاعدة طرفها الأيمن E، نجد القاعدة 3 تحقق ذلك.
- في القاعدة 3 نجد أن كل من C و D ليسا في قاعدة المعرفة، لذا نتحقق من عناصر القاعدة السابقة من اليسار لليمين، وبذلك ستضاف C للمكدس.

C
E
H

- الآن علينا البحث عن قاعدة طرفها الأيمن C ، نجد القاعدة 1 تحقق ذلك.
الطرف الأيسر للقاعدة السابقة محقق لأن A=True و B=True (موجودتان في قاعدة المعرفة)
وبالتالي تحققت C وسنزيلها من مكدس الطلبات وسنضيفها لقاعدة المعرفة KB: A,B,C,F.

D
E
H

- نعود للعلاقة 3 التي لم تتحقق بعد لحاجتها لتحقق D، نضيف D لمكدس الطلبات ونكمل.
- نبحث عن القاعدة التي طرفها الأيمن D، فنجد القاعدة 2.
هذه القاعدة محققة وبالتالي أصبحت D محققة فنزيلها من المكدس
ونضيفها لقاعدة المعرفة KB: A,B,C,D,F

H

- بالعودة للقاعدة 3 نجد أنها أصبحت محققة لتحقق طرفها الأيسر، إذا الآن نزيل E من المكدس ونضيفها لقاعدة المعرفة KB: A,B,C,D,E,F .
- نعود للقاعدة 5 فنجد أنها أصبحت محققة لتحقق طرفها الأيمن، نزيل H من مكدس الطلبات ونضيفه لقاعدة المعرفة KB: A,B,C,D,F,H .

✓ بما أن H أصبحت ضمن قاعدة المعرفة ومكدس الطلبات عاد فارغًا، إذا تحقق ما أردنا برهانه.

انتهت المحاضرة..