



Pumping Lemma - توطئة الضخ

أ. أحمد النحاس

محتوى مجاني غير مخصص للبيع التجاري

RB Informatics ; 31/05/2022 اللغات الصورية

توطئة الضخ

هي صفة من صفات اللغات المنتظمة، ولكن يتم استخدامها لإثبات أن لغة ما ليست منتظمة، ونعتمد في الإثبات على مبدأ نقض الفرض (أي نفرض في البداية أن اللغة التي لدينا منتظمة ومن خلال بعض الخطوات نصل نتيجة تنقض الفرض الذي فرضناه في البداية أي نتوصل لنتيجة أن اللغة غير منتظمة).

■ مثال: لتكن $L = \{0^n 1^n ; n \geq 1\}$ ، هل هذه اللغة منتظمة، ولماذا؟

الحل: نفرض بدايةً أن اللغة منتظمة، عندئذٍ يوجد ثابت التوطئة P يمثل عدد الحالات المختلفة للأوتومات المنتهي الأصغري الحتمي (DFA) الذي يقبل L .

وحسب قواعد توطئة الضخ يوجد من أجل أي قيمة P سلسلة Z تحقق العلاقة (*) $|Z| \geq P$ ، نكتب Z على شكل ثلاث سلاسل جزئية $Z = uvw$ بحيث: $|uv| \leq P$ و $|v| \geq 1$ و $P \geq |v| \geq 1$

■ للتوضيح: $|uv| \leq P$ أي أن السلسلة الجزئية uv توجد في القسم الأول من السلسلة Z .

■ للتوضيح: $|v| \geq 1$ أي أن تحوي محرف واحد على الأقل ولا تكون سلسلة خالية أو ϵ .

في هذا المثال نفرض سلسلة بدلالة P أي $Z = 0^P 1^P$ تكون $|Z| = 2P > P$ محققة للشرط (*).

نفرض السلاسل uvw بحيث تحقق الشروط السابقة:

$$u = 0^{P-1}, v = 0, w = 1^P$$

$$\rightarrow |uv| = 0^{P-1} 0^1 = 0^P = 1$$

يجب أن تحقق السلسلة Z القاعدة التالية $u.v^i.w \in L ; i \geq 0$ ، نلاحظ أن $u.v^i.w \in L$ غير محققة من أجل $i = 0$ ، لأن ذلك يؤدي إلى عدم تساوي عدد الأصفار مع عدد الواحدات، وهذه مناقض للفرض، إذاً $u.v^i.w \notin L$ ، ومنه اللغة غير منتظمة ($u.v^i.w \in L$) نلاحظ أنها محققة فقط من أجل $i = 1$.

تذكرة: لنفي الفرض يكفي ذكر مثال واحد ينقض صحة العلاقة.

■ تمرين: لتكن $L = \{0^{n^2} ; n \geq 1\}$ هل هذه اللغة منتظمة؟

الحل: نفرض أن L لغة منتظمة، عندئذٍ يوجد سلسلة $|Z| \geq P$ ، نأخذ سلسلة بدلالة $Z = 0^{P^2} \in L$ حيث

$$|Z| = P^2 > P$$

نشكل السلاسل الجزئية uvw بحيث: $|uv| \leq P$ و $|v| \geq 1$ و $P \geq |v| \geq 1$ ، وحسب التوطئة لابد من تحقق: $u.v^i.w \in L$.

من أجل العدد P يكون طول السلسلة المقبولة $|Z| = P^2$.

ومن أجل العدد $P + 1$ يكون طول السلسلة المقبولة $|Z| = (P + 1)^2$.

\Leftarrow في العلاقة $u \cdot v^i w$ من أجل $i = 2$ نلاحظ أن $|u \cdot v^2 w| = P^2 + |v|$
 باعتبار أن $|v| \geq 1$ فإن $P \geq |v|$:

$$|u.v^2w| = P^2 + |v| \leq P^2 + P$$

$$P^2 < |u.v^2w| = P^2 + |v| \leq P^2 + P < (P+1)^2$$

أي أن طول $|u.v^2w|$ يقع ضمن المجال $[P^2, (P+1)^2]$

وباعتبار أنه لا يوجد مربع كامل ضمن هذه المجال، فإن $|u.v^2w| \notin L$.

وبالتالي فإن هذا يناقض توطئة الضخ وبالتالي فإن هذه اللغة غير منتظمة.

توضیح :

$$|Z| = |uvw| = p^2$$

$$\begin{aligned} |u \cdot v^2 w| &= |uvw| + |v| \\ &= P^2 + |v| \end{aligned}$$

Grammar

يتم تمثيل الـ Grammar بالرباعية $G = (V, T, S, P)$ ، حيث:

٧: وهى المتحولات و ترمز بحرف كبير *Variables*.

- T: وهى رموز الأبجدية Terminal.

- S: الحالة البدائية.

- P : قواعد الإنتاج.

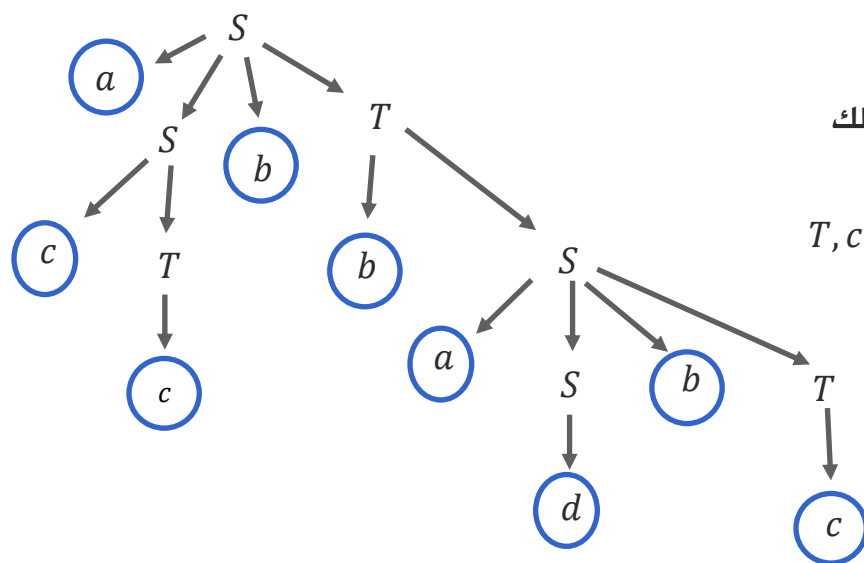


تمرين: ليكن لدينا مجموعة القواعد التالية:

$$S \rightarrow aSbT|cT|d$$

$$T \rightarrow aT|bS|c$$

هل الكلمة $accbbadbcb$ مقبولة؟



نبدأ من الحالة البدائية S ، يتفرع منها a, S, b, T ، ذلك

لأن السلسلة بدأت بـ a' .

نلاحظ الرمز التالي ' c ' لذلك نفرع من S فرعين هنا T, c

ونستمر في رسم الشجرة حتى تنتهي السلسلة،

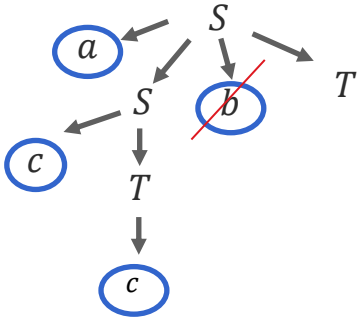
أو نصل إلى فرع غير موجود في السلسلة.

ونلاحظ أننا وصلنا لنهاية السلسلة عند رمز

الأبجدية c لذا فالكلمة مقبولة.

- تكون الكلمة مقبولة إذا انتهت السلسلة، وكانت فروع الشجرة هي رموز الأبجدية Terminal

■ نقرأ الشجرة من اليسار إلى اليمين $acccbdbc$.



هل الكلمة *accdda* مقبولة؟

نلاحظ أن السلسلة تحوي *c* يليها *d* ولكن عند شجرة اشتقاق الكلمة و رسم الشجرة نلاحظ أنه يجب أن يكون بعد *c* المحرف *b*، لذا الكلمة **مرفوضة**.

ملاحظة 1: كل لغة منتظمة هي لغة قابلة للضخ، و لكن العكس ليس بالضرورة صحيحاً.

ملاحظة 2: وكل لغة غير قابلة للضخ هي لغة غير منتظمة، و لكن العكس ليس بالضرورة صحيحاً.

ملاحظة 3: ضمن محاضرات المهندس أحمد النحاس قد تناول المقرر من بدايته و حتى نهاية فقرة توطئة الضخ مع مقدمة و بعض التمارين عن القواعد بشكل عام.

بقية المقرر و حتى نهايته موجود ضمن محاضرات المهندس عمار فرحة (القواعد خارج السياق ، الغموض ، ال pda و تمارين عليه....الخ) أي المطلوب دراسته محاضرات المهندس أحمد بالإضافة للمحاضرات رقم 4 و 6 و 7 من قسم الأستاذ عمار فرحة.

ملاحظة 4: ال Turing Machines قد تم إعطائه ضمن المقرر النظري فقط و لم يُعطى في المقرر العملي.

انتهت المحاضرة



إلى هنا نكون قد وصلنا معكم

لنهاية المقرر عملي اللغات الصورية،

لا نخسونا من صالح دعائكم.