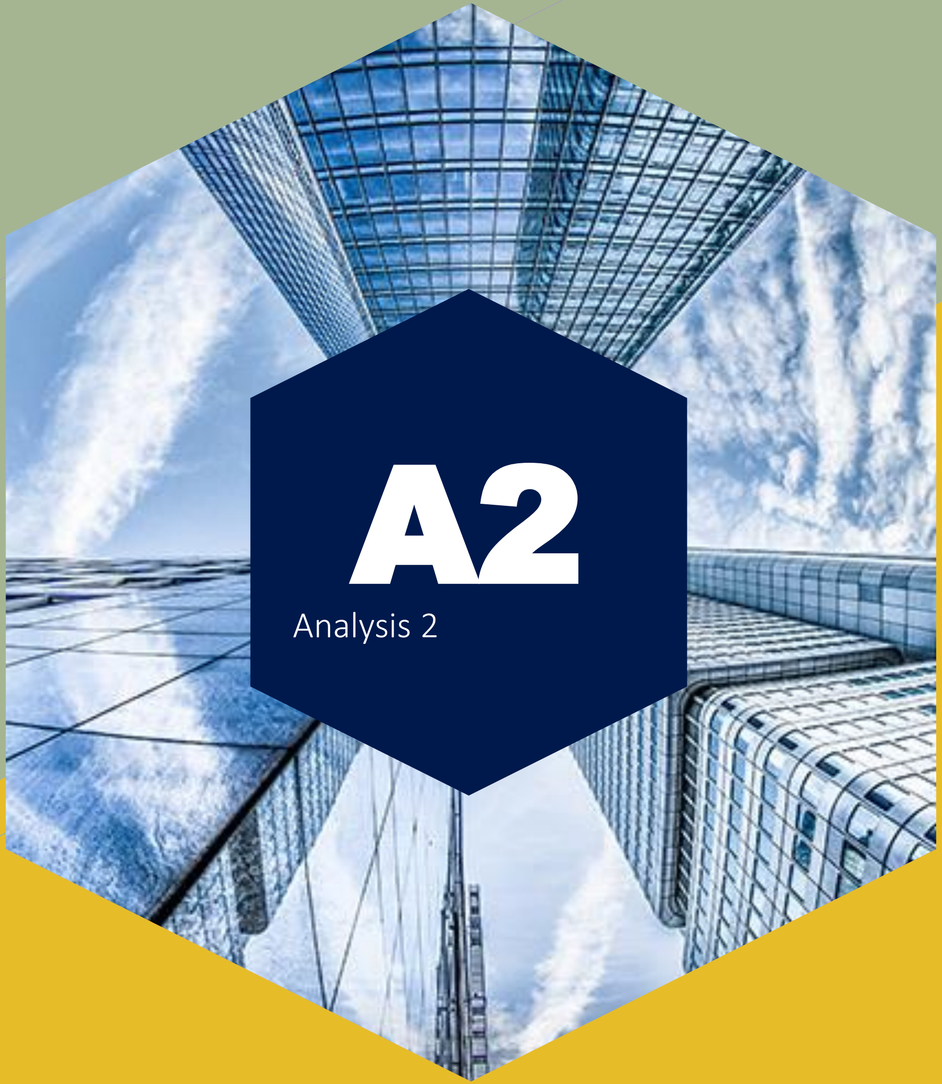

مقارنة التوابع

تذكرة

- تعرف عملية مقارنة تابعين بأنها دراسة سلوك تابع بالنسبة لتابع آخر

- التابع الحقيقي هو تابعٌ منطلقه ومستقره مجموعتين جزئيتين من $\mathbb{R}$

- تكون قيمة التابع في جوار نقطة التماس قريبة من قيم تابع المماس وهذا ما ندعوه بالتقريب الخطي لتابع عند نقطة التماس.

- جوار النقطة هو أي مجال اختياري $]a, b[$ تنتمي إليه هذه النقطة حيث غالبا تكون x_0 في مركز الجوار ونصف قطره $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$

تكافؤ تابعين في جوار نقطة

- نقول إن التابعين f, g متكافئان في جوار النقطة a إذا وجد تابع δ معرف في جوار a بحيث يكون:

$$\lim_{x\to a}\delta(x)=1 \quad \wedge \quad f(x)=\delta(x).g(x)$$

حيث تكون قيم f قريبة جدا من قيم g في جوار a، ونعبر عن ذلك كالآتي

$$f \underset{a}{\sim} g$$

وفي حال كان التابع g لا ينعدم في جوار a ، فإن التعريف السابق يكافئ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

كما يمكننا أن نكتب

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)$$

ونقول أنه في جوار بسيط للنقطة a تكون قيم g, f متساوية تقريباً

$$\forall x\in\left]a-\varepsilon,a+\varepsilon\right[\Rightarrow f(x)\approx g(x)$$

- يمكن أن يكون للتابع أكثر من مكافئ في جوار نقطة a لكن التابع الذي يكون احتمالية تكافؤه مع التابع f مساويا للواحد هو تابع المماس في النقطة a (وذلك لأن المماس يشترك مع التابع f في النقطة a، وتكون نهاية تابع المماس مساوية للواحد في جوار نقطة a).

- معادلة المماس عند النقطة a هي $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y = f^{'}(a).(x-a) + f(a)$$

- الفائدة من إيجاد تابع مكافئ تابع هي إيجاد قيم تقريبية (صورة نقطة) لتوابع معقدة

مثال

- أوجد تابع صورة التابع $f(x)=e^x$ عند النقطة $a=0.0001$

$$f(x)=e^x:\Re\to\Re^{+*}$$

- معادلة المماس (التابع المكافئ) هي $g(x)=x+1$
- ونلاحظ أن المماس يمر بالنقطة (0,1)
- ويكون g مكافئ لـ f في جوار الصفر $g(x)\underset{0}{\sim}f(x)$
- أي أن g هو تقريب للتابع f في جوار الصفر

ملاحظة هامة

$$f(0)=e^{0.0001}\approx g(0)=0.0001+1=1.0001$$

- لكن كلما ابتعدنا عن الصفر تبتعد قيم التابعين

$$x=1 \to e^{1}=2.7$$
$$x=1 \to x+1=2$$

- إذاً التقريب يكون في مجال صغير حول a ومن أجل $\varepsilon > 0$ صغيرة كفاية

مثال(2)

- هل التابعان التاليين متكافئين $g(x)=x$, $f(x)=\sin x$ في جوار النقطة 0
- نعلم أن $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$
- وبالتالي $$f(x)\underset{0}{\sim} g(x)$$
- أي أن $$\sin x \underset{0}{\approx} x$$

التوابع المحدودة
(تابع محدود أمام تابع آخر)

- ما هو التابع المحدود؟

يكون التابع $M(x)$ **محدود من الأعلى على المجال** I **إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي** M **يحقق:**

$\forall x \in I \; ; \; M(x) \leq M$ **وعندها يسمى** M **عنصرا راجحاً على المجال** I.

إذا كان M عنصرا راجحاً على مجال I **فإن كل عدد حقيقي أكبر من M هو عنصر راجح على هذا المجال**

التوابع المحدودة
(تابع محدود أمام تابع آخر)

- يكون التابع $M(x)$ محدود من الأدنى على المجال I إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي m يحقق:

$\forall x \in I \; ; \; M(x) \geq m$ وعندها يسمى m عنصرا قاصراً على المجال I.

A2

يكون $M(x)$ محدود على I إذا وفقط إذا وجد العدد $m \in \mathbb{R}^{*+}$ بحيث يكون:

$$\forall x \in I \; ; \; |M(x)| \leq m$$

$$-m \leq M(x) \leq m$$

تعريف

نقول أنّ التابع g <u>يهيمن على</u> التابع f في جوار النقطة a أو أن التابع f <u>محدود أمام</u> التابع g إذا وجد تابع M معرف ومحدود في جوار a بحيث يكون:

$$f(x) = M(x)g(x)$$

حيث

$$\lim_{x \to a} M(X) = L \quad : \quad L \in R$$

ونعبر عن ذلك بالصيغة التالية:

$$f \underset{a}{=} O(g)$$

ملاحظات هامة

- تابع f محدود بالتابع g أي أن قيم f لا تتجاوز قيم g.
- إذا كان تابع محدود أمام تابع آخر فليس بالضرورة أن يكون مكافئا له.
- إذا كان g لا ينعدم في جوار a فإن التعريف السابق يكافئ القول أن التابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ محدود في جوار a.

ويمكن أن نستنتج أنه

إذا كان التابع f محدوداً أمام التابع g في جوار V للنقطة a فإنّ التعريف السابق يكافئ الشرط التالي:

يوجد العدد الحقيقي $m>0$ بحيث $\forall x \in V\,;\, |f(x)| \le m|g(x)|$.

مثال

- هل $x.\sin x \underset{0}{=} O(x)$
- بفرض

$$f(x) = x.\sin x$$
$$g(x) = x$$
$$M(x) = \sin x$$

A2

نعلم أن $M(x)$ تابع محدود في جوار الصفر وذلك لأن:

$$\forall x \in]-\infty, +\infty[\Rightarrow -1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow |\sin x| \le 1$$

$$x.\sin x \underset{0}{=} O(x)$$

نتيجة

إذا كان $g \underset{a}{\sim} f$ فإن $f \underset{a}{=} O(g)$ و $g \underset{a}{=} O(f)$ ، ولكن العكس غير صحيح بالضرورة.

مثال (2)

أثبت أن:

$$\sqrt{t+1} \underset{0}{=} 1 + O(t)$$

$$\sqrt{t+1} \underset{0}{=} 1 + O(t)$$

$$\sqrt{t+1} - 1 \underset{0}{=} O(t)$$

$$f(t) = \sqrt{t+1} - 1$$

$$f(t) = \frac{(\sqrt{t+1}-1).(\sqrt{t+1}+1)}{\sqrt{t+1}+1} = \frac{t+1-1}{\sqrt{t+1}+1} = \frac{t}{\sqrt{t+1}+1} = t.\frac{1}{\sqrt{t+1}+1}$$

- فإذا فرضنا

$$M(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}+1}$$

- نجد

$$\lim_{t\to 0} M(t) = \frac{1}{2}$$

- أي أنَّ

$$\sqrt{t+1} - 1 \underset{0}{=} O(t)$$

- أو

$$\sqrt{t+1} \underset{0}{=} 1 + O(t)$$

- ولكن

$\sqrt{t+1}-1 \underset{0}{\not\sim} t$ وذلك لأن $\lim\limits_{t\to 0} M(t)=\frac{1}{2}\neq 1$.

تابع مهمل أمام تابع
تعريف

نقول إن التابع f مهمل أمام التابع g إذا وجد تابع $\delta(x)$ معرف في جوار a بحيث:

$$f(x) = \delta(x)g(x)$$

حيث $\lim_{x\to a} \delta(x) = 0$

- ونكتب $f \underset{a}{=} o(g)$

A2

وينتج من التعريف

إذا كان التابع $g \neq 0$ عندما في جوار a فإن التعريف السابق يكافيء $0 = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

A2

مثال

أثبت أن $x . \ln x \underset{1}{=} o(x)$.

الحل

$f(x) = x.\ln x$

$g(x) = x$

ويكون $f(x) = \varepsilon(x).g(x)$ وحيث

$\varepsilon(x) = \ln x$

و $\lim\limits_{x\to 1} \varepsilon(x) = \lim\limits_{x\to 1} \ln x = 0$

- أي أن $x.\ln x \underset{1}{=} o(x)$

بعض خواص التوابع المهملة أمام توابع أُخرى

1

$$f \underset{a}{=} o(g) \Rightarrow f \underset{a}{=} O(g)$$

- ولكن العكس غير صحيح بالضرورة

A2

بعض خواص التوابع المهملة أمام توابع أُخرى

2

$$f \underset{a}{=} o(g) \Rightarrow g \underset{a}{\sim} (f+g)$$