Projet MAP
En moyenne, combien de sommets possède ce polygone, lorsque n devient grand?

El Ghali Zerhouni & Mohammed Amine Bennouna

Partie théorique

1. Soit B_n l'événement définit dans l'énoncé et $\forall k \in [|1, n-1|]$ on pose P_k^s: "P_k est un sommet du polygone engendré par $(P, P_1, ..., P_{n-1})$". On a
$$\mathbb{P}(P_k^s) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{P_k^s}) = \mathbb{P}(B_n)$$
Ainsi
$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n &= \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{1}_{P_k^s} + \mathbf{1}_{B_n}) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{P_k^s}) + \mathbb{E}(\mathbf{1}_{B_n}) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(B_n) \\ &= n\mathbb{P}(B_n) \end{aligned}$$
Donc
$$\mathcal{E}_n = n\mathbb{P}(B_n)$$

2. Si P est extremal, P est un sommet du polygone.
Donc $C_n \subset B_n$ et ainsi $\mathbb{P}(B_n) \geq \mathbb{P}(C_n)$

3. Soit D_p la distance du point P par rapport au centre du disque. On a $\mathbb{P}(C_n) = \int_0^1 \mathbb{P}(C_n | D_p = r) f(r)\, \mathrm{d}r$ où f est la densité de la variable aléatoire D_p. $f(r) = 2r\mathrm{d}r$.
$\mathbb{P}(C_n | D_p = r) = \mathbb{P}(\bigcap_{i}^{n-1} P_i \notin S_p) = \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(P_i \notin S_p)$ par indépendance.
or $\mathbb{P}(P_i \notin S_p) = \frac{\pi - g(r)}{\pi}$.

S_p vaut $\pi - g(r)$, d'où $\mathbb{P}(C_n|D_p = r) = (1 - \frac{g(r)}{\pi})^{n-1}$. Ainsi $\mathbb{P}(C_n) = \int_0^1 (1 - \frac{g(r)}{\pi})^{n-1} 2n \, \mathrm{d}r$
A l'aide du changement de variable $r = 1 - s$,

$$\mathbb{P}(C_n) = \int_0^1 (1 - \frac{h(s)}{\pi})^{n-1} 2(1-s) \, \mathrm{d}s$$

4. Pour $h(s)$, on intègre sur l'élément de volume $\Delta x = [\sqrt{1-x^2} - (1-s)]\mathrm{d}x$ entre $-\sqrt{2-s^2}$ et $\sqrt{2-s^2}$.
   Ainsi
   $$h(s) = \int_{\sqrt{2-s^2}}^{-\sqrt{2-s^2}} [s + \sqrt{1-x^2} - 1] \, \mathrm{d}x$$

5. (a) Comme $-\sqrt{2s-s^2} < x < \sqrt{2s-s^2}$, $s \to 0 \implies x \to 0$.
   $\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ donc $s + \sqrt{1-x^2} - 1 = s - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$
   ainsi ,

   $$\begin{aligned} h(s) &= \int_{\sqrt{2-s^2}}^{-\sqrt{2-s^2}} s - \frac{1}{2}x^2 \, \mathrm{d}x + o(s^{\frac{3}{2}}) \\ &= 2s\sqrt{2s-s^2} - \frac{1}{3}\sqrt{2s-s^2}^3 + o(s^{\frac{3}{2}}) \\ &= 2\sqrt{2}s^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}2\sqrt{2}s^{\frac{3}{2}}) + o(s^{\frac{3}{2}}) \\ &= 4\frac{\sqrt{2}}{3}s^{\frac{3}{2}} + o(s^{\frac{3}{2}}) \end{aligned}$$

   Ainsi,
   $$h(s) \sim 4\frac{\sqrt{2}}{3}s^{\frac{3}{2}}$$

   (b) On a $(1 - \frac{h(s)}{\pi})^{n-1} = e^{(n-1)ln(1-\frac{h(s)}{\pi})}$.
   Il faut que $(n-1)ln(1 - \frac{h(s)}{\pi}) \sim C$ i.e $h(s) \sim \frac{K'}{n}$ où K' est une constante.

   - Lorsque $h(s) \ll \frac{1}{n}$, on obtient $(1 - \frac{h(s)}{\pi})^{n-1} \to 1$ car $(n-1)ln(1 - \frac{h(s)}{\pi}) \to 0$
   - Lorsque $h(s) \gg \frac{1}{n}$, $(1 - \frac{h(s)}{\pi})^{n-1} \to +\infty$

Pour que $(1-\frac{h(s)}{\pi})^{n-1} \sim C$, il est nécessaire que $h(s) \sim \frac{K}{n}$ ie

$$s_n \sim K_0 n^{-\frac{2}{3}}$$

avec K_0 constante non nulle.

6. En posant $s = un^{-\frac{2}{3}}$ on obtient:
$\mathbb{P}(C_n) = \int_0^1 (1-\frac{h(un^{-\frac{2}{3}})}{\pi})^{n-1} 2(1-un^{\frac{2}{3}})n^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}u$ et $1-un^{\frac{2}{3}} \sim 1$

$$(1-\frac{h(un^{-\frac{2}{3}})}{\pi})^{n-1} = e^{(n-1)ln((1-\frac{h(un^{-\frac{2}{3}})}{\pi}))}$$

Or, $(n-1)ln((1-\frac{h(un^{-\frac{2}{3}})}{\pi})) \sim e^{-(\frac{K}{\pi})u^{\frac{3}{2}}}$

Donc
$$(1-\frac{h(un^{-\frac{2}{3}})}{\pi})^{n-1} \sim e^{-(\frac{K}{\pi})u^{\frac{3}{2}}}$$

7. $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0 1 - n^{-\frac{2}{3}} \geqslant \frac{1}{2}$, ainsi, $\forall u \in [0,1]\ \ 1-un^{-\frac{2}{3}} \geqslant \frac{1}{2}$.

$\mathbb{P}(C_n) \geqslant n^{-\frac{2}{3}} \int_0^1 (1-\frac{h(un^{-\frac{2}{3}})}{\pi})^{n-1}\mathrm{d}u$.

En posant $f_n : u \to (1-\frac{h(un^{-\frac{2}{3}})}{\pi})^{n-1}$, on a $f_n(u) \to e^{-\frac{K}{\pi}u^{\frac{3}{2}}}$.

Or, $\forall u \in [0,1]\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \ |ln(un^{-\frac{2}{3}})| \leqslant \pi$ et $|1-\frac{ln(un^{\frac{2}{3}})}{\pi}| \leqslant 1$.

Donc $\| f_n \|_{\infty,[0,1]} \leqslant 1, \forall n \in \mathbb{N}$
En appliquant le theorem de convergence dominée, on obtient la convergence souhaitée.

8. On déduit de ce qui précède que:

$$\int_0^1 (1-\frac{ln(un^{-\frac{2}{3}})}{\pi})^{n-1}\mathrm{d}u = c + \delta_n$$

avec $c = \int_0^1 e^{-\frac{K}{\pi}u^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u$ et δ_n est un suite qui tend vers 0.

On obtient alors $\mathbb{P}(C_n) \geqslant n^{-\frac{2}{3}}(c + \delta_n)$ et $\mathbb{P}(B_n) \geqslant \mathbb{P}(C_n) \geqslant n^{-\frac{2}{3}}(c + \delta_n)$.

Finalement:

$$\mathcal{E}_n = n\mathbb{P}(B_n) \geqslant n^{\frac{1}{3}}(c + \delta_n)$$

et $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geqslant n_0$:

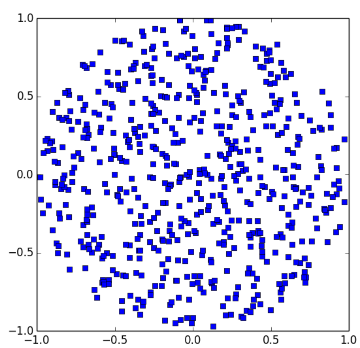
$$\mathcal{E}_n \geqslant \frac{c}{2} n^{\frac{1}{3}}$$

Ainsi, $\mathcal{E}_n$ croît au moins comme $\frac{c}{2}n^{\frac{1}{3}}$ pour n assez grand.

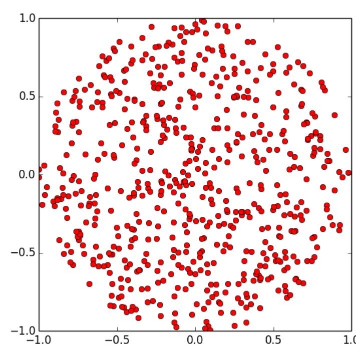
Simulations

Tirer des points au hasard dans le disque unité

On tire au hasard dans le disque unité n points uniformement. On utilise deux méthodes: en simulant les coordonnées cartésiennes ou les coordonnées polaires. On remarque expérimentalement que la méthode polaire est plus rapide: le ratio du coût temporel des algorithmes est de $\frac{3}{5}$.



(a) coordonnées cartésiennes

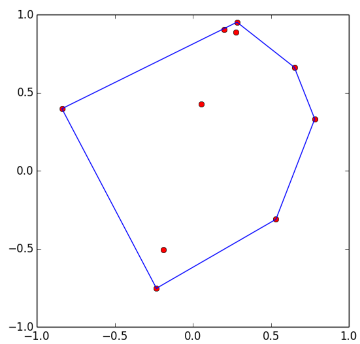


(b) Coordonnées polaires

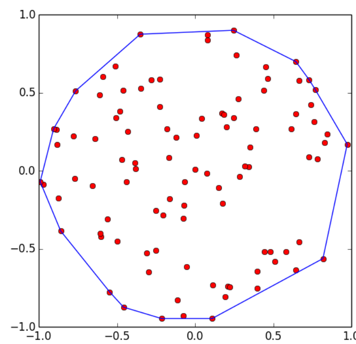
Figure 1: Simulation de 600 points dont les coordonnées ont été tirées aléatoirement

Algorithme de Graham

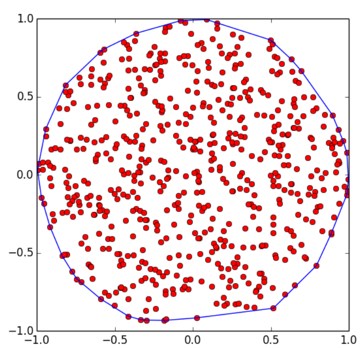
Le parcours de Graham permet de trouver l'enveloppe convexe de nos points, il utilise la structure de pile pour ce faire. Il faut d'abord sélectionner le pivot qui correspond au point de plus petite ordonnée puis ordonner les points par ordre croissant selon l'angle que fait le vecteur formé par le point et le pivot avec l'axe des ordonnés. Ensuite, l'algorithme traite les points trois par trois, si les trois points forment un tournant à gauche (ie. lorqu'on prend successivement A, B et C alors l'angle pour passer de A à C en prenant B comme pivot est dans le sens trigonométrique) il les empile , sinon il supprime le deuxième (ici B) point puis examine le tournant formé le premier et le troisième précédents avec le point suivant dans la liste des points. A la fin de l'algorithme, chaque trio de point pris successivement forme un tournant à gauche et on obtient alors l'enveloppe convexe.



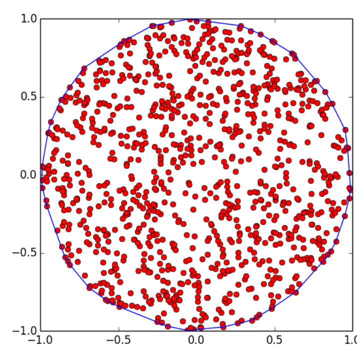
(a) $n = 10$



(b) $n = 100$



(c) $n = 600$



(d) $n = 1000$

Figure 2: Utilisation de l'algorithme de Graham pour trouver l'enveloppe convexe de n points tirés aléatoirement

Taille de l'enveloppe convexe

On trace à l'aide d'un estimateur, l'espérance $\mathcal{E}_n$ en fonction de n.

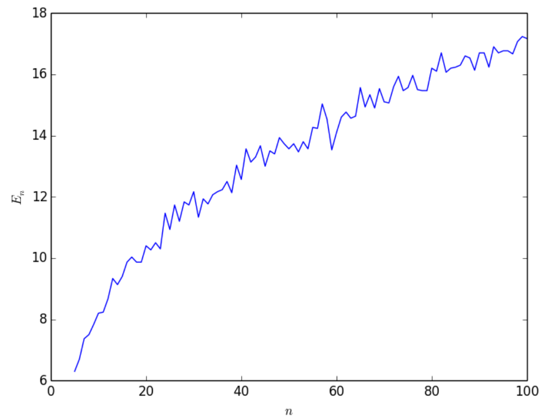


Figure 3: Espérance de la taille de l'enveloppe convexe $\mathcal{E}_n$ en fonction de n

A l'aide d'un estimateur empirique (détaillé dans le code Python) on encadre la courbe entre deux courbes de la forme $cn^{\frac{1}{3}}$. On trouve que les deux valeurs de c sont ~ 3.6 et ~ 3.9.

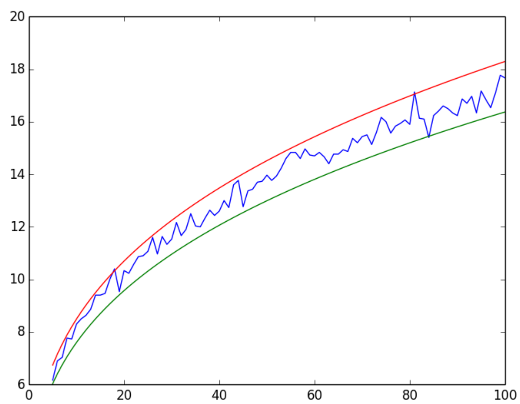


Figure 4: Encadrement de $\mathcal{E}_n$. $c_1 \sim 3.6$ et $c_2 \sim 3.9$