TD N°1

Exercice 1: Soit la fonction en escalier définie sur $[0,3]$ par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si} \quad x = 1 \\ -2 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 4 & \text{si} \quad 2 < x < 3 \end{cases}$$

1) Calculer l'intégrale :

$$\int_0^3 \varphi(x)\mathrm{d}x$$

2) Trouver l'expression de la fonction Φ , selon les valeurs de $t \in [0,3]$:

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(x)\mathrm{d}x$$

3) Montrer que Φ est continue mais n'est pas dérivable sur $[0,3]$.

Exercice 2: Soit la famille de fonctions φ_n , $n \in \mathbb{N}^*$ définies sur $[0,1]$ par:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{p^2}{n^2} & \text{si} \quad x \in \left[\dfrac{p}{n}, \dfrac{p+1}{n}\right[\\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases} \qquad \text{avec } p \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$$

1) Ecrire l'expression des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$.

2) Montrer que φ_n est une fonction en escalier.

3) Calculer l'intégrale :

$$\int_0^1 \varphi_n(x)\mathrm{d}x$$

Exercice 3:

Soit la fonction f définies sur $[0,1]$ par : $f(x) = x^2$.

1) Donner la subdivision uniforme $\mathcal{S}$ de l'intervalle $[0,1]$.

2) Construire une famille de fonctions en escalier $(\varphi_n)_n$ **en-dessous** de f Sur la subdivision $\mathcal{S}$.

3) Calculer l'intégrale $K_n^- = \int_0^1 \varphi_n(x)\mathrm{d}x$, puis trouver $\lim_{n\to+\infty} K_n^-$.

4) Construire une famille de fonctions en escalier $(\psi_n)_n$ **au-dessus** de f Sur la subdivision $\mathcal{S}$. **(L.E)**

5) Calculer l'intégrale : $K_n^+ = \int_0^1 \psi_n(x)\mathrm{d}x$, puis trouver $\lim_{n\to+\infty} K_n^+$. **(L.E)**

6) Déduire que $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$. **(L.E)**

Exercice 4: Soit l'intégrale suivante, pour $a \in \mathbb{R}$:

$$K(a) = \int_0^1 (x^2 - ax)^2 \mathrm{d}x$$

1) Calculer $K(a)$.
2) Montrer que $K(a) = \frac{1}{3}\left(a - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{80}$.
3) Déduire $\inf_{a \in \mathbb{R}} K(a)$.

Exercice 5: Soient les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi \sin x \, \mathrm{d}x \quad , \quad I_n = \int_0^\pi \frac{n \sin x}{x+n} \mathrm{d}x$$

4) Trouver un encadrement de $|I_n - I|$
5) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} I_n - I = 0$.
6) Déduire $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

Exercice 6: En utilisant le tableau des primitives, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-1}^5 |1 - x| \mathrm{d}x \quad , \quad I_2 = \int_1^2 \frac{e^x}{e^x - 7} \mathrm{d}x \quad , \quad I_3 = \int_0^1 \left(\sqrt{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x^3}}\right) \mathrm{d}x \quad (\boldsymbol{L.E})$$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}x \quad (\boldsymbol{L.E}) \quad , \quad I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x)\cos(2x) \, \mathrm{d}x \quad (\boldsymbol{L.E}) \quad , \quad I_6 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (\sin x + \cos x)^2 \mathrm{d}x$$

Exercice 7: Calculer la valeur moyenne des fonctions suivantes :

1) $f(x) = |x|$ sur $[-2,2]$.
2) $f(x) = x^2 + 3x + 2$ sur $[-1,0]$ puis sur $[-1,1]$. $(\boldsymbol{L.E})$
3) $f(x) = \cos x$ sur $[0,2\pi]$ puis sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Rappel : la valeur moyenne d'une intégrale sur un intervalle est donnée par

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

++

R. Belhadef