٢- الحقول الشعاعية

٢-١- عموميات

٢-١-١- تعريف: نقول أن «حقل شعاعي» ما يسود منطقة معينة من الفضاء إذا تمكنا من ربط كل نقطة M واقعة داخل هذه المنطقة بشعاع $\vec{A}$.

على العموم الشعاع $\vec{A}$ يتغير في الطويلة و الإتجاه من نقطة لأخرى $\vec{A}=\vec{A}(M)$، من بين الحقول المعروفة في الطبيعة، نذكر على سبيل المثال الحقل الكهربائي $\vec{E}$ و الحقل المغناطيسي $\vec{B}$ و حقل الجاذبية الأرضية $\vec{g}$، ... إلخ

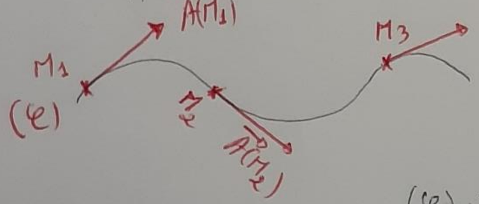
٢-١-٢- مبدأ تركيب الحقول: لتكن M و M' نقطتين تنتميان إلى فضائين شعاعيين مختلفين و $\vec{A}(M)$ و $\vec{A}(M')$ قيمتي الشعاع $\vec{A}$ عند هاتين النقطتين. في هذه الحالة لا يمكن تركيب $\vec{A}(M)$ و $\vec{A}(M')$. بالعكس بإمكاننا جمع أشعة تنتمي إلى نفس الفضاء الشعاعي.

مثلا: جمع أشعة التي يكون لها نفس المبدأ M. إذا كان $\vec{A}_1(M)$ و $\vec{A}_2(M)$ حقلين معرفين عند النقطة M فإن التركيب: $\vec{A}(M)=m_1\vec{A}_1(M)+m_2\vec{A}_2(M)$

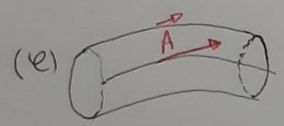
حيث m_1 و m_2 يمثلان ثابتين حقيقيين

٢-٢- خصائص الحقل الشعاعي:

٢-٢-١ خطوط الحقل: نسمي «خط الحقل» المنحنى (C) الذي يكون مماسي لشعاع الحقل $\vec{A}(M)$ في كل نقطة من نقاطه:



- لكل نقطة M(x,y,z) يمر على العموم خط واحد للحقل.
- إذا كانت خطوط الحقل ترتكز على مسار مغلق (C) نقول أنها تشكل أنبوب للحقل.

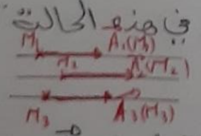


٢-٢-٢- طبيعة حقل شعاعي

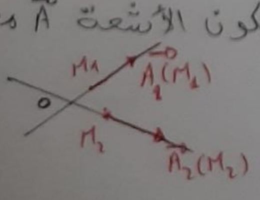
أ/- حقل ثابت champ constant: في هذه الحالة الشعاع $\vec{A}(M)$ لا يتعلق بالزمن أي أن:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}=\vec{0}$$

ب/- حقل منتظم champ uniforme: الشعاع $\vec{A}(M)$ لا يتعلق بموضع النقطة M في الفضاء الذي ينتمي إليه هذا الشعاع، خطوط الحقل في هذه الحالة تكون متوازية.



جـ/- حقل ذو تناظر شعاعي: في هذه الحالة تكون الأشعة $\vec{A}$ محمولة على مستقيمات تتقاطع في نفس النقطة O.



2.2.3. تجوال شعاع الحقل :- ليكن $\overrightarrow{MM'}$ إنتقال متناهي في الصغر في منطقة يسودها حقل شعاعي $\vec{A}(M)$ ، نسمي تجوال الحقل (circulation) من النقطة M إلى النقطة M' الجداء السلمي :

$$d\varphi = \vec{A}\cdot\overrightarrow{MM'} \quad \text{أو} \quad d\varphi = \vec{A}\cdot d\vec{r}$$

أما تجوال الحقل على مسار من وضعية ابتدائية A إلى وضعية نهائية B .

فيكتب $\varphi_{A\to B} = \int_{AB} \vec{A}\cdot d\vec{r}$

العبارة التحليلية لتجوال الحقل $\vec{A}$: لتكن x, y, z إحداثيات النقطة M في معلم ديكارتي $\mathcal{R}(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ و $A_x(x,y,z)$ و $A_y(x,y,z)$ و $A_z(x,y,z)$ مركبات الشعاع $\vec{A}$ عند النقطة M .

$$\varphi_{AB} = \int_{AB} d\varphi = \int_{AB} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_{AB} A_x\,dx + A_y\,dy + A_z\,dz$$

2.3. الكمون :

2.3.1. تعريف :- نقول أن الحقل $\vec{A}(M)$ مشتق من دالة كمون $V(M)$ إذا كان تجوال الحقل بين نقطتين M_1 و M_2 لا يتعلق بالمسار المتبع ، بل بقيمتي الدالة V عند هاتين النقطتين ، في هذه الحالة : $\oint \vec{A}\cdot d\vec{r} = 0$

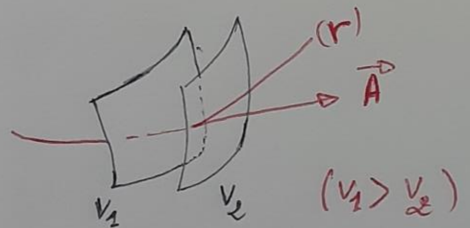
- أي أن تجوال حقل مشتق من دالة كمون على مسار مغلق يكون دائما معدوم .

2.3.2. المساحات متساوية الكمون : Surfaces équipotentielles

نسمي مساحة متساوية الكمون لحقل شعاعي $\vec{A}(M)$ مجموعة نقاط الفضاء التي تحقق العلاقة $V(M)=cste$ ، بما أن $\vec{A}(M)$ مشتق من دالة كمون $V(M)$ فإن : $\vec{A}(M)\cdot d\vec{r} = -dV$

إذا كانت M تتحرك على المساحة $V(M)=cste$ فإن $(dV=0)$ تصبح العلاقة السابقة :

إذن شعاع الحقل في نقطة M يكون دائما عموديا على المساحة متساوية الكمون التي تمر بهذه النقطة $\vec{A}(M)\cdot d\vec{r} = 0$



$(V_1 > V_2)$

2.3.3. التدرج : Gradient

لنحسب مركبات $\vec{A}(M)$ في معلم ديكارتي $\mathcal{R}(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

بما أن هذا الشعاع مشتق من دالة كمون V فإن : $\vec{A}(M)\cdot d\vec{r} = -dV$

حيث $\vec{A}(M) = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ و $d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$

إذن : $\vec{A}(M)\cdot d\vec{r} = A_x\,dx + A_y\,dy + A_z\,dz = -dV$

- dV يمثل التفاضل الكلي للدالة $V(x,y,z)$ ويكتب

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz \quad \text{أو} \Rightarrow \quad -dV = -\frac{\partial V}{\partial x}dx - \frac{\partial V}{\partial y}dy - \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

بمقارنة عبارتي dV- نستنتج :

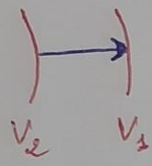
$$\begin{cases} A_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ A_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ A_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \vec{A}(M) = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{A}(M) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right).V$$

- تسمى المقادير $\frac{\partial V}{\partial x}$ و $\frac{\partial V}{\partial y}$ و $\frac{\partial V}{\partial z}$ مركبات شعاع يسمى تدرج الدالة $V(x,y,z)$.
ونكتب

$$\vec{A}(M) = -\vec{grad}\, V = -\vec{\nabla} V$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}}$$



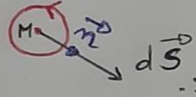
- يكون $\vec{A}$ موجه من الكمون المرتفع نحو الكمون المنخفض :
$(V_2 > V_1)$

ج.3.4- تدفق حقل شعاعي :- Flux d'un champ de vecteur

لتكن M نقطة واقعة في مجال فضائي يسود فيه حقل شعاعي $\vec{A}$، وليكن $d\vec{S}$ عنصر مساحة يحيط بالنقطة M. نوجه عنصر المساحة dS بشعاع وحدة $\vec{n}$ عمودي عليه :

$$d\vec{S} = dS\,\vec{n}$$

باختيار الاتجاه الموجب لـ $\vec{n}$ لتوجيه $d\vec{S}$ بمعنى الدوران على المحيط العنصري dS يتم عكس عقارب الساعة :



- يتمثل تدفق الشعاع $\vec{A}$ عبر عنصر المساحة dS في الجداء السلمي :

$$d\phi = \vec{A} . d\vec{S}$$

- إذا كانت θ الزاوية المحصورة بين $\vec{A}$ و $d\vec{S}$ تصبح العلاقة السابقة :

$$d\phi = \|\vec{A}\| . dS . \cos\theta$$

- انطلاقا من العلاقة السابقة يمكن حساب التدفق عبر المساحة الكلية S :

$$\phi = \iint_{(S)} \vec{A} . d\vec{S}$$

ج.3.5- تفرق حقل شعاعي : Divergence d'un champ de vecteurs

ليكن V الحجم المحدد بمساحة مغلقة S وليكن $\vec{A}$ الحقل الشعاعي السائد داخل هذه المساحة حيث :

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

بالتعريف نسمي تفرق الشعاع $\vec{A}$ المقدار السلمي :

$$div\,\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right).\left(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\right)$$

$$\boxed{Div\,\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

نظرية قرين أو نظرية أوستروغراسكي أو نظرية التفرق .

Théorème de Green ou théorème d'Ostrogradski ou théorème de la divergence

تدفق شعاع الحقل $\vec{A}$ عبر المساحة المغلقة S يساوي إلى تكامل تفرق الحقل داخل الحجم المحدد بهذه المساحة أي أن :

$$\iint_{(S)} \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} div\vec{A}\cdot dv$$

حالات خاصة :

① إذا كان $div\vec{A} = 0$ ، باستعمال النظرية السابقة (قرين) نستنتج أن :

نقول في هذه الحالة أن التدفق محفوظ $\phi = \iint_{(S)} \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iiint_{(v)} div\vec{A}\cdot dv = 0$

② إذا كان $\vec{A}$ مشتق من دالة كمون V أي أن : $\vec{A} = -\vec{grad}\,V$ فإن :

$$div\vec{A} = div(-\vec{grad}\,V) = \vec{\nabla}\cdot(-\vec{\nabla}V) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\cdot V = -\vec{\nabla}^2\cdot V = -\Delta V$$

$$\Delta = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right).$$

يسمى المؤثر Δ مؤثر لابلاس

Δ: Laplacien

$$\boxed{\Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$

ج.3.6- دوران حقل شعاعي :- Rotationnel d'un champ de vecteur

ليكن $\vec{A}$ حقل شعاعي معرف داخل مجال (D) مسند إلى معلم متعامد ومتجانس $R(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعرف الشعاع $\vec{A}$ بمركباته : $A_x(x,y,z)$ و $A_y(x,y,z)$ و $A_z(x,y,z)$ ونفرض أن هذه المركبات تقبل مشتقات أولى داخل (D).

بالتعريف: شعاع دوران $\vec{A}$ الممثل بالرمز $\vec{rot}\vec{A}$ أو $\vec{\nabla}\wedge\vec{A}$ عبارة عن شعاع ثلاث مركبات :

$$\vec{rot}\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\vec{rot}\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

- إذا كان $\vec{A}$ مشتق من دالة كمون V : $\vec{A} = -\vec{grad}\,V$ يبقى شعاع دورانه معدوم .

$$\vec{rot}\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge(-\vec{\nabla}V) = -\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}V) = \vec{0}$$

خواص :

1- $\vec{\nabla}\cdot(f\vec{A}) = \vec{\nabla} f\cdot\vec{A} + f\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$

أو $div(f\vec{A}) = \vec{grad}\, f\cdot\vec{A} + f\cdot div\,\vec{A}$

2- $\vec{\nabla}\wedge(f\vec{A}) = \vec{\nabla} f\wedge\vec{A} + f\,\vec{\nabla}\wedge\vec{A}$

أو $\vec{rot}(f\vec{A}) = \vec{grad}\, f\wedge\vec{A} + f\,\vec{rot}\,\vec{A}$

3- $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B}) = (\vec{\nabla}\wedge\vec{A})\cdot\vec{B} - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})$

أو $div(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\cdot\vec{rot}\,\vec{A} - \vec{A}\cdot\vec{rot}\,\vec{B}$

4- $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) = div(\vec{rot}\,\vec{A}) = 0$

5- $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla} V) = \vec{rot}(\vec{grad}\, V) = \vec{0}$

6- $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$

أو $\vec{rot}(\vec{rot}\,\vec{A}) = \vec{grad}(div\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}$.