TD 01

Exercice 01 :

Etant donné les automates d'états finis

a. X= (Q, A, δ, q_0, Q_F) avec
  - Q = {0, 1, 2}
  - A = {a, b}
  - δ = { δ(0, a) = 0 ; δ(0, a) = 1 ; δ(1, a) = 1 ; δ(1, b) = 2 ; δ(0, b) = 2 ; δ(2, b) = 2 ; δ(2, b) = 0 ;}
  - q_0 = 0
  - Q_F = {0 , 1}

b. Y= (Q, A, δ, q_0, Q_F) avec
  - Q = {0, 1, 2, 3}
  - A = {a, b}
  - δ = { δ(0, a) = 0 ; δ(0, a) = 1 ; δ(0, b) = 2 ; δ(1, b) = 2 ; δ(2, a) = 2 ; δ(2, b) = 1 ; δ(1, a) = 3 ; δ(3, a) = 1 ; δ(2, b) = 3 ; δ(3, b) = 2 ;}
  - q_0 = 0
  - Q_F = {1}

1. Déterminer si les mots w_1 = *aaa*, w_2 = *bbaa*, w_3 = *aaba* et w_4 = *babb* sont accepter par X
2. Déterminer si les mots m_1 = *aabb*, m_2 = *abba*, m_3 = *aabb* , m_4 = *abb* et m_5 = *aba* sont accepter par X
3. Dessiner le diagramme graphique représentant chacun des automates X et Y.

Exercice 02 :

Pour chacun des langages suivants,

1- donner des exemples de mots contenus dans ce langage
2- donner une définition formelle pour ce langage
3- construire un automate d'états finis qui l'accepte

- L_1 = { *w* ∈ {*a*, *b*, *c*}* / *w commence* par la lettre '*a*' et se *termine* par la lettre '*a*' } ;
- L_2 = { *w* ∈ {*a*, *b*, *c*}* / *w contient au moins une* occurrence de la lettre '*a*' } ;
- L_3 = { *w* ∈ {*a*, *b*, *c*}* / *w contient au moins deux* occurrences la lettre '*a*' } ;
- L_4 = { *w* ∈ {*a*, *b*, *c*}* / *w contient au moins deux occurrences consécutives* de la lettre '*a*' }
- L_5 : Ensemble des mots construits sur l'alphabet {*a*, *b*}, *commençant* par des ***a*** et se *terminant* par des ***b*** et tel que le nombre de ***a*** et le nombre de ***b*** soit égal
- L_6 : Le langage des mots contenant un nombre pair de fois la lettre *a*
- L_7 : Le langage des nombres binaires
- L_8 : Le langage des mots de longueur 2 définis sur l'alphabet {0, 1}
- L_9 : Le langage des mots de longueur paire définis sur l'alphabet {*a, b*}
- L_{10} = {w∈{a,b}*, tel que ***w*** contient seulement 2b, le reste c'est des a's}
- L_{11} = {w∈{a,b}*, tel que ***w*** contient un nombre de ***a*** divisible par 3}
- L_{12} = {w∈{a,b}*, tel que ***w*** contient un nombre *impaire* de b}
- L_{13} : le langage des mots formés de ***n*** fois la lettre ***a*** suivi de ***n*** fois la lettre ***b***
- L_{14} : le langage dénoté par *abb* + *bab*.
- L_{15} : Le langage des mots admettant *aba* pour facteur

Opérations sur les langages:

Soient L, L_1 et L_2 trois langages définis sur l'alphabet A, nous définissons les opérations suivantes :

- **L'union** : $L_1 \cup L_2$ ($L_1|L_2$ *ou bien* $L_1 + L_2$)= $\{m \text{ tel que } m \in L_1 \vee m \in L_2\}$;
- **L'intersection** : $L_1 \cap L_2 = \{m \text{ tel que } m \in L_1 \wedge m \in L_2\}$;
- Le **complément** : $\bar{L}$ = {tous les mots m sur A *tel que* $m \notin L$} ;
- La **concaténation** : $L_1.L_2 = \{m \text{ tel que } \exists u \in L_1, \exists v \in L_2 : m = uv\}$;
- **Exposant**: $L^n = L.L \ldots L$ (n *fois*)

  $= \{m \text{ tel que } \exists u_1, u_2, \ldots u_n \in L : m = u_1u_2 \ldots u_n\}$
- **Fermeture transitive de Kleene** : notée $L^* = \cup_{i\geq 0}L^i$.

  En particulier, si L = A on obtient A*: l'ensemble de tous les mots possibles sur l'alphabet A.
- **Fermeture non transitive** : $L^+ = \cup_{i>0}L^i$;
- **Le langage miroir** : $L^R = \{m \text{ tel que } \exists u \in L : m = u^R\}$

Exercice 03 :

Sur l'alphabet A = {a, b}, on considère le langage L_1 des mots formés de ***n*** fois la lettre ***a*** suivi de ***n*** fois la lettre ***b***, et le langage L_2 des mots comportant autant de ***a*** que de ***b***.

- Définir formellement ces deux langages.
- Que sont les langages suivants : $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, L_1^2, $(L_2)^2$?
- Que peut-on dire de L_1^* et L_2^* par rapport à L_1 et L_2 ?

Exercice 04 :

Sur l'alphabet A = {0, 1}, on considère les langages L_1 , L_2, L_3 et L_4 définis par

$L_1 = \{01^n / n \in \mathbb{N}\}$ $\qquad$ $L_2 = \{0^n1 / n \in \mathbb{N}\}$

$L_3 = \{00,11\}$ $\qquad$ $L_4 = \{0, 1, 01\}$

Définir les langages L_1L_2, $L_1 \cap L_2$ et $(L_1)^2$, $L_3.L_4$

Exercice 05 :

1. Soient les deux expressions régulières suivantes :
   - $R1 = a(ab)^*ba$
   - $R2 = (ab)^*(ba)^*(a^*b^*)$

a) Donnez un mot $m_1 \in L(R1) \wedge m_1 \notin L(R2)$. m_1=***aabba***

b) Donnez un mot $m_2 \in L(R2) \wedge m_2 \notin L(R1)$. m_2=***ba***

c) Donnez un mot $m_3 \in L(R1) \wedge m_3 \in L(R2)$. m_3=***aba***

d) Donnez un mot $m_4 \notin L(R1) \wedge m_4 \notin L(R2)$. m_4=***aabbab***

2. Soient les deux expressions régulières suivantes :

– $S1 = a(a|b)^*ba$

– $S2 = (ab)^*|(ba)^*|(a^*|b^*)$

a) Donnez un mot $m_1 \in L(S1) \wedge m_1 \notin L(S2)$. m_1=***aaba***

b) Donnez un mot $m_2 \in L(S2) \wedge m_2 \notin L(S1)$. m_2=***b***

c) Donnez un mot $m_3 \in L(S1) \wedge m_3 \in L(S2)$. m_3=***il n'existe pas***

d) Donnez un mot $m_4 \notin L(S1) \wedge m_4 \notin L(S2)$. m_4=***baa***

Exercice 06. :

Donner une expression régulière ainsi qu'un automate d'état fini qui représentent chacun des langages suivants :

1. L_1 : l'ensemble des mots non vides commençant par ***c*** et se terminant par ***a*** *ou* ***b*** sur l'alphabet A = {*a, b, c, d*}.
2. L_2 : l'ensemble des mots sur l'alphabet A={*a,b,c*}:
   - Comportant exactement deux *a*.
   - Tout *b* est suivi d'au moins deux *c*.
   - Se termine par *a*.
3. L_3 : Ensemble de toutes les chaînes dans lesquelles chaque paire de 0 apparaît devant une paire de 1.
4. L_4 : Tous les nombres binaires divisibles par 4.
5. $L_5 = \{ w \in \{a,b\}^*/w= b^n \ , n>=2 \}$
6. $L_6 = \{ w \in \{a,b\}^*/w= (ba)^{2n} \ , n>=1 \}$
7. $L_7 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ contient ***bab*** ou ***ba*** $\}$
8. $L_8 = \{ m \mid m \in \{a, b\}^*$ et m <u>se termine</u> par ***'bab'*** OU ***'bb'*** $\}$
9. $L_9 = \{w \in \{a,b\}^*$, tel que w contient un nombre de ***a*** *divisible* par 3$\}$
10. L_{10} : Ensemble de toutes les mots défini sur A={a,b} ne contenant *pas* la sous chaîne ***bbb***
11. $L_{11} = \{w \in \{a,b\}^*$, tel que w *contient* la sous chaîne ***aaa*** ou la sous chaîne ***bbb*** mais *pas les deux* en même temps$\}$
12. L_{12} : Ensemble de toutes les chaînes ne contenant pas 101.