الفصل الثاني: المجموعات، العلاقات و التطبيقات (تابع)
Ensembles, relations et applications(suite)

4.2 العلاقات و التطبيقات relations et applications

1) العلاقات Relations

تعريف لتكن E و F مجموعتان و Γ جزء من الجداء الديكارتي ExF.
نسمي الثلاثية $R=(E,F,\Gamma)$ بعلاقة من E نحو F (Relation de E dans F)
إذا كان $(x,y)\in\Gamma$ نكتب xRy و تسمى x السابقة(Antécédente) و y صورة x (Image) .
يسمى Γ ببيان العلاقة R (Graphe) و لدينا $\Gamma=\{(x,y)\in ExF / xRy\}$.

أمثلة:

1. لتكن $E=\{2,3,5\}$ و $F=\{3,4,6,9\}$. نعرف العلاقة $\mathcal{R}$ كالتالي

من أجل $a\in E, b\in F$: $a\mathcal{R}b$ إذا وفقط إذا كان a يقسم b

لدينا: $2\mathcal{R}4, 2\mathcal{R}6, 3\mathcal{R}3, 3\mathcal{R}6, 3\mathcal{R}9$

بيان العلاقة هو $\Gamma=\{(2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (3,9)\}$.

2. لتكن $E=\{2,3,5\}$ و $F=\{3,4,6,9\}$ نعرف العلاقة $\mathcal{S}$ كالتالي:

من أجل $a\in E, b\in F$: $a\mathcal{S}b$ إذا وفقط إذا كان a أكبر تماما من b

لدينا: $5\mathcal{S}3, 5\mathcal{S}4$

بيان العلاقة هو $\Gamma=\{(5,3), (5,4)\}$.

3. لتكن $E=\{2,3,5\}$ و $F=\{3,4,6,9\}$ نعرف العلاقة $\mathcal{T}$ كالتالي:

من أجل $a\in E, b\in F$: $a\mathcal{T}b$ إذا وفقط إذا كان $a+b$ عددا زوجيا

لدينا: $2\mathcal{T}4, 2\mathcal{T}6, 3\mathcal{T}3, 3\mathcal{T}9, 5\mathcal{T}3, 5\mathcal{T}9$

بيان العلاقة هو $\Gamma=\{(2,4), (2,6), (3,3), (3,9), (5,3), (5,9)\}$.

ملاحظة: اذا كانت E=F نقول عن العلاق R انها علاقة ثنائية في E.

2)علاقة التكافؤ و علاقة الترتيب.

1.2 خواص علاقة ثنائية

لتكن Rعلاقة ثنائية في مجموعة E.

- R انعكاسية Reflexive) $\Leftrightarrow$ $(\forall x\in E : xRx)$
- R تناظرية Symétrique) $\Leftrightarrow$ $(\forall x, y\in E : xRy \Rightarrow yRx)$
- R ضد تناظرية Asymétrique) $\Leftrightarrow$ $(\forall x, y\in E : xRy \wedge yRx \Rightarrow y=x)$
- R متعدية Transitive) $\Leftrightarrow$ $(\forall x, y, z\in E : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$

1.2علاقة التكافؤ

لتكن Rعلاقة ثنائية في مجموعة E.

R علاقة تكافؤ(Relation d’équivalence) اذا كانت انعكاسية، تناظرية و متعدية.

- صنف التكافؤ

ليكن a∈E. نسمي صنف تكافؤ(classe d’équivalence) العنصر a ونرمز له $\bar{a}$ مجموعة العناصر من E التي لها علاقة مع a بـ R.

$$\bar{a}=\{x\in E : xRa\}$$

امثلة:

1. نعتبر المجموعة $E=\{1,2,3\}$ و العلاقتين $\mathcal{R}_1=\{(1,1),(2,2),(3,3)(1,3),(3,1)\}$ و $\mathcal{R}_2=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

علاقتا تكافؤ.

– في المثال الأول السابق لدينا $\bar{3}=\{1,3\}$, $\bar{2}=\{2\}$, $\bar{1}=\{1,3\}$ بالنسبة للعلاقة $\mathcal{R}_1$ و $\bar{3}=\{3\}$, $\bar{2}=\{2\}$, $\bar{1}=\{1\}$ بالنسبة للعلاقة $\mathcal{R}_2$

2) $E=\mathbb{R}_+^*$, $\forall x,y \in \mathbb{R}_+^*: x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x\ln y = y\ln x$

إثبات أن علاقة تكافؤ: $(\mathcal{R}$علاقة تكافؤ$) \Leftrightarrow (\mathcal{R}$ انعكاسية , تناظرية, متعدية$)$

- $(\mathcal{R}$ انعكاسية$) \Leftrightarrow (\forall x\in\mathbb{R}_+^*: x\mathcal{R}y)$

لدينا $\forall x\in\mathbb{R}_+^*: x\ln y = y\ln x$ ومنه $x\mathcal{R}y$, ادن $\mathcal{R}$ انعكاسية.

- $(\mathcal{R}$ تناظرية$) \Leftrightarrow (\forall x,y\in\mathbb{R}_+^*: x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x)$

لدينا $x\mathcal{R}y \Rightarrow x\ln y = y\ln x \Rightarrow y\ln x = x\ln y \Rightarrow y\mathcal{R}x$

و منه $\mathcal{R}$ تناظرية.

- $(\mathcal{R}$ متعدية$) \Leftrightarrow (\forall x,y,z\in\mathbb{R}_+^*: x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z)$

لدينا
$$\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ \wedge \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ln y = y\ln x \\ \wedge \\ y\ln z = z\ln y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\ln y}{y}=\frac{\ln x}{x} \\ \wedge \\ \frac{\ln z}{z}=\frac{\ln y}{y} \end{cases} \Rightarrow \frac{\ln z}{z}=\frac{\ln x}{x} \Rightarrow x\ln z = z\ln x \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

ومنه $\mathcal{R}$ متعدية مما سبق نجد أن $\mathcal{R}$علاقة تكافؤ.

- مجموعة حاصل قسمة

تسمى مجموعة كل أصناف التكافؤ وفق العلاقة R بمجموعة حاصل قسمة (Ensemble quotient) E على R و نرمز لها بـ E/R.

في المثال 1) جموعة حاصل القسمة هي: $E/R_1=\{\{1,3\}, \{2\}\}$

2.2علاقة الترتيب

لتكن Rعلاقة ثنائية في مجموعة E.

R علاقة ترتيب(Relation d'ordre) اذا كانت انعكاسية، ضد تناظرية و متعدية.

- نقول عن علاقة الترتيب R انها علاقة ترتيب كلي (Relation d'ordre Totale)اذا تحقق:

$$\forall\, x, y\in E : xRy \vee yRx$$

- نقول عن علاقة الترتيب R انها علاقة ترتيب جزئي (Relation d'ordre partiel)اذا كانت علاقة ترتيب غير كلي أي تحقق:

$$\exists\, x, y\in E : x\bar{R}y \wedge y\bar{R}x$$

مثلا:

1- العلاقة R المعرفة على IR بـ: $x\leq y \Leftrightarrow xRy : x , y \in IR$
علاقة ترتيب **كلي** لان من اجل أي x و y من IR فاما $x\leq y$ او $y\leq x$.

2- العلاقة R المعرفة على IN بـ: x يقسم $y \Leftrightarrow xRy : x , y\in IN$
علاقة ترتيب **جزئي** لانه من اجل x=2 و3= y من IN فان 2 لايقسم 3 و 3 لايقسم 2.

3) التطبيقات Appliations

1.3 تعريف تطبيق

ليكن E و F مجموعتين.

تعريف : نسمي تطبيقا من E نحو F كلّ علاقة تسمح بأن نرفق بكلّ عنصر من E عنصرًا وحيدًا من F.

ونرمز للتطبيق بـــ :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longrightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

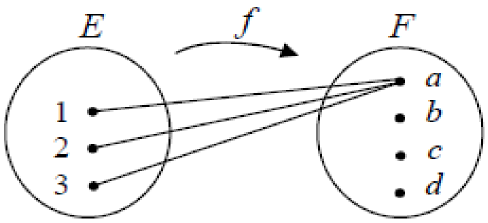
ترميز : تسمى E مجموعة المنطلق (أو البدء).

تسمى F مجموعة الوصول.

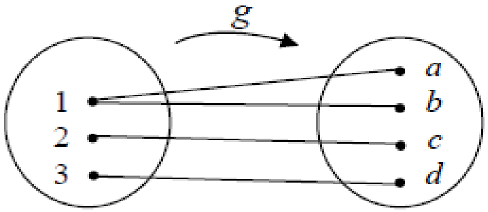
x تسمى سابقة و $y = f(x)$ تسمى صورة العنصر x.

أمثلة :

f تطبيق

(1) 

g ليس تطبيقا

(2) 

3.2 خواص التطبيقات

التطبيق المتباين Application Injective

تعريف : نقول أن f متباين إذا حقّق :

$$\forall x_1, x_2 \in E : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

باستعمال عكس النقيض هذا يكافئ: يكون f متباين اذا حقق:

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

التطبيق الغامر Application Surjective

ليكن $f : E \longrightarrow F$ تطبيقا.

نقول أن f غامر إذا حقّق :

$$\forall x \in F , \exists x \in E : f(x) = y$$

وهو ما يكافئ :

من أجل كل y من F، المعادلة $f(x) = y$ تقبل حلاً على الأقل.

التطبيق التقابلي Application Bijective

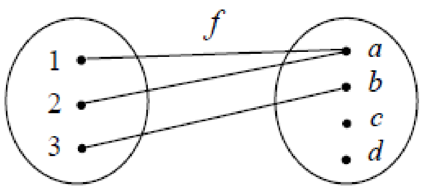
ليكن $f : E \longrightarrow F$ تطبيقا.

نقول أن f تقابل إذا كان متباينا وغامرًا. وهو ما يكافئ أن المعادلة $f(x) = y$ تقبل حلاً وحيدًا من أجل كل $y \ni F$.

أمثلة

(1

(1)



f ليس متبايناً

و غير غامر لان c مثلا ليس له سابقة و بالتالي غير تقابلي

(2 $f : IN \to IN^*$ متباين لان:

$n \to f(n)= n+1$

$\forall n, m \in IN : f(n)=f(m) \Leftrightarrow n+1=m+1 \Leftrightarrow n=m$

غامر لان:

$\forall\ m \in IN : \exists\ n \in IN \ / \ m= f(n)?$

المعادلة $m= f(n)$ تقبل حلا على الأقل. بالفعل لدينا : $m= f(n) \Leftrightarrow m=n+1 \Leftrightarrow n=m-1$

اذا فهو تطبيق **تقابلي.**

(3 $f : IR \to IR$ غير متباين لان:

$x \to f(x)=x^2$

$\exists x_1=-1, x_2=1 \in IR : x_1 \neq x_2$ et $f(x_1)= f(x_2)=1$

و **غير غامر** لان $y=-1$ ليس له سابقة. فهو بالتالي تطبيق غير تقابلي.

تساوي تطبيقين: Egalité de deux applications

ليكن $f : E \to F$ و $g : G \to H$ تطبيقين. يكون **f مساويا لـ g** و نكتب $f=g$ اذا كان:

$E=G$ و $F=H$ و $\forall\ x \in E : f(x)=g(x)$.

التطبيق المطابق: Application identique

لتكن E مجموعة التطبيق المطابق على E هو التطبيق الذي يرمز له I_E المعرف بـ:

$$I_E : E \to E$$
$$x \in E : I_E(x)=x$$

تركيب تطبيقين: Composition des applications

ليكن $f : E \to F$ و $g : F \to G$ تطبيقين. نسمي تركيب التطبيقين f و g التطبيق gof حيث:

$$gof: E \to G$$

$$\forall x \in E : (gof)(x)=g[f(x)]$$

مثال:

$f: [0\ \ 1] \rightarrow [0\ \ 2]$

$y \rightarrow x=f\,(y)= 2-x$

$g: [0\ \ 2] \rightarrow [0\ \ 1]$

$y \rightarrow x=g(x)=(x-1)^2$

$gof: [0\ 1] \rightarrow [0\ 2]$

$(gof)(x)=g[f(x)]=(2-x-1)^2= (1-x)^2 = x^2-2x+1.$

$fog: [0\ 2] \rightarrow [0\ 1]$

$(fog)(x)=f[g(x)]=2-g(x)=2-(x-1)^2=-x^2+2x+1.$

اذن بشكل عام فان: $gof \neq fog$.

التطبيق العكسي لتطبيق تقابلي L'application réciproque d'une application bijective

اذا كان $f: E \rightarrow F$ تطبيقا تقابليا فانه يقبل طبيقا عكسيا (Application réciproque) يرمز له f^{-1} .

حيث: $x\in E,\ y\in F: y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$

$f^{-1}: F \rightarrow E$

$y \rightarrow x=f^{-1}(y)$

تمرين: نعتبر التطبيق f المعرف بـ:

$f: F \rightarrow E$

$x \rightarrow y=f(x)=\frac{x+1}{x-2}$

هل f متباين؟ هل هو غامر؟ هل هو تقابلي؟

حدد مجموعة الوصول حتى يكون تقابلي. و عين تطبيقه العكسي f^{-1} .

- **التباين:**

$\forall\, x_1, x_2 \in IR-\{-2\}:$

$$f(x_1)= f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1+1}{x_1-2} = \frac{x_2+1}{x_2-2} \Leftrightarrow (x_1+1)(x_2-2)=(x_1-2)(x_2+1)$$

$$\Leftrightarrow 3x_1=3x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$$

اذن f متباين.

- **الغمر:**

$\forall y \in IR,\ \exists ?\ x\in IR-\{-2\}: y=f(x).$

أي هل المعادلة $y=f(x)$ ذات المجهول x تملك حلا أي هل x موجود

$$f(x)=y \longleftrightarrow \frac{x+1}{x-2}=y$$
$$\longleftrightarrow x+1=xy-2y$$
$$\longleftrightarrow xy-x=2y+1$$
$$\longleftrightarrow x(y-1)=2y+1$$

- من اجل $y=1$ المعادلة الأخيرة تصبح : $0=3 \Leftrightarrow x.0=3$ و هذا مستحيل أي x غير موجود او بتعبير اخر $y=1$ ليست له سابقة و بالتالي f تطبيق غير غامر.

حتى يكون f غامرا و بالتالي تقابليا يجب ان تكون مجموعة الوصول F=IR-{1}

ويكون لدينا: من اجل $y\neq 1$ فان:

$y=f(x) \Leftrightarrow x(y-1)=2y+1 \Leftrightarrow x=\frac{2y+1}{y-1} \in E=IR-\{2\}$?

نفرض $x\notin E$ أي $x=2$ نجد $2=\frac{2y+1}{y-1}$ و بالتالي $2y-2=2y+1$ أي $-2=1$ تناقض ومنه $x\in E$.

اذن $f: IR-\{2\} \to IR-\{1\}$ تطبيق تقابلي

$x \to y=f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ وتطبيقه العكسي

$f^{-1}: IR-\{1\} \to IR-\{2\}$

$y \to x=f^{-1}(y)=\frac{2y+1}{y-1}$

و يمكن كتابة كذلك:

$f^{-1}: IR-\{1\} \to IR-\{2\}$

$x \to y=f^{-1}(x)=\frac{2x+1}{x-1}$

الصورة المباشرة :

ليكن $f: E \longrightarrow F$ تطبيقا ولتكن $A \subset E$.

نسمي الصورة المباشرة للجزء A وفق التطبيق f المجموعة الجزئية من F و المعرفة بـــ :

$$f(A)=\{f(x)/x\in A\}$$
$$=\{y\in F/\exists x\in A: y=f(x)\}$$

خواص الصورة المباشرة الأولى :

أ. $f(\phi)=\phi$.

ب. $A_1\subset A_2 \Rightarrow f(A_1)\subset f(A_2)$

ج. $f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)$

مثال: نعتبر التطبيق f المعرف بـ : $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

نضع $A=\left\{0,\frac{1}{2},1,2\right\}$ أحسب $f(A)$. هل التطبيق f متباين؟

$f(A)=\{f(0), f(\frac{1}{2}), f(1), f(2)\}=\{0, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}\}$ car $f(\frac{1}{2})=f(2)=\frac{2}{5}$.

ومنه f غير متباين.

الصورة العكسية :

نسمي الصورة العكسية للجزء $B \subset F$ وفق التطبيق f المجموعة الجزئية من E والمعرفة بـــ :

$$f^{-1}(B)=\{x \in E / f(x) \in B\}$$

خواص الصورة العكسية :

1. $f^{-1}(\phi)=\phi$
2. $f^{-1}(F)=E$
3. $f^{-1}(B_1 \cup B_2)=f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
4. $f^{-1}(B_1 \cap B_2)=f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

مثال: نعتبر المثال السابق $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

عين قيم y من IR التي لها سوابق. أي نحل المعادلة $y=f(x)$.

$$y=\frac{x}{1+x^2} \Leftrightarrow yx^2-x+y=0$$

- لما $y=0$ فان $x=0$
- لما $y\neq0$ فالمعادلة من الدرجة الثانية مميزها $\Delta=1-4y^2$ اذن $\Delta>0$ من اجل قيم $y\in[-\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]$.

  اذن f غيرغامر