Chapitre3

Problème de coloration et problème de flot

Problème de coloration d'un graphe

- **Défı. (Coloriage d'un graphe)**
- Soit G = (S,A) un graphe simple non-orienté,
- Colorier le graphe G consiste à assigner une couleur (ou un nombre) à chaque sommet de telle sorte que deux sommets reliées par un arc/arête aient des couleurs différentes en utilisant le moins de couleurs possibles.
- Le nombre minimal de couleur **γ(G)** est appelé **nombre chromatique** de **G**.

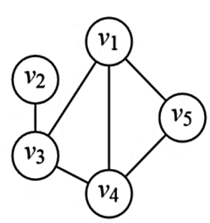
Coloration des arêtes d'un graphes

- **Déf2. colorier les arêtes du graphe G** consiste à assigner une couleur (ou un nombre) à chaque arête du graphe de telle sorte que deux arêtes reliées à un même sommet aient des couleurs différentes en utilisant le moins de couleurs possibles.

- Le nombre minimal de couleur **γ'(G)** est appelé **indice chromatique** du graphe **G.**

Nombre de stabilité

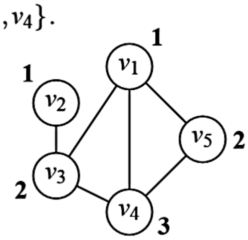
Soit $G=(V,E)$ un graphe. Un sous-ensemble S de V est un **stable** s'il ne comprend que des sommets non adjacents deux à deux. Dans le graphe ci-dessous, $\{v_1,v_2\}$ forment un stable ; $\{v_2,v_4\}$ aussi, ainsi que $\{v_2,v_5\}$ et $\{v_3,v_5\}$.
Le cardinal du plus grand stable est le **nombre de stabilité** de G ; on le note $\alpha(G)$. Dans le graphe ci-dessous, on a $\alpha(G)$=2.



La **coloration** des sommets d'un graphe consiste à affecter à tous les sommets de ce graphe une couleur de telle sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur. Une coloration avec k couleurs est donc une partition de l'ensemble des sommets en k stables.

Nombre chromatique

Le **nombre chromatique** du graphe G, noté $\gamma(G)$, est le plus petit entier k pour lequel il existe une partition de V en k sous-ensembles stables.
Sur le graphe ci-dessous, on a eu besoin de trois couleurs (notées 1, 2 et 3) pour colorer les sommets de sorte que deux sommets adjacents aient des couleurs différentes. On a donc trois stables : $\{v_1, v_2\}$, $\{v_3, v_5\}$ et $\{v_4\}$. On ne peut pas utiliser moins de couleurs, à cause des cliques $\{v_1, v_4, v_5\}$ et $\{v_1, v_3, v_4\}$.



Remarquons enfin que le sommet v_2 aurait aussi pu être coloré « 3 ». La coloration minimale n'est donc pas forcément unique.

Algorithme de Welsh-Powell

Cet algorithme couramment utilisé permet d'obtenir une assez bonne coloration d'un graphe, c'est-à-dire une coloration n'utilisant pas un trop grand nombre de couleurs. Cependant il n'assure pas que le nombre de couleurs soit minimum (et donc égal au nombre chromatique du graphe).

Étape 1
Classer les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leur degré, et attribuer à chacun des sommets son numéro d'ordre dans la liste obtenue.

Étape 2
En parcourant la liste dans l'ordre, attribuer une couleur non encore utilisée au premier sommet non encore coloré, et attribuer cette même couleur à chaque sommet non encore coloré et non adjacent à un sommet de cette couleur.

Étape 3
S'il reste des sommets non colorés dans le graphe, revenir à l'étape 2. Sinon, FIN.

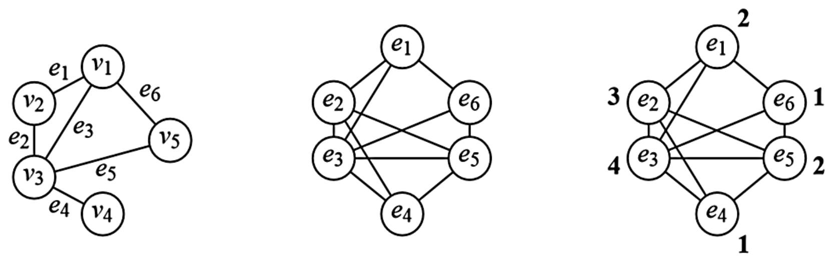
$\underline{\textbf{fonction}}$ $G = \mathsf{Welsh}(G)$
L = liste des sommets classés dans l'ordre décroissant de leur degré
couleur courante $= 0$
tant que $L \neq \emptyset$ **faire**
incrémenter la *couleur courante*
Colorier s le premier sommet de L avec la *couleur courante*
éliminer s de L
V = liste des voisins de s
pour tout x dans L **faire**
si $x \notin V$ **alors** colorier x avec la *couleur courante*
ajouter les voisins de x à V
fin
fin faire
éliminer les sommets coloriés de L
fin faire

Coloration des arêtes d'un graphe

La coloration des arêtes d'un graphe consiste à affecter à toutes les arêtes de ce graphe une couleur de telle sorte que deux arêtes adjacentes ne portent pas la même couleur.
L'**indice chromatique** du graphe G est le plus petit entier k pour lequel il existe une coloration des arêtes ; on le note $\chi(G)$.
Pour colorer les arêtes d'un graphe, on peut se ramener au problème de la coloration des sommets. Il suffit pour cela de travailler non pas sur le graphe lui-même, mais sur le graphe adjoint, noté G', et que l'on définit ainsi :

1. à chaque arête de $G = (V,E)$ correspond un sommet de $G' = (E,F)$
2. deux sommets de G' sont reliés par une arête si les deux arêtes correspondantes de G sont adjacentes.

Graphe adjoint



Graphe G Graphe adjoint G' Graphe adjoint G' coloré

On peut ensuite appliquer l'algorithme de Welsh et Powell sur le graphe G' pour colorer ses sommets. Une fois cela fait, on colorera les arêtes de G de la même couleur que les sommets correspondants de G'.

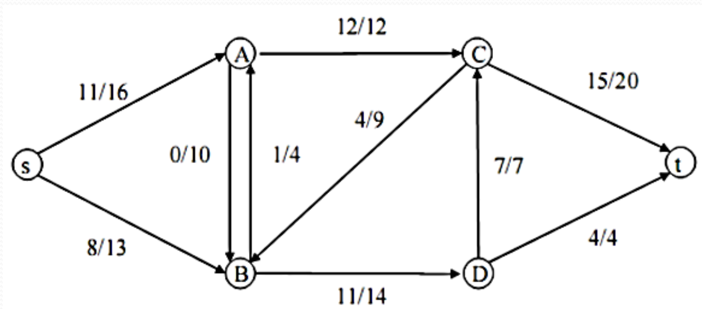
Problème de flots dans les réseaux de transport

Problème de flots dans les réseaux

- L'une des applications les plus importantes de la théorie des graphes est l'optimisation des flots dans les réseaux. Pour étudier ce problème il faut d'abord définir ce qu'est un réseau de transport.

- **Défı. (réseau de transport)**
- Un réseau de transport est un quadruplet (G,s,t,C) où
  - **G** = **(S,A)** est un graphe orienté simple
  - ***s*** est un sommet sans prédécesseur appelé ≪ **source** ≫
  - ***t*** est un sommet sans successeur appelé ≪ **puits** ≫
  - **C** : A→ R^+ est une valuation positive de G appelée ≪**capacité** ≫ pour un ensemble de sommets W ⊂ S on notera
    - arcs entrants en W : l'ensemble d'arcs W− = {(x,y) ∈ A|x / ∈ W et y ∈ W}
    - arcs sortants de W : l'ensemble d'arcs W+ = {(x,y) ∈ A|x ∈ W et y / ∈ W}

- Un flot est une fonction entière positive ou nulle f définie sur les arcs satisfaisant :
- Contrainte de capacité: $f(a) \leq c(a)$;
- Un flot pour le graphe si dessous: $11 \leq 16$, $8 \leq 13$, $0 \leq 10$, $12 \leq 12$, ... , $4 \leq 4$

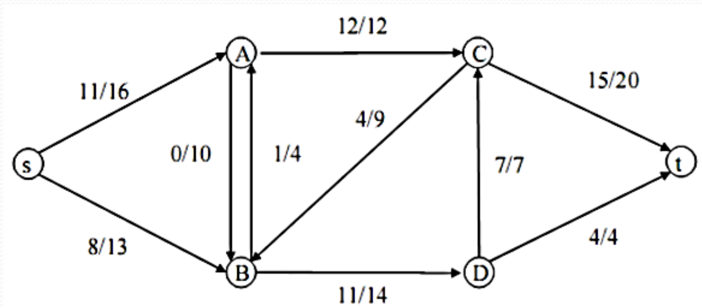


Conservation du flot:

- La contrainte la plus importante pour un flot est la loi des nœuds. Elle a été posée par le physicien allemand Gustav Kirchhoff en 1845, lorsqu'il a établi les règles de calcul des intensités des courants dans un circuit électrique.
- Elle exprime simplement la conservation du flux :

≪ le flux entrant= le flux sortant ≫.

- Sommet A : 11+1 = 12 + 0 , sommet C: 12+7=4+15

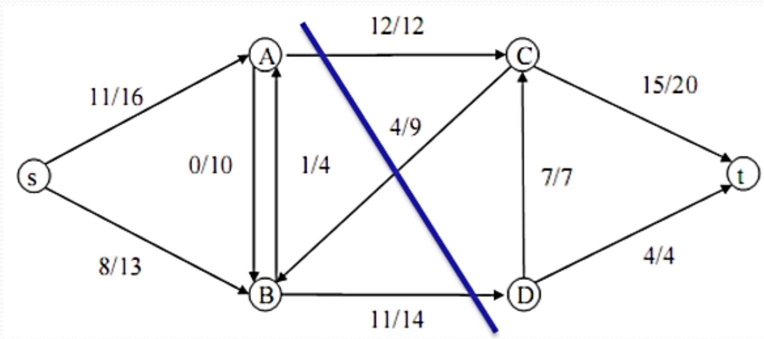


Probléme de coupe dans les réseaux de transport

Une coupe est une partition de l'ensemble des sommets en 2 parties disjointes, l'une contenant la source et l'autre le puit:

$$E \cup F = A, \quad E \cap F = \varnothing \;; \quad s \in E, \; t \in F$$

La capacité C(E, F) d'une coupe est la somme des capacités des arcs de E a F.



C(E,F)=26

Flot maximum et coupe minimum

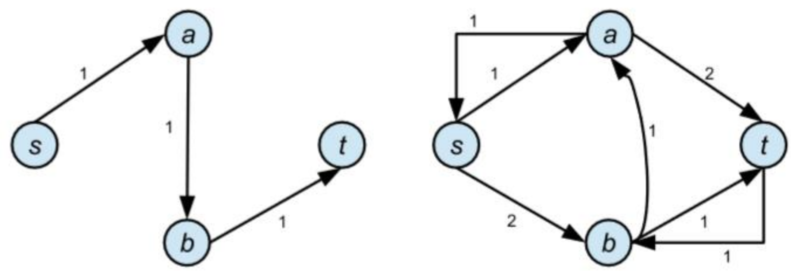
- Il existe toujours un flot possible qui est le flot **nul**.
- **Problème** : comment trouver un flot qui a la valeur maximum ?
  - Recherche d'un chemin améliorant.
  - Déterminer le réseau résiduel :
- Un flot est **saturé** si sur tout chemin de ***s*** a ***t*** il existe un arc ***a*** tel que ***f(a)*** = ***c(a).***

Théorème (flot maximum et coupe minimum)

- Si f est un flot dans un réseau de transport, les trois conditions suivantes sont équivalentes :
- f est un flot maximum ;
- Il existe une coupe **E/F** dont la capacité vaut $|f|$.
- Valeur du flot maximal = Capacité de la coupe minimale.

- Ford et Fulkerson ont également proposé un algorithme performant pour trouver à la fois le flot maximum et mettre en évidence une coupe minimum. Cet algorithme repose sur les concepts de chemin **augmentant** et de graphe **résiduel**.
  - Un chemin **augmentant** est un chemin de **s** à **t** dans **G** sur lequel il est possible d'augmenter la valeur du flot.

Exemple



(a) Le flot après augmentation de 1 sur le chemin $p = < s, a, b, t >$.

(b) Graphe résiduel associé.

Algorithme de Ford & Fulkerson :

Algorithme de Ford & Fulkerson :

Données : Un réseau $G(V, E)$, une fonction capacité $c : E \to \mathbb{R}$;

Sortie : Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$: un flot maximum initialisé à 0 ; minimum ;

Instructions :

TANT QUE un chemin augmentant existe :

Augmenter le flot sur ce chemin et mettre à jour f ;

Mettre à jour le graphe résiduel ;

Appliquer un algorithme de marquage depuis s et donner W

En déduire $\omega^+(W)$;

RETOURNER f et $\omega^+(W)$;