Chapitre 1 :

Les nombres réels (Real numbers)

Motivation.

Les babyloniens montrent que si A est un carré de côté l'unité et B un carré de côté égal à la diagonale d de A, alors l'aire de B est double de celle de A, autrement dit : $d^2 = 2$. Après, les pythagoriciens montrent que d (qui est égale à $\sqrt{2}$) n'est pas un nombre rationnel. C'est-à-dire, on ne peut pas écrire $\sqrt{2}$ sous la forme $\frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{Z}$ et $b \neq 0$. Donc, on aura besoin d'un autre ensemble contenant $\mathbb{Q}$, ainsi que les solutions des équations algébriques.

« *Les nombres réels sont utilisés pour représenter n'importe quelle mesure physique telle que : le prix d'un produit, la durée entre deux événements, l'altitude d'un site géographique, la masse d'un atome ou la distance de la galaxie la plus proche. Ces mesures dépendent du choix d'une unité de mesure, et le résultat s'exprime comme le produit d'un nombre réel par une unité.* ». **(Wikipedia Encyclopedia)**

++

1.1. Définitions et propriétés

Rappel.

- L'ensemble des nombres naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots \dots\}$.
- L'ensemble des nombres entiers : $\mathbb{Z} = \{\dots \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \dots\}$.
- L'ensemble des nombres rationnels : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \setminus p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\right\}$.

Définition 1.

L'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$, est le complété de l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$. C'est un corps commutatif ordonné muni des opérations $+$, $\times$.

Propriétés.

La relation d'ordre $\leq$ est compatible avec les opérations $+$ et $\times$, c-à-d pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ on a:

1) $a \leq b \text{ et } c \leq d \Longrightarrow a + c \leq b + d$.

2) $a \leq b \text{ et } c \geq 0 \Longrightarrow a \times c \leq b \times c$.

3) $a + c \leq b + c \Longrightarrow a \leq b$.

4) $a \leq b \text{ et } b \leq c \Longrightarrow a \leq c$.

5) $a \leq b \Longrightarrow b - a \in \mathbb{R}_+$ et $a \leq b \text{ et } b \leq a \Longrightarrow a = b$.

6) $0 < a \leq b \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$ et $0 < a \leq b \Leftrightarrow 0 < a^n \leq b^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 1. (Propriété d'Archimède)

Le corps $\mathbb{R}$ est archimédien, i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : \quad n > x$$

1.2. Ecriture décimale et densité

Définitions 2. (Ecriture décimale - decimal representation)

L'écriture décimale est un développement en base 10 d'un nombre réel positif, donnée par :

$$x = c_n 10^n + \cdots + c_1 10 + c_0 + d_1 \frac{1}{10} + \cdots + d_m \frac{1}{10^m} + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_k 10^k + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{d_i}{10^i}$$

Avec $c_n, \dots, c_1, c_0, d_1, \dots, d_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, on les appelle « chiffres ».

On écrit $\quad x = c_n \dots c_1 c_0 , d_1 \dots d_m \dots$

Remarque. On peut considérer une autre base du développement autre que 10, par exemple : la base 2 (binaire), la base 8 (Octale), la base 16 (hexadécimale), la base p (p-adique).

Exemples.

1) Pour $x = 125{,}3269$, on a

$$125{,}3269 = 1.10^2 + 2.10 + 5 + 3.\frac{1}{10} + 2.\frac{1}{10^2} + 6.\frac{1}{10^3} + 9.\frac{1}{10^4}$$

2) Pour $x = 80764$, on a

$$80764 = 8.10^4 + 0.10^3 + 7.10^2 + 6.10 + 4 + 0.\frac{1}{10} + 0.\frac{1}{10^2} + \cdots$$

Proposition 1.

Un nombre est rationnel si et seulement si son développement décimale est périodique ou fini.

Exemples.

1) Pour $x = \frac{1253269}{10000}$, on a

$$\frac{1253269}{10000} = 125{,}3369 = 1.10^2 + 2.10 + 5 + 3.\frac{1}{10} + 2.\frac{1}{10^2} + 6.\frac{1}{10^3} + 9.\frac{1}{10^4}$$

2) Pour $x = \frac{78}{7}$, on a

$$\frac{78}{7} = 11{,}142857142857142857142857 = 11,\overline{142857}$$

$$= 1.10 + 1 + 1.\frac{1}{10} + 4.\frac{1}{10^2} + 2.\frac{1}{10^3} + 8.\frac{1}{10^4} + 5.\frac{1}{10^5} + 7.\frac{1}{10^6} + \ \dots \dots$$

3) Pour $x = \frac{1}{3}$, on a

$$\frac{1}{3} = 0{,}33333333 = 0 + 3.\frac{1}{10} + 3.\frac{1}{10^2} + 3.\frac{1}{10^3} + \ \dots \dots$$

***Théorème 2.* (Densité de $\mathbb{Q}$ - Density of $\mathbb{Q}$)**

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, i.e.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \ \text{ avec } \ x < y , \exists q \in \mathbb{Q} : \quad x < q < y$$

Définitions 3. (Nombres irrationnels)

Les nombres irrationnels sont les nombres qui ne sont pas rationnels. On note l'ensemble des irrationnels par $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ où $\mathbb{Q}^c$.

Exemple. Les nombres $\sqrt{2}$, π , e , ... sont des nombres irrationnels.

++

1.3. Partie entière et valeur absolue

Définitions 4. (Partie entière et partie fractionnaire)

- La partie entière (integer part) d'un nombre réel x est le plus grand entier $r \in \mathbb{Z}$ tel que : $r \leq x$.
- On note la partie entière par $E(x)$ où $[x]$, on a donc : $\quad E(x) \leq x < E(x) + 1$.
- Dans l'écriture décimale de x la partie entière est égale à : $\quad [x] = c_n \dots c_1 c_0$.
- La partie fractionnaire (fractional part), notée $\{x\}$, est donnée par :

$$\{x\} = 0, d_1 d_2 \dots d_m \dots$$

- On a : $\quad x = [x] + \{x\} \quad$ et $\quad \{x\} = x - [x]$.

Exemples.

1) Pour $x = \frac{1253269}{10000} = 125{,}3269$, on a : $[x] = 125$, $\{x\} = 0{,}3269$.
2) Pour $x = 2023$, on a : $[x] = 2023 = x$, $\{x\} = 0$.
3) Pour $x = \frac{1}{3} = 0.3333333$, on a : $[x] = 0$, $\{x\} = 0{,}33333333$.
4) Pour $x = -5{,}86$, on a : $[x] = -6$, $\{x\} = 0{,}86$.
5) Si $E(x) = 2$ alors $2 \leq x < 3$.

Remarque. Il y a une autre partie entière dite « **supérieure** », notée $\lceil x \rceil$, définie par :

$$\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$$

Dans ce cas, la partie entière $[x]$ s'appelle partie entière « **inférieure** », notée $\lfloor x \rfloor$.

Proposition 2.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a les propriétés suivantes :

1) Pour $n \in \mathbb{Z}$: $E(x+n) = E(x) + n$.
2) $E(x) + E(-x) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & , \text{ sinon} \end{cases}$.
3) $E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1$.
4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $nE(x) \leq E(nx) \leq nE(x) + n - 1$.

Preuve.

On va démontrer la dernière propriété. En effet, on a :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1 \implies nE(x) \leq nx < nE(x) + n$$

Donc $nE(x) \leq E(nx) \leq nx \leq E(nx) + 1 < nE(x) + n$. ■

Définitions 5. (Valeur absolue – absolute value)

La valeur absolue, notée $|x|$, est définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & , \text{ si } x \geq 0 \\ -x & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Proposition 3.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

1) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $|x| = |-x|$, $|x| = \sqrt{x^2}$.
2) Pour $a \in \mathbb{R}^*$: $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.
3) L'inégalité triangulaire : $|x+y| \leq |x| + |y|$.
4) Généralisation : $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
5) $|xy| = |x||y|$.
6) $\big||x| - |y|\big| \leq |x+y|$, $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$

Preuve.

On va démontrer l'inégalité triangulaire. En effet on a : $-|x| \leq x \leq |x|$ et $-|y| \leq x \leq |y|$

On fait la somme des inégalités, on trouve : $-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$

Donc $|x+y| \leq |x|+|y|$.

1.4. Intervalles et droite achevée

Définitions 6. (Intervalles - Intervals)

Les intervalles sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ définies pour $a, b \in \mathbb{R}$, par :

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \setminus a \leq x \leq b\} \quad ; \quad [a,b[= \{x \in \mathbb{R} \setminus a \leq x < b\}$$

$$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \setminus a < x \leq b\} \quad ; \quad]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \setminus a < x < b\}$$

$$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \setminus a \leq x\} \quad ; \quad]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \setminus a < x\}$$

$$]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \setminus x \leq b\} \quad ; \quad]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} \setminus x < b\}$$

$$]-\infty,+\infty[= \mathbb{R} \quad ; \quad]0,+\infty[= \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad [0,+\infty[= \mathbb{R}_+$$

$$]-\infty,0[= \mathbb{R}_-^* \quad ; \quad]-\infty,0] = \mathbb{R}_+$$

Remarques.

1) $[a,a] = \{a\}$, $]a,a[= \emptyset$.

2) La longeuer de l'intervalle $[a,b]$ égale à $b-a$. Le centre de cet intervalle est le point $\frac{a+b}{2}$.

3) L'intersection d'intervalles de $\mathbb{R}$ est toujours un intervalle. L'union d'intervalles de $\mathbb{R}$ n'est pas toujours un intervalle.

Définitions 7. (Droite réelle achevée - Extended real number line)

La droite réelle achevée notée $\overline{\mathbb{R}}$ est définie par : $]-\infty,+\infty[= \overline{\mathbb{R}}$

Opération sur $\overline{\mathbb{R}}$. Pour tous $x \in \mathbb{R}$, on a :

- ✓ $x+(+\infty) = +\infty$, $x+(-\infty) = -\infty$.
- ✓ $+\infty+(+\infty) = +\infty$, $-\infty+(-\infty) = -\infty$.
- ✓ $x \times (+\infty) = +\infty$, $x > 0$ et $x \times (+\infty) = -\infty$, $x < 0$.
- ✓ $x \times (-\infty) = -\infty$, $x > 0$ et $x \times (-\infty) = +\infty$, $x > 0$.
- ✓ $+\infty \times (+\infty) = +\infty$, $-\infty \times (-\infty) = -\infty$, $+\infty \times (-\infty) = -\infty$.
- ✓ Formes indéterminées : $0 \times (\pm\infty)$, $+\infty + (-\infty)$.

1.5. Borne supérieure et borne inférieure

Définitions 8. (Majorant, minorant – Upper and lower bounds)

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et , $m \in \mathbb{R}$.

- On dit que M est un ***majorant*** de A si : $\forall a \in A$, $a \leq M$.
  Dans ce cas on dit que A est majorée.
- On dit que m est un ***minorant*** de A si : $\forall a \in A$, $a \geq m$.
  Dans ce cas on dit que A est minorée.
- On dit que A est ***bornée*** si elle est majorée et minorée.

Exemples.

1) Soit $A = [1, 3[$, les nombres : $3, \frac{9}{2}$, $\sqrt{21}$ sont des majorants de A . Les nombres : $1, 0, -1000$ sont des minorants de A . Dans ce cas, l'intervalle $[1, 3[$ est bornée.
2) Soit $B =]-\infty, 2]$, les nombres : $2, \pi$, 2023 sont des majorants de B . Ils n'existent pas de minorants de B (n'est pas minorée, donc n'est pas bornée).
3) Soit $C = \{x \in \mathbb{R} \setminus \sqrt{x} \leq 2\}$, les nombres : $4, \sqrt{5}$, 2050 sont des majorants de C . Les nombres : $-1, 0, -\sqrt{1000}$ sont des minorants de C . Dans ce cas, l'ensemble C est bornée.
4) **Attention !** pour $A = [0, 1[\cup \{5\}$, les nombres : $3, 4, \frac{9}{2}$ ne sont pas des majorants de A .

Définitions 9. (Maximum, minimum)

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et , $m \in \mathbb{R}$.

- On dit que M est le *plus grand élément* de A si : $\forall a \in A$, $a \leq M$ et $M \in A$.
  Il s'appelle le *maximum*, on le note **max** $\boldsymbol{A}$.
- On dit que m est le *plus petit élément* de A si : $\forall a \in A$, $a \geq m$ et $m \in A$.
  Il s'appelle le *minimum*, on le note **min** $\boldsymbol{A}$.

Remarque. Le maximum et le minimum n'exisent pas toujours . S'ils existent, ils sont uniques.

Exemples.

1) Soit $A_1 = [1, 3]$, on a 3 est le plus grand élément de A_1, alors $\max A_1 = 3$. Le nombre 1 est le plus petit élément de A_1, alors $\min A_1 = 1$.
2) Soit $A_2 = [1, 3[$, on a $3 \notin A_2$, alors $\max A_2$ n'existe pas. Le nombre 1 reste le $\min A_2$.
3) Soit $A_3 =]-\infty, 2]$, on a $\max A_3 = 2$, le $\min A_3$ n'existe pas (A_3 n'est pas bornée) .
4) Soit $A_4 = \{x \in \mathbb{R} \setminus \sqrt{x} \leq 2\}$, on a $\max A_4 = 2$ et $\min A_4 = 0$.

Définitions 10. (Borne supérieure, borne inférieure)

- Si A est une partie majorée de $\mathbb{R}$, on appelle le plus petit des majorants de A la *« borne supérieure »* de A. On le note **sup A**.
- Si A est une partie minorée de $\mathbb{R}$, on appelle le plus petit des minorants de A la *« borne inférieure »* de A. On le note **inf A**.

Remarques.

1) Si la borne supérieure et la borne inférieure existent, alors ils sont unique.
2) Si la borne supérieure n'existe pas, on écrit : $\sup A = +\infty$.
   Si la borne inférieure n'existe pas, on écrit : $\inf A = -\infty$.
3) Il n'est pas obligatoire que **sup A** et **inf A** appartiennent à A.
   Si c'est le cas, on a : $\sup A = \max A$ et $\inf A = \min A$.

Exemples.

4) Soit $A = [1,3[$ on a : $\sup A = 3$ ($\max A$ n'existe pas) et $\inf A = \min A = 1$.
5) Soit $B =]-\infty, 2]$ on a : $\sup B = \max B = 2$ et $\inf B = -\infty$. (puisque B n'est pas minorée).
6) Soit $C = \{x \in \mathbb{R} \setminus x^2 \leq 4\}$ on a : $\sup C = \max C = 2$ et $\inf C = \min C = -2$.
7) Soit $D = [0,1[\cup \{5\}$ on a : $\sup D = \max D = 5$ et $\inf D = \min D = 0$.

***Théorème* 3.** (Bolzano)

- Toute partie majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
- Toute partie minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.

Remarques. Cette propriété n'est pas valable dans $\mathbb{Q}$. par exemple, l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{Q} \setminus x^2 < 2\}$ est majoré par $\sqrt{2}$, mais la borne supérieure n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.

Proposition 4. (Caractérisation de la borne supérieure)

La borne supérieure de A est l'unique élément tels que :

$$\sup A = M \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{1)}\ \forall a \in A \quad , \quad a \leq M \\ \mathbf{2)}\ \forall \varepsilon > 0, \exists a_0 \in A \ : M - \varepsilon < a_0 \end{cases}$$

Proposition 5. (Caractérisation de la borne inférieure)

La borne inférieure de A est l'unique élément tels que :

$$\inf A = m \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{1)}\ \forall a \in A \quad , \quad a \geq m \\ \mathbf{2)}\ \forall \varepsilon > 0, \exists a_1 \in A \ : m + \varepsilon > a_1 \end{cases}$$

Exemple.

Soit l'ensemble $A = \left\{x_n = 1 - \frac{1}{n} \ \setminus \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$. On a : $\min A = 0$ et $\max A$ n'existe pas. Alors :

- $\inf A = \min A = 0$.
- On va montrer que $\sup A = 1$. En effet, on a $x_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
  D'autre part, on doit montrer que :
  $$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}^* \ (a_0 = x_N \in A) \ : \quad 1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{N}$$
  C'est-à-dire $\frac{1}{\varepsilon} < N$. Donc, il suffit de choisir $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Exemple.

Soit l'ensemble $B = \left\{b_n = \frac{n+1}{2n+1} \ \setminus \ n \in \mathbb{N}\right\}$. Pour tous $n \in \mathbb{N}$, on a : $\frac{1}{2} \leq \frac{n+1}{2n+1} \leq 1$

- Alors $\frac{1}{2}$ est un minorant et 1 est un majorant de B. Donc la partie B est bornée, d'où $\inf B$ et $\sup B$ existent (d'après le théorème de Bolzano).
- On observe que $b_0 = 1$. Alors $\sup B = \max B = 1$.
- On va montrer que $\inf B = \frac{1}{2}$. En effet, on a $\frac{1}{2} \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
  D'autre part, on doit montrer que :
  $$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}^* \ (a_0 = b_N \in A) \ : \quad \frac{n+1}{2n+1} < \frac{1}{2} + \varepsilon$$
  C'est-à-dire : $\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon} < N$. Donc, il suffit de choisir $N = \left[\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}\right] + 1$.

++

Références.

1) H. Benhassine. *La droite réelle achevée*. Cours MI, Université de Jijel, 2021.
2) D. Fredon et autres. *Mathématiques, Analyse en 30 fiches*. Dunod, France, 2009.
3) A. Giroux. *Analyse, Notes de cours*. Université de Montréal, Canada, 2009.
4) J. Kaczor et T. Nowak. *Problèmes d'Analyse I*. EDP Sciences, France, 2008.