Chapitre 1 :

Fonctions Intégrables

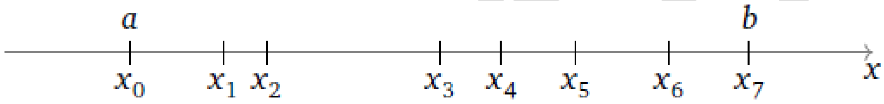
Motivation.

Les **intégrales** sont utilisées dans de multiples disciplines scientifiques notamment en **physique** pour des opérations de mesure de grandeurs (longueur d'une courbe, aire, volume, flux) ou en **probabilités**. Ses utilités pluridisciplinaires en font un outil scientifique fondamental[1]. C'est la raison pour laquelle l'intégration est souvent abordée dès l'enseignement secondaire.

1.1. Intégrale des fonctions en escaliers.

Définition 1. Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$. Une ***subdivision*** (partition-تجزئة) d'ordre n de $[a, b]$ est un sous-ensemble fini ordonné (une suite fini de nombres) :

$$\mathcal{S} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad , \qquad \text{telle que} \quad x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$



- Dans ce cas nous avons n sous-intervalles semi-ouverts, sous la forme :

$$I_i = [x_{i-1}, x_i[\qquad , \quad i = 1, \dots n$$

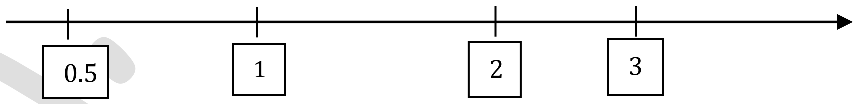
- **Le pas** de la subdivision , noté $\|\mathcal{S}\|$, est égale :

$$\|\mathcal{S}\| = \sup_{i=\overline{1,n}}(x_i - x_{i-1})$$

- On peut créer plusieurs subdivivsion de chaque intervalle. Parmi ces subdivisions, il y a une seule qui admet **un pas uniforme** $h = \|\mathcal{S}\| = \frac{b-a}{n}$, dans ce cas nous avons :

$$x_i = a + ih \quad , \quad i = 0, \dots n$$

Exemple 1. Soit l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$. L'ensemble $\mathcal{S}_1 = \left\{\frac{1}{2}, 1,2, 3\right\}$ est une subdivision de $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$.



L'ensemble $\mathcal{S}_2 = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\right\}$ est une subdivision à pas uniforme de $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$.

Définition 2. Soit $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que φ est ***fonction en escalier*** s'il existe une subdivision $\mathcal{S}$ telle que φ est constante sur chaque sous-intervalle $]x_{i-1}, x_i[$, c'est-à-dire :

$$\varphi(x) = \lambda_i \quad , \qquad \forall x \in \,]x_{i-1}, x_i[\quad et \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Exemple 2. La fonction partie entière sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ est une fonction en escalier :

$$E(x)=\begin{cases}0 \ , \ \text{si} \quad \frac{1}{2}\leq x<1\\ 1 \ , \ \text{si} \quad 1\leq x<2\\ 2 \ , \ \text{si} \quad 2\leq x<3\end{cases}$$

Exemple 3. La fonction de Dirac est une fonction en escalier :

$$\delta(x)=\begin{cases}1 \ , \ \text{si} \quad 0\leq x\leq 1\\ 0 \ , \quad \text{sinon}\end{cases}$$

Définition 3. Soit $\varphi\colon [a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier. On appelle ***intégrale de φ*** sur l'intervalle $[a,b]$ le nombre réel défini et noté par :

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x_i-x_{i-1})$$

Interprétation géométrique.

L'intégrale d'une fonction en escalier est l'aire des rectangles comprises entre l'axe des abscisses les droites d'équations $y=\lambda_i$ et les droites d'équations $x=x_i$.

Exemple 4. Dans l'exemple précédent, l'intégrale de la fonction partie entière sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2},3\right]$ est :

$$\int_{0.5}^{3} E(x)\,\mathrm{d}x=0.\left(1-\frac{1}{2}\right)+1.(2-1)+2.(3-2)=3$$

- On trouve le même résultat par une autre partition de l'intervalle.

  Par exemple, pour la subdivision à pas uniforme $\mathcal{S}_2=\left\{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3\right\}$ on a :

$$\int_{0.5}^{3} E(x)\,\mathrm{d}x=0.\left(1-\frac{1}{2}\right)+1.\left(\frac{3}{2}-1\right)+1.\left(2-\frac{3}{2}\right)+2.\left(\frac{5}{2}-2\right)+2.\left(3-\frac{5}{2}\right)=3$$

Exemple 5. Si $\varphi(x)=c$ est une fonction constante sur $[a,b]$, alors :

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x=c(b-a)$$

1.2. Intégrale de Riemann.

Définitions 4. **(Sommes de Darbaux)** Soit $f\colon [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction bornée sur $[a,b]$. On définit deux nombres réels par :

$$K^-(f)=\sup\left\{\int_a^b\varphi(x)\,\mathrm{d}x \ , \ \forall\varphi \text{ une fonction en escalier avec } \varphi\leq f\right\}$$

$$K^+(f)=\inf\left\{\int_a^b\varphi(x)\,\mathrm{d}x \ , \ \forall\varphi \text{ une fonction en escalier avec } \varphi\geq f\right\}$$

Définitions 5. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée sur $[a, b]$. On dit que f est **intégrable** sur l'intervalle $[a, b]$ si on a :

$$K^{-}(f) = K^{+}(f) = K$$

Le nombre K s'appelle **« intégrale de Riemann de f »**, on le note :

$$K = \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Interprétation géométrique.

L'intégrale d'une fonction bornée est l'aire de la partie comprise entre le graphe de la fonction et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a, x = b$.

Exemple 6. En appliquant la définition on peut trouver les intégrales suivantes :

$$\int_{0}^{1} e^{x}\,\mathrm{d}x = e - 1 \qquad , \qquad \int_{0}^{1} x^{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

Remarque : Il n'est pas facile de calculer l'intégrale de plusieur fonctions par cette définition. Alors que les primitives sont un outil très efficace pour démontrer l'intégrabilité des fonctions.

Théorème 1. Si f est continue sur $[a, b]$ alors elle est intégrable $[a, b]$.

Corollaire. Si f est continue par morceaux alors elle est intégrable.

Proposition 1. Si f est monotone sur $[a, b]$ alors elle est intégrable sur $[a, b]$.

Proposition 2. Si f est intégrable alors la restriction de f à un sous-intervalle de $[a, b]$ est intégrable.

Proposition 3. Si f est intégrable sur $[a, b]$ alors f est intégrable sur $[a, b] \setminus \{\text{un nombre fini de points}\}$ et la valeur de l'intégrale ne change pas.

1.3. Propriétés.

Lemme. Si f est intégrable, alors :

$$\int_{a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad , \qquad \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{b}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Proposition 3. (Relation de Chasles)

Soient $< c < b$. Si f est intégrable sur $[a, c]$ et $[c, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$ et on a :

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Proposition 4. (Linéarité de l'intégrale)

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, alors :

1. La fonction $\alpha f + \beta g$ est intégrable sur $[a, b]$, pour tous réels α et β, de plus on a :

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

2. La fonction $f \times g$ est intégrable sur $[a, b]$ mais (dans le cas général) :

$$\int_a^b (f \times g)(x)\,\mathrm{d}x \neq \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) \times \left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

1. La fonction $|f|$ est intégrable sur $[a, b]$ et on a :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Exemple 7. Les fonctions $f(x) = e^x$ et $g(x) = x^2$ sont intégrables sur $[0,1]$ (d'après un exemple précédent), donc la fonction $h(x) = e^x + x^2$ et on a :

$$\int_0^1 (3e^x + 9x^2)\,\mathrm{d}x = 3\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x + 9\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = 3 \times (e - 1) + 9 \times \frac{1}{3} = 3\,e$$

Exemple 8. Les fonctions suivantes sont intégrables sur $[0,1]$: (comme des fonctions en escaliers)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ 1 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

donc la fonction $h(x) = f(x) \times g(x)$ est intégrable et on a :

$$\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0$$

Or que :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 1\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Donc

$$\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) \times \left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{4} \neq 0$$

Proposition 5. (Encadrement de l'intégrale)

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ tel que $f(x) \leq g(x)$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple 9. Soit l'intégrale :

$$I_n = \int_1^n \frac{\sin(nx)}{1 + x^n}\,\mathrm{d}x$$

On va montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$, en utilisant un encadrement :

$$|I_n| = \left|\int_1^n \frac{\sin(nx)}{1+x^n}\,\mathrm{d}x\right| \le \int_1^n \frac{|\sin(nx)|}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \le \int_1^n \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \le \int_1^n \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x$$

On peut calculer le dernier intégrale par les primitives (voir la prochaine section), on trouve :

$$\int_1^n \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1-n^{1-n}}{n-1}$$

D'autre part : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-n^{1-n}}{n-1} = 0$, d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Corollaire1. (Positivité)

Soit f une fonction positive et intégrable sur $[a,b]$, alors :

$$0 \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Corollaire2. (La moyenne)

Soit f une fonction bornée et intégrable sur $[a,b]$. On pose $M = \sup\limits_{a\le x\le b} f(x)$ et $m = \inf\limits_{a\le x\le b} f(x)$, alors :

$$m\,(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M\,(b-a)$$

1.4. Primitives.

Définition 6.

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle . On appelle **primitive** de f toute fonction F dérivable sur I telle que pour tout $x \in I$: $F'(x) = f(x)$.
Dans ce cas on note :

$$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

Exemples 10.

1) Soit $f(x) = x^2$ définie sur $= \mathbb{R}$. Alors, la fonction $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ définie sur $\mathbb{R}$ est une primitive de f . Les fonctions $F_1(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5$, $F_2(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2024$ sont aussi des primitives de .
2) Soit $g(x) = \cos x$ définie sur $= \mathbb{R}$. Alors, la fonction $G(x) = \sin x$ définie sur $\mathbb{R}$ est une primitive de . Les fonctions $G_1(x) = \sin x + \pi$, $G_2(x) = \sin x + e$ sont aussi des primitives de g .
3) Soit $h(x) = \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors, la fonction $H(x) = \ln x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est une primitive de h . Les fonctions $H_1(x) = \ln(3x)$, $H_2(x) = \ln x + 1$ sont aussi des primitives de h .
(La primitive $H(x) = \ln x$ est la seule qui s'annule en $x = 1$)

Proposition 7.

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I et F une primitive de f . Toute autre primitive de f s'écrit $\phi = F + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Proposition 8.

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Soient f, g deux fonctions et F (resp. G) une primitive de f (resp. g). Alors $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$ et on a :

$$\int (\alpha f + \beta g)(t)\, \mathrm{d}t = \alpha \int f(t)\, \mathrm{d}t + \beta \int g(t)\, \mathrm{d}t$$

Théorème 2.

- Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $I = [a, b]$. La fonction F définie sur $[a, b]$ par

$$F(t) = \int_a^t f(x)\, \mathrm{d}x$$

est dérivable et on a $F'(t) = f(t)$. C'est-à-dire que F est une primitive de f.

- Donc, pour une primitive quelconque on a :

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

- Si F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, on peut écrire :

$$\int_a^b F'(x)\, \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

- Pour l'expression $F(b) - F(a)$, on utilise la notation : $[F(x)]_a^b$ où $F(x)|_a^b$

Remarque.

1) La fonction F donnée par l'intégrale du théorème est l'unique primitive de f qui s'annule en a. (Voir l'exemple de $\ln x$)
2) Si la fonction f est impaire alors ses primitives sont paires, dans ce cas on :

$$\int_{-a}^a f(x)\, \mathrm{d}x = 0$$

Exemples 11.

1) Soit $f(x) = x^2$. La fonction $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ est une primitive de f sur $I = \mathbb{R}$. On a

$$\int_1^2 x^2\, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

2) Soit $g(x) = \sin x$. La fonction $G(x) = -\cos x$ est une primitive de g sur $I = \mathbb{R}$. On a

$$\int_0^\pi \sin x\, \mathrm{d}x = [-\cos x]_0^\pi = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 2$$

3) Soit $h(x) = e^x$. La fonction $H(x) = e^x$ est une primitive de h sur $I = \mathbb{R}$. On a

$$\int_{-1}^1 e^x\, \mathrm{d}x = [e^x]_{-1}^1 = e^1 - e^{-1} = e - \frac{1}{e}$$