الفصل الأول

الكهرباء الساكنة في الفراغ

الكهرباء الساكنة هي دراسة الظواهر المتعلقة بالشحنات الساكنة. سنبدأ هذا الفصل بوصف الشحنة الكهربائية و خصائصها، ثم نناقش قانون كولوم الذي يصف القوة المؤثرة بين شحنتين كهربائيتين ساكنتين في الفراغ، و ندخل مفهوم الحقل الكهربائي و الكمون الكهربائي الناتج عن توزيع شحني. نحسب أيضا الحقل الكهربائي و الكمون الناشئين عن ثنائي القطب على مسافات بعيدة. و نتطرق إلى أهم النظريات لحساب الحقل الكهربائي و هي نظرية التدفق أو بما تسمى نظرية غاوس و كيفية استعمالها.

1.1 الشحنة الكهربائية

تجربة 1: عند مشط الشعر و تقريبه من قصاصات الورق نلاحظ أنها تنجذب بسرعة إلى المشط.

تجربة 2: عند دلك بالون منفوخ بالصوف وتقريبه من الجدار فإنه سيلتصق به لساعات.

أثبتت العديد من التجارب أن الأجسام تكتسب عند دلكها خاصية جديدة تسمى "الكهرباء" من شأن هذه الخاصية أن تولد تفاعلا يسمى "التأثير الكهربائي". في الواقع كل الأجسام قابلة للتكهرب سواء بالدلك أو بالتلامس مع جسم مكهرب أو بوصل الجسم بأحد طرفي مولد.

تنتج قوى التأثير الكهربائي عن وجود مقدار فيزيائي مميز للجسيمات يدعى" الشحنة الكهربائية" (*Charge électrique*)، وهي تؤدي دورا مشابها لدور الكتلة في التفاعلات الثقالية. لقد وجد بنجمين فرانكلين (*1790-1706 Benjamin Franklin*) من خلال تجاربه أن هناك صنفين من الشحنات، حيث أخذ قضيبا من المطاط القاسي ثم دلكه بواسطة الصوف و علقه بواسطة خيط غير معدني، ثم قرب إليه قضيبًا من زجاج مدلوك بالحرير فلاحظ أنهما ينجذبان، و عند تقريب قضيب من المطاط، أي من نفس النوع، تنافر معه.

من خلال التجارب و بالاتفاقيات، اصطلح على اعتبار الشحنة الموجودة على القضيب الزجاجي شحنةً موجبةً (*charge positive*) (+)، و كل ما يتنافر معها فهو شحنة موجبة أيضا، و الموجودة على القضيب المطاطي سالبةً (*charge négatif*) (−) و كل ما يتنافر معها فهو شحنة سالبة.

ملاحظة: الأجسام الحاملة للنوع نفسه من الشحنات تتنافر، و الأجسام الحاملة لنوعين مختلفين تتجاذب، أما الأجسام التي لا تتبادل التأثير الكهربائي فهي متعادلة كهربائيا.

سلوك الأجسام الكهربائي يتحدد بقابلية حركة الشحنة الكهربائية، لذلك يمكن أن نقسم المواد إلى نوعين:

النواقل (*Conducteurs*): حيث يمكن للشحنات فيها أن تنتقل بحرية لمسافات معتبرة أمام المسافات الفاصلة بين الذرات مثل: المعادن، المحاليل،.... و يكون الناقل جيدا كلما كثرت شحناته و سهلت حركتها.

العوازل (*Isolants*): و هي عكس النواقل، لا تسمح بهذه الحرية لانتقال الشحنات، فهي تبقى متوضعة محلّها مثل: الزجاج، الخشب، البلاستيك....

ملاحظات:

- ✓ تصنف معظم الأجسام إلى أحد النوعين السابقين باستثناء القليل مثل: الجرمانيوم، السليسيوم، الكربون .... فتصنف كأشباه نواقل .
- ✓ عند دلك المطاط الذي يعتبر عازلا يجذب له قصاصات الورق، هل يعني هذا أنه أصبح ناقلا؟. في الواقع تصبح المساحة المدلوكة فقط مشحونة، وأن الشحنة لا تتمكن من الحركة إلى مناطق أخرى من المادة، و على العكس عند دلك مادة ناقلة كالنحاس لا نلاحظ انجذاب قصاصات الورق، و ذلك بسبب أن الشحنة الناتجة عن الدلك في موضع صغير توزعت عبر كامل سطح المادة، فلو أننا أمسكنا قضيب النحاس بمقبض من الخشب فإنه يحدث انجذاب لقصاصات الورق كما حدث للعوازل في التجربة 1.

2.1 تكمية الشحنة و انحفاظها

سمحت لنا المعلومات المتوفرة حاليا حول بنية المادة بتفسير ظواهر التكهرب، و أكدت أن الشحنات الكهربائية الموجودة في الطبيعة عبارة على أعداد صحيحة لشحنة أساسية غير قابلة للانقسام e، و قد بيَّن ذلك روبرت ميليكان سنة 1909 (*Robert Millikan 1868-1953*)، و هو ما نصطلح عليه بتكمية الشحنة الكهربائية:

$$q = \pm Ne$$

حيث N عدد طبيعي.

الشحنة الكهربائية مقدار فيزيائي قابل للقياس، و وحدته في النظام الدولي SI هي الكولوم ويرمز لها بـ C، و الشحنة الأساسية $e = 1.6 \times 10^{-19}C$، أما أجزاء الكولوم فيمكن ذكر بعضها:

$$1\mu C\ (\text{الميكوكولوم}) = 10^{-6}C$$
$$1nC\ (\text{النانوكولوم}) = 10^{-9}C$$
$$1pC\ (\text{البيكوكولوم}) = 10^{-12}C$$

- ✓ إن عملية دلك جسم بواسطة جسم آخر لا تخلق الشحنة، فكل ما حدث هو انتقال الشحنة من جسم لآخر، فأحد الأجسام يكتسب مقدارا من الشحنة الموجبة بينما الآخر يكتسب مقدارًا مساويًا من الشحنة السالبة، فدلك قضيب من الزجاج مع الحرير أحدث حصول الحرير على شحنة سالبة و القضيب على نفس الشحنة، و لكنها موجبة. إن معرفة التركيب الذري تجعلنا نفسر ما حدث على أنه انتقال الالكترونات، و هي سالبة الشحنة، من الزجاج إلى الحرير.
- ✓ تفرض علينا الظواهر الكهربائية قبول أن الشحنة لا تفنى و لا تستحدث، و لكنها تتحول من جسم إلى آخر في نظام معزول، حيث يبقى المجموع الكلي الجبري للشحنات ثابتًا (قانون انحفاظ الشحنة (*conservation du charge*)، فعملية التكهرب في نظام معزول ما هي إلا إعادة توزيع للشحنات.

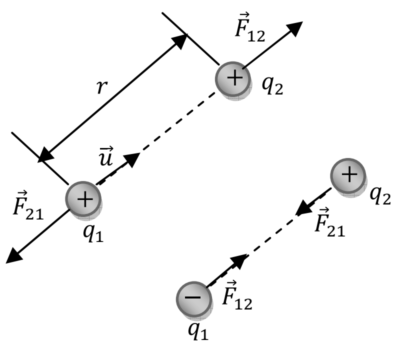
الجسم	الشحنة(C)
الإلكترون (*électron*)	-1.602×10^{-19}
البروتون (*proton*)	$+1.602 \times 10^{-19}$
النيوترون (*neutron*)	0

ملاحظات:

- ✓ عند نزع عدد من الإلكترونات من جسم يصبح موجب الشحنة، أمّا عند إضافة عدد من الإلكترونات إليه يصبح سالب الشحنة.
- ✓ **الشحنة النقطية** (***charge ponctuelle***): هي تجريد علمي، و هي عبارة عن جسم مشحون أبعاده مهملة بالمقارنة مع المسافات التي تفصله عن باقي المؤثرات، و هي تؤدي الدور نفسه الذي تؤديه "النقطة المادية" في الميكانيكا.

3.1 قانون كولوم

نتيجة التجارب التي قام بها العالم تشارلز كولوم (*Charles Coulomb 1736-1806*) على الشحنات النقطية **الساكنة** لتحديد خصائص القوة الكهروستاتيكية (*force électrostatique*) التي تؤثر بها شحنة q_1 على شحنة ثانية q_2، أو العكس، وجد أن:



← القوة الكهروستاتيكية محمولة على المستقيم الواصل بين الشحنتين.

← تتناسب القوة طردا مع جداء الشحنتين حيث:

- إذا كانت q_1 و q_2 من إشارة واحدة فالجداء يعطي إشارة موجبة $+|q_1||q_2|$
- إذا كانت q_1 و q_2 متعاكستين في الإشارة فالجداء يعطي إشارة سالبة $-|q_1||q_2|$

← تتناسب القوة عكسيا مع مربع البعد بين الشحنتين r^2.

العبارة الرياضية لقانون كولوم هي:

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{u} = k\frac{q_1q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \qquad (1)$$

حيث: $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$ و $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

الثابت k يدعى "الثابت الكهربائي" أو " ثابت كولوم" و يتعلق بجملة الوحدات المستخدمة:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9 Nm^2C^{-2} \quad (\text{SI النظام})$$

ε_0 : سماحية الفراغ (*permittivité du vide*).

ملاحظات:

- ✓ يمكن أن نعرف الكولوم على أنه شحنة نقطية إذا وضعت على بعد 1 متر من شحنة مماثلة تكون خاضعة لقوة مقدارها 9×10^9 نيوتن.
- ✓ قوة كولوم هي من نوع القوى المركزية، لذلك فهي قوة مشتقة من كمون.
- ✓ إن قانون كولوم مشابه لقانون الجذب العام بين جسيمين كتلتاهما m_1 و m_2: $\vec{F} = -G\frac{m_1m_2}{r^3}\vec{r}$.
- ✓ تخضع القوى الكهربائية الى مبدأ التراكب (*principe de superposition*)، فالقوة الكهربائية $\vec{F}$ المؤثرة على الشحنة q_0 من طرف الشحنات q_1، q_2، q_3 … q_N تساوي المجموع الشعاعي لكل القوى:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{i0} = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} + \cdots + \vec{F}_{N0}$$

مثال 1: مقارنة بين القوة الكهربائية و قوة التجاذب الكتلي.

يفصل بين إلكترون و بروتون ذرة الهيدروجين مسافة $5.3 \times 10^{-11}\text{m}$. أوجد مقدار القوة الكهربائية و قوة التجاذب الكتلي بين الإلكترون و البروتون، حيث:

$$m_e = 9.11 \times 10^{-31}\text{kg}\,; \qquad m_p = 1.67 \times 10^{-27}\text{kg}$$

من قانون كولوم نجد:

$$F_e = k\frac{e^2}{r^2} = \left(9\times10^9\frac{Nm^2}{C^2}\right)\frac{(1.60\times10^{-19}C)^2}{(5.3\times10^{-11}m)^2} = 0.82\times10^{-7}N$$

وباستعمال قانون نيوتن للجذب نجد ان:

$$F_g = G\frac{m_1m_2}{r^2} = \left(6.7\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\right)\frac{(9.11\times10^{-31}kg)(1.67\times10^{-27}kg)}{(5.3\times10^{-11}m)^2}$$
$$= 3.62\times10^{-47}N$$

النسبة بين القوتين: $\frac{F_e}{F_g} = 2.26\times10^{39}$

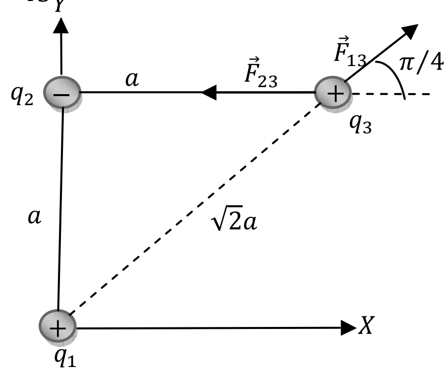
إن القوة التجاذب الكتلي و أيضا قوة الثقالية مهملة أمام القوة الكهربائية.

مثال 2: محصلة القوى المؤثرة على شحنة، و الناتجة عن شحنتين.

وضعت ثلاث شحنات نقطية عند أركان مثلث قائم و متساوي الساقين $q_1 = q_3 = 5.0\mu C$ و $q_2 = -2.0\mu C$ و $a = 0.1m$. اوجد محصلة القوة المبذولة عند q_3.

القوة المحصلة على q_3 هي المجموع الشعاعي للقوى الناتجة عن q_1 و q_2:

$$\vec{F}_{q_3} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$$



اذا استعملنا المعلم الديكارتي OXY نجد:

$$\vec{F}_{13} = F_{13}\cos\frac{\pi}{4}\vec{\imath} + F_{13}\sin\frac{\pi}{4}\vec{\jmath}$$
$$\vec{F}_{23} = -F_{23}\vec{\imath}$$

$$\vec{F}_{q_3} = \left(F_{13}\cos\frac{\pi}{4} - F_{23}\right)\vec{\imath} + F_{13}\sin\frac{\pi}{4}\vec{\jmath}$$

حساب طويلات الأشعة:

$$F_{13} = k\frac{|q_1||q_3|}{\left(\sqrt{2}a\right)^2} = \left(9\times10^9\frac{N.m^2}{C^2}\right)\frac{(5\times10^{-6}C)^2}{2(0.1m)^2} = 11.25N$$

$$F_{23} = k\frac{|q_2||q_3|}{a^2} = (9\times10^9)\frac{(5\times10^{-6})(2.0\times10^{-6})}{(0.1)^2} = 9N$$

$$\vec{F}_{q_3} = (7.95-9)\vec{\imath} + 7.95\vec{\jmath} = -1.05\vec{\imath} + 7.95\vec{\jmath}$$

ملاحظات:

- ✓ يصح قانون كولوم (1) فقط على الشحنات الساكنة أو التي في حالة حركة بطيئة.
- ✓ لا توجد بعد دلائل تجريبية تؤكد أو تنفي صحة تطبيق قانون كولوم في المسافات الكبيرة (الفلكية)، ولا في المسافات المجهرية ($10^{-14}\mathrm{m}$)، لكن توحي بأنه يمكن تطبيقه.

4.1 الحقل الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية

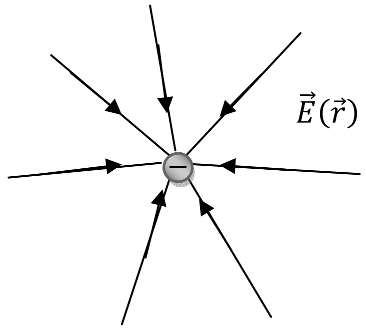
إن القوة الكهربائية، حسب قانون كولوم، الناتجة عن الشحنة النقطية q و التي تؤثر على شحنة نقطية أخرى q' تبعد عنها مسافة r هي:

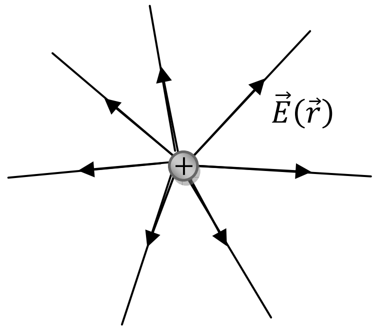
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^3}\vec{r} = q'\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}\right) = q'\vec{E}$$

نلاحظ أن القوة الكهربائية $\vec{F}$ تتعلق بمقدار شعاعي $\vec{E}$، يتعلق بدوره بـ q فقط يدعى الحقل الكهربائي(*champ électrique*)، و هو يميز حيزا من الفضاء المحيط بالشحنة q، و يعتبر الأداة التي تنقل تأثير q إلى أي موضع من الفضاء، سواء كانت به شحنة أو لا، فان وجدت في الموضع شحنة تولد عندها قوة كولوم. دور الشحنة q' هو تحسس الحقل الناتج عن q عندها دون ان يكون لها دور في إنشائه. و منه فالحقل الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية q عند النقطة M التي تبعد عنها مسافة r يعطى:

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u} \qquad (2)$$

- ✓ إذا كانت $q > 0$ فإن للحقل الكهربائي $\vec{E}$ نفس اتجاه $\vec{r}$.
- ✓ إذا كانت $q < 0$ فإن للحقل الكهربائي $\vec{E}$ عكس اتجاه $\vec{r}$.
- ✓ يتجه الحقل الكهربائي نحو الشحنات السالبة و يصدر عن الشحنات الموجبة.





- ✓ وحدة الحقل الكهربائي في النظام الدولي SI هي NC^{-1} (سنرى فيما بعد أنه يمكن استعمال وحدة أخرى هي Vm^{-1}).
- ✓ يؤدي الحقل الكهربائي دورا مماثلا للذي يؤديه حقل الجاذبية الأرضية الذي ينقل أثر الأرض (الجذب) إلى الأجسام ليولد عندها قوة الثقل: $\vec{p} = m\vec{g}(\vec{r})$.

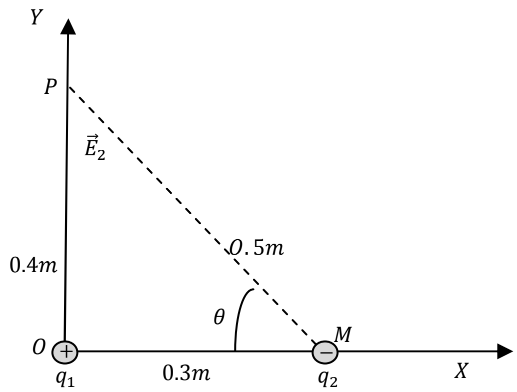
5.1 الكمون الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية

نعرف الكمون الكهربائي (*potentiel électrique*) الناتج عن شحنة نقطية q عند النقطة M التي تبعد عنها مسافة r بـ:

$$V(M) = k\frac{q}{r} + c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + c \qquad (3)$$

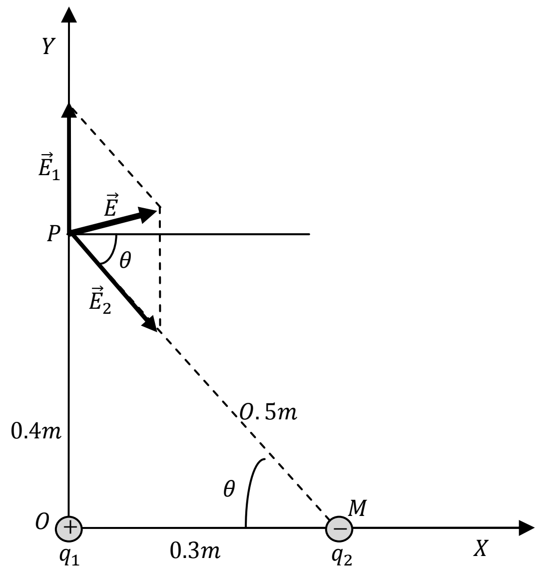
يحدد الثابت c وفقا لمرجع الكمون. فمثلا يكون $c = 0$ عندما $V(\infty) = 0$.

مثال 3: الحقل و الكمون الكهربائيان الناتجان عن شحنتين.



في المعلم OXY، وضعت الشحنة $q_1 = 7\mu C$ عند النقطة $(0,0)$، و وضعت الشحنة $q_2 = -5\mu C$ عند النقطة M ذات الإحداثيات $(0.3,0)m$، أنظر الشكل.

أوجد الحقل و الكمون الكهربائيين في النقطة P ذات الإحداثيات $(0,0.4)\mathrm{m}$.



الحقل الكهربائي الناتج عن الشحنتين في الموضع P:

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_1(P) + \vec{E}_2(P)$$

في المعلم OXY لدينا:

$$\vec{E}_1(P) = E_1\vec{j}$$
$$\vec{E}_2(P) = E_2\cos\theta\,\vec{i} - E_2\sin\theta\,\vec{j}$$

حيث:

$$\cos\theta = \frac{0.3}{0.5} = \frac{3}{5}$$
$$\sin\theta = \frac{0.4}{0.5} = \frac{4}{5}$$

$$E_1 = k\frac{|q_1|}{\left|\overrightarrow{OP}\right|^2} = \left(9\times10^9\frac{N.m^2}{C^2}\right)\frac{(7\times10^{-6}C)}{(0.4m)^2} = 3.9\times10^5\,N/C$$

$$E_2 = k\frac{|q_2|}{\left|\overrightarrow{MP}\right|^2} = (9\times10^9)\frac{(5\times10^{-6})}{(0.5)^2} = 1.8\times10^5\,N/C$$

$$\vec{E}_1(P) = 3.9\times10^5\vec{j}$$

$$\vec{E}_2(P) = 1.8\times10^5\left(\frac{3}{5}\vec{i}-\frac{4}{5}\vec{j}\right) = 1.08\times10^5\vec{i}-1.44\times10^5\vec{j}$$

$$\vec{E}(P) = 1.08\times10^5\vec{i}+2.46\times10^5\vec{j}$$

الكمون الكهربائي الناتج عن الشحنتين في الموضع P:

$$V(P) = V_1(P)+V_2(P)$$

حيث:

$$V_1(P) = k\frac{q_1}{\left|\overrightarrow{0P}\right|} = \left(9\times10^9\frac{N.m^2}{C^2}\right)\frac{(7\times10^{-6}C)}{0.4m} = 1.58\times10^5V$$

$$V_2(P) = k\frac{q_2}{\left|\overrightarrow{MP}\right|} = \left(9\times10^9\frac{N.m^2}{C^2}\right)\frac{(-5\times10^{-6}C)}{0.5m} = -0.9\times10^5V$$

$$V(P) = 1.58\times10^5-0.9\times10^5 = 0.68\times10^5V$$

6.1 العلاقة بين الحقل و الكمون الكهربائيين

لنحسب تجوال (*circulation*) الشعاع $\vec{E}$ عبر عنصر الطول $d\vec{r}$:

$$\vec{E}.d\vec{r} = k\frac{q}{r^3}(\vec{r}.d\vec{r}) = k\frac{q}{r^2}dr \qquad (4)$$

بمفاضلة المعادلة (3) بالنسبة للمتغيرr:

$$\frac{dV}{dr} = -k\frac{q}{r^2} \Longrightarrow dV = -k\frac{q}{r^2}dr \qquad (5)$$

بمقارنة العلاقتين (4) و (5) نجد العلاقة :

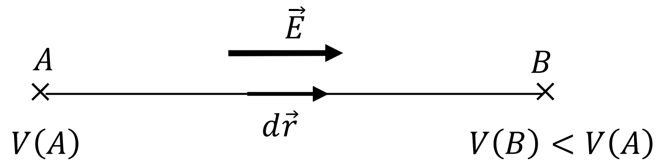
$$dV = -\vec{E}.d\vec{r} \qquad (6)$$

تجوال الحقل الكهروستاتيكي على مسار من النقطة A إلى النقطة B:

$$\int_A^B \vec{E}.d\vec{r} = -\int_A^B dV \ = V(A) - V(B)$$

ملاحظات:

- ✓ هذا التجوال محفوظ لا يتعلق بالمسار المتبع.
- ✓ تجوال الحقل الكهروستاتيكي عبر مسار مغلق معدوم.
- ✓ من أجل $\vec{E}.d\vec{r} > 0$ لدينا $V(A) > V(B)$، يعني أن اتجاه خطوط الحقل في اتجاه تناقص الكمون.



باستعمال الإحداثيات الديكارتية في المعادلة (6) نجد:

$$dV = -\vec{E}.d\vec{r} \ = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$
$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

بالمقارنة بين المعادلتين السابقتين نجد:

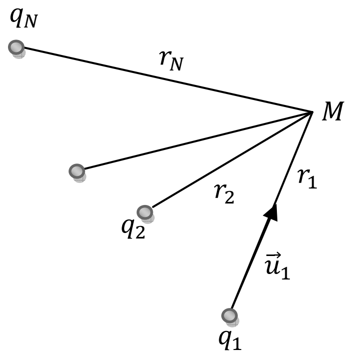
$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \quad \Longrightarrow \ \vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V \qquad (7)$$

وحدة الكمون في النظام الدولي SI هي: $J.C^{-1}$ أو باختصار الفولط (V). أشرنا سابقا أنه يمكن تعويض وحدة الحقل بـ: Vm^{-1} .

7.1 تعميم علاقات الحقل و الكمون الكهربائيين

حالة التوزيع المتقطع للشحنات(*distribution discrète de charges*): ليكن لدينا N شحنة نقطية q_1، q_2، ...، q_N و المطلوب حساب الحقل و الكمون الناتجين عن هذه الشحنات في النقطة M.

حسب قانون التراكب:

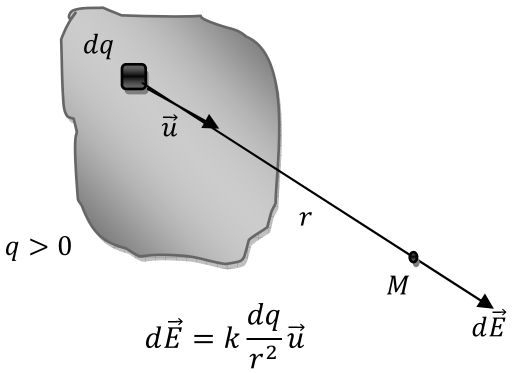


$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i\,(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i^2}\vec{u}_i$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i^2}\frac{\vec{r}_i}{r_i}$$

$$V(M) = \sum_{i=1}^{N} V_i\,(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i}$$

حالة التوزيع المستمر للشحنات (*distribution continue de charges*): في هذه الحالة نجزيء الشحنة q الموزعة على كافة الجسم إلى عناصر تفاضلية dq ثم نجمع (نكامل) تأثيرها فنحصل:



$$\vec{E}(M) = \int d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \quad (9)$$

$$V(M) = \int dV(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r} \quad (10)$$

يمكن للشحنة في الجسم أن تتوزع في ثلاثة أشكال:

التوزيع الخطي: نعرف الكثافة الخطية λ (*densité linéique*)، وحدتها في النظام الدولي cm^{-1}، و تمثل كمية الشحنة dq الموضوعة في وحدة الطول dl، أي:

$$dq = \lambda dl$$

يكتب الحقل و الكمون في حالة هذا التوزيع:

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda dl}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \qquad\qquad V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda dl}{r}$$

حيث L الطول الكلي للجسم.

في حالة الكثافة الخطية المنتظمة :

$$\lambda = \frac{dq}{dl} = \frac{q}{L} = \text{ثابت}$$

التوزيع السطحي: نعرف الكثافة السطحية σ (*densité surfacique*)، وحدتها في النظام الدولي cm^{-2} ، وتمثل كمية الشحنة dq الموضوعة في وحدة السطح dS، أي :

$$dq = \sigma dS$$

يكتب الحقل و الكمون في حالة هذا التوزيع :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma dS}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \qquad\qquad V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma dS}{r}$$

حيث S السطح الكلي للجسم.

في حالة الكثافة السطحية المنتظمة :

$$\sigma = \frac{dq}{dS} = \frac{q}{S} = \text{ثابت}$$

التوزيع الحجمي: نعرف الكثافة الحجمية ρ (*densité volumique*)، وحدتها في النظام الدولي cm^{-3} ، وتمثل كمية الشحنة dq الموضوعة في وحدة الحجم dv ، أي:

$$dq = \rho dv$$

يكتب الحقل و الكمون في حالة هذا التوزيع:

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\rho dv}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \qquad\qquad V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\rho dv}{r}$$

حيث v الحجم الكلي للجسم.

في حالة الكثافة الحجمية المنتظمة :

$$\rho = \frac{dq}{dv} = \frac{q}{v} = \text{ثابت}$$

مثال 4: حساب الحقل و الكمون الكهربائيين الناتجين عن سلك لانهائي الطول.

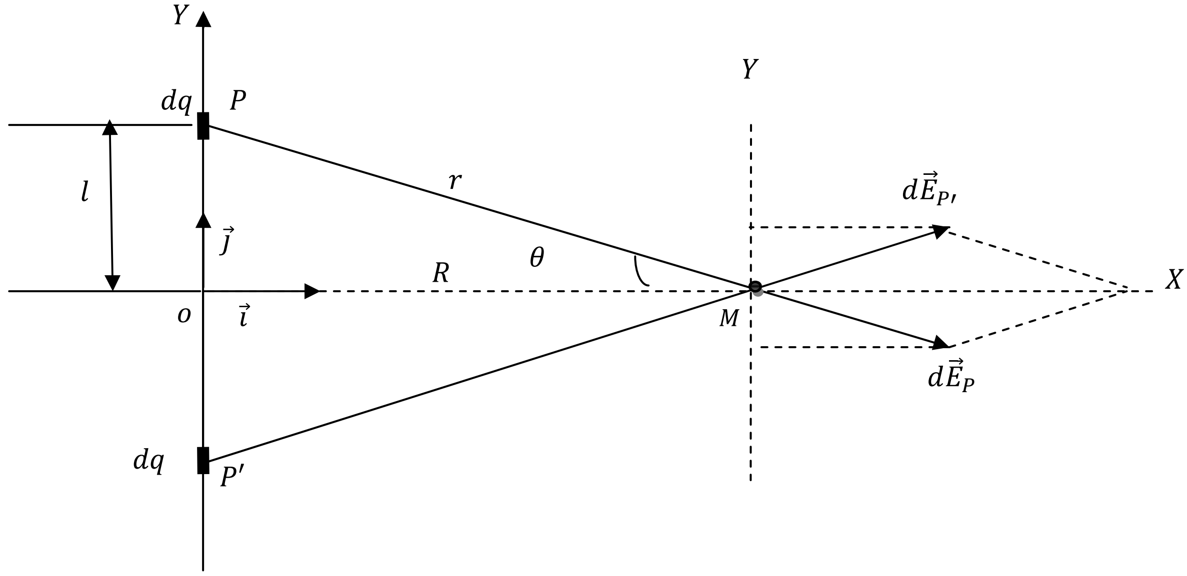
الشحنة موزعة بكثافة طولية منتظمة λ على طول سلك لانهائي الطول. المطلوب حساب الحقل و الكمون الكهربائيين الناتجين عن هذا التوزيع في نقطة M من الفضاء تبعد مسافة R عن السلك.

دائما قبل الخوض في الحسابات نناقش موضوع طبيعة التوزيع الشحني هل يتسم بالتناظر أو لا، حيث يسمح لنا تناظر الشحنة باختصار الحسابات.

في هذا المثال و بفعل التناظر فإن الحقل الكهربائي سيكون له مركبة وحيدة على المحور $0X$:

$$\vec{E} = E_x\vec{\imath}$$

نقسم السلك إلى عناصر متناهية في الصغر dl، تحمل كل منها شحنة عنصرية : $dq = \lambda dl$



و الحقل الكهربائي العنصري $d\vec{E}_P$ الناتج عن هذه الشحنة العنصرية واقع على الحامل PM كما هو موضح في الشكل، فنجد أن لديه مركبتين:

$$d\vec{E}_P = dE_x\vec{\imath} + dE_y\vec{\jmath} = dE_P \cos\theta\,\vec{\imath} - dE_P \sin\theta\,\vec{\jmath}$$

حيث:

$$dE_P = k\frac{\lambda dl}{r^2}$$

كما ذكرنا سابقا، فإنه بفعل التناظر يكون الحقل الكلي الناتج على السلك له مركبة وحيدة على المحور OX لذلك لا داعي لحساب تكامل مسقط الحقل الكهربائي العنصري على المحور OY. يبقى فقط حساب تكامل المسقط على المحور OX:

$$dE_x = dE_P \cos\theta = k\frac{\lambda dl}{r^2}\cos\theta \qquad (1')$$

لنكامل هذه المعادلة على كامل السلك حتى نحصل على الحقل الكلي في النقطة M، لذلك من الضروري اختيار المتغير جيدا. لدينا عده امكانيات للمتغيرات: l أو θ، و أسهل حالة هي اختيار θ كمتغير.

من الشكل لدينا:

$$l = R\tan\theta \Longrightarrow \frac{dl}{d\theta} = \frac{R}{\cos^2\theta} \Longrightarrow dl = \frac{R}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$\cos\theta = \frac{R}{r} \Longrightarrow r = \frac{R}{\cos\theta}$$

نعوض هذه المعطيات في المعادلة $(1')$ فنحصل على:

$$dE_x = k\frac{\lambda\frac{R}{\cos^2\theta}d\theta}{\left(\frac{R}{\cos\theta}\right)^2}\cos\theta = k\frac{\lambda}{R}\cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\cos\theta\, d\theta$$

نكامل المعادلة السابقة على كامل السلك، أي من $\theta = -\frac{\pi}{2}$ إلى $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$E_x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \Longrightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\vec{\imath}$$

بالنسبة إلى حساب الكمون بالطريقة المباشرة فإن كل عنصر من الشحنة dq يعطي كمونًا عنصريًا dV عند النقطة M:

$$dV(M) = k\frac{dq}{r} = k\frac{\lambda dl}{r}$$

لحساب التكامل يجب الاختيار الجيد للمتغير الذي سيجرى عليه التكامل، فقد نحصل باختيارنا على

تكاملات صعبة الحل. في هذا الجزء من التمرين سنختار dl عنصر تفاضل، و على الطالب أن يجرب الحساب باختيار عنصر التفاضل $d\theta$، و سيجد أنه من الصعب حساب التكامل:

$$dV(M) = k\frac{\lambda dl}{\sqrt{l^2+R^2}} \quad ; \quad r = \sqrt{l^2+R^2}$$

لحساب الكمون الكلي الناتج عن السلك يجب أن نكامل على كامل السلك أي من $-\infty$ إلى $+\infty$، و هذا صعب. لذلك بما أن التكامل السابق دالة زوجية نقسم التكامل إلى قسمين، و نكامل من 0 إلى a، ثم نحسب النتيجة عندما تؤول a إلى المالانهاية:

$$V(M) = 2k\lambda\int_0^a \frac{dl}{\sqrt{l^2+R^2}} = 2k\lambda\,\ln\left|l+\sqrt{l^2+R^2}\right|\Big|_0^a$$
$$= 2k\lambda\left[\ln\left|a+\sqrt{a^2+R^2}\right| - \ln \mathrm{R}\right]$$

نستعمل العلاقة $q = \lambda l$ و نحسب النهاية عندما $a \to \infty$:

$$\lim_{a\to\infty} 2k\lambda\left[\ln\left|a+\sqrt{a^2+R^2}\right| - \ln \mathrm{R}\right]$$
$$= \lim_{a\to\infty} 2k\frac{q}{a}\left[\ln\left|a+\sqrt{a^2+R^2}\right| - \ln \mathrm{R}\right] = -2k\lambda\ln \mathrm{R}$$

$$V(M) = -2k\lambda\ln \mathrm{R} + C = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln R + C$$

حيث C ثابت.

نستطيع أن نصل إلى العلاقة السابقة بطريقة الاستنتاج باستعمال العلاقة (5) في الإحداثيات الديكارتية:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\vec{\imath}$$
$$-\frac{dV}{dx} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x} \Longrightarrow dV = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}dx$$
$$\int dV = -\int\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}dx \Longrightarrow V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln x + C$$

و عندما $x = R$:

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln R + C$$

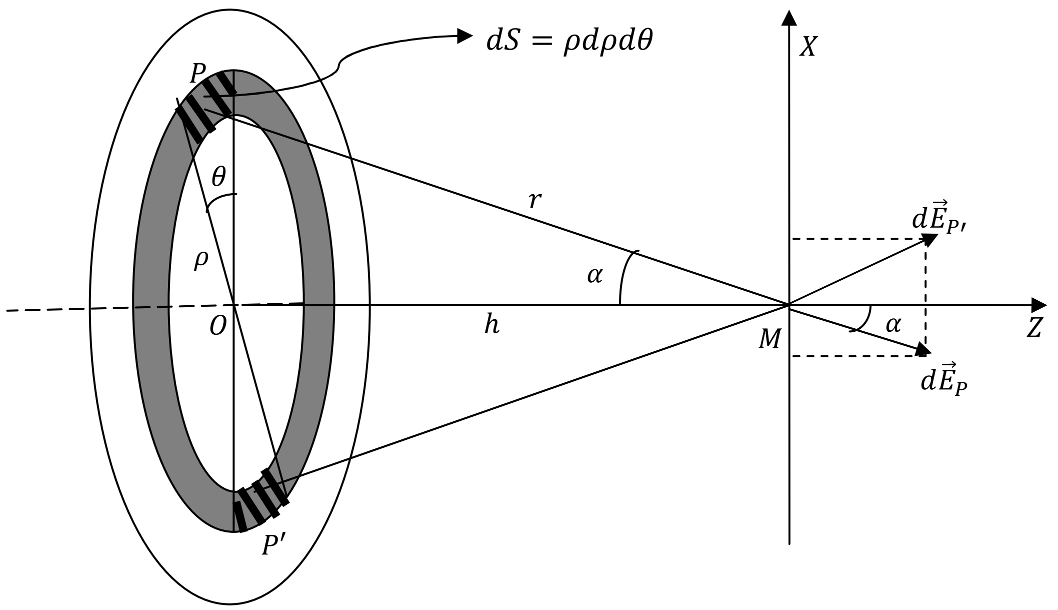
مثال 5: حساب الحقل و الكمون الكهربائيين الناتجين عن قرص.

قرص نصف قطره R مشحون بكثافة سطحية$(\sigma > 0)$ منتظمة و مساحته $S = \pi R^2$.

المطلوب: حساب الحقل و الكمون الكهربائيين الناتجين عن هذا التوزيع في نقطة M من محور القرص OZ.

نقسم القرص إلى سطوح تفاضلية سطحية dS تحتوي على شحنة تفاضلية dq، حيث:

$$dq = \sigma dS = \sigma \rho d\rho d\theta$$



مركبات الحقل العنصري:

$$d\vec{E}_P = -dE_x\vec{\imath} + dE_z\vec{k} = -dE_P \sin\alpha\,\vec{\imath} + dE_P \cos\alpha\,\vec{k}$$

$$dE_P = k\frac{dq}{r^2} = k\frac{\sigma\rho d\rho d\theta}{r^2}$$

بطريقة التمرين السابق نفسها، نلاحظ أن هناك تناظرًا للشحنة، يمكن استغلاله، حيث نجد أن الحقل الكهربائي الكلي له مركبة وحيدة على المحور OZ، فلا داعي لحساب مسقط الحقل على المحاور المتعامدة مع OZ:

$$dE_z = dE_P \cos\alpha = k\frac{\sigma\rho d\rho d\theta}{r^2}\cos\alpha$$

لدينا: θ تتغير من 0 إلى 2π، و ρ من 0 إلى R، و من الشكل نجد:

$$\cos\alpha = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{\rho^2+h^2}}\ ; \qquad r^2 = \rho^2 + h^2$$

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\rho d\rho d\theta}{(\rho^2+h^2)}\,\frac{h}{(\rho^2+h^2)^{\frac{1}{2}}}$$

نكامل:

$$E_z = \frac{\sigma h}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\sigma h}{2\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{h^2+\rho^2}}\right)_0^R$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}}\right)\vec{k} \qquad (11)$$

بالنسبة إلى حساب الكمون في النقطة M:

$$dV = k\frac{dq}{r} = k\frac{\sigma\rho d\rho d\theta}{r} = k\frac{\sigma\rho d\rho d\theta}{\sqrt{\rho^2+h^2}}$$

نكامل:

$$V = \int dV = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2+h^2}}\int_0^{2\pi} d\theta + C$$

حيث C ثابت:

$$V(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{h^2+R^2} - h\right) + C \qquad (12)$$

نستطيع أن نصل إلى العلاقة السابقة بطريقة الاستنتاج باستعمال العلاقة (5) في الإحداثيات الديكارتية:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{h}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\vec{k}$$

بمقارنة طرفي المعادلة السابقة:

$$-\frac{dV}{dz} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{h}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$$

$$dV = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{z + R^2}}\right) dh \Rightarrow V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2 + R^2} - z\right) + C$$

عندما $z = h$:

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{h^2 + R^2} - h\right) + C$$

ملاحظة: التكاملات موجودة في الملحق الأول.

مثال 6: حساب الحقل و الكمون الكهربائيين الناتجين عن مستوٍ لانهائي.

نعتبره كأنه قرص ذو نصف قطر لانهائي. باستعمال العلاقة (11) و (12) عندما $R \longrightarrow \infty$:

$$\vec{E}(M) = \pm\, \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k}$$

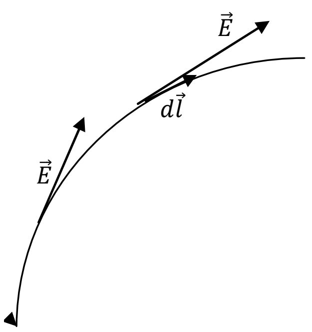
$$V(M) = \pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}h + C$$

الإشارة $\pm$ لأنه من الممكن أن تكون النقطة M تحت المستوى أو فوقه.

8.1 طبوغرافية الفضاء الكهربائي

تعتمد طبوغرافيا (*topographie*) الفضاء الكهربائي على خطوط الحقل و سطوح تساوي الكمون، و هي طريقة أخرى لوصف الظواهر الكهربائية بيانيا، و حساب الحقل و الكمون الكهربائيين بهذه الطريقة تقريبي. سنعرِّف بعض المصطلحات المستعملة في طبوغرافيا الفضاء الكهربائي:

خط الحقل (***ligne de champ***): هو منحنى يكون مماسيا في أية نقطة من نقاطه لحامل الحقل في تلك النقطة. تتميز خطوط الحقل بأنها:



- مستمرة، لا تتقاطع فيما بينها أبدا.
- عمودية على سطوح تساوي الكمون.
- تخرج من الشحنات الموجبة لتنتهي إلى الشحنات السالبة، أو إلى المالانهاية.

- يتناسب عددها في وحدة المساحة طردا مع شدة الحقل، فكلما زادت شدة الحقل تقاربت الخطوط أكثر، و العكس صحيح.
- نحصل على المعادلة التحليلية لخطوط الحقل من كون أن عنصر الطول من خط الحقل $d\vec{l}$ يكون محمولاً على المماس، فهو يوازي شعاع الحقل، أي:

$$\vec{E}//d\vec{l} \Longrightarrow \vec{E} \times d\vec{l} = \vec{0}$$

و تعطى معادلة خط الحقل في الإحداثيات الديكارتية:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

سطح تساوي الكمون (***surface équipotentielle***): هو السطح الذي يتساوى الكمون في جميع نقاطه، و تمتاز سطوح تساوي الكمون بأنها عمودية على خطوط الحقل، و المعادلة التحليلية لسطوح تساوي الكمون تستخرج من:

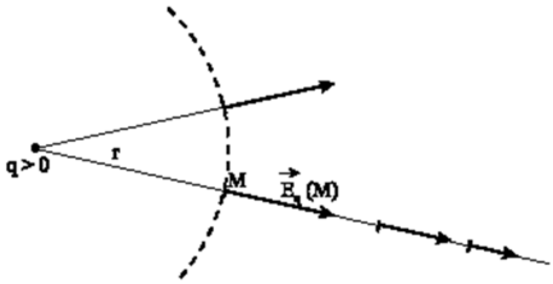
$$V(r) = cst = \text{ثابت}$$

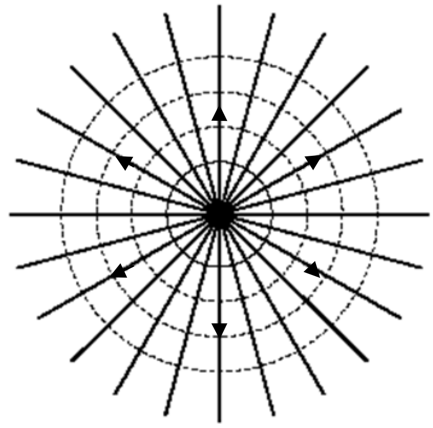
تتقارب سطوح تساوي الكمون عند الانتقال من منطقة يكون فيها الحقل أقل شدة إلى منطقة أخرى يكون فيها الحقل أكثر شدة.

مثال: خطوط الحقل وسطوح تساوي الكمون لشحنة نقطية.

$$V(r) = \frac{kq}{r} = cst = V_0 \Longrightarrow r = \frac{kq}{V_0} = \text{ثابت}$$

و هي معادلة سطح كرة مركزها الشحنة النقطية.





خطوط الحقل
سويات الكمون

9.1 الطاقة الداخلية (الطاقة الكهروستاتيكية)

الطاقة الكامنة لشحنة نقطية موضوعة في حقل شحنات أخرى: لتكن شحنة نقطية q موجودة عند النقطة M خاضعة إلى كمون كهربائي$V(M)$ ناتج عن شحنة أخرى تساوي عمل القوة الكهروستاتيكية لانتقال q من ما لانهاية حيث الكمون $V(\infty)=0$ إلى النقطة M:

$$dE_p = -dW = -\vec{F}.d\vec{r} = -q\vec{E}.d\vec{r}$$

$$\int_{\infty}^{M} dE_p = E_p(M) - E_p(\infty) = -\int_{\infty}^{M} q(-dV) = q\int_{V(\infty)}^{V(M)} dV = q\big(V(M) - V(\infty)\big)$$

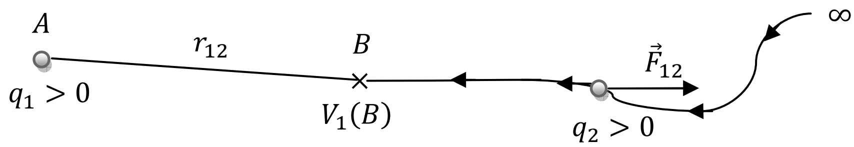
و يعَّرف الكمون كطاقة كامنة لوحدة الشحنات الموجبة الموضوعة في هذه النقطة:

$$E_p(M) = qV(M) \qquad (8)$$

نظام من شحنتين نقطتين(***système de deux charges***): لتكن الشحنةq_1 موجودة في ما لانهاية في الجهة الموجبة مثلا و شحنة ثانية q_2 موجودة في مالا نهاية من الجهة السالبة. الشحنتان لا تتأثران بأي قوة لأنهما بعيدتان جدا. سنقوم بوضع الشحنتين q_1 و q_2 في النقطتين A و B على الترتيب، تفصلهما مسافة r_{12}:

✓ سنأتي أولا بالشحنة q_1 إلى النقطة A، خلال عملية الانتقال نبذل عملاً يساوي الصفر لأن الشحنة لا تخضع إلى أي قوة.

✓ ثم نأتي بالشحنة q_2 إلى النقطة B، سنبذل عملاً ضد القوة الكهربائية بين الشحنتين حيث تجد الشحنة q_2 نفسها خاضعة إلى كمون الشحنة q_1.



يسمى هذا العمل المبذول بالطاقة الداخلية لجمع الشحنتين، حيث تساوي الطاقة الكامنة للشحنة الثانية في وجود كمون ناتج عن الشحنة الأولى $V_1(B)$، أو الطاقة الكامنة للشحنة الأولى في الكمون الناتج عن الشحنة الثانية $V_2(A)$، أي:

$$U = E_p = q_1V_2(A) = q_2V_1(B) = \frac{1}{2}\big(q_1V_2(A) + q_2V_1(B)\big) = \frac{kq_1q_2}{r_{12}}$$

نظام من ثلاث شحنات: لتعيين الطاقة الكامنة لجملة نظام من ثلاث شحنات q_1، q_2 و q_3 نتبع الطريقة السابقة نفسها، حيث نفترض دائما أن الشحنات موجودة في الما لانهاية، حيث لا يوجد أي تأثير بينها.

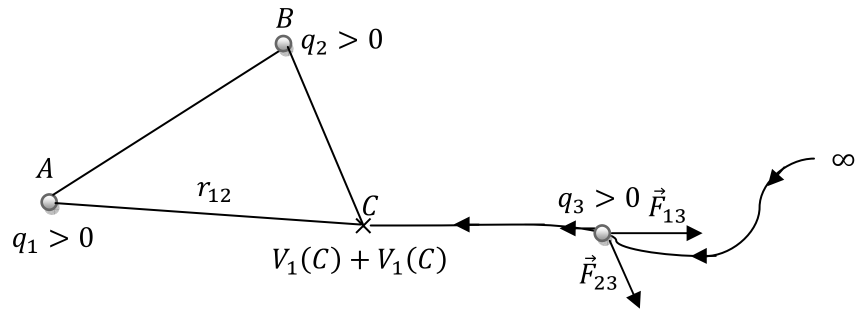
✓ سنأتي أولا بالشحنة q_1 إلى النقطة A، خلال عملية الانتقال نبذل عمل يساوي الصفر لأن الشحنة لا تخضع إلى أي قوة: $W_{\infty\to A} = 0$.

✓ نأتي بالشحنة q_2 إلى النقطة B، الشحنة q_2 خاضعة إلى كمون الشحنة q_1 فسوف نبذل عملاً:

$$W_{\infty\to B} = q_2V_1(B)$$

✓ نأتي بالشحنة q_3 إلى النقطة C، الشحنة q_3 تخضع إلى كمون ناتج عن الشحنة q_1 و كمون ناتج عن الشحنة q_2، العمل المبذول في هذه العملية:

$$W_{\infty\to C} = q_3V_1(C) + q_3V_2(C)$$



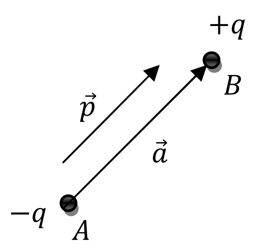
فالطاقة الكامنة الكلية (الطاقة الداخلية):

$$U = E_p = q_3V_1(C) + q_3V_2(C) + q_2V_1(B) = \frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}}$$

تعميم من أجل نظامٍ من N شحنة نقطية (***système de N charges ponctuelles***): الطاقة الداخلية (الطاقة الكامنة الكلية) لنظام من N شحنة نقطية يُعطى بـ:

$$U = E_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1,i\neq j}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{kq_iq_j}{r_{ij}} \tag{13}$$

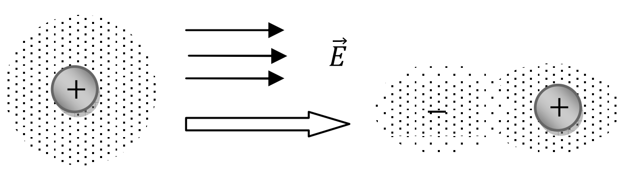
10.1 ثنائي القطب الكهربائي (الكهروستاتيكي)



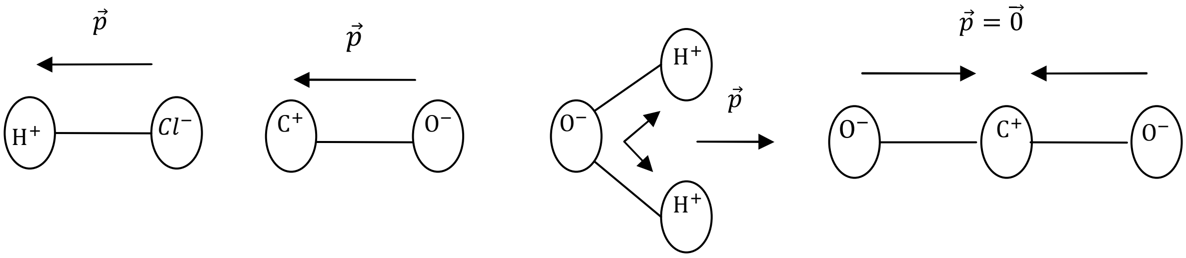
يتكون ثنائي القطب (*dipôle électrostatique*) من شحنتين متساويتين في القيمة و مختلفتين في الإشارة $+q$ و $-q$، و تبعدان عن بعضهما بمسافة صغيرة a. نعرف العزم الكهربائي لثنائي القطب (*moment dipolaire électrique*):

$$\vec{p} = q\vec{a} = q\overrightarrow{AB} \tag{14}$$

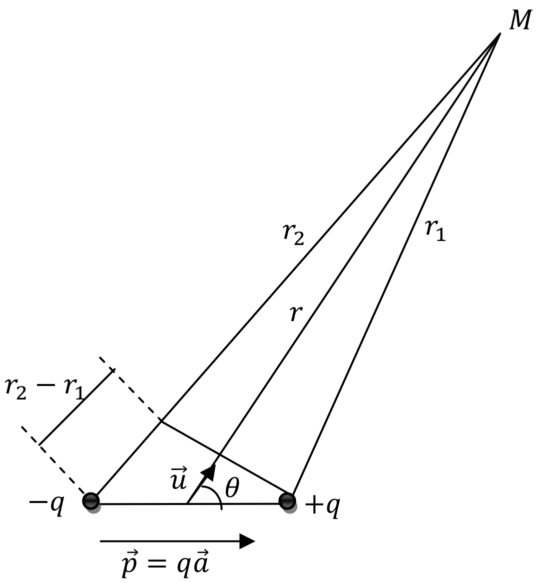
دراسة ثنائي القطب لها أهمية كبرى في دراسة الذرات أو الجزيئات الموضوعة في حقل كهربائي خارجي، حيث ينزاح مركز ثقل الذرات بمسافة عن النواة، فتستقطب و تسلك سلوك ثنائي القطب.



بعض الجزيئات في الطبيعة، تظهر في غياب الحقل الكهربائي الخارجي كأنها أقطاب دائمة تدعى جزيئات قطبية مثل: HCl، CO، H_2O، CO_2.



11.1 الكمون و الحقل الكهربائيان الناشئان عن ثنائي القطب على مسافة بعيدة



يكتب الكمون الناشئ عن ثنائي القطب في النقطة M بعيدة جدا أمام المسافة بين الشحنتين a :

$$V(M) = k\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right) = kq\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right)$$

بما ان $a \ll r$ يمكن استعمال بعض التقريبات:

$$r_1 r_2 \simeq r^2$$
$$r_2 - r_1 \simeq a\cos\theta$$

فتصبح المعادلة السابقة كما يلي:

$$V(M) = \frac{kqa\cos\theta}{r^2} = \frac{kp\cos\theta}{r^2} = \frac{k\vec{p}.\vec{u}}{r^2} = \frac{k\vec{p}.\vec{r}}{r^3} \qquad (15)$$

نستعمل الإحداثيات القطبية لاستنتاج مركبات الحقل الكهربائي:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \Longrightarrow \begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} = \dfrac{k2p\cos\theta}{r^3} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = \dfrac{kp\sin\theta}{r^3} \end{cases} \qquad (16)$$

إيجاد معادلة خطوط الحقل:

$$\vec{E} \times d\vec{l} = \vec{0}$$

حيث $d\vec{l}$ عنصر تفاضل من خط الحقل يكتب في الإحداثيات القطبية:

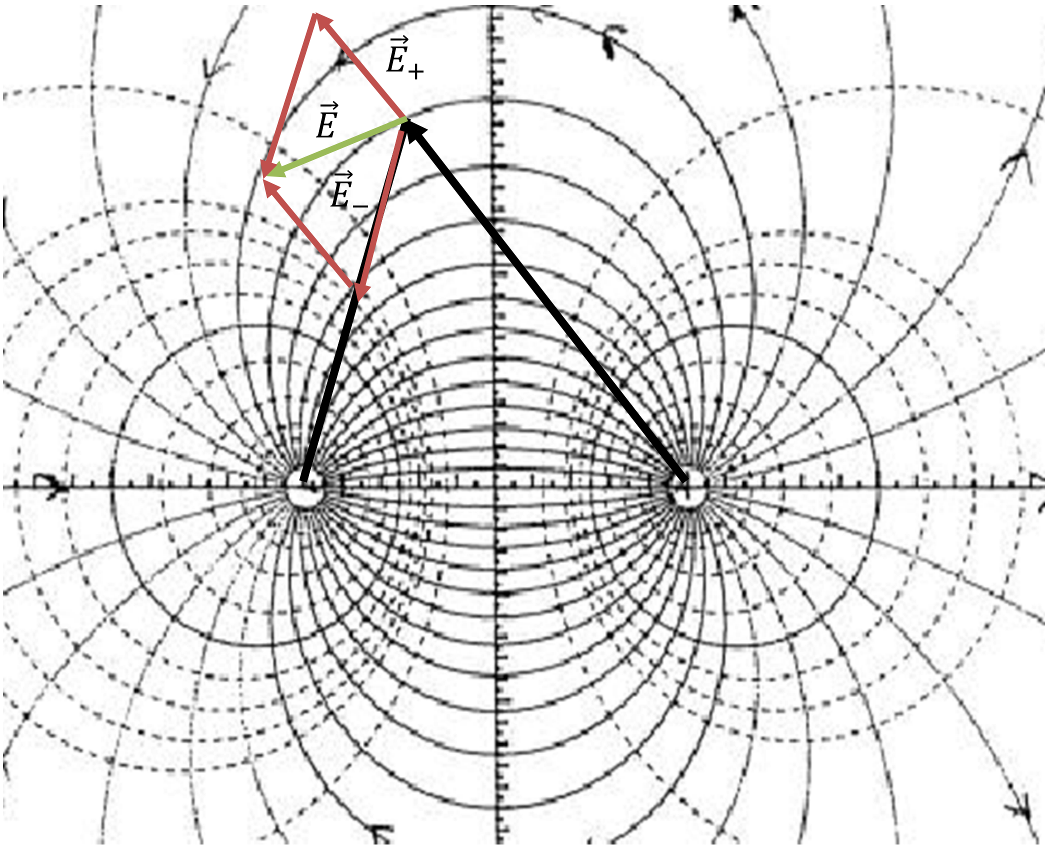
$$d\vec{l} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta \Longrightarrow \vec{E} \times d\vec{l} = (E_r rd\theta - E_\theta dr)\vec{u}_z = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow \frac{k2p\cos\theta}{r^3} rd\theta = \frac{kp\sin\theta}{r^3} dr \Longrightarrow \frac{dr}{r} = 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta = 2\frac{d\sin\theta}{\sin\theta}$$

حل هذه المعادلة التفاضلية هو: $r = c\sin^2\theta$

بالنسبة لخطوط سويات الكمون:

$$V(r,\theta) = cst = V_0 \Longrightarrow \frac{kp\cos\theta}{r^2} = V_0 \Longrightarrow r = \sqrt{\frac{kp}{V_0}}\sqrt{\cos\theta}$$

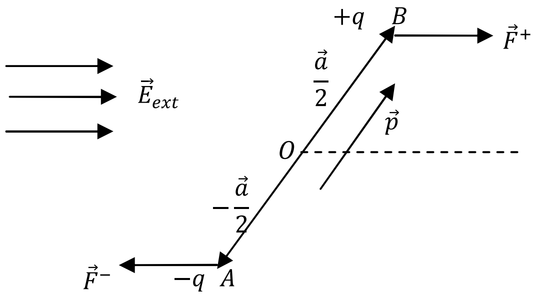


خط الحقل

سوية الكمون

12.1 ثنائي القطب الموضوع في حقل كهربائي خارجي منتظم

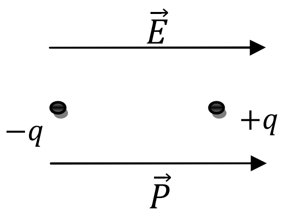
ليكن ثنائي القطب في وجود حقل كهربائي خارجي منتظم $\vec{E}_{\text{ext}}$. تتأثر شحنتا ثنائي القطب بمزدوجة (*couple*) $(\vec{F}^{+},\vec{F}^{-})$ تسعى لتدويره حول مركزه $'O'$ إلى أن يشغل موضع التوازن، عزم هذه المزدوجة حول المركز $'O'$:



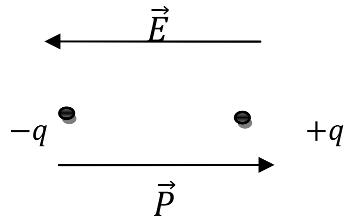
$$\vec{L}=\vec{L}^{+}+\vec{L}^{-}=\frac{\vec{a}}{2}\times\vec{F}^{+}-\frac{\vec{a}}{2}\times\vec{F}^{-}$$
$$=\frac{\vec{a}}{2}\times\left(q\vec{E}_{ext}+q\vec{E}_{ext}\right)=q\vec{a}\times\vec{E}_{ext}$$

$$\vec{L}=\vec{p}\times\vec{E}_{ext} \qquad (17)$$

يتوازن ثنائي القطب من أجل $\vec{L}=\vec{0}$، أي عندما يكون: $\vec{p}\ //\ \vec{E}_{ext}$.



(*stable*) وضع توازن مستقر $E_p>0$



(*instable*) وضع توازن غير مستقر $E_p>0$

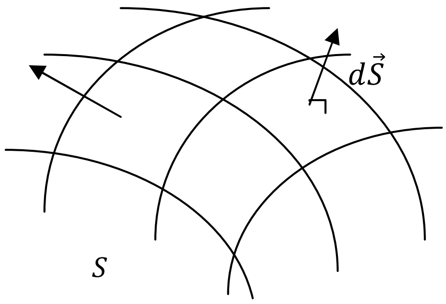
لنحسب الطاقة الكامنة الكهروستاتيكية للتفاعل بين ثنائي القطب و الحقل الخارجي (لا نقصد به الطاقة بين الشحنة $+q$ و $-q$ لثنائي القطب نفسه) نعتبر ثنائي القطب كنظام واحد مكون من شحنة $-$ في النقطة A و $+q$ في النقطة B:

$$E_p=-qV_{ext}(A)+qV_{ext}(B)=q\big(V_{ext}(B)-V_{ext}(A)\big)=q\int_A^B dV$$

$$=-q\int_A^B \vec{E}_{ext}\,.d\vec{r}=-q\vec{E}_{ext}.\overrightarrow{AB}=-q\overrightarrow{AB}.\vec{E}_{ext}$$

$$E_p=-\vec{p}.\vec{E}_{ext} \qquad (18)$$

13.1 تدفق الحقل الكهربائي – نظرية غوص ***Gauss***



شعاع السطح (***vecteur surface***): ليكن dS عنصر السطح من السطح الكليS. نسمي شعاع السطح العنصري $d\vec{S}$ الشعاع الذي طويلته تساوي مساحة هذا العنصر dS و شعاع توجيهه عمودي على المساحة dS، يؤخذ نحو الخارج (تقعر السطح).

تدفق الحقل الكهربائي الساكن من خلال سطح S (***Flux du champ électrostatique à travers une surface***):

ليكن S سطحًا حقيقيًا أو تخيليًا، نسمي التدفق العنصري للحقل الكهربائي $\vec{E}$ من خلال السطح العنصري $d\vec{S}$، المقدار السلمي $d\phi$ حيث:

$$d\phi = \vec{E}.d\vec{S}$$

ويعطَى التدفق الكلي عبر كامل السطح S:

$$\phi = \int_S d\phi = \int_S \vec{E}.d\vec{s}$$

نظرية غوص (***Théorème de Gauss***):

هي علاقة تربط بين التدفق الكهربائي عبر سطح مغلق و الشحنة التي يضمها هذا السطح، و تنص على: تدفق الحقل الكهربائي عبر سطح مغلق S، يساوي المجموع الجبري للشحنات التي يحتويها هذا السطح $\sum Q_{int}$ مقسوما على السماحية في الفراغ ε_0.

$$\phi = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} \qquad (19)$$

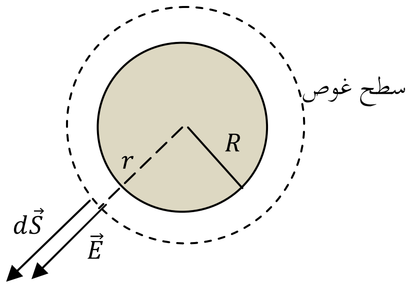
يدعى السطح S بسطح غوص.

ملاحظات:

تستعمل نظرية غوص في حساب شدة الحقل إذا اتسم توزيع الشحنات بالتماثل الكافي (التناظر). الاختيار الجيد لسطح غوص يكفل إنجاز التكامل على هذا السطح بسهولة. و ينبغي لهذا السطح أن يحقق الشروط التالية:

- ✓ سطح وهمي مغلق يشمل النقطة المراد حساب الحقل عندها.
- ✓ سطح يجعل الجداء السلمي $\vec{E}.d\vec{S}$ معلوما في أي نقطه منه، وبصفة خاصة يجعل الشعاع $\vec{E}$ مماسيا أو عموديا عليه.
- ✓ سطح يجعل شدة الحقل ثابتةً على امتداده.
- ✓ إذا لم توجد شحنات داخل سطح غوص أو المجموع الجبري للشحنات التي يحتويها هذا السطح يساوي الصفر، فإن تدفق الحقل الكهربائي معدومٌ.

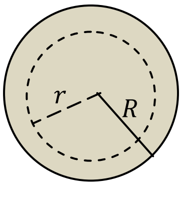
مثال7: دراسة الحقل الكهربائي الناتج عن توزيع كروي للشحنات (**توزيع سطحي، توزيع حجمي**) **بطريقة غوص.**



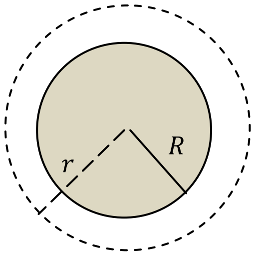
لنعتبر كرة نصف قطرها R تحمل شحنة Q موزعة بكثافة سطحية σ منتظمة. يكون الحقل الكهربائي في كل نقطة في الفضاء قطريا، يعتمد فقط على r مما يسمح لنا باختيار سطح غوص كرة نصف قطرها r و مركزها ينطبق على مركز الكرة المشحونة، فيكون التدفق عبر سطح غوص:

$$\phi = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = E\oint_S dS = E4\pi r^2 = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

في حالة $r < R$: الشحنة داخل سطح غوص معدومة



$$E_1 4\pi r^2 = 0 \Longrightarrow E_1 = 0$$



في حالة $r > R$

$$E_2 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

حساب الكمون:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V \Rightarrow E(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} \Rightarrow V(r) = -\int E\,dr$$

في حالة $r > R$

$$V_2(r) = -\int E_2\,dr = -\int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C_2$$

نستعمل الشروط الحدية:

$$V_2(\infty) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow V_2(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

في حالة $r < R$

$$E_1 = 0 \Rightarrow V_1(r) = C_1$$

حسب استمرارية الكمون عند $r = R$ لدينا:

$$V_1(R) = V_2(R) \Rightarrow C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

لنعتبر الآن كرة نصف قطرها R تحمل شحنة Q موزعة بكثافة حجمية ρ منتظمة. يكون الحقل الكهربائي في كل نقطة في الفضاء أيضا قطريا يعتمد فقط على r، مما يسمح لنا باختيار سطح غوص كرةً نصف قطرها r، و مركزها ينطبق على مركز الكرة المشحونة، فيكون التدفق عبر سطح غوص:

$$\phi = \oint_s \vec{E}.d\vec{s} = E\oint_s ds = E 4\pi r^2 = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

في حالة: $r < R$

$$E_1 4\pi r^2 = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r$$

في حالة $r > R$

$$E_2 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

حساب الكمون:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \Rightarrow E(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} \Rightarrow V(r) = -\int E\, dr$$

في حالة $r > R$

$$V_2(r) = -\int E_2\, dr = -\int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\, dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C_2$$

نستعمل الشروط الحدية :

$$V_2(\infty) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow V_2(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

في حالة $r < R$

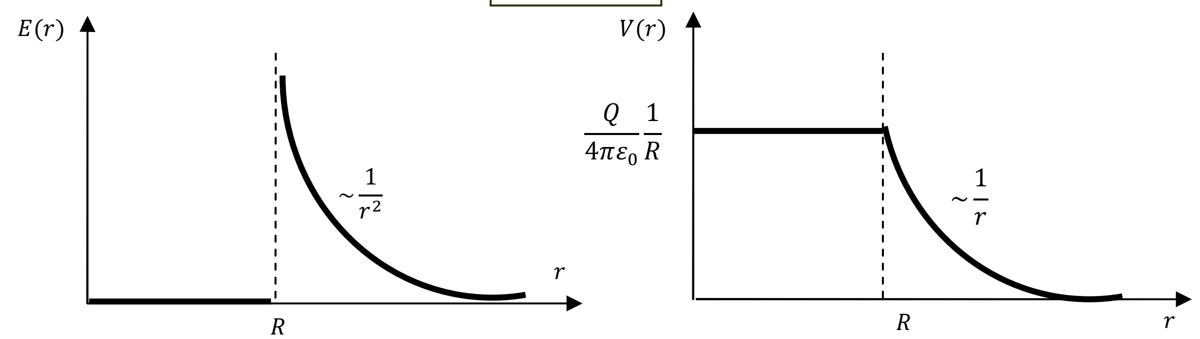
$$V_1(r) = -\int E_1\, dr = -\int \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\, dr = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + C_1$$

حسب استمرارية الكمون عند $r = R$ لدينا:

$$V_1(R) = V_2(R) \Rightarrow -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} R^2 + C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} \Rightarrow C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} + \frac{\rho}{6\varepsilon_0} R^2$$

رسم منحنيات $E(r)$ و $V(r)$ بدلالة r:

$\sigma = cte$



$\rho = cte$