الكهرباء العامة

1 مراجعة حول بعض الحساب الشعاعي

1.1- مقدمة: لنعتبر الإنتقال على خط مستقيم، من النقطة A إلى النقطة B، هذا الإنتقال معرف بالإتجاه المتبع و المسافة المقطوعة AB لذلك يمكن تمثيله بشعاع $\vec{AB}$ بدايته النقطة A و نهايته النقطة B.

$$A \xrightarrow{\vec{AB}} B$$

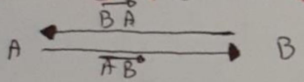
تسمى المسافة بين النقطتين A و B بطويلة الشعاع $\vec{AB}$ و هي عبارة عن مقدار سلمي موجب و يرمز لها بالرمز $\|\vec{AB}\|$.

2.1- شعاع الوحدة: عبارة عن شعاع طويلته تساوي واحد. يمكن إذن كتابة أي شعاع $\vec{AB}$ موازي لشعاع وحدة $\vec{u}$ على الشكل: $\vec{AB}=AB\,\vec{u} \Rightarrow \vec{u}=\frac{\vec{AB}}{AB} \Rightarrow \vec{u}=\frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$

3.1- تساوي شعاعين: نقول عن شعاعين أنهما متساويين إذا كانا متوازيين لهما نفس الإتجاه و نفس الطويلة.

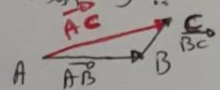
4.1- الشعاع المعدوم: كل شعاع طويلته معدومة يسمى الشعاع المعدوم و يرمز له بالرمز $\vec{0}$ ونكتب: $\vec{AB}+\vec{0}=\vec{AB}$

5.1- الشعاعان المتعاكسان: هما شعاعان متوازيان لهما نفس الطويلة و متعاكسان في الإتجاه.



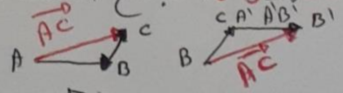
6.1- الجمع الشعاعي:

1.6.1- تعريف: نعتبر إنتقالين، في الفضاء من النقطة A إلى النقطة B ثم من النقطة B إلى النقطة C ممثلين على الترتيب بالشعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{BC}$. يعرف الإنتقال بين A و C بالشعاع $\vec{AC}$ حيث $\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC}$



2.6.1- خواص الجمع الشعاعي: - الجمع الشعاعي عملية تبديلية:

$$\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{BC}+\vec{AB}$$

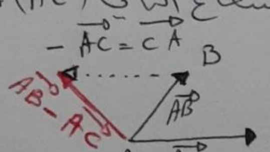


$\vec{AB}=\vec{A'B'}$

- الجمع الشعاعي عملية تجميعية: $\vec{AD}=(\vec{AB}+\vec{BC})+\vec{CD}=\vec{AB}+(\vec{BC}+\vec{CD})$

7.1- الفرق الشعاعي: نحصل على الفرق $\vec{AB}-\vec{AC}$ بين الشعاعين $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ بإضافة الشعاع المعاكس للشعاع الثاني $(\vec{AC})$ إلى الشعاع الأول $(\vec{AB})$.

$$\vec{AB}-\vec{AC}=\vec{AB}+(-\vec{AC})$$
$$=\vec{AB}+\vec{CA}$$



- هذه العملية ليست تبديلية أي أن: $\vec{AB}-\vec{AC}\neq\vec{AC}-\vec{AB}$

8.1 - جداء شعاع في مقدار سلمي :

1.8.1 - تعريف : جداء شعاع $\vec{AB}$ في مقدار سلمي n عبارة عن شعاع $\vec{AB'}$ موازي لـ $\vec{AB}$ له نفس اتجاهه إذا كان $n>0$ أو اتجاه معاكس إذا كان $n<0$ ، أما طويلته فتكتب :

$$\|\vec{AB'}\| = |n| \, \|\vec{AB}\|$$

2.8.1 - خواص جداء شعاع في مقدار سلمي :-

- الخاصية التجميعية : $n_1(n_2 \vec{AB}) = (n_1.n_2).\vec{AB} = n_1.n_2.\vec{AB}$
- الخاصية التوزيعية : $(n_1+n_2)\vec{AB} = n_1\vec{AB} + n_2\vec{AB}$

$$n(\vec{AB}+\vec{BC}) = n\vec{AB} + n\vec{BC}$$

3.8.1 - قسمة شعاع على مقدار سلمي : لقسمة شعاع $\vec{AB}$ على مقدار سلمي n حيث $(n\neq 0)$ يكفي ضرب هذا الشعاع في n' حيث $n' = \frac{1}{n}$ ونكتب $\frac{\vec{AB}}{n} = n'\vec{AB}$

9.1 - الجداء السلمي لشعاعين : الجداء السلمي لشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ يصنعان بينهما الزاوية θ يرمز له بالرمز $\vec{A}.\vec{B}$ ويكتب كمايلي :- $\vec{A}.\vec{B} = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|.\cos\theta$

1.9.1 - خواص الجداء السلمي :

- تبديلي $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$
- تجميعي بالنسبة للضرب في مقدار سلمي $(n\vec{A})\vec{B} = \vec{A}(n\vec{B}) = n.\vec{A}.\vec{B}$
- توزيعي بالنسبة للجمع الشعاعي $\vec{A}(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$

2.9.1 - طويلة شعاع :- الجداء السلمي لشعاع $\vec{A}$ في نفس هذا الشعاع يمثل مربع طويلته $\vec{A}.\vec{A} = \|\vec{A}\|^2 = \vec{A}^2$

10.1 - التمثيل التحليلي للأشعة

1.10.1 - تمثيل شعاع في معلم ما : لتكن $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ثلاثة أشعة موازية لثلاث محاور D_1 و D_2 و D_3 لا تنتمي إلى نفس المستوى مكونة لمعلم (R) .

يمكن كتابة أي شعاع $\vec{A}$ في هذا المعلم على الشكل التالي :-

$$\vec{A} = m_1\vec{i} + m_2\vec{j} + m_3\vec{k}$$

تشكل الأشعة $\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}$ قاعدة في الفضاء ثلاثي الأبعاد أما المقادير السلمية m_1 ، m_2 ، m_3 فهي تمثل مركبات الشعاع $\vec{A}$ بالنسبة لهذه القاعدة .

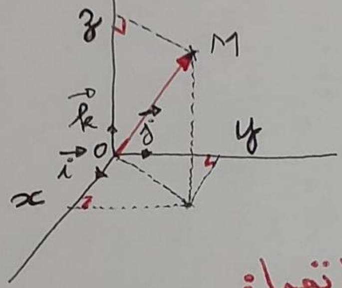
- إحداثيات نقطة :- لتحديد موضع نقطة M في الفراغ نختار معلم (R) مبدؤه النقطة O وأشعة قاعدته $\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}$ نعرف بعد ذلك الشعاع $\vec{OM}$ بمركباته وفق محاور هذا المعلم . تسمى هذه المركبات إحداثيات النقطة M في نفس المعلم .

1.10.2 - المعلم المتعامد والمتجانس (م،م،م): هو عبارة عن معلم أشعة قاعدته تكون:

① متعامدة : $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{i}\cdot\vec{k}=0$ ② لها نفس الطويلة $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|=1$

يكتب الشعاع $\vec{OM}$ في المعلم المتعامد والمتجانس (م،م،م) كمايلي: $\vec{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

حيث تكتب المركبات x,y,z كمايلي:



$$\begin{cases} x=\vec{OM}\cdot\vec{i} \\ y=\vec{OM}\cdot\vec{j} \\ z=\vec{OM}\cdot\vec{k} \end{cases}$$

1.10.3 - الجداء السلمي لشعاعين بدلالة مركباتهما:

لتكن x_2, y_2, z_2 و x_1, y_1, z_1 مركبات الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ في (م،م،م) $R(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

يكتب الجداء السلمي $\vec{A}\cdot\vec{B}$ بدلالة هذه المركبات:

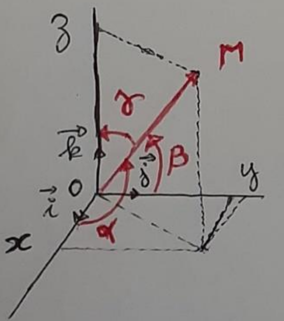
$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\cdot(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

باستعمال العلاقة السابقة يمكن استنتاج طويلة أي شعاع، بدلالة مركباته x,y,z

$$\vec{A}\cdot\vec{A}=\|\vec{A}\|^2=x\cdot x+y\cdot y+z\cdot z=x^2+y^2+z^2 \Rightarrow \|\vec{A}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

جيوب تمام التوجيه تتمثل في جيوب تمام الزوايا α, β, γ التي يصنعها الشعاع $\vec{OM}$ مع أشعة الوحدة $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ على الترتيب.



تكتب مركبات $\vec{OM}$ بدلالة زوايا التوجيه

$$x=\vec{OM}\cdot\vec{i}=\|\vec{OM}\|\cdot\cos\alpha.$$

$$y=\vec{OM}\cdot\vec{j}=\|\vec{OM}\|\cdot\cos\beta.$$

$$z=\vec{OM}\cdot\vec{k}=\|\vec{OM}\|\cdot\cos\gamma.$$

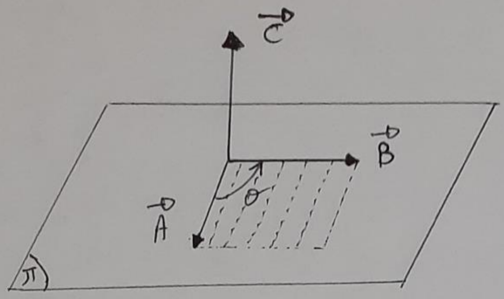
ومنه

$$\|\vec{OM}\|^2=x^2+y^2+z^2=\|\vec{OM}\|^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=\|\vec{OM}\|^2$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

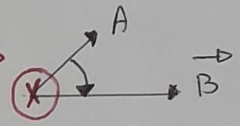
1.11 - الجداء الشعاعي: ليكن $\vec{A}$ و $\vec{B}$ شعاعان يصنعان زاوية θ بينهما حيث $0\le\theta\le\pi$. الجداء الشعاعي لهذين الشعاعين والممثل بالرمز $\vec{A}\wedge\vec{B}$ عبارة عن شعاع $\vec{C}$:

- طويلته : $\|\vec{C}\|=\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\sin\theta$ تمثل مساحة متوازي الأضلاع المبني على الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$
- حامله عمودي على المستوى المحدد ب $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ؛ $\vec{C}=\vec{A}\wedge\vec{B}$
- جهته تحدد حسب جهة الدوران من $\vec{A}$ إلى $\vec{B}$.

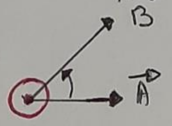


1.11.1 . كيفية تحديد جهة $\vec{C}=\vec{A}\wedge\vec{B}$:

بالنسبة لملاحظ ما تكون جهة $\vec{C}$ نحو الخارج إذا تم الدوران من $\vec{A}$ إلى $\vec{B}$ في إتجاه يعاكس إتجاه عقارب الساعة (أي الإتجاه الموجب)، أما إذا تم الدوران من $\vec{A}$ إلى $\vec{B}$ في إتجاه عقارب الساعة (الإتجاه السالب) تكون جهة $\vec{C}$ نحو الداخل، دائما بالنسبة لنفس الملاحظ.



$\vec{C}$ موجه نحو الداخل



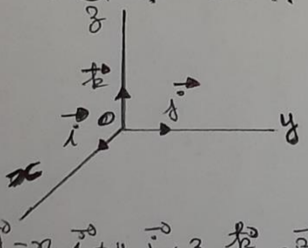
$\vec{C}$ موجه نحو الخارج

2.11.1 - خواص الجداء الشعاعي :

- إذا كان $\vec{C}=\vec{A}\wedge\vec{B}=\vec{0}$ فإن الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ لهما نفس الاتجاه ($\theta=0$) أو اتجاهين متعاكسين ($\theta=\pi$).
- الجداء الشعاعي ضد تبديلي أي أن : $\vec{A}\wedge\vec{B}=-\vec{B}\wedge\vec{A}$
- الجداء الشعاعي تجميعي بالنسبة للضرب في مقدار سلمي: $n(\vec{A}\wedge\vec{B})=(n\vec{A})\wedge\vec{B}=\vec{A}\wedge(n\vec{B})$
- الجداء الشعاعي توزيعي بالنسبة للجمع الشعاعي: $\vec{C}\wedge(\vec{A}+\vec{B})=\vec{C}\wedge\vec{A}+\vec{C}\wedge\vec{B}$

3.11.1 . مركبات الجداء الشعاعي :

إذا كان المعلم $R(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ موجه توجيها مباشر يمكن إستنتاج العلاقة التي تربط أشعة الوحدة $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ببعضها البعض.



$$\begin{cases}\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}\\ \vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}\\ \vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k}\\ \vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i}\\ \vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j}\end{cases}$$

يكتب الجداء الشعاعي لـ $\vec{A}$ و $\vec{B}$ كما يلي : $\vec{A}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ و $\vec{B}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$

$$\vec{C}=\vec{A}\wedge\vec{B}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\wedge(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})$$

$$=(y_1z_2-y_2z_1)\vec{i}+(z_1x_2-z_2x_1)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$$

$$\begin{cases}c_1=y_1z_2-y_2z_1\\ c_2=z_1x_2-z_2x_1\\ c_3=x_1y_2-x_2y_1\end{cases}$$

يمكن إيجاد المركبات c_1 و c_2 و c_3 بإستعمال طريقة المحدد :

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$C_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = y_1 z_2 - y_2 z_1$$

$$C_2 = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{ccc} & - & \\ \end{array}$$

$$C_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} = -(x_1 z_2 - x_2 z_1) = z_1 x_2 - x_2 z_2.$$

$$C_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$