جـامعة محمد الصديق بن يحي – جيجـــل -

كلية العلوم الدقيقة و الإعلام الآلي **السنة الجامعية 2023/2022**

قسم: الإعلام الآلي

الواجب المنزلي الجبر 1

لتكن $n \in \mathbb{N}^*$, نعرف العلاقة الثنائية $\mathcal{R}$ على $\mathbb{Z}$ بـ:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z};\ x - y = n.k.$$

-*I* 1) برهن أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}$.

1) احسب $\dot{0}$ و $\dot{1}$.

-*II* نضع $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dots, (\widehat{n-1})\}$. نعرف على $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ القانونين :

$$\forall \dot{x}, \dot{y} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : \dot{x} \dot{+} \dot{y} = (\widehat{x + y})$$

$$\dot{x} \dot{\times} \dot{y} = (\widehat{x \times y}).$$

1) من أجل $n = 4$ اكتب الجدولين:

$\dot{+}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{0}$					
$\dot{1}$					
$\dot{2}$					
$\dot{3}$					
$\dot{4}$					

$\dot{\times}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{0}$					
$\dot{1}$					
$\dot{2}$					
$\dot{3}$					
$\dot{4}$					

- عين العنصر الحيادي لـ ($\dot{+}$) و نظير كل عنصر من $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ بالنسبة ($\dot{+}$).
- أوجد قواسم الصفر.
- عين العنصر الحيادي لـ ($\dot{\times}$) و ما هي عناصر $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ التي لها نظير بالنسبة ($\dot{\times}$).
- هل $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times})$ حقل تبديلي؟

1) من أجل $n = 3$ اكتب الجدولين:

$\dot{+}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{0}$				
$\dot{1}$				
$\dot{2}$				
$\dot{3}$				

$\dot{\times}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{0}$				
$\dot{1}$				
$\dot{2}$				
$\dot{3}$				

- عين العنصر الحيادي لـ ($\dot{+}$) و نظير كل عنصر من $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ بالنسبة ($\dot{+}$).
- عين العنصر الحيادي لـ ($\dot{\times}$) و ما هي عناصر $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ التي لها نظير بالنسبة ($\dot{\times}$).
- أثبت أن $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times})$ حقل تبديلي.

سلسلة الأعمال رقم: 04

التمرين الاول: $\mathbb{R}$ مزود بالقانونين $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2: a\Delta b = a+b+1 \;\; et\; a\odot b = a.b+a+b$

1- **إثبات أن** $(\mathbb{R},\Delta)$ **زمرة تبديلية** : ($(\mathbb{R},\Delta)$ زمرة تبديلية)⇔ ((Δ) قانون تركيب داخلي, تجميعي , يقبل عنصر حيادي و لكل عنصر من $\mathbb{R}$ نظير في $\mathbb{R}$ **و أيضا** (Δ) تبديلي).

a) ((Δ) قانون تركيب داخلي) $\Leftrightarrow (\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2: a\Delta b\in\mathbb{R})$

لدينا: $a\Delta b = a+b+1\in\mathbb{R}$ (لأن $(+)$قانون تركيب داخلي على $\mathbb{R}$) و منه (Δ) قانون تركيب داخلي على$\mathbb{R}$.

b) ((Δ) تجميعي) $\Leftrightarrow (\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3: (a\Delta b)\Delta c = a\Delta(b\Delta c))$

لدينا: $(a\Delta b)\Delta c = (a+b+1)\Delta c = (a+b+1)+c+1 = a+(b+c+1)+1 = a\Delta(b\Delta c)$

(لأن $(+)$ تجميعي و تبديلي على $\mathbb{R}$) و منه (Δ) تجميعي.

c) ((Δ) تبديلي) $\Leftrightarrow (\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2: a\Delta b = b\Delta a)$

لدينا: $a\Delta b = a+b+1 = b+a+1 = b\Delta a$ (لأن$(+)$ تبديلي) و منه (Δ) تبديلي.

d) ((Δ) يقبل عنصر حيادي) $\Leftrightarrow (\exists e\in\mathbb{R},\forall a\in\mathbb{R}: a\Delta e = e\Delta a = a)$

بما أن (Δ) تبديلي يكفي أن نحل المعادلة: $a\Delta e = a$ لدينا

$a\Delta e = a \Leftrightarrow a+e+1 = a \Leftrightarrow e=-1$ و منه ((Δ) يقبل عنصر حيادي $e = 0_{\mathbb{R}} = -1$).

e) (لكل عنصر من $\mathbb{R}$ نظير في $\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow (\forall a\in\mathbb{R},\exists a'\in\mathbb{R} : a\Delta a' = a'\Delta a = e)$

بما أن (Δ) تبديلي يكفي أن نحل المعادلة: $a\Delta a' = e$ لدينا

$a\Delta a' = e \Leftrightarrow a+a'+1 = -1 \Leftrightarrow a' = -a-2\in\mathbb{R}$ و منه لكل عنصر $a\in\mathbb{R}$ نظير

$a' = -a-2\in\mathbb{R}$.

2- **إثبات أن** $(\mathbb{R},\Delta,\odot)$ **حلقة تبديلية واحدية:**

($(\mathbb{R},\Delta,\odot)$ **حلقة تبديلية واحدية**)⇔

$I-$ $(\mathbb{R},\Delta)$ زمرة تبديلية
$II-$ $(\odot)$ قانون تركيب داخلي
$III-$ $(\odot)$تجميعي
$V-$ $(\odot)$ توزيعي على(Δ)
$IV-$ $(\odot)$ تبديلي
$VI-$ $(\odot)$ يقبل عنصر حيادي

-I $(\mathbb{R},\Delta)$ زمرة تبديلية مما سبق.

-II ($(\odot)$ قانون تركيب داخلي) $\Leftrightarrow (\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2: a\odot b\in\mathbb{R})$

لدينا: $a\odot b = a.b+a+b\in\mathbb{R}$ (لأن $(+)$ و$(\times)$ داخليين على $\mathbb{R}$) و منه $(\odot)$ قانون تركيب داخلي على$\mathbb{R}$.

-III ($(\odot)$ تجميعي) $\Leftrightarrow (\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3: (a\odot b)\odot c = a\odot(b\odot c))$

لدينا من جهة: $(a\odot b)\odot c = (a.b+a+b)\odot c = (a.b+a+b)c + (a.b+a+b) + c$

$= a.b.c + a.c + b.c + a.b + a + b + c \ldots (1)$.

من جهة أخرى $a\odot(b\odot c) = a\odot(b.c + b + c) = a.(b.c + b + c) + a + (b.c + b + c)$

$= a.b.c + a.b + a.c + b.c + a + b + c \ldots (2)$.

من (1)و (2) نجد المساواة و منه $(\odot)$ تجميعي.

IV- $((\odot)$ تبديلي$) \Leftrightarrow (\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a\odot b = b\odot a)$

لدينا: $a\odot b = a.b + a + b = b.a + b + a = b\odot a$ (لأن$(+)$و$(\times)$ تبديليان) و منه $(\odot)$ تبديلي.

V- $((\odot)$ توزيعي على (Δ) $) \Leftrightarrow \left(\forall(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} a\odot(b\Delta c) = (a\odot b)\Delta(a\odot c) \\ (a\Delta b)\odot c = (a\odot c)\Delta(b\odot c) \end{cases}\right)$

بما أن $(\odot)$ تبديلي يكفي إثبات أن $a\odot(b\Delta c) = (a\odot b)\Delta(a\odot c)$. لدينا من جهة

$a\odot(b\Delta c) = a\odot(b + c + 1) = a.(b + c + 1) + a + (b + c + 1)$.

$= a.b + a.c + 2a + B + c + 1 \ldots (1')$.

من جهة أخرى $(a\odot b)\Delta(a\odot c) = (a.b + a + b)\Delta(a.c + a + c)$

$= (a.b + a + b) + (a.c + a + c) + 1,$

$= a.b + a.c + 2a + b + c + 1 \ldots (2')$.

من ('1)و ('2) نجد أن $(\odot)$ توزيعي على(Δ) .

VI- $((\odot)$ يقبل عنصر حيادي$) \Leftrightarrow (\exists e \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R} : a\odot e = e\odot a = a)$

بما أن $(\odot)$ تبديلي يكفي أن نحل المعادلة: $a\odot e = a$ لدينا :

$a\odot e = a \Leftrightarrow a.e + a + e = a \Leftrightarrow e.(a + 1) = 0, \forall a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e = 0$ و منه $((\odot)$ يقبل عنصر حيادي $e = 1_{\mathbb{R}} = 0$.

3- تعيين مجموعة العناصر القابلة للقلب $\mathbb{R}^*$:

$(a \in \mathbb{R}$ قابل للقلب $)\Leftrightarrow$ $(a$ له نظير بالنسبة للقانون$(\odot)$ $) \Leftrightarrow (\exists a' \in \mathbb{R} : a\odot a' = a'\odot a = 1_{\mathbb{R}})$

بما أن $(\odot)$ تبديلي يكفي أن نحل المعادلة: $a\odot a' = 1_{\mathbb{R}}$ لدينا

$a\odot a' = 1_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow a.a' + a + a' = 0 \Leftrightarrow a' = \frac{-a}{a+1}, a \neq -1$ و منه $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{\mathbf{-1} = 0_{\mathbb{R}}\}$ **.**

<u>الاستنتاج</u>: بما أن $(\mathbb{R}, \Delta, \odot)$ حلقة واحدية و $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{\mathbf{-1} = 0_{\mathbb{R}}\}$ **فإن** $(\mathbb{R}, \Delta, \odot)$ حقل

و بما أن $(\odot)$ تبديلي **فإن** $(\mathbb{R}, \Delta, \odot)$ حقل تبديلي.

<u>التمرين الثاني:</u> $\mathbb{R}^2$ مزود بالقانونين $\forall(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2 : (x,y)\oplus(x',y') = (x + x', y + y')$

, $(x,y)\otimes(x',y') = (x.x' - y.y', x.y' + y.x')$

1- إثبات أن $(\mathbb{R}^2,\oplus,\otimes)$ **حلقة تبديلية واحدية:**

I- $(\mathbb{R}^2,\oplus)$ زمرة تبديلية؟

a) ($\oplus$) قانون تركيب داخلي $\Leftrightarrow (\forall(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2: (x,y)\oplus(x',y')\in\mathbb{R}^2)$

لدينا: $(x,y)\oplus(x',y')=(x+x',y+y')\in\mathbb{R}^2$ (لأن (+)قانون تركيب داخلي على $\mathbb{R}$) و منه ($\oplus$) قانون تركيب داخلي على$\mathbb{R}^2$.

b) ($\oplus$) تجميعي $\Leftrightarrow$ ($(\forall(x,y),(x',y'),(x'',y'')\in\mathbb{R}^2:$

$$[(x,y)\oplus(x',y')]\oplus(x'',y'')=(x+x',y+y')\oplus(x'',y'')$$

$$=((x+x')+x'',(y+y')+y''),$$

$$=(x+(x'+x''),y+(y'+y''))$$ (لأن (+) تجميعي في $\mathbb{R}$).

$$=(x,y)\oplus(x'+x'',y'+y'')=(x,y)\oplus[(x',y')\oplus(x'',y'')].$$

و منه ($\oplus$) تجميعي.

c) ($\oplus$) تبديلي $\Leftrightarrow (\forall(x,y)(x',y')\in\mathbb{R}^2: (x,y)\oplus(x',y')=(x',y')\oplus(x,y))$

لدينا: $(x,y)\oplus(x',y')=(x+x',y+y')=(x'+x,y'+y)=(x',y')\oplus(x,y)$ (لأن(+) تبديلي في $\mathbb{R}$) و منه ($\oplus$) تبديلي.

d) ($\oplus$) يقبل عنصر حيادي $\Leftrightarrow$ ($(\exists(e_1,e_2)\in\mathbb{R}^2,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2:$
$(x,y)\oplus(e_1,e_2)=(e_1,e_2)\oplus(x,y)=(x,y),$

بما أن ($\oplus$) تبديلي يكفي أن نحل المعادلة: $(x,y)\oplus(e_1,e_2)=(x,y)$ لدينا

$$(x,y)\oplus(e_1,e_2)=(x,y)\Leftrightarrow(x+e_1,y+e_2)=(x,y)\Leftrightarrow\begin{cases}x+e_1=x\\ \wedge\\ y+e_2=y\end{cases}\Leftrightarrow\{e_1=e_2=0 .$$

و منه ($\oplus$) يقبل عنصر حيادي $0_{\mathbb{R}^2}=(e_1,e_2)=(0,0)$.

e) (لكل عنصر من $\mathbb{R}^2$ نظير في $\mathbb{R}^2$) $\Leftrightarrow$ ($(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\exists(x',y')\in\mathbb{R}^2:$
$(x,y)\oplus(x',y')=(x',y')\oplus(x,y)=0_{\mathbb{R}^2}$

بما أن ($\oplus$) تبديلي يكفي أن نحل المعادلة: $(x,y)\oplus(x',y')=0_{\mathbb{R}^2}$ لدينا

$$(x,y)\oplus(x',y')=0_{\mathbb{R}^2}\Leftrightarrow(x+x',y+y')=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}x+x'=0\\ \wedge\\ y+y'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=-x\in\mathbb{R}\\ \wedge\\ y'=-y\in\mathbb{R}\end{cases} .$$

و منه لكل عنصر $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ نظير $(x',y')=(-x,-y)\in\mathbb{R}^2$.

من *a),b) , c),d)* و *e)* ينتج أن $(\mathbb{R}^2,\oplus)$ زمرة تبديلية.

II- ($\otimes$) قانون تركيب داخلي $\Leftrightarrow (\forall(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2: (x,y)\otimes(x',y')\in\mathbb{R}^2)$

لدينا: $(x,y)\otimes(x',y') = (x.x'-y.y',x.y'+y.x') \in \mathbb{R}^2$ (لأن $(+)$و $(-)$و $(\times)$قاوانين تركيب داخلية على $\mathbb{R}$) و منه $(\otimes)$ قانون تركيب داخلي على$\mathbb{R}^2$.

III- $(\otimes)$ تجميعي من التمرين 2 لسلسلة الزمر.

IV- $(\otimes)$ تبديلي من التمرين 2 لسلسلة الزمر.

V- $(\otimes$ توزيعي على $\oplus) \Leftrightarrow$ ($(\forall(x,y),(x',y'),(x'',y'') \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} (x,y)\otimes[(x',y')\oplus(x'',y'')] = [(x,y)\otimes(x',y')]\oplus[(x,y)\otimes(x'',y'')] \\ [(x,y)\oplus(x',y')]\otimes(x'',y'') = [(x,y)\otimes(x'',y'')]\oplus[(x',y')\otimes(x'',y'')] \end{cases}$$

بما أن $(\otimes)$ تبديلي يكفي إثبات المساواة الأولى. من جهة لدينا

$$(x,y)\otimes[(x',y')\oplus(x'',y'')] = (x,y)\otimes(x'+x'',y'+y'').$$

$$= (x(x'+x'')-y(y'+y''),x(y'+y'')+y(x'+x'')).$$

$$= (xx'+xx''-yy'-yy'',xy'+xy''+yx'+yx'').$$

بنفس الكيفية نحسب الطرف الثاني للمساواة و نجد أن المساواة محققة. ومنه $\otimes$ توزيعي على$\oplus$.

VI- $(\otimes)$ يقبل عنصر حيادي $1_{\mathbb{R}^2} = (e_1,e_2) = (1,0)$. من التمرين الثاني لسلسلة الزمر.

مما سبق نجد أن $(\mathbb{R}^2,\oplus,\otimes)$ **حلقة تبديلية واحدية.**

<u>تعيين مجموعة العناصر القابلة للقلب</u>$(\mathbb{R}^2)^*$<u>:</u>

$(x,y) \in \mathbb{R}^2)$ قابل للقلب $\Leftrightarrow$((x,y)) له نظير بالنسبة للقانون$(\otimes)$)

من التمرين الثاني للزمر وجدنا أن لكل عنصر $(x,y) \in \mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ نظير هو $\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ و نعلم ان

$0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$ ليس لهة نظير بالنسبة لــ$\otimes$ إدن $(\mathbb{R}^2)^* = \mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

<u>2-</u> **<u>الاستنتاج</u>**: بما أن $(\mathbb{R}^2,\oplus,\otimes)$ حلقة واحدية و $(\mathbb{R}^2)^* = \mathbb{R}^2-\{(0,0) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$ **فإن** $(\mathbb{R}^2,\oplus,\otimes)$ حقل و بما أن $(\otimes)$ تبديلي **فإن** $(\mathbb{R}^2,\oplus,\otimes)$ حقل تبديلي.

<u>3-</u> إثبات أن : $i^2 = -1_{\mathbb{R}^2}$ حيث $i = (0,1)$

$$i^2 = (0,1)^2 = (0,1)\otimes(0,1) = (0\times0-1\times1,0\times1+1\times0) = (-1,0) = -(1,0) = -1_{\mathbb{R}^2}.$$

<u>الاستنتاج:</u> $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2: (x,y) = (x,0)\oplus(0,y) = x.(1,0)\oplus y.(0,1) = x.1_{\mathbb{R}^2}+y.i$ <u>.</u>

التمرين الثالث: $\mathrm{A} = \left\{\frac{\mathrm{p}}{2\mathrm{k}+1} \in \mathbb{Q}; \mathrm{p} \in \mathbb{Z},\ \mathrm{k} \in \mathbb{N}\right\}$

1- اثبات أن A حلقة جزئية من $(\mathbb{Q},+,\times)$:

- (A حلقة جزئية من$(\mathbb{Q},+,\times)$) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 0_{\mathbb{Q}} \in A \neq \emptyset \ (1 \\ \forall(x,y) \in A^2 : x+y \in A \ (2 \\ \forall x \in A : -x \in A \ (3 \\ \forall(x,y) \in A^2 : x\times y \in A \ (4 \end{cases}$

1) $\left(0_{\mathbb{Q}} = \frac{0}{2\times0+1}; 0 \in \mathbb{Z},\ 0 \in \mathbb{N}\right) \Rightarrow 0_{\mathbb{Q}} \in A \neq \emptyset.$

2) $\begin{cases} x \in A \\ \wedge \\ y \in A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{2k+1} \in \mathbb{Q}; p \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N} \\ \wedge \\ y = \frac{p'}{2k'+1} \in \mathbb{Q}; p' \in \mathbb{Z},\ k' \in \mathbb{N} \end{cases} \Longrightarrow x + y = \frac{p}{2k+1} + \frac{p'}{2k'+1} = \frac{p(2k'+1)+p'(2k+1)}{2(2k \times k' + k + k')+1}.$

$\Longrightarrow x + y = \frac{p''}{2k''+1}\ ; p'' = p(2k'+1) + p'(2k+1) \in \mathbb{Z},\ k'' = 2k \times k' + k + k' \in \mathbb{N}$.

$\Longrightarrow x + y \in A.$

3) $x \in A \Longrightarrow x = \frac{p}{2k+1} \in \mathbb{Q}; p \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N} \Longrightarrow -x = \frac{-p}{2k+1} \in \mathbb{Q}; -p \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow -x \in A$.

4) $\begin{cases} x \in A \\ \wedge \\ y \in A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{2k+1} \in \mathbb{Q}; p \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N} \\ \wedge \\ y = \frac{p'}{2k'+1} \in \mathbb{Q}; p' \in \mathbb{Z},\ k' \in \mathbb{N} \end{cases} \Longrightarrow x \times y = \frac{p \times p'}{2(2k \times k' + k + k')+1}$

$\Longrightarrow x \times y = \frac{p''}{2k''+1}\ ; p'' = p \times p' \in \mathbb{Z},\ k'' = 2k \times k' + k + k' \in \mathbb{N}$.

$\Longrightarrow x \times y \in A.$

و منهA حلقة جزئية من $(\mathbb{Q}, +, \times)$.

-2 <u>إثبات أن</u> : إذا كان($\frac{p}{2k+1} \in$ A قابل للقلب) **فإن(** p فردي)

نستعمل العكس النقيض أي نبرهن أن **إذا كان(** p زوجي) **فإن(** $\frac{}{2k+1}$ غير قابل للقلب في A)

نفرض أن p زوجي و منه $p = 2k', k' \in \mathbb{Z}$ و ينتج أن $(\frac{p}{2k+1})^{-1} = \frac{2k+1}{2k'} = \frac{\pm 2k+1}{2|k'|}$

و بما أن 2 لا يقسم البسط فإنه في جميع كتابات المقلوب يبقى المقام زوجي .

إذن $(\frac{p}{2k+1})^{-1} \notin A$ و منه $\frac{p}{2k+1}$ غير قابل للقلب في A .

-3 A ليس حقل جزئي من $(\mathbb{Q}, +, \times)$. لأن

$$\left. \begin{array}{r} 0_{\mathbb{Q}}, 1_{\mathbb{Q}} \in A \quad \neq \emptyset \ (1 \\ \forall (x,y) \in A^2 \ : x + y \in A \ \ (2 \\ \forall x \in A \ : -x \in A \ \ (3 \\ \forall (x,y) \in A^2 \ : x \times y \in A \ (4 \\ \forall x \in A - \{0_{\mathbb{Q}}\} \ : x^{-1} \in A \ \ (5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow ((\mathbb{Q}, +, \times) \text{حقل جزئي من} A)$$

و الشرط 5) غير محقق من الجزء 2 السابق

$\exists\ \frac{2}{3} \in A - \{0_{\mathbb{Q}}\} \ : \frac{3}{2} \notin A$.