1.4 Famille génératrice. (عائلة مُولِّدة)

Def 1.4 : une famille de vecteurs $\{x_1, \dots, x_p\}$, $p \in \mathbb{N}^*$ d'un e.v. E est dite génératrice si : $\forall x \in E$: $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$ tel que $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p$ et x est dit combinaison (توفيقة) linéaire (خطية) des vecteurs $v_1, \dots, v_p$.

Exemple 1) $E = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$:

$\forall X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$: $(x,y) = (x,0) + (0,y) = x(1,0) + y(0,1) = x e_1 + y e_2$

2) $E = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, $e_3 = (1,2)$ est une famille génératrice

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$: $(x,y) = x(1,0) + y(0,1) + 0\cdot(1,2) = x e_1 + y e_2 + 0\cdot e_3$

3) $E = \mathbb{R}^2$, $x_1 = (1,1)$, $x_2 = (1,-1)$ famille génératrice de $\mathbb{R}^2$?

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^2$: $(x,y) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$?

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = (x,y) \Leftrightarrow \lambda_1(1,1) + \lambda_2(1,-1) = (x,y) \Leftrightarrow (\lambda_1+\lambda_2, \lambda_1-\lambda_2) = (x,y)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = x \\ \lambda_1 - \lambda_2 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{1}{2}(x+y) \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(x-y) \end{array}$$

4) $E = \mathbb{R}^n$, la famille $e_1 = (1,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,\dots,0), \dots, e_n = (0,\dots,1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.

$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

(ذو بعد منته)

Def 1.5 un K-e.v E est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie. Sinon, on dit qu'il est de dimension infinie.

Exemples 1) $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$ sont des e.v de dimension finie

2) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un e.v de dimension infinie

3) $E = \mathbb{R}[x]$ " " " " infinie

1.5 Famille libre, Famille liée et bases

العائلة الحرة، العائلة المرتبطة، الأسس

Def 1.6 soit $A=\{x_1,\dots,x_p\}$ une famille finie d'un e.v. E sur K.

A est dite famille libre si pour tout $\lambda_1,\dots,\lambda_p\in K$:

$$\lambda_1 . x_1+\lambda_2 . x_2+\dots+\lambda_p . x_p=0_E \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_p=0.$$

On dit aussi que les vecteurs $x_1,\dots,x_p$ sont linéairement indépendants (مستقلة خطيا)

Si non, on dit que A est une famille liée et que les vecteurs $x_1,\dots,x_p$ sont linéairement dépendants (مرتبطة خطيا)

Exemples 1) $E=\mathbb{R}^2$, $B=\{e_1=(1,0),\ e_2=(0,1)\}$ est une famille libre car

$\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$: $\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2=0_{\mathbb{R}^2}$

$\Rightarrow \lambda_1(1,0)+\lambda_2(0,1)=(0,0) \Leftrightarrow (\lambda_1,0)+(0,\lambda_2)=(0,0)$

$\Rightarrow (\lambda_1,\lambda_2)=(0,0) \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=0$

2) $E=\mathbb{R}^3$: $x_1=(1,2,-1)$, $x_2=(1,-2,2)$, $x_3=(2,0,1)$ est une famille liée car,

$\forall \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$: $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3=0_{\mathbb{R}^3}$ — $(*)$

$\Rightarrow (\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3,\ 2\lambda_1-2\lambda_2,\ -\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3)=(0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3=0 & \text{— (1)}\\ 2\lambda_1-2\lambda_2=0 & \text{— (2)}\\ -\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0 & \text{— (3)}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=\lambda_2\\ \lambda_3=-\lambda_2 \text{ avec } \lambda_2\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$(*) \Leftrightarrow \lambda_2x_1+\lambda_2x_2-\lambda_2x_3=0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow x_1+x_2-x_3=0_{\mathbb{R}^3}$.

Remarque 1) une famille $\{x_1, \dots, x_p\}$ est liée
si et seulement s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ non tous nuls (ليست كلها معدومة)
tq $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p = 0_E$.

Dans l'exemple 2) précédent ; on a trouvé
que $x_1 + x_2 - x_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ $(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1)$
on peut écrire : $x_3 = x_1 + x_2$ ou $x_2 = -x_1 + x_3 \dots$

2) De la remarque 1), il existe au moins un vecteur x_i, qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs.

Def 1.7 Soit E un espace vectoriel sur K.
une famille $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ de vecteurs de E
est dite base (أساس) de E si B est une famille
génératrice et libre à la fois de E.
(B أساس لـ E إذا كانت B مولدة لـ E ومستقلة خطيا)

Proposition 1.4
Toutes les bases d'un K-e.v de dimension finie E, ont le même cardinal appelé la dimension de E, noté $\dim_K E$ ou $\dim E$. (البُعد)

Remarque Si $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ une base de E
alors tout vecteur $x \in E$, s'écrit d'une
façon unique sur les x_i : càd.
$\exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n ;\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.

Exemples 1) $E = \mathbb{R}^3$, $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (dite la base Canonique)

En général : $E = \mathbb{R}^n$, dim $\mathbb{R}^n = n$,

$B = \{e_1 = (1,0,\dots,0), e_2 = (0,1,\dots,0), \dots, e_n = (0,0,\dots,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ dite base Canonique de $\mathbb{R}^n$).

2) $E = \mathbb{R}_2[x] = \{P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \,/\, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

$B = \{P_1 = 1, P_2 = X, P_3 = X^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$

$\forall P \in \mathbb{R}_2[x] \Rightarrow P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 = a_0 . 1 + a_1 . X + a_2 . X^2$

$\Rightarrow P_1 = 1, P_2 = X, P_3 = X^2$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[x]$.

$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 X + \lambda_3 X^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow$ la famille $P_1 = 1, P_2 = X, P_3 = X^2$ est libre

donc $B = \{P_1 = 1, P_2 = X, P_3 = X^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$ dite la base Canonique de $\mathbb{R}_2[x]$, dim $\mathbb{R}_2[x] = 3$)

En général : $E = \mathbb{R}_n[x] = \{P \in \mathbb{R}[x] ; d^\circ(P) \leq n\}$ admet comme base Canonique la base

$B = \{P_1 = 1, P_2 = X, \dots, P_{n+1} = X^n\}$.

dim $\mathbb{R}_n[x] = n+1$.