Théorie des graphes

Université de JIJEL
Mme BOUKHERROU Zoubida

Introduction

Un petit dessin vaut mieux qu'un grand discours,

Napoléon.

Pour résoudre de nombreux problèmes réels, on est amené à tracer sur le papier des petits dessins qui représentent (partiellement) le problème à résoudre. On appellera ces petits dessins des **graphes**, les points des **sommets** et les lignes des **arcs** ou **arêtes**.

Plan du cours

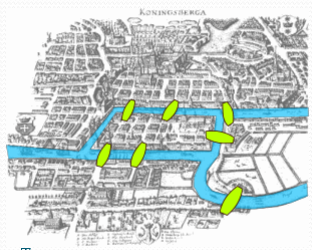
- Concepts fondamentaux
- Cycles et cocycles
- Arbre et Arborescence
- Problèmes de cheminement
- Problème de flôt maximum

Chapitre1

Concepts fondamentaux

Historique (1/2)

- Mathématicien irlandais Sir William Hamilton (1805-1865) a traité le **problème du voyageur de commerce**
- … le mot graphe est introduit pour la première fois par l'anglais J. J. Sylvester (1814-1897)
- **Euler** (1935) curiosité mathématique: Partir d'une rive, parcourir les sept ponts de la ville de KÖNESBERG (Allemagne) une et une seule fois et revenir au point de départ.

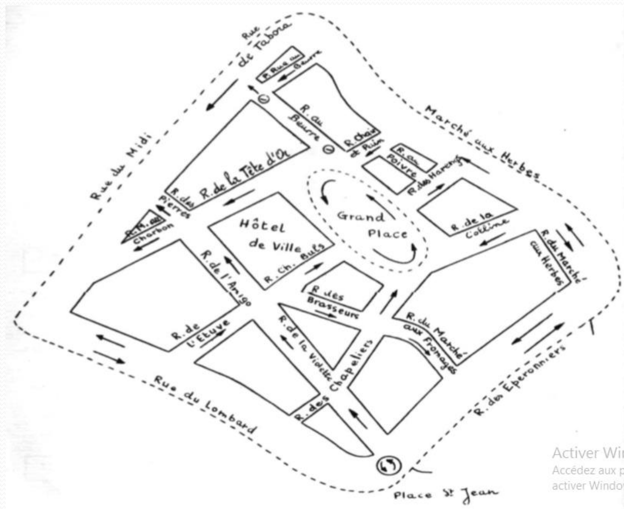


Historique (2/2)

- A partir de 1946, la TG a connu un développement intenses grâce aux chercheurs motivés par la résolution de problèmes concrets.
- Parmi eux, Esdger Djikstra (1959) pour le problème de cheminement, Ford et Fulkerson (1956) pour le problème du flôt maximum.
- XXe siècle…
- La théorie des graphes devient une branche des mathématiques appliquées avec les travaux de König, Kuratowski et plus récemment de Berge, Erdös et Harary . Elle devient ensuite, un outil très efficace pour la modélisation chez les informaticiens.
- La modélisation est une représentation miniaturisée d'un phénomène réel.

Quelques Domaines d'applications

- Le plan d'une ville, avec ses sens interdits…



Notions de base

- Un **graphe G** est défini par :
  - un ensemble **S** appelé **ensemble des sommets** {x1,x2,x3,…}
  - un sous-ensemble **A** du produit cartésien S×S appelé **ensemble d'arcs** (ou **arêtes**) A = {(x,y) ∈ S ×S / le sommet x est en relation avec le sommet y}.
- On note **G = (S,A).**

- **Remarques:**
  - Si S est un ensemble fini, alors le graphe **G** est dit **fini**.
  - Un sommet est **isolé** lorsqu'aucune arête ne le relie aux autres sommets

Notations

- **Notation 1.** Un **arc** u = (x,y) est noté **x → y** , **x** est appelée **origine** (ou *extrémité initiale*) **y** est appelée **destination** (ou *extrémité finale*). On parle alors de **graphe orienté (GO)**.
-
- **Notation 2.** Lorsque le sens de parcours n'a pas de signification on dit que le graphe est **non orienté (GNO)**. u = (x,y) est alors appelée une **arête**, notée **x – y**

Définitions (1)

- **Définition 1.** On appelle **ordre** d'un graphe fini le nombre de ses **sommets**. On note : **|S|=card(S)=n**
- **Définition 2.** On appelle **taille** d'un graphe fini le nombre de ses **arêtes**. On note : **|A|=card(A)=m**
- **Rapports entre n et m :** (cas des graphes orientés)
  - graphes complets avec boucles : $m=n^2$
  - graphes complets sans boucle : $m=n(n-1)$
- Et dans le cas des graphes non orientés ?

Définitions (2)

Définition 3. Etant donné un graphe **G=(S,A)** et $x \in S$

- si $(x,y) \in A$, alors y est un **successeur** de x
- si $(y,x) \in A$, alors y est un **prédécesseur** de x
- **x et y** sont **adjacents** si y est un prédécesseur et/ou un successeur de x
- l'ensemble des **successeurs** de x est noté $\Gamma^+(x)$

  $\Gamma^+(x) = \{y | (x,y) \in A\}$
- l'ensemble des **prédécesseurs** de x est noté $\Gamma^-(x)$

  $\Gamma^-(x) = \{y | (y,x) \in A\}$
- l'ensemble des **voisins** de x est noté $\Gamma(x)$

  $\Gamma(x) = \Gamma^+(x) \cup \Gamma^-(x)$

Définitions (3)

- le degré intérieur de x est noté $d^-(x)$

  $$d^-(x) = |\Gamma^-(x)|$$
- le degré extérieur de x est noté $d^+(x)$

  $$d^+(x) = |\Gamma^+(x)|$$
- le degré de x est noté $d(x)$

  $$d(x) = |\Gamma(x)|$$
- Le **degré d'un graphe** est le degré **maximum** de tous ses sommets.

Relations entre d⁺, d⁻, d et m :

- pour le cas des graphes orientés sans boucles :

$$\sum_{x \in S} d^+(x) = \sum_{x \in S} d^-(x) = \frac{1}{2} \sum_{x \in S} d(x) = m$$

- pour le cas des graphes non orientés :

$$\sum_{x \in S} d(x) = 2m$$

Incidence et adjacence

- Soit **u** = **(x,y)** une **arête**. On dit que **u est incidente à x** (et **à y**).
- Soit **u** = **(x,y)** un **arc**. On dit que **u est incident à x vers l'extérieur** et **incident à y vers l'intérieur**.
- On dit que les sommets **x et y sont adjacents à l'arc ou arête u**.

Chemin, chaîne, circuit et cycle

- Un **chemin** est une suite d'arcs dont l'extrémité finale de chacun est l'extrémité initiale du suivant (sauf pour le dernier).
  - Exemple : a → b → c → d → g
  - Si le graphe n'est pas orienté, on parle alors de **chaîne**.
- Un chemin **simple** est un chemin qui ne passe pas plus d'une fois par le même arc.
- Un chemin **élémentaire** est un chemin qui ne passe pas plus d'une fois par le même sommet.
- La **longueur** d'un chemin est le nombre d'arcs qui le constituent.
- Un **circuit** est un chemin qui se ferme sur lui-même (son origine et son extrémité sont confondues).
  - Si le graphe n'est pas orienté, on parle alors de **cycle** (chaîne **fermée**).
- Un graphe sans cycle est dit **acyclique**.

Quelques définitions sur les chaînes

- **Distance :** On appelle **distance** entre deux sommets la longueur de la plus petite chaîne les reliant.
- **Ecartement :** L'écartement d'un sommet est la distance maximale existante entre ce sommet et les autres sommets du graphe.
- **Centre :** On appelle centre d'un graphe, le sommet d'écartement minimal. (le centre n'est pas nécessairement unique).
- **Rayon :** On appelle rayon d'un graphe, l'écartement d'un centre du graphe.
- **Diamètre :** On appelle **diamètre** d'un graphe la plus longue des distances entre deux sommets.

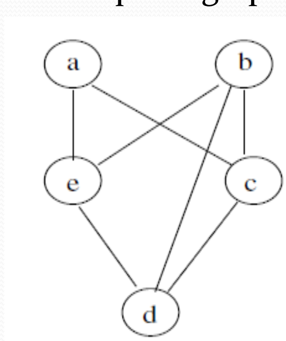
Chemin **Hamiltonien et Eulérien**

- Un chemin (resp. circuit) **hamiltonien** est un chemin (resp. circuit) qui passe par tous les sommets du graphe une fois et une seule.
  - Les graphes **complets** sont donc hamiltoniens.

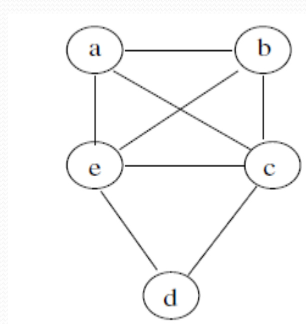
- Un chemin (resp. circuit) **eulérien** est un chemin (resp. circuit) qui passe par tous les arcs du graphe une fois et une seule.

Exercice

- le graphe G1 possède-il un cycle **hamiltonien** ?
- Montrer que le graphe G2 est **eulérien**



G1



G2

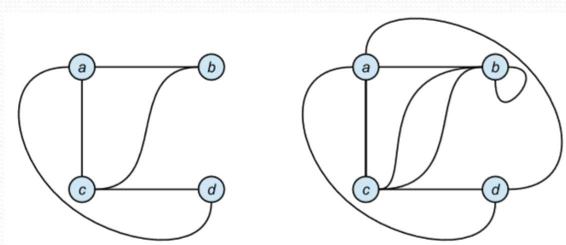
Représentation des graphes (1)

1. **Matrice d'adjacence et matrice d'incidence :**

- La **matrice d'adjacence** est une matrice de dimension **n×n** indiquant le nombre d'arêtes entre deux sommets.

- La **matrice d'incidence** est une matrice **n×m** indiquant l'incidence entre un sommet et une arête (1 dans la matrice) ou non (0 dans la matrice). Une boucle a une double incidence sur un sommet, indiqué par 2 dans la matrice.

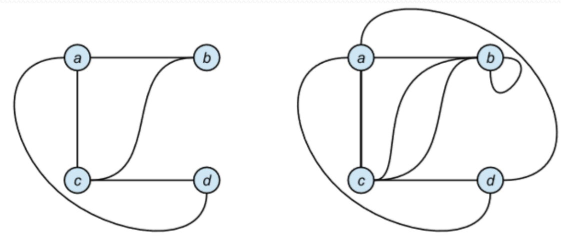
Matrice d'adjacence



(a) Graphe simple (b) Multigraphe

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Matrice d'incidence

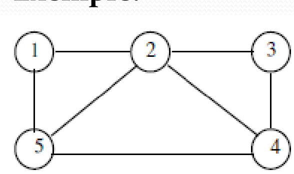


(a) Graphe simple (b) Multigraphe

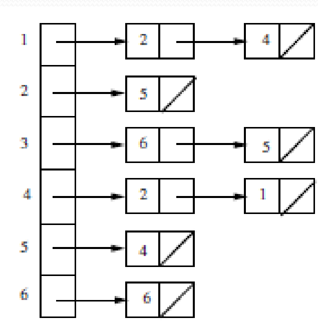
$$
\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} ab & ac & ad & bc & cd \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}
\qquad
\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} ab & ac & ad_1 & ad_2 & bb & bc_1 & bc_2 & cd \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}
$$

Représentation des graphes (2)

- **2. Listes d'adjacence :**
  - Soit le graphe G = (S,A). La représentation par **listes d'adjacence** de G consiste en un tableau T de n listes, une pour chaque sommet de S. Pour chaque sommet x ∊ S, la liste d'adjacence T[x] est une liste chainée de tous les sommets y tels qu'il existe un arc ou une arête (x,y) ∊ A.
  - **Exemple.**

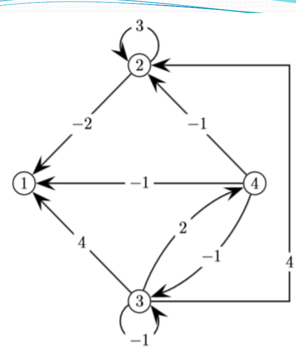


G



Types de graphe

- **Déf 1. Graphe simple :** Un graphe est dit simple si :
  - il n'y a pas de boucle (u = (x,x))
  - il n'y a pas plus d'un arc (ou pas plus d'une arête) pour relier deux sommets.
- Un graphe simple **G = (S,A)** est dit **nul** si S et A sont vides.
- un graphe simple **G** est dit **trivial** s'il admet un seul sommet et aucune arête. On appelle graphe **trivial d'ordre n** le graphe admettant **n** sommets et aucune arête.
-
- **Déf 2. Graphe valué ou pondéré :** Un graphe valué *G = (S,A,v)* est un graphe (S,A) qui a des valuations sur chaque arc ou arête.



graphe valué orienté

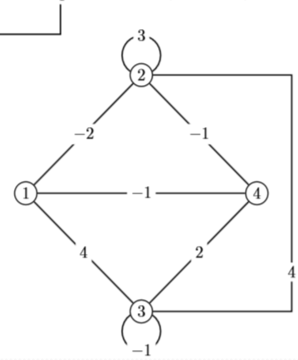
$$W = \begin{pmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty \\ -2 & 3 & \infty & \infty \\ 4 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & \infty \end{pmatrix}$$

$$\text{et } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

graphe valué non-orienté

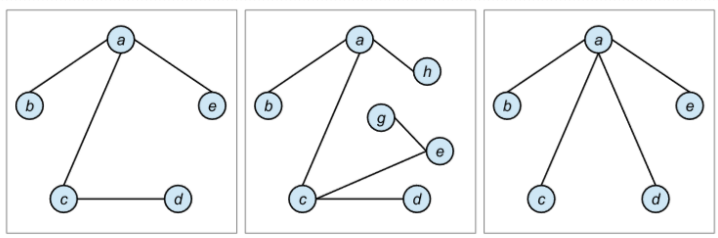
$$W = \begin{pmatrix} \infty & -2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & \infty \end{pmatrix}$$

$$\text{et } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Arbre.

- **Déf 3.** Un **arbre** est un graphe qui peut être défini par l'une de propositions suivantes :
  - un arbre est un graphe **connexe** et **acyclique**;
  - un arbre est un graphe **connexe** avec **n–1 arêtes**;
  - un arbre est un graphe **acyclique** avec **n–1 arêtes**;
  - un arbre est un graphe dans lequel il existe une **chaine unique entre chaque paire de sommets**.



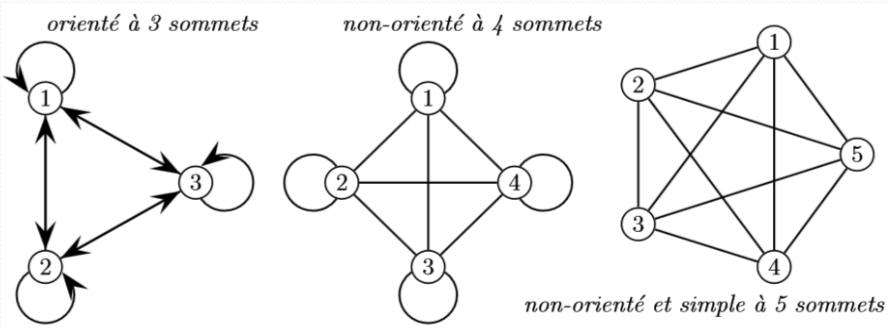
(a) Un premier arbre (b) Une deuxième arbre (c) Un troisième arbre

Forêt et arborescence

- On appelle **forêt** un graphe sans cycle (pas nécessairement connexe) dont chaque composante connexe est un arbre.
- On appelle **racine** d'un graphe orienté un sommet R (s'il existe) tel que pour tout sommet x de G il existe un chemin allant de R vers x.
- Une **arborescence** est un graphe orienté sans circuit admettant une racine r ∈ S telle que, pour tout autre sommet y ∈ S, il existe un chemin unique allant de r vers y. Si l'arborescence comporte n sommets, alors elle comporte exactement n–1 arcs.

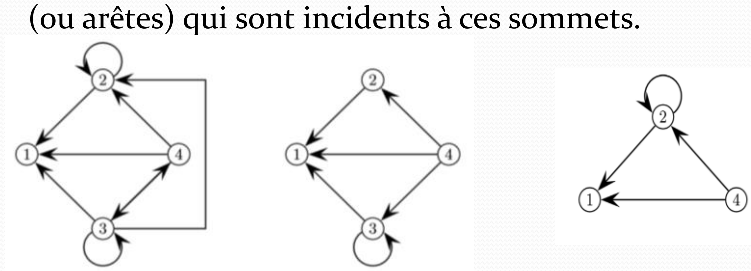
Graphe complet

- **Déf 4.** un «**graphe complet** à ***n*** sommets », souvent noté K_n, est le graphe d'ordre n ayant le plus d'arcs/arêtes possibles.
  - **Exemple.**



Graphe partiel et sous-graphe

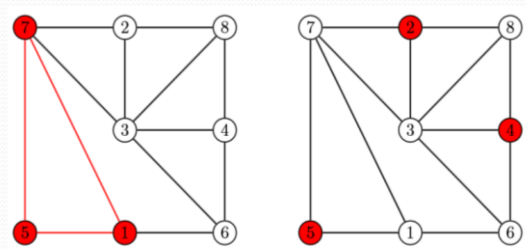
- **Déf 5.** On appelle **graphe partiel de G** un graphe dans lequel on a **supprimé des arcs** (ou arêtes) **sans supprimer de sommets**.
- **Déf 6.** On appelle **sous-graphe de G** un graphe dans lequel on a **supprimé des sommets**, et par la suite les arcs (ou arêtes) qui sont incidents à ces sommets.



G graphe partiel de G induit par A′ sous-graphe de G induit par S′

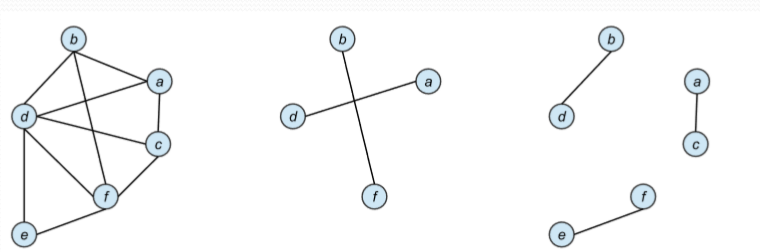
Clique et stable

- **Déf 7.** Soit **G = (S,A)** un graphe (orienté ou pas) alors
- une **clique** est un sous-graphe complet de G
- un **stable** est un sous-graphe de G sans arcs/arêtes
- La recherche du plus grand stable ou de la plus grande clique d'un graphe est un problème très important en théorie des graphes,



Couplage

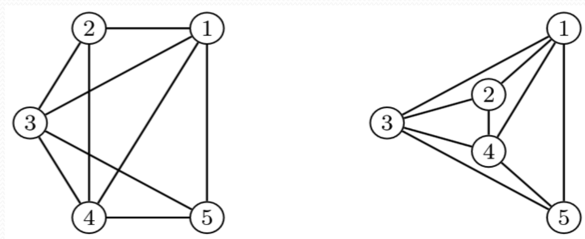
- **Déf 8.** Un **couplage** d'un graphe G = (A,S) est un sous-graphe composé d'arêtes deux à deux non adjacentes.
- Un **couplage parfait** d'un graphe G = (A,S) est un graphe partiel composé d'arêtes deux à deux non adjacentes .



(a) Graphe G. (b) Un couplage dans G. (c) Un couplage parfait dans G.

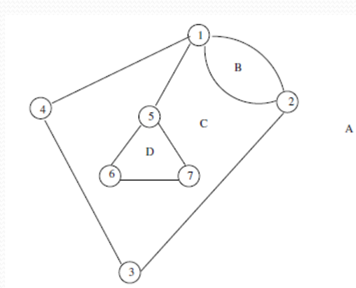
Graphe planaire

- **Def 9.** Un graphe G = (S,A) est dit **planaire** s'il existe un graphe équivalent à ce graphe où aucun arc/arêtes n'en coupe d'autre.
  - **Exemple.** Pour rendre le graphe suivant planaire il faut déplacer les sommets 2 et 4



Graphe planaire

- **Faces d'un graphe planaire** : Etant donnée une représentation planaire d'un graphe **G**, le plan se retrouve divisé en un certain nombre de régions qu'on appelle les **faces** de la représentation planaire.
  - Par exemple, le graphe suivant possède 4 faces (notées A, B, C et D). On dira que les arêtes (1,2); (1,4); (4,3); (3,2); (5,6) et (5,7) constituent des frontières entre des faces différentes.

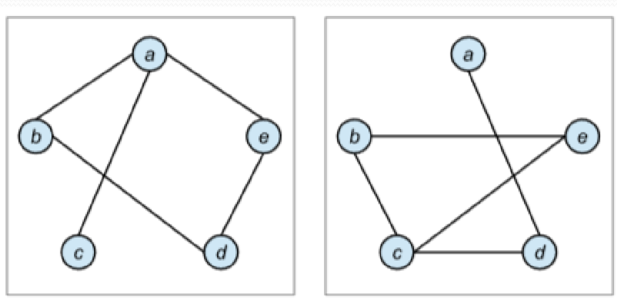


Graphe planaire

- **Formule d'Euler :** Soit **G** un graphe planaire connexe possédant **S** sommets, **A** arêtes et **F** faces,
- on a : F + S = A + 2.
  - **Exercice** : Vérifiez la formule d'Euler dans le cas d'un arbre.
  - **Correction** : un arbre a une seule face, car il n'a pas de cycle. Par ailleurs, le nombre d'arêtes d'un arbre est égal au nombre de sommets - 1. La formule d'Euler est donc bien vérifiée.

Graphes complémentaires

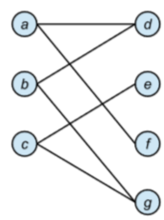
- **Déf 10.** Deux graphes simples G = (A,S) et $\overline{G}$ = (A,$\overline{S}$) sont **complémentaires** si $S \cap \overline{S} = \emptyset$ et H =(A, $S \cup \overline{S}$) est un graphe où pour chaque couple de sommets (x,y) l'arête xy existe.



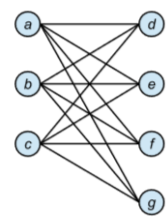
(a) Graphe G. (b) Graphe $\overline{G}$.

Graphe biparti.

- Un ensemble **I** de sommet d'un graphe est **indépendant** si aucun élément de **I** n'est connecté à un autre élément de **I**.
- **Déf 11.** Un graphe **biparti** est un graphe qui représente des relations entre deux ensembles indépendants **I** et **J**. On définit de même un graphe **multiparti**.
- Un graphe **biparti complet** est un graphe biparti dans lequel il existe une arête entre chaque couple de sommets (x,y) avec x ∈ S1 et y ∈ S2.



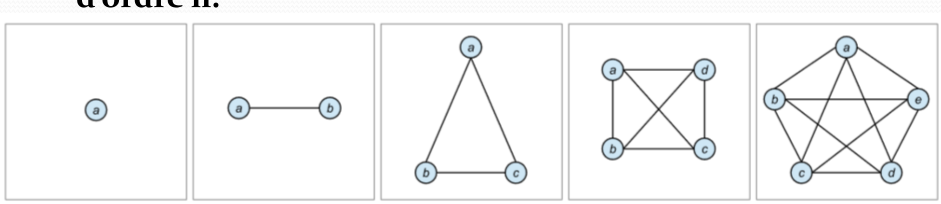
(a) Graphe biparti G



(b) Graphe biparti complet $K_{3,4}$

Graphe régulier

- **Déf 12.** Un graphe est dit **régulier** si tous les sommets ont le **même degré.**
- Si le degré commun est **k**, alors on dit que le graphe est **k-régulier.**
- Si **k = 3** le graphe est dit **cubique**. Si G est **régulier d'ordre n et deg(G) = n–1** alors le graphe G est **le graphe complet d'ordre n.**



(a) K_1 (b) K_2 (c) K_3 (d) K_4 (e) K_5

Connexité et forte connexité

- **Déf 13.** Un graphe est dit **connexe** s'il existe une **chaîne** entre toutes paires de sommets du graphe.
  - Si le graphe n'est pas connexe on peut identifier plusieurs sous-graphes connexes maximaux (au sens de l'inclusion) appelés **composantes connexes**.
- **Déf 14.** Un graphe orienté est dit **fortement connexe** si pour toute paire de sommets (x,y) il existe un **chemin** de x vers y ET un **chemin** de y vers x.
  - Si le graphe n'est pas fortement connexe on peut identifier plusieurs sous-graphes fortement connexes maximaux appelés **composantes fortement connexes.**

Construction de la composante connexe de x

- Soit **G=(S,A).**
-

i. Marquer le sommet x *
ii. Marquer tout sommet adjacent à un sommet déjà marqué. Poursuivre (ii) jusqu'à ce que l'on ne puisse plus marquer aucun sommet.
iii. Alors les sommets marqués sont ceux de la composante connexe de x.

Construction de la composante fortement connexe de x

- Soit **G=(S,A).**

i. Marquer + et – le sommet x
ii. Marquer + tout successeur (non encore marqué +) d'un sommet déjà marqué +. Marquer - tout prédécesseur (non encore marqué -) d'un sommet déjà marqué -.
iii. Lorsque plus aucun sommet ne peut être marqué ni + ni - les sommets marqués à la fois + et – sont ceux de la composante fortement connexe de x (**CFC**).

Graphe réduit

- **Def 15.** A tout graphe orienté G = (S,A) on associe le graphe simple GR = (SR,AR) appelé graphe réduit de G défini comme suit :

  SR = {A chaque C.F.C C_i de G correspond un sommet C_i}

  AR = $\{(C_i,C_j)/i \neq j$ et $\exists x \in C_i$ et $\exists y \in C_j$ et $(x,y) \in A\}$
- **Remarque.**
  - Un graphe fortement connexe possède une seule C.F.C.
  - Le graphe réduit d'un graphe ne possède pas de circuits.

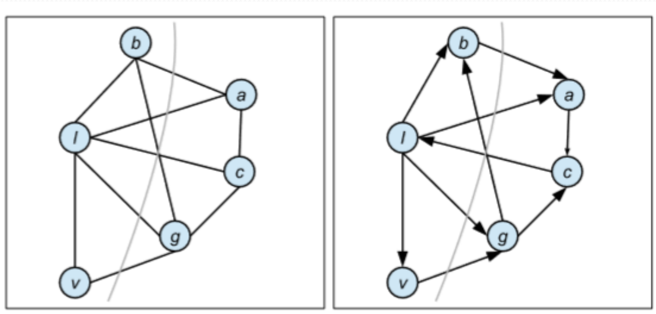
Cocycle et coupe

- **Déf 1.** Un **cocycle ω(W)** dans un graphe G =(A,S), avec W ∊ A, est l'ensemble des arêtes ayant un sommet dans l'ensemble W et un sommet dans l'ensemble A \W.
- Pour une **coupe ω+(W)**, nous ne garderons que les arcs allant d'un sommet de W vers un sommet de A \W.
- Un cocycle est dit ***élémentaire*** s'il relie deux sous graphes connexes disjoints et dont l'union est une composante connexe de G,

- **Def 2.** Le **cocircuit** est un cocycle dont tous les arcs sont orientés dans le même sens c-à-d un ensemble d'arcs de la forme ω +(A) ou bien ω -(A).

Exemple

- Sur cet exemple, on a W ={b,l,v} et le **cocycle** est ω(W)={ba,bg,la,lc,lg,vg}.
- W = {b,l,v} et **la coupe** est **ω+(W)** = {ba,la,lg,vg}. L'ensemble **ω−(W)** représentera alors tous les arcs allant d'un sommet de A \W vers un sommet de W.



(a) Un cocycle dans G. (b) Une coupe dans G.

Nombres cyclomatique et cocyclomatique

- Soit **G** un graphe non orienté d'ordre **n** (n sommets) et de taille **m** (m arêtes). Soit **p** le nombre de composantes connexes de G.
- **Déf 1.** On appelle **nombre cyclomatique** de **G** la valeur **V(G) = m–n + p** qui représente le nombre de cycles indépendants de G.
- **Déf 2.** Le **nombre cocyclomatique** est noté **λ** :

  λ(G) = n - p.

Décomposition d'un graphe en niveaux

- Une décomposition en niveaux (***tri topologique***) d'un graphe orienté sans circuit est réalisée en organisant les sommets d'un graphe en k niveaux (couches ou layer) de la manière suivante :
  - Les sommets sans prédécesseurs sont de niveau 0
  - tout sommet x a un niveau supérieur aux niveaux de ses prédécesseurs :
    - niveau(x) = max y ∈ Γ–(x)
    - niveau(y) + 1

Décomposition en niveaux : Algorithme

procedure DecompositionNiveaux

N ← 1

S\` ← S

Tant que S\` ≠ ∅ do

Pour tout sommet x de S\` sans prédécesseur **faire**

Niv(x) ← N

Fin pour

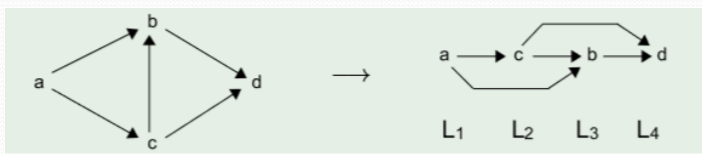
enlever de S\` tous les sommets de niveau N

N ←N + 1

Fin tant que

fin procedure

- **Exemple**



Parcours de graphes orientés (1):

- Un **parcours en largeur** du graphe G à partir d'un sommet x est un parcours dans lequel un sommet y est marqué avant le début de traitement de ses successeurs.

fonction $P =$ parcours_largeur(G, x)

$L =$ file des sommets à traiter

$P =$ liste des prédécesseurs de l'arbre de parcours

marquer le sommet x et le mettre dans L

tant que $L \neq \emptyset$ **faire**

sortir le 1^{er} sommet y de L

$V =$ successeurs non traités de y

pour tout $z \in V$ **faire**

marquer z; $P(z) = y$

mettre z à la fin de L

fin faire

fin faire

46

Parcours de graphes orientés (2):

- Un **parcours en profondeur** du graphe G à partir d'un sommet x est un parcours dans lequel un sommet y n'est marqué qu'après le début du traitement de ses successeurs.

<u>**fonction**</u> $P = \mathsf{parcours\_profondeur}(G, x)$
  $L = [x]$ (Pile des sommets à traiter)
  $P =$ liste des prédécesseurs de l'arbre de parcours
  <u>**tant que**</u> $L \neq \emptyset$ <u>**faire**</u>
    sortir le 1^er^ sommet y de L
    $V =$ successeurs non traités de y
    <u>**pour tout**</u> $z \in V$ <u>**faire**</u>
      $P(z) = y$
      mettre z au début de L
    <u>**fin faire**</u>
    marquer le sommet y
  <u>**fin faire**</u>

47