TD N°1 TG

Exercice 1. Construire un graphe orienté dont les sommets sont les entiers compris entre 1 et 12 et dont les arcs représentent la relation « être diviseur de ».

Exercice 2. On s'intéresse aux graphes dont tous les sommets sont de degré trois.

1. Construisez de tels graphes ayant 4 sommets, 5 sommets, 6 sommets, 7 sommets.
2. Qu'en déduisez-vous ?
3. Prouvez-le !

Exercice 3. Une suite décroissante (au sens large) d'entiers est graphique s'il existe un graphe dont les degrés des sommets correspondent à cette suite (par exemple, le triangle à trois sommets correspond à la suite 2,2,2). Les suites suivantes sont-elles graphiques ?

a. 3, 3, 2, 1, 1
b. 3, 3, 1, 1
c. 3, 3, 2, 2
d. 4, 2, 1, 1, 1, 1
e. 5, 3, 2, 1, 1, 1
f. 5, 4, 3, 1, 1, 1, 1

Trouvez deux graphes distincts (c'est-à-dire non isomorphes) correspondant à la suite 3, 2, 2, 2, 1. [Deux graphes G1 et G2 sont isomorphes s'il existe une bijection f entre leurs ensembles de sommets qui préserve les arêtes (f(x)f(y) est une arête de G2 si et seulement si xy est une arête de G1). De façon plus intuitive, cela signifie que l'on peut « renommer » les sommets de G1 de façon à obtenir G2…]

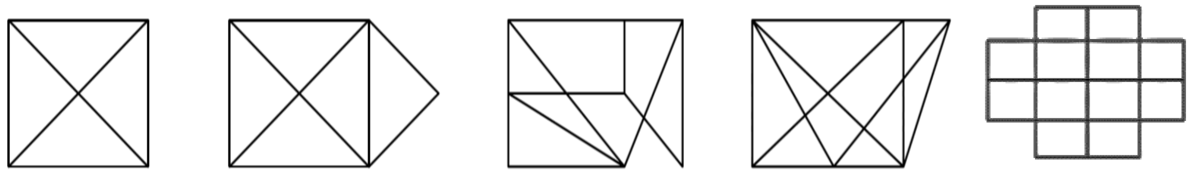
Exercice 4. Pour les graphes orientés, il faut considérer des suites de couples d'entiers (le premier élément d'un couple correspond au degré entrant, le second au degré sortant). Les suites suivantes sont-elles des suites graphiques ?

g. (0,1), (1,1), (1,1), (1,1), (1,0)
h. (1,1), (1,1), (1,1), (1,1), (1,1)
i. (0,2), (1,1), (1,1), (1,1)
j. (0,2), (1,1), (1,1), (2,0)
k. (1,2), (1,2), (2,1), (2,1)
l. (1,2), (1,2), (2,1), (2,2), (1,1)

Exercice 5. ***Lemme des poignées de mains*** : *La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes.*

Démontrez le lemme des poignées de mains.

Exercice 6. Est-il possible de tracer les graphes suivants sans lever le crayon (et sans passer deux fois sur le même trait !...) ? Pourquoi ?



Exercice 7. Soit G un graphe non eulérien. Est-il toujours possible de rendre G eulérien en lui rajoutant un sommet et quelques arêtes ?

Exercice 8. Dessinez un graphe d'ordre au moins 5 qui est...

1) hamiltonien et eulérien
2) hamiltonien et non eulérien
3) non hamiltonien et eulérien
4) non hamiltonien et non eulérien.

Exercice 9.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a calculé ci-dessous les matrices M2 et M3 (M est la matrice ci-dessus). Pour chacune de ces matrices, à quoi correspondent les nombres obtenus ?

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 & 7 & 7 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 6 & 8 & 8 \\ 7 & 2 & 8 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 10 Décrivez le graphe G ci-dessous par une matrice d'adjacences et des listes d'adjacences.