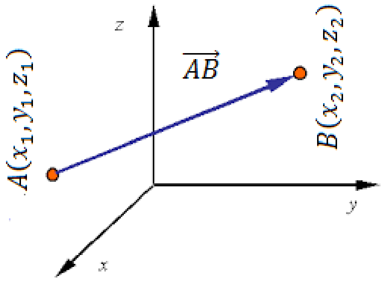
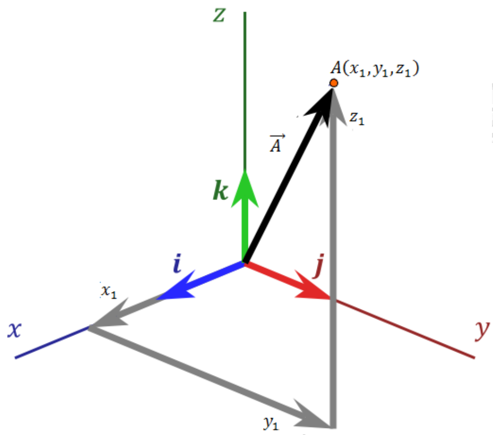
المتجهات *Vectors*

لتكن لدينا النقطتان $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ في الفضاء فان المتجه $\overrightarrow{AB}$:

$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k$ يُسمى بالمتجه الحر



والمتجه من نقطة الاصل $O(0,0,0)$ الى النقطة $A(x_1, y_1, z_1)$ هو $\overrightarrow{A} = x_1 i + y_1 j + z_1 k$ متجه قياسي .



وهنا سنتعامل مع المتجهات القياسية .

ليكن لدينا المتجهان $\overrightarrow{B} = x_2 i + y_2 j + z_2 k$, $\overrightarrow{A} = x_1 i + y_1 j + z_1 k$ و α ثابت فان

طول المتجه
1. $|A| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

ضرب متجه بثابت
2. $\alpha\overrightarrow{A} = \alpha x_1 i + \alpha y_1 j + \alpha z_1 k$

جمع وطرح متجهين
3. $\overrightarrow{A} \mp \overrightarrow{B} = (x_1 \mp x_2)i + (y_1 \mp y_2)j + (z_1 \mp z_2)k$

الضرب القياسي لمتجهين :
4. $\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

5. $\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = |A||B| \cos\theta$ حيث θ الزاوية المحصورة بين المتجهين .

الضرب الاتجاهي لمتجهين :
6. $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$

7. $|\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}| = |A||B| \sin\theta$

اذا كان $\overrightarrow{B}$ و $\overrightarrow{A}$ ضلعان في متوازي اضلاع فان مساحته هي $|\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}|$

8. $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

9. $i.i = j.j = k.k = 1 \;,\; i.j = j.k = k.i = 0$

10. $i \times i = j \times j = k \times k = 0$

11. $i \times j = k \,, \quad j \times k = i \;, \quad k \times i = j$

مثال (١) اذا كان $\vec{B} = i + 2j - 2k \quad , \quad \vec{A} = 3i + k$ فجد :

$(a)\ 2\vec{A} - \vec{B}$ $\qquad (b)\ \vec{A}.\vec{B}$

$(c)\ \vec{A} \times \vec{B}$ $\qquad (d)$ الزاوية المحصورة بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$

$(e)\ \vec{B}.(\vec{A} \times \vec{B})$ $\qquad (f)$ الزاوية المحصورة بين المتجهين $\vec{B}$ و $(\vec{A} \times \vec{B})$

(g) مساحة متوازي الاضلاع الذي ضلعاه $\vec{B}$ و $(\vec{A} \times \vec{B})$

الحل :

$$(a)\ 2\vec{A} - \vec{B} = 2(3i + k) - (i + 2j - 2k) = 6i + 3k - i - 2j + 2k = 5i - 2j + k$$

$$(b)\ \vec{A}.\vec{B} = 3 + 0 - 2 = 1$$

$$(c)\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2i + 7j + 6k$$

$$(d)\vec{A}.\vec{B} = |A||B|\cos\theta \quad \rightarrow \quad \cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|A||B|} = \frac{1}{\sqrt{9+1}\sqrt{1+4+4}} = \frac{1}{3\sqrt{10}}$$

$$\theta = \cos^{-1}(1/3\sqrt{10}) \cong 84^{\circ}$$

ويمكن الحل باستعمال القانون

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |A||B|\sin\theta \qquad \rightarrow \quad \sin\theta = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{|A||B|} = \frac{\sqrt{4+49+36}}{3\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{89}}{3\sqrt{10}}$$

$$\theta = \sin^{-1}(\sqrt{89}/3\sqrt{10}) \cong 84^{\circ}$$

$$(e)\vec{B}.(\vec{A} \times \vec{B}) = (i + 2j - 2k)(-2i + 7j + 6k) = -2 + 14 - 12 = 0$$

$$(f)\vec{B}.(\vec{A} \times \vec{B}) = |B||A \times B|\cos\theta \qquad \rightarrow \quad \cos\theta = 0 \qquad \rightarrow \theta = \pi/2$$

أي ان $\vec{B} \perp (\vec{A} \times \vec{B})$

$$(g)\vec{B} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 26i - 2j + 11k$$

$$|\vec{B} \times (\vec{A} \times \vec{B})| = \sqrt{(26)^2 + (2)^2 + (11)^2} = \sqrt{676 + 4 + 121} = \sqrt{801}\ unit^2$$

الدوال المتجهة : Functions Vector

اذا كانت كل من f, g, h دوال حقيقية لـ (x, y, z) فنقول ان المتجه A دالة متجهة لـ(x, y, z) ونكتب

$$A(x, y, z) = f(x, y, z)i + g(x, y, z)j + h(x, y, z)k$$

العامل التفاضلي ∇ : The Differential operator Del

يُعرّف العامل التفاضلي ∇ (دل) كما يلي

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

الانحدار (التدرج) Gradient :

لتكن $\emptyset$ دالة حقيقية لـ (x, y, z) فان انحدار الدالة $\emptyset$ يُعرّف كما يلي :

$$grad\ \emptyset = \nabla\emptyset = \frac{\partial\emptyset}{\partial x}i + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}j + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}k$$

تباعد المتجه Divergence of vector

لتكن $A(x, y, z) = f(x, y, z)i + g(x, y, z)j + h(x, y, z)k$ دالة متجهة فان تباعد الدالة A يُعرّف كما يلي

$$div\ A = \nabla . A = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right).(f(x, y, z)i + g(x, y, z)j + h(x, y, z)k)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

التفاف المتجه Curl of vector :

لتكن $A(x, y, z) = f(x, y, z)i + g(x, y, z)j + h(x, y, z)k$ دالة متجهة فان التفاف الدالة A يُعرّف كما يلي

$$curl\ A = \nabla \times A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f(x, y, z) & g(x, y, z) & h(x, y, z) \end{vmatrix}$$

معامل لابلاس Laplace factor

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ملاحظات :

١. التفاف الانحدار يساوي صفر $\quad curl(grad\ \emptyset) = \nabla \times (\nabla . \emptyset) = 0$

٢. تباعد الالتفاف لأي متجه يساوي صفر $\quad div\ (curl\ A) = \nabla . (\nabla \times A) = 0$

مثال (٢) اذا كان $A(x,y,z) = xzi + e^{yz}j - \ln(xy)\,k$ و $\emptyset(x,y,z) = xy^2z^3$ فجد

(a) $grad\ \emptyset$ $\qquad$ (b) $div\ A$

(c) $curl\ A$ $\qquad$ (d) $div\ (\emptyset A)$

(e) $\nabla^2\emptyset$

الحل :

$$(a)\ grad\ \emptyset = \nabla\emptyset = \frac{\partial\emptyset}{\partial x}i + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}j + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}k = \frac{\partial(xy^2z^3)}{\partial x}i + \frac{\partial(xy^2z^3)}{\partial y}j + \frac{\partial(xy^2z^3)}{\partial z}k$$

$$= y^2z^3i + 2xyz^3j + 3xy^2z^2k$$

$$(b)\ div\ A = \frac{\partial(xz)}{\partial x} + \frac{\partial(e^{yz})}{\partial y} - \frac{\partial(\ln(xy))}{\partial z} = z + ze^{yz}$$

$$(c)\ curl\ A = \nabla \times A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & e^{yz} & -\ln(xy) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ e^{yz} & -\ln(xy) \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & -\ln(xy) \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ xz & e^{yz} \end{vmatrix} k$$

$$= \left(-\frac{\partial(\ln(xy))}{\partial y} - \frac{\partial(e^{yz})}{\partial z}\right)i - \left(-\frac{\partial(\ln(xy))}{\partial x} - \frac{\partial(xz)}{\partial z}\right)j$$

$$+ \left(\frac{\partial(e^{yz})}{\partial x} - \frac{\partial(xz)}{\partial y}\right)k$$

$$= \left(-\frac{x}{xy} - ye^{yz}\right)i - \left(-\frac{y}{xy} - x\right)j = -\left(\frac{1}{y} + ye^{yz}\right)i + \left(\frac{1}{x} + x\right)j$$

$$(d)(\emptyset A) = xy^2z^3(xzi + e^{yz}j - \ln(xy)\,k) = x^2y^2z^4i + xy^2z^3e^{yz}j - xy^2z^3\ln(xy)\,k$$

$$\therefore\ div\ (\emptyset A) = \nabla.(\emptyset A) = 2xy^2z^4 + (xy^3z^3e^{yz} + 2xyz^3e^{yz}) - 3xy^2z^2\ln(xy)$$

$$= 2xy^2z^4 + xyz^3e^{yz}(y^2 + 2) - 3xy^2z^2\ln(xy)$$

$$(e)\ \nabla^2\emptyset = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(xy^2z^3) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(xy^2z^3) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(xy^2z^3)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(y^2z^3) + \frac{\partial}{\partial y}(2xyz^3) + \frac{\partial}{\partial z}(3xy^2z^2) = 2xz^3 + 6xy^2z$$

مثال (٣) جد $\nabla\times A$ إذا كان

$$A(x,y,z)=[y^2x\tan^{-1}(3z)]i+[y^2z^2\ln(2-x^2)]j-[xz^3\sin^{-1}(2y)]k$$

الحل :

$$\nabla\times A=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2x\tan^{-1}(3z) & y^2z^2\ln(2-x^2) & -xz^3\sin^{-1}(2y)\end{vmatrix}$$

$$=\left[-\frac{2xz^3}{\sqrt{1-4y^2}}-2y^2z\ln(2-x^2)\right]i-\left[-z^3\sin^{-1}(2y)-\frac{3y^2x}{1+9z^2}\right]j$$

$$+\left[\frac{-2xy^2z^2}{2-x^2}-2yx\tan^{-1}(3z)\right]k$$

$$=-\left[\frac{2xz^3}{\sqrt{1-4y^2}}+2y^2z\ln(2-x^2)\right]i+\left[z^3\sin^{-1}(2y)+\frac{3y^2x}{1+9z^2}\right]j$$

$$-\left[\frac{2xy^2z^2}{2-x^2}+2yx\tan^{-1}(3z)\right]k$$

تمارين

١. اذا كان $\vec{B}=2i+3j-k$, $\vec{A}=3i-j+2k$ فجد :

$(a)\ 3\vec{A}+\vec{B}$ $\quad(b)\ \vec{A}.\vec{B}$ $\quad(c)\vec{A}\times\vec{B}$ $\quad(d)\ \vec{A}.(\vec{A}\times\vec{B})$

(e) الزاوية المحصورة بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$

(f) الزاوية المحصورة بين المتجهين $\vec{A}$ و $(\vec{A}\times\vec{B})$

(g) مساحة متوازي الاضلاع الذي ضلعاه $\vec{A}$ و $(\vec{A}\times\vec{B})$

٢. إذا كانت $\emptyset(x,y,z)=3x^2y-y^3z^3$ فجد انحدار (تدرج) هذه الدالة عند النقطة $(1,-2,-1)$

٣. اذا كان $A(x,y,z)=x^2yi+y^2zj+z^2xk$ و $\emptyset(x,y,z)=xy+yz+zx$ فجد :

$(a)\ A.(\nabla\emptyset)$ $\quad(b)\ \emptyset\,(\nabla.A)$ $\quad(c)\ (\nabla\emptyset)\times A$

عند النقطة $(3,-1,2)$

٤. اذا كان $A(x,y,z)=yz\sin x\,i+xz\cos y\,j+xy\tan z\,k$ و $\emptyset(x,y,z)=xyz$ فجد :

$(a)\ A.(\nabla\emptyset)$ $\quad(b)\ \emptyset\,(\nabla.A)$ $\quad(c)\ \nabla\times A$ $\quad(d)\ \nabla\times(\emptyset A)$

٥. اذا كانت $\emptyset(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ فجد $\nabla^2\emptyset$.