

TD 01_correction

Exercice 01 : Construction de nouveaux ensembles

Soient $E_1 = \{a, b\}$, $E_2 = \{b, c, d\}$, $P(E)$ est l'ensemble des parties de E et $E = \{a, b, c, d\}$. Calculer :

1. $E_3 = E_1 \cap E_2 = \{b\}$;
2. $E_4 = E_1 \cup E_2 = \{a, b, c, d\}$;
3. $E_5 = E_2 - E_1 = \{c, d\}$;
4. $E_6 = \overline{E_1} = \{c, d\}$;
5. $E_7 = \overline{E_2} = \{a\}$;
6. $E_8 = E_5 \cup E_6 = \{c, d\}$;
7. $E_9 = E_1 \times E_2 = \{(a,b), (a,c), (a,d), (b,b), (b,c), (b,d)\}$
8. $E_{10} = E_3 \times E_4 = \{(b, a), (b, b), (b, c), (b, d)\}$;
9. $E_{11} = E_5 \times E_7 = \{(c, a), (d, a)\}$
10. $E_{12} = P(E_1) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
11. $E_{13} = P(E_2) = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}\}$
12. $E_{14} = E_{12} \cap E_{13} = \{\emptyset, \{b\}\}$

Exercice 02 : Alphabet

Pour chacun des mots (ou phrases) suivants (suivantes) donnez un alphabet :

1. 101000100 (codage binaire)
2. 256150100 (codage d'un pixel selon la méthode RVB)
3. 18.75 (Note entre 0 et 20)
4. -5.25 (Température entre -70 et 60)
5. `if (a>b){ a++ ; }` (Un code en langage C)
6. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ (Formule mathématique)

Exercice 03 : mots

Soit le mot $x = ((acbc)^R.baca)^R$

1. Donner la chaîne de caractères à laquelle x est égal. $x=acabacbc$
2. Quelle est la valeur de $|x|$, $|x|_a$, $|x|_b$ et $|x|_c$?
 $|x|=8$, $|x|_a=3$, $|x|_b=2$ et $|x|_c=3$
3. Donner un préfixe de x contenant au moins deux lettres 'c'.
acabac
4. Donner un suffixe de x contenant une seule lettre 'a'.
acbc

Exercice 04 : mots -langages

Pour chacun des langages suivants, donner des exemples de mots contenus dans chacun des langages :

- 1) $L_1 = \{ w \in \{a, b, c\}^* / w \text{ commence par la lettre 'a'} \}$;
 $L_1 = \{a, aa, ac, ab, abb, acb, acc, aba, aaa, \dots\}$
 $\text{Exp} = a(a+b+c)^*$

2) $L_2 = \{ w \in \{a, b, c\}^* / w \text{ se termine par la lettre 'a' } \}$;

$L_2 = \{a, aa, ba, ca, cba, bca, aaa, bba, cca, \dots\}$

Exp=(a+b+c)*a

3) $L_3 = \{ w \in \{a, b, c\}^* / w \text{ contient au moins une occurrence de la lettre 'a' } \}$;

$L_3 = \{a, aa, ba, ab, ac, ca, cab, bac, bba, aab \dots\}$

Exp=(a+b+c)*a(a+b+c)*

4) $L_4 = \{ w \in \{a, b, c\}^* / w \text{ contient au moins deux occurrences la lettre 'a' } \}$;

$L_4 = \{aa, aba, aab,aca, caa, aac,acaab,\dots\}$

Exp=(a+b+c)*a(a+b+c)* a(a+b+c)*

5) $L_5 = \{ w \in \{a, b, c\}^* / w \text{ contient au moins deux occurrences consécutives de la lettre 'a' } \}$

$L_5 = \{aa, baaa,bacaab, aaa, aabc, \dots\}$

Exp=(a+b+c)*aa(a+b+c)*

6) L_6 : Ensemble des mots construits sur l'alphabet $\{a, b\}$, commençant par des **a** et se terminant par des **b** et tel que le nombre de **a** et le nombre de **b** soit égal

$L_6 = \{ab, abab, abbaab, ababaabb,\dots\}$

Exp=impossible (le langage n'est pas régulier)

Exercice 05 : Construction de langages

1. Donnez le langage L_1 des mots de longueur 2 définis sur l'alphabet $\{a, b\}$.
2. Donnez le langage L_2 des mots de longueur 2 définis sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ contenant un **a** ou un **b** mais pas les deux.
3. Donnez le langage L_3 des mots tel que $L_3 = L_1.L_2$.
4. Donnez le langage L_4 des mots tel que $L_4 = (L_1.L_2).L_3$.
5. Donnez le langage L_5 des mots tel que $L_5 = L_1.(L_2.L_3)$.
6. Donnez le langage L_6 des mots tel que $L_6 = L_3.(L_1.L_2)$.
7. Donnez le langage L_7 des mots tel que $L_7 = L_1|L_2$.
8. Donnez le langage L_8 des mots tel que $L_8 = L_1 \cap L_2$.
9. Donnez le langage L_9 de tous les mots définis sur l'alphabet $\{a, b\}$.

Exercice 06 : Langages

Sur l'alphabet $A = \{a, b\}$, on considère le langage L_1 des mots formés de **n** fois la lettre **a** suivi de **n** fois la lettre **b**, et le langage L_2 des mots comportant autant de **a** que de **b**.

- Définir formellement ces deux langages.

✓ **$L_1 = \{w \in \{a, b\} / w = a^n b^n ; n \in \mathbb{N}\}$**

✓ **$L_2 = \{w \in \{a, b\} / |w|_a = |w|_b \}$**

- Que sont les langages suivants : $L_1 \cup L_2, L_1 \cap L_2, L_1^2, (L_2)^2$?

✓ **$L_1 \cup L_2 = L_2$ (car $L_1 \subset L_2$)**

✓ **$L_1 \cap L_2 = L_1$ (car $L_1 \subset L_2$)**

✓ **$(L_1)^2 = \{ a^n b^n a^m b^m / n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \}$**

$$\checkmark (L_2)^2 = L_2$$

- Que peut-on dire de L_1^* et L_2^* par rapport à L_1 et L_2 ?

$$\checkmark L_1 \subset (L_1)^* \subset L_2$$

$$\checkmark (L_2)^* = L_2$$

Exercice 07 : langages

Sur l'alphabet $A = \{0, 1\}$, on considère les langages L_1 , L_2 , L_3 et L_4 définis par

$$L_1 = \{01^n/n \in \mathbb{N}\} \quad L_2 = \{0^n1/n \in \mathbb{N}\}$$

$$L_3 = \{00, 11\} \quad L_4 = \{0, 1, 01\}$$

Définir les langages L_1L_2 , $L_1 \cap L_2$ et $(L_1)^2$, $L_3.L_4$

$$\checkmark L_1L_2 = \{01^n0m1/n, m \in \mathbb{N}\}$$

$$\checkmark L_1 \cap L_2 = \{01\}$$

$$\checkmark (L_1)^2 = \{01^n01^m/n, m \in \mathbb{N}\}$$

$$\checkmark L_3.L_4 = \{000, 001, 0001, 110, 111, 1101\}$$

Exercice 08 : Jeux appartenance d'un mot à un langage

1. Soient les deux expressions régulières suivantes :

$$- R1 = a(ab)^*ba$$

$$- R2 = (ab)^*(ba)^*(a^*b^*)$$

a) Donnez un mot $m_1 \in L(R1) \wedge m_1 \notin L(R2)$. $m_1 = aabba$

b) Donnez un mot $m_2 \in L(R2) \wedge m_2 \notin L(R1)$. $m_2 = ba$

c) Donnez un mot $m_3 \in L(R1) \wedge m_3 \in L(R2)$. $m_3 = aba$

d) Donnez un mot $m_4 \notin L(R1) \wedge m_4 \notin L(R2)$. $m_4 = aabbab$

2. Soient les deux expressions régulières suivantes :

$$- S1 = a(a|b)^*ba$$

$$- S2 = (ab)^*|(ba)^*|(a^*|b^*)$$

a) Donnez un mot $m_1 \in L(S1) \wedge m_1 \notin L(S2)$. $m_1 = aaba$

b) Donnez un mot $m_2 \in L(S2) \wedge m_2 \notin L(S1)$. $m_2 = b$

c) Donnez un mot $m_3 \in L(S1) \wedge m_3 \in L(S2)$. $m_3 = \text{il n'existe pas}$

d) Donnez un mot $m_4 \notin L(S1) \wedge m_4 \notin L(S2)$. $m_4 = baa$

3. Soient les deux expressions régulières suivantes :

$$- RS1 = (a|b)^*b$$

$$- RS2 = [(a|b)(a|b)]^*$$

a) Donnez pour $RS1$ et $RS2$ les expressions régulières dénotant les langages compléments de $L(RS1)$ et $L(RS2)$.

$$\checkmark RS1 = (a|b)^*a / \epsilon$$

$$\checkmark RS2 = [(a|b)(a|b)]^*(a/b)$$

Exercice 09. : Jeux expression régulière dénotant un langage

Nous gardons le même principe de l'exercice précédent.

1. Trouvez une expression régulière $ER1$ dénotant l'ensemble des mots sur l'alphabet $A=\{a,b,c\}$.
 $ER1=(a+b+c)^*$
2. Trouvez une expression régulière $ER2$ dénotant l'ensemble des mots non vides sur l'alphabet $A = \{a, b, c, d\}$.
 $ER2=(a+b+c+d)(a+b+c+d)^*$
3. Trouvez une expression régulière $ER3$ dénotant l'ensemble des mots non vides commençant par **c** et se terminant par **a** sur l'alphabet $A = \{a, b, c, d\}$.
 $ER3=c(a+b+c+d)^*a$
4. Trouvez une expression régulière $ER4$ dénotant l'ensemble des entiers naturels codés sur l'alphabet $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$
 $ER4=0+(1+2+\dots+9)(0+1+2+\dots+9)^*$
5. Trouvez une expression régulière $ER5$ dénotant l'ensemble des mots sur l'alphabet $A=\{a,b,c\}$:
 - Comportant exactement deux **a**.
 - Tout **b** est suivi d'au moins deux **c**.
 - Se termine par **a**.
 $ER5=(bcc+c)^*a(bcc+c)^*a$

Exercice 10 :

Donnez une expression régulière qui accepte chacun des langages suivants (définis sur l'alphabet $A = \{0, 1\}$) :

1. L'ensemble $\{0, 1\}$
 $(0+1)$
2. l'ensemble de toutes les chaînes constituées d'un nombre quelconque (éventuellement nul) de 0 ou de 1.
 $(0+1)^*$
3. Toutes les chaînes qui se terminent par 00.
 $(0+1)^*00$
4. l'ensemble $\{00, 01, 10, 11\}$, c'est à dire l'ensemble des chaînes de 0 et de 1 de longueur deux.
 $00+01+10+11$ ou bien $(0+1)(0+1)$
5. l'ensemble constitué de la chaîne a et de toutes les chaînes commençant par un nombre quelconque (éventuellement nul) de 0 et se terminant par un 1.
 $0^*(0+1)^*1$
6. Ensemble de toutes les chaînes dans lesquelles chaque paire de 0 apparaît devant une paire de 1.
 $(1+01+0011)^*(\epsilon+0)$

7. Ensemble de toutes les chaînes ne contenant pas 101.

$$(0+11^*00)^*(\epsilon+11^*+11^*0)$$

8. Tous les nombres binaires divisibles par 4.

$$(0+(0/1)^*00)$$

Exercice 11

Soit l'alphabet $A = \{a,b\}$,

Donner les expressions régulières correspondantes aux langages suivants :

1. $L1 = \{\epsilon, a, b, ab\}$

$$EX1=(\epsilon+a+b+ab)$$

2. $L2 = \{b^n / n \geq 2, n \text{ étant un entier}\}$

$$EX2=bbb^*$$

3. $L3 = \{w \in \{a,b\}^*, \text{ tel que } w \text{ contient seulement } 3b, \text{ le reste c'est des } a's\}$

$$EX3=a^*ba^*ba^*ba^*$$

4. $L4 = \{w \in \{a,b\}^*, \text{ tel que } w \text{ contient un nombre de } a \text{ divisible par } 3\}$

$$EX4=(b^*ab^*ab^*ab^*)^*+b^*$$

5. $L5 = \{w \in \{a,b\}^*, \text{ tel que } w \text{ contient un nombre paire de } a\}$

$$EX5=(b^*ab^*ab^*)^*=b^*(ab^*a)^*b^*=(b+ab^*a)^*$$

6. $L6 = \{w \in \{a,b\}^*, \text{ tel que } w \text{ contient un nombre impaire de } b\}$

$$EX6=a^*b(a^*ba^*ba^*)^*=a^*b(a+ba^*b)^*$$

7. $L7 = \{w \in A^*, w \text{ ne contient pas } 3b \text{ consécutifs}\}$

$$EX7=(a+ba+bba)^*(\epsilon+b+bb)$$

8. $L8 = \{w \in \{a,b\}^*, \text{ tel que } w \text{ contient la sous chaîne } aaa \text{ ou la sous chaîne } bbb \text{ mais pas les deux en même temps}\}$

$$\text{On a } L8=L9+L10$$

$L9=$ w contient la sous chaîne aaa mais pas la sous chaîne bbb

$L10=$ w contient la sous chaîne bbb mais pas la sous chaîne aaa

$$EX8= EX9+EX10$$

$$=[(a+ba+bba)^*(\epsilon+b+bb)aaa(a+ba+bba)^*(\epsilon+b+bb)]+[(b+ab+aab)^*(\epsilon+a+aa)bbb(b+ab+aab)^*(\epsilon+a+aa)]$$