1ère Année Informatique.
Algèbre 2

Chapitre 1 Espaces Vectoriels
الفضاءات الشعاعية.

1.1 Espace Vectoriel

Def 1.1: Soit $\mathbb{K}$ un Corps (حقل) Commutatif (تبديلي) ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et soit E un ensemble non vide muni d'une loi interne $(+)$: $+ : E \times E \longrightarrow E$ ((+) قانون داخلي على E)

$$(x, y) \longmapsto x + y \in E$$

et d'une loi Externe $(\cdot)$: $\cdot : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$

$$(\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x \in E.$$

((.) قانون خارجي)

Le triplet $(E, +, \cdot)$ est dit espace Vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-espace Vectoriel ($\mathbb{K}$-e.V) si ;

1) $(E, +)$ est un groupe (زمرة) Commutatif (تبديلية) (Voir Chap 3. Alg1)
2) La loi $(\cdot)$ vérifie les Conditions suivantes:
   a) $\forall \lambda \in K, \forall x, y \in E : \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$.
   b) $\forall \lambda, \mu \in K : \forall x \in E : (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.
   c) $\forall \lambda, \mu \in K : \forall x \in E : (\lambda \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$.
   d) $\forall x \in E : \quad 1 \cdot x = x$.

Les éléments de E sont dits Vecteurs. (أشعة)
Les éléments de K sont dits Scalairs. (سلميات)
L'élément (عنصر) neutre (حيادي) de E par la loi $(+)$ est noté 0_E dit Vecteur nul. (الشعاع المعدوم 0_E)
Le symétrique de $x \in E$ est noté $-x$.

Chapitre 1 - suite -

Proposition 1.1 : Soit E un K-e.v alors on a :

1/ $\forall x \in E : 0.x = 0_E$ et $\forall \lambda \in K : \lambda.0_E = 0_E$.

2/ $\forall x, y \in E ; \forall \lambda \in K : \lambda.(x-y) = \lambda.x + \lambda.y$.

3/ $\forall \lambda \in K, \forall x \in E ; \lambda.x = 0_E \Longrightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0_E$.

Exemples :

1/ Si $(K, +, .)$ est un corps commutatif alors $(K, +, \cdot)$ est un K-e.v.

($\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-e.v et $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-e.v)

2/ Soit $E = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

On définit la loi $\oplus$ sur $\mathbb{R}^2$ par :

$(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2 ; (x, y) \oplus (x', y') = (x+x', y+y')$

et la loi externe $(\cdot)$ par :

$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \lambda.(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.

On a vue chapitre 3, Alg1 que $(\mathbb{R}^2, \oplus)$ est un groupe commutatif, d'élément neutre $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$.

On montre que la loi externe $(\cdot)$ vérifie les 4 conditions :

a) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$:

$\lambda.[(x, y) \oplus (x', y')] = \lambda.(x+x', y+y') = (\lambda x + \lambda x', \lambda y + \lambda y')$

$\lambda.(x, y) \oplus \lambda.(x', y') = (\lambda x, \lambda y) \oplus (\lambda x', \lambda y') = (\lambda x + \lambda x', \lambda y + \lambda y')$

d'où $\lambda.[(x, y) \oplus (x', y')] = \lambda.(x, y) + \lambda.(x', y')$.

b) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$(\lambda + \mu).(x, y) = ((\lambda+\mu)x, (\lambda+\mu)y) = (\lambda x + \mu x, \lambda y + \mu y)$ — (1)

et $\lambda.(x, y) \oplus \mu.(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \oplus (\mu x, \mu y) = (\lambda x + \mu x, \lambda y + \mu y)$ — (2)

de (1) et (2) : $(\lambda + \mu).(x, y) = \lambda.(x, y) \oplus \mu.(x, y)$

Chapitre 1 - suite -

c) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$; $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$(\lambda\mu).(x,y) = (\lambda\mu x, \lambda\mu y)$

$\lambda.[\mu.(x,y)] = \lambda.(\mu x, \mu y) = (\lambda\mu x, \lambda\mu y)$

d'où : $(\lambda\mu).(x,y) = \lambda.[\mu.(x,y)]$.

d) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$: $1.(x,y) = (1.x, 1.y) = (x,y)$

d'où $(\mathbb{R}^2, \oplus, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-e.V.

3) $E = \mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \in \mathbb{R}\}$

Soit les lois $(\oplus)$ et $(\cdot)$ définies par :

$(x,y,z), (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$(x,y,z) \oplus (x',y',z') = (x+x', y+y', z+z')$

$\lambda.(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

on peut montrer, comme dans l'exemple (2) précédent que : $(\mathbb{R}^3, \oplus, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-e.V, d'élément neutre (Vecteur nul) $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$.

4) soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ fonction}\}$

(Ensemble des fonction définies sur $\mathbb{R}$) (مجموعة الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$)

on définit sur E la loi (+) définie par :

$f, g \in E$: $\forall x \in \mathbb{R}$: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

et la loi externe $(\cdot)$ définie par :

$\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in E$: $\forall x \in \mathbb{R}$: $(\lambda.f)(x) = \lambda f(x)$.

$(E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-e.V d'élément neutre pour la loi (+) (Vecteur nul), l'application nulle noté $0 \in E$: $\forall x \in E$: $0(x) = 0$. (الدالة المعدومة)

Chapitre 1 - suite -

1.2 Sous-espace vectoriel . الفضاء الشعاعي الجزئي

Def 1.2 : Soit E un K-e.v et $F \subset E$

F est dit sous-espace vectoriel de E si et seulement s'il vérifie les conditions suivants

1) $0_E \in F$

2) $\forall x, y \in F \Longrightarrow x+y \in F$ (on dit F stable par $(+)$) مستقرة

3) $\forall \lambda \in K, \forall x \in F \Longrightarrow \lambda . x \in F$

Proposition 1.2.

F sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

a) $F \neq \phi$

b) $\forall \lambda, \mu \in K, \forall x, y \in F \Longrightarrow \lambda . x + \mu . y \in F$.

Preuve : On suppose a) et b) sont vérifiées on montre F s.e.V de E càd 1), 2) et 3) sont vérifiées ?

De a) $F \neq \phi$ donc $\exists x \in F$, et de b) on prend $\lambda = 1, \mu = -1, y = x \Longrightarrow x - x = 0_E \in F$, 1) est vérifiée

En prenant $\lambda = \mu = 1$ dans b), on obtient 2).

si on prend $\mu = 0$ ou $y = 0$ dans b) on trouve 3).

L'inverse est laissé comme exercice.

Exemples (de sous-espaces vectoriels)

1) Soit le $\mathbb{R}$-e.V, $E = \mathbb{R}^3$

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$

Chapitre 1 - suite -

Montrons que F est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$?

1/ $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in F$?

$0_{\mathbb{R}^3} \in F$ car $0-0+0=0$ vérifiée.

2/ Soit $X=(x,y,z)$, $X'=(x',y',z') \in F \Longrightarrow X+X' \in F$?

$X \in F \Longleftrightarrow x - y + z = 0$

$X' \in F \Longleftrightarrow x' - y' + z' = 0$

on montre $X+X' \in F \Longleftrightarrow (x+x', y+y', z+z') \in F$

Il suffit de montrer que : $x+x' - (y+y') + z + z' = 0$?

$x+x' - (y+y') + z + z' = x - y + z + x' - y' + z' = 0 + 0 = 0$

donc $X + X' \in F$.

3/ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall X = (x,y,z) \in F \Longrightarrow \lambda . X \in F$

$X = (x,y,z) \in F \Longleftrightarrow x - y + z = 0$

Montrons que : $\lambda \cdot X = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in F$

on montre que : $\lambda x - \lambda y + \lambda z = 0$?

$\lambda x - \lambda y + \lambda z = \lambda(x - y + z) = \lambda . 0 = 0$

donc $\lambda . (x,y,z) \in F$.

d'où F est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

2/ $E = \mathbb{R}^2$,

$F_1 = \{(x,0) / x \in \mathbb{R}\}$, $F_2 = \{(0,y) / y \in \mathbb{R}\}$

F_1 et F_2 sont des s.e.v de $\mathbb{R}^2$.

1/ $0_{\mathbb{R}^2} \in F_1$? $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$

المركّبة الثانية.

$0_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \in F_1$ car la deuxième composante est nulle

2) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall X = (x,0), X' = (x',0) \in F_1 \Rightarrow \lambda.X + \mu.X' \in F_1$

$\lambda.X + \mu.X' = \lambda.(x,0) + \mu.(x',0) = (\lambda x, 0) + (\mu x', 0) = (\lambda x + \mu x', 0) \in F_1$.

Donc d'aprés la proposition 1.2, F_1 est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$.

De même, on montre que F_2 est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$.

1.3 Intersection et somme de sous-espaces vectoriels

تقاطع و مجموع الفضاءات الشعاعية الجزئية

Def 1.3 : Soit E un K-e.v, F_1, F_2 deux s.e.v de E.

1°) $F_1 \cap F_2 = \{x \in E : x \in F_1 \text{ et } x \in F_2\}$ est un s.e.v de E

2°) La partie $F_1 + F_2 = \{x \in E : x = x_1 + x_2 \mid x_1 \in F_1, x_2 \in F_2\}$ est un s.e.v de E, dit (مجموع، جمع) Somme de F_1 et F_2.

Si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$, Cette somme est dite directe (مباشر) et noté $F_1 \oplus F_2$.

3°) Si $E = F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$, alors on dit que E est la somme directe de F_1 et F_2, ou encore F_1 et F_2 sont (متكاملة) supplémentaire dans E (متكاملان في E) et on ecrit $E = F_1 \oplus F_2$.

Exemples 1) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e.v des fonctions réelles

$F_1 = \{f \in E : f \text{ paire (زوجية)}\}$, $F_2 = \{f \in E : f \text{ impaire (فردية)}\}$

$F_1 \cap F_2 = \{0\}$ (0 la fonction nulle, qui est paire et impaire en même temps)

$E = F_1 + F_2$ (Exercice), donc $E = F_1 \oplus F_2$.

2) $E = \mathbb{R}^2$, dans l'exemple 2, précedant

$F_1 \cap F_2 = \{0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)\}$

$F_1 + F_2 = \mathbb{R}^2$ donc $\mathbb{R}^2 = F_1 \oplus F_2$.

En effet • si $(x,y) \in F_1 \cap F_2 \Leftrightarrow (x,y) \in F_1$ et $(x,y) \in F_2 \Rightarrow y = 0$ et $x = 0$
$\Rightarrow F_1 \cap F_2 = \{(0,0)\}$

• si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $(x,y) = (x,0) + (0,y) \mid (x,0) \in F_1$ et $(0,y) \in F_2$

donc $\mathbb{R}^2 = F_1 + F_2$ d'où $\mathbb{R}^2 = F_1 \oplus F_2$.