**Université Mohamed Seddik Ben Yahia - Jijel -**

**Faculté des Sciences Exactes et Informatique** **Année Universitaire 2022/2023**

**Département d'Informatique**

# Série 1 (Espaces vectoriels)

## Exercice 1 :

Soit $E=\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ munie des lois $(\oplus)$ et $(.)$ définies par:

$(x,y),(x',y')\in E: (x,y)\oplus(x',y')=(x+x',yy')$
$\lambda\in\mathbb{R},(x,y)\in E: \lambda.(x,y)=(\lambda x,y^\lambda)$
Montrer que $(\mathrm{E},\oplus,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

**Exercice 2 :** Soit $E=\mathbb{R}^2$ munie des lois $(\oplus)$ et $(.)$ définies par:

$(x,y),(x',y')\in E: (x,y)\oplus(x',y')=(x+x',y+y')$
$\lambda\in\mathbb{R},(x,y)\in E: \lambda.(x,y)=(\lambda x,\frac{y}{\lambda})$, si $\lambda\neq 0$ et $0.(x,y)=(0,0)$.

Comparer $(\lambda+\mu).(x,y)$ et $\lambda.(x,y)+\mu.(x,y)$ et déduire que $(\mathrm{E},\oplus,.)$ n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

**Exercice 3:** On a appelle **polynôme** d'indéterminé X sur le corps $\mathbb{R}$, toute expression P(X) donnée par : $P(X)=\sum_{i=0}^{i=n} a_i X^i$ tel que les $a_i\in\mathbb{R}$ dits les **coefficients** de P(X) avec $a_n\neq 0$ appelé **coefficient dominant** et $n$ le **degré** de P(X) noté d°(P(X)). Si tous les coefficients de P(X) sont nuls, le polynôme est appelé **polynôme nul** noté 0(X) ou 0 et son degré par convention est $-\infty$.

On note $E=\mathbb{R}[X]=\{ P(X)=\sum_{i=0}^{i=n} a_i X^i \,/\, a_i\in\mathbb{R},\, n\in\mathbb{N}\}$, qu'on munie des lois (+) et (.) :

$P(X)=\sum_{i=0}^{i=n} a_i X^i$, $Q(X)=\sum_{i=0}^{i=m} b_i X^i \in\mathbb{R}[X]$: $P(X)+Q(X)=\sum_{i=0}^{i=r}(a_i+b_i)X^i$, $r\leq\max(n,m)$

$\lambda\in\mathbb{R}$, $P(X)=\sum_{i=0}^{i=n} a_i X^i\in\mathbb{R}[X]$: $\lambda.P(X)=\sum_{i=0}^{i=n}\lambda a_i X^i$.

1- Montrer que $(\mathbb{R}[X],+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2- On note $\mathbb{R}_2[X]=\{ P(X)\in\mathbb{R}[X] : d°(P(X))\leq 2\}=\{P(X)\in\mathbb{R}[X] : P(X)=a_0+a_1X+a_2X^2\}$
Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

**Exercice 4:** Vérifier si F est un sous espaces vectoriel de E.

1- $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-y+3z=0\}$, $E=\mathbb{R}^3$.
2- $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x-y+3t+1=0\}$, $E=\mathbb{R}^4$.
3- $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-yz=0\}$, $E=\mathbb{R}^3$.
4- $F=\{P(X)\in\mathbb{R}_2[X]: p(-X)=P(X)\}$, $E=\mathbb{R}_2[X]$.

## Exercice 5:

1- Vérifier si le vecteur $v=(1,2,3)$ est une combinaison linéaire des vecteurs : $v_1=(1,-1,1)$, $v_2=(1,1,1)$.
Même question pour $w=(-1,3,-1)$.
2- Etudier si la famille A des vecteurs du $\mathbb{R}$-e.v E est libre ou non ?
$A=\{ v_1=1,2,3), v_2=(2,3,1). v_3=(3,1,2)\}$, $E=\mathbb{R}^3$.
$A=\{ P_1=1+X+X^2, P_2=1-X+2X^2, P_3=-1+3X-3X^2\}$, $E=\mathbb{R}^3$.

Responsable du module : M. Chelgham