Chapitre 5 :

Fonctions dérivables

Motivation.

La notion de dérivée est une notion fondamentale en analyse permettant d'étudier les variations d'une fonction, de construire des tangentes à une courbe et de résoudre des problèmes d'optimisation.

En sciences, lorsqu'une grandeur est fonction du temps, la dérivée de cette grandeur donne la vitesse instantanée de variation de cette grandeur, et la dérivée de la dérivée donne l'accélération. Par exemple, la vitesse instantanée d'un mobile est la valeur à cet instant de la dérivée de sa position par rapport au temps, et son accélération est la valeur à cet instant de la dérivée, par rapport au temps, de sa vitesse.

5.1. Définitions et propriétés.

Définition 1. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie au voisinage de $x_0 \in D$.

On dit que f est dérivable en x_0 si la limite suivante existe :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

On appelle cette limite « dérivée de f au point x_0 » , notée par $f'(x_0)$.

Interprétation géométrique.

- f dérivable en x_0 signifie que le graphe de f admet au point d'abscisse x_0 une tangente de pente $f'(x_0)$. L'équation de cette droite est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

- Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$, le graphe de f admet au point d'abscisse x_0 une tangente parallèle à l'axe Oy. Même f n'est dérivable en x_0.

Remarques.

1) Pour démontrer la dérivabilité, on peut utiliser la limite suivante :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Dans ce cas, on peut écrire : $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h) \quad , \quad t.q \ \lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

2) On dit que f est dérivable à droite en x_0 si la limite à droite existe, et dans ce cas cette limite s'appelle « dérivée à droite » notée $f'_d(x_0)$.

3) On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si la limite à gauche existe, et dans ce cas cette limite s'appelle « dérivée à gauche » notée $f'_g(x_0)$.

4) On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si elle admet en x_0 une dérivable à gauche et une dérivée à droite égales.

Exemples. Les fonctions : x^n , $\ln x$, e^x , $\cos x$, $\sin x$ sont dérivables en tout point de l'ensemble de définition.

Définition 2. Soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle, tel que D est un intervalle ouvert.

On dit que f est dérivable sur D si elle est dérivable en tout point de D .

Dans ce cas, on définit « la fonction dérivée de f » , on la note f' par :

$$\begin{aligned} f:\ & D \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longrightarrow f'(x) \end{aligned}$$

Exemples. La fonction valeur absolue $f(x) = |x|$ est dérivable à droite et à gauche en $x_0 = 0$, mais elle n'est dérivable en $x_0 = 0$.

Proposition 1. Si f est dérivable en x_0 alors elle est continue en x_0.

Démonstration. f est dérivable en x_0 si :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h) \quad , \quad t.q \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

Donc, par passage à la limite, on trouve : $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$, i.e. pour $x = x_0 + h$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Remarques.

1) La réciproque est fausse : la continuité n'implique pas la dérivabilité. **Par exemple :** On a vu que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable au point « 0 » portant elle est continue.
2) Pour démontrer qu'une fonction n'est pas dérivable, il suffit de démontrer qu'elle n'est pas continue.

Proposition 2. Soient f, g deux fonctions dérivables en x_0, alors les fonctions : $f + g$, $f.g$, $\frac{f}{g}$ (avec $g(x_0) \neq 0$) sont dérivables en x_0 et on a :

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \qquad , \qquad (f.g)'(x_0) = f'(x_0).g'(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0).g(x_0) - f(x_0).g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Proposition 3. (Dérivée de la composition)

Soient f une fonction dérivable en x_0 et g une fonction dérivable en $f(x_0)$. Alors la fonction composée gof est dérivable en x_0 et on a :

$$(gof)'(x_0) = f'(x_0).g'(f(x_0))$$

Proposition 4. (Dérivée de la réciproque)

Soit f une fonction strictement monotone et continue sur un intervalle I. Si f est dérivable en x_0 telle que $f'(x_0) \neq 0$, alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $y = f(x_0)$ et on a :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

5.2. Dérivées successives.

Définitions 3. Soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur D.

- Si f' est dérivable sur D on note sa dérivée $f"$ ou $f^{(2)}$. Dans ce cas, on dit que f est dérivable 2 fois, et on appelle $f^{(2)}$ la dérivée seconde de f.
- Si $f^{(2)}$ est dérivable sur D on note sa dérivée $f^{(3)}$. Dans ce cas, on dit que f est dérivable 3 fois, et on appelle $f^{(3)}$ la dérivée d'ordre 3 de f.
- … … … etc.
- Si $f^{(n-1)}$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) est dérivable sur D on note sa dérivée $f^{(n)}$. Dans ce cas, on dit que f est dérivable n fois, et on appelle $f^{(n)}$ la dérivée n-ième ou dérivée d'ordre n de f.
- Ainsi, on a défini les dérivées successives de f par :

$$f^{(0)} = f \ , \dots \dots \ , f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$$

Définitions 4. Soit une fonction $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$.

- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur D si : $f^{(n)}$ existe et continue sur D.
- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D (on dit aussi f est indéfiniment dérivable) si : $f^{(n)}$ existe et continue sur , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 5. **(Formule de Leibniz)**

Soient f, g deux fonctions dérivables n fois en x_0 alors : $f.g$ est dérivable n fois en x_0 et on a :

$$(f.g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0).g^{(n-k)}(x_0)$$

5.3. Extrema.

Dans cette section, on suppose que la fonction f est dérivable sur un intervalle ouvert I.

Définitions 4. Soit une fonction $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$.

1) Le point $\alpha \in I$ est un **point critique** de f si on a : $f'(\alpha) = 0$. On note l'ensemble des points critiques de f par $\mathcal{P}_c$.
2) On dit que la fonction f admet un **maximum local** en α si :

$$\exists J \subset I, \ \forall x \in J : \quad f(x) \leq f(\alpha)$$

3) On dit que la fonction f admet un **maximum global** en α si :

$$\forall x \in J : \quad f(x) \leq f(\alpha)$$

4) On dit que la fonction f admet un **minimum local** en α si :

$$\exists J \subset I, \ \forall x \in J : \quad f(x) \geq f(\alpha)$$

5) On dit que la fonction f admet un **minimum global** en α si :

$$\forall x \in J : \quad f(x) \geq f(\alpha)$$

6) On dit que la fonction f admet un **extremum local** (resp. **global**) en α si elle admet un maximum local et un minimum local en α (resp. global).
7) On note l'ensemble des extremums par .

Proposition 6. **(Variations et dérivée)**

- Si $f'(x) = 0\,, \forall x \in I$ alors f est constante sur I.
- Si $f'(x) \geq 0\,, \forall x \in I$ alors f est croissante sur I.
- Si $f'(x) > 0\,, \forall x \in I$ alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f'(x) \leq 0\,, \forall x \in I$ alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) < 0\,, \forall x \in I$ alors f est strictement décroissante sur I.

Remarque. Les propriétés strictes restent valables si f' s'annule en des points isolés.

Proposition 7. **(Extrema local – condition nécessaire)**

Si f admet un extrèmum local en x_0 et si f est dérivable en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$

Proposition 8. **(Extrema local – condition suffisante)**

Si f est dérivable deux fois en x_0 et si $f'(x_0) = 0\,, f''(x_0) \neq 0$, alors f admet un extrèmum local en x_0. De plus on a : si $f''(x_0) < 0$ alors $f(x_0)$ un maximum et si $f''(x_0) > 0$, alors $f(x_0)$ c'est un minimum.