TD N°1

$(L.E)$ = **Laisser aux étudiants.**

Exercice 1:

1) Pour $p, q \in \mathbb{Q}$, montrer que $p + q \in \mathbb{Q}$. (i.e. la somme de deux rationnels est un rationnel)
2) Est-ce que la somme de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel ? Donner un contre-exemple.
3) Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, puis montrer que $2 - 3\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$. $(\boldsymbol{L.E})$
4) Montrer par récurrence l'inégalité suivante, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} - 1$$

Exercice 2:

1) Soit le nombre rationnel : $x = 0{,}234234234\ldots$
   Comparer les nombres $1000x$ et x , puis écrire x sous frome d'une fraction.
2) Ecrire les nombres suivants sous forme d'une fraction : $(\boldsymbol{L.E})$

$$a = 0{,}1212 \qquad ; \qquad b = 0{,}12\overleftrightarrow{12}\ldots \qquad ; \qquad c = 78{,}33\overleftrightarrow{456}\ldots$$

3) Montrer que l'écriture décimale d'un nombre rationnel est équivalente à l'écriture fractionnaire.

Exercice 3: (Rattrapage 2022/2023)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note par $\bar{E}(x)$ (où $\lceil x \rceil$) la partie entière supérieure de x définie par:

$\bar{E}(x) = \min\{k \in \mathbb{Z},\ k \geq x\}$, dans ce cas on a : $\bar{E}(x) - 1 < x \leq \bar{E}(x)$.

1) Calculer $E(\pi)$, $E(-\frac{1}{2})$ et $\bar{E}(\pi)$, $\bar{E}(-\frac{1}{2})$.
2) Pour tout entier naturel n pair, calculer : $E\left(\frac{n}{2}\right)$ et $\bar{E}\left(\frac{n}{2}\right)$.
3) Pour tout entier naturel m, calculer : $E\left(m + \frac{1}{2}\right)$ et $\bar{E}\left(m + \frac{1}{2}\right)$.
4) En traitant les cas pair et impair, déduire que :

$$E\left(\frac{n}{2}\right) + \bar{E}\left(\frac{n}{2}\right) = n \qquad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exercice 4: $(\boldsymbol{L.E})$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer les formules suivantes :

$$E(\alpha) + E(-\alpha) = 0 \qquad ; \qquad E(\beta) + E(-\beta) = -1 \qquad ; \qquad E\left(\frac{x}{2}\right) + E\left(\frac{x+1}{2}\right) = E(x)$$

Exercice 5: $(\boldsymbol{L.E})$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer les inégalités suivantes:

1) $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$.
2) $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$.

Exercice 6: Dans chacun des cas suivants, préciser si la partie A de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, une borne inférieure, un plus grand, un plus petit élément et déterminer s'il y a lieu :

1) $A = [0\,,1[$
2) $A = \left\{\frac{1}{2n} \quad , \; n \in \mathbb{N}^*\right\}$
3) $A = \left\{2 + \frac{(-1)^n}{n} \quad , \; n \in \mathbb{N}^*\right\}$ $\quad (\boldsymbol{L.E})$
4) $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0\,,1 - \frac{1}{n^2}\right]$
5) $A = \left\{\sin\frac{n\pi}{3} \quad , \; n \in \mathbb{N}\right\}$ $\quad (\boldsymbol{L.E})$

Exercice 7: Pour les ensembles suivants :

$$\left\{\frac{(-1)^n}{n} \quad , \qquad n \in \mathbb{N}^*\right\} \quad ; \quad \left\{\frac{1}{x} \; ,1 \le x \le 2\right\} \; (\boldsymbol{L.E}) \quad ; \qquad [0\,,1[\, \cup \,]2\,,3]$$

1) Est-ce qu'il est majoré ? minoré ?
2) Déterminer l'ensemble des majorants et l'ensemble des minorants.
3) Existe-il : le max , le sup , le min , l'inf ?

Exercice 8: (Examen 2022/2023)

Soit l'ensemble définie par :

$$E = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2} \quad , \qquad n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

1) Montrer que E est la réunion de deux ensembles $E_1\,, E_2$.
2) Montrer que E_1 et E_2 sont bornés, et déterminer (s'ils existent) la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum et le minimum de chaque ensemble.
3) Déduire que E est borné, et déterminer (s'ils existent) la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum et le minimum.

Indication : $\sup(A \cup B) = \max(\sup A\,, \sup B) \quad , \quad \inf(A \cup B) = \min(\inf A\,, \inf B)$