

## TD 01\_correction

### Exercice 01 : Construction de nouveaux ensembles

Soient  $E_1 = \{a, b\}$ ,  $E_2 = \{b, c, d\}$ ,  $P(E)$  est l'ensemble des parties de  $E$  et  $E = \{a, b, c, d\}$ . Calculer :

1.  $E_3 = E_1 \cap E_2 = \{b\}$  ;
2.  $E_4 = E_1 \cup E_2 = \{a, b, c, d\}$  ;
3.  $E_5 = E_2 - E_1 = \{c, d\}$  ;
4.  $E_6 = \overline{E_1} = \{c, d\}$  ;
5.  $E_7 = \overline{E_2} = \{a\}$  ;
6.  $E_8 = E_5 \cup E_6 = \{c, d\}$  ;
7.  $E_9 = E_1 \times E_2 = \{(a,b), (a,c), (a,d), (b,b), (b,c), (b,d)\}$
8.  $E_{10} = E_3 \times E_4 = \{(b, a), (b, b), (b, c), (b, d)\}$  ;
9.  $E_{11} = E_5 \times E_7 = \{(c, a), (d, a)\}$
10.  $E_{12} = P(E_1) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
11.  $E_{13} = P(E_2) = \{\phi, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}\}$
12.  $E_{14} = E_{12} \cap E_{13} = \{\phi, \{b\}\}$

### Exercice 02 : Alphabet

Pour chacun des mots (ou phrases) suivants (suivantes) donnez un alphabet :

1. 101000100 (codage binaire)
2. 256150100 (codage d'un pixel selon la méthode RVB)
3. 18.75 (Note entre 0 et 20)
4. -5.25 (Température entre -70 et 60)
5. `if (a>b){ a++ ; }` (Un code en langage C)
6.  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$  (Formule mathématique)

### Exercice 03 : mots

Soit le mot  $x = ((acbc)^R.baca)^R$

1. Donner la chaîne de caractères à laquelle  $x$  est égal.  **$x=acabacbc$**
2. Quelle est la valeur de  $|x|$ ,  $|x|_a$ ,  $|x|_b$  et  $|x|_c$  ?  
 **$|x|=8$ ,  $|x|_a=3$ ,  $|x|_b=2$  et  $|x|_c=3$**
3. Donner un *préfixe* de  $x$  contenant au moins deux lettres 'c'.  
***acabac***
4. Donner un *suffixe* de  $x$  contenant une seule lettre 'a'.  
***acbc***

### Exercice 04 : mots -langages

Pour chacun des langages suivants, donner des exemples de mots contenus dans chacun des langages :

- 1)  $L_1 = \{ w \in \{a, b, c\}^* / w \text{ commence par la lettre 'a'} \}$  ;  
 **$L_1 = \{a, aa, ac, ab, abb, acb, acc, aba, aaa, \dots\}$**   
 **$\text{Exp}=a(a+b+c)^*$**

- 2)  $L_2 = \{ w \in \{a, b, c\}^* / w \text{ se termine par la lettre 'a' } \}$ ;  
 $L_2 = \{a, aa, ba, ca, cba, bca, aaa, bba, cca, \dots\}$   
 $\text{Exp} = (a+b+c)^*a$
- 3)  $L_3 = \{ w \in \{a, b, c\}^* / w \text{ contient au moins une occurrence de la lettre 'a' } \}$ ;  
 $L_3 = \{a, aa, ba, ab, ac, ca, cab, bac, bba, aab \dots\}$   
 $\text{Exp} = (a+b+c)^*a(a+b+c)^*$
- 4)  $L_4 = \{ w \in \{a, b, c\}^* / w \text{ contient au moins deux occurrences la lettre 'a' } \}$ ;  
 $L_4 = \{aa, aba, aab, aca, caa, aac, acaab, \dots\}$   
 $\text{Exp} = (a+b+c)^*a(a+b+c)^*a(a+b+c)^*$
- 5)  $L_5 = \{ w \in \{a, b, c\}^* / w \text{ contient au moins deux occurrences consécutives de la lettre 'a' } \}$   
 $L_5 = \{aa, baaa, baaab, aaa, aabc, \dots\}$   
 $\text{Exp} = (a+b+c)^*aa(a+b+c)^*$
- 6)  $L_6$  : Ensemble des mots construits sur l'alphabet  $\{a, b\}$ , commençant par des **a** et se terminant par des **b** et tel que le nombre de **a** et le nombre de **b** soit égal  
 $L_6 = \{ab, abab, abbaab, ababaabb, \dots\}$   
 $\text{Exp} = \text{impossible (le langage n'est pas régulier)}$

#### Exercice 05 : Construction de langages

- Donnez le langage  $L_1$  des mots de longueur 2 définis sur l'alphabet  $\{a, b\}$ .
- Donnez le langage  $L_2$  des mots de longueur 2 définis sur l'alphabet  $\{a, b, c\}$  contenant un **a** ou un **b** mais pas les deux.
- Donnez le langage  $L_3$  des mots tel que  $L_3 = L_1.L_2$ .
- Donnez le langage  $L_4$  des mots tel que  $L_4 = (L_1.L_2).L_3$ .
- Donnez le langage  $L_5$  des mots tel que  $L_5 = L_1.(L_2.L_3)$ .
- Donnez le langage  $L_6$  des mots tel que  $L_6 = L_3.(L_1.L_2)$ .
- Donnez le langage  $L_7$  des mots tel que  $L_7 = L_1|L_2$ .
- Donnez le langage  $L_8$  des mots tel que  $L_8 = L_1 \cap L_2$ .
- Donnez le langage  $L_9$  de tous les mots définis sur l'alphabet  $\{a, b\}$ .

#### Exercice 06 : Langages

Sur l'alphabet  $A = \{a, b\}$ , on considère le langage  $L_1$  des mots formés de **n** fois la lettre **a** suivi de **n** fois la lettre **b**, et le langage  $L_2$  des mots comportant autant de **a** que de **b**.

- Définir formellement ces deux langages.

- ✓  $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* / w = a^n b^n ; n \in \mathbb{N}\}$
- ✓  $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* / |w|_a = |w|_b\}$

- Que sont les langages suivants :  $L_1 \cup L_2, L_1 \cap L_2, L_1^2, (L_2)^2$  ?

- ✓  $L_1 \cup L_2 = L_2$  (car  $L_1 \subset L_2$ )
- ✓  $L_1 \cap L_2 = L_1$  (car  $L_1 \subset L_2$ )
- ✓  $(L_1)^2 = \{a^n b^n a^m b^m / n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$

$$\checkmark \quad (L_2)^2 = L_2$$

- Que peut-on dire de  $L_1^*$  et  $L_2^*$  par rapport à  $L_1$  et  $L_2$  ?

$$\checkmark \quad L_1 \subset (L_1)^* \subset L_2$$

$$\checkmark \quad (L_2)^* = L_2$$

### Exercice 07 : langages

Sur l'alphabet  $A = \{0, 1\}$ , on considère les langages  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  et  $L_4$  définis par

$$L_1 = \{01^n/n \in \mathbb{N}\} \quad L_2 = \{0^n1/n \in \mathbb{N}\}$$

$$L_3 = \{00, 11\} \quad L_4 = \{0, 1, 01\}$$

Définir les langages  $L_1L_2$ ,  $L_1 \cap L_2$  et  $(L_1)^2$ ,  $L_3.L_4$

$$\checkmark \quad L_1L_2 = \{01^n0m1/n, m \in \mathbb{N}\}$$

$$\checkmark \quad L_1 \cap L_2 = \{01\}$$

$$\checkmark \quad (L_1)^2 = \{01^n01^m/n, m \in \mathbb{N}\}$$

$$\checkmark \quad L_3.L_4 = \{000, 001, 0001, 110, 111, 1101\}$$

### Exercice 08 : Jeux appartenance d'un mot à un langage

1. Soient les deux expressions régulières suivantes :

$$- R1 = a(ab)^*ba$$

$$- R2 = (ab)^*(ba)^*(a^*b^*)$$

a) Donnez un mot  $m_1 \in L(R1) \wedge m_1 \notin L(R2)$ .  $m_1 = \mathbf{aabbba}$

b) Donnez un mot  $m_2 \in L(R2) \wedge m_2 \notin L(R1)$ .  $m_2 = \mathbf{ba}$

c) Donnez un mot  $m_3 \in L(R1) \wedge m_3 \in L(R2)$ .  $m_3 = \mathbf{aba}$

d) Donnez un mot  $m_4 \notin L(R1) \wedge m_4 \notin L(R2)$ .  $m_4 = \mathbf{aabbab}$

2. Soient les deux expressions régulières suivantes :

$$- S1 = a(a|b)^*ba$$

$$- S2 = (ab)^*|(ba)^*|(a^*|b^*)$$

a) Donnez un mot  $m_1 \in L(S1) \wedge m_1 \notin L(S2)$ .  $m_1 = \mathbf{aaba}$

b) Donnez un mot  $m_2 \in L(S2) \wedge m_2 \notin L(S1)$ .  $m_2 = \mathbf{b}$

c) Donnez un mot  $m_3 \in L(S1) \wedge m_3 \in L(S2)$ .  $m_3 = \mathbf{il\ n'existe\ pas}$

d) Donnez un mot  $m_4 \notin L(S1) \wedge m_4 \notin L(S2)$ .  $m_4 = \mathbf{baa}$

3. Soient les deux expressions régulières suivantes :

$$- RS1 = (a|b)^*b$$

$$- RS2 = [(a|b)(a|b)]^*$$

a) Donnez pour  $RS1$  et  $RS2$  les expressions régulières dénotant les langages compléments de  $L(RS1)$  et  $L(RS2)$ .

$$\checkmark \quad \mathbf{RS1} = (a|b)^*a / \epsilon$$

$$\checkmark \quad \mathbf{RS2} = [(a|b)(a|b)]^*(a/b)$$

### Exercice 09. : Jeux expression régulière dénotant un langage

Nous gardons le même principe de l'exercice précédent.

1. Trouvez une expression régulière  $ER1$  dénotant l'ensemble des mots sur l'alphabet  $A=\{a,b,c\}$ .  
 **$ER1=(a+b+c)^*$**
2. Trouvez une expression régulière  $ER2$  dénotant l'ensemble des mots non vides sur l'alphabet  $A = \{a, b, c, d\}$ .  
 **$ER2=(a+b+c+d)(a+b+c+d)^*$**
3. Trouvez une expression régulière  $ER3$  dénotant l'ensemble des mots non vides commençant par  $c$  et se terminant par  $a$  sur l'alphabet  $A = \{a, b, c, d\}$ .  
 **$ER3=c(a+b+c+d)^*a$**
4. Trouvez une expression régulière  $ER4$  dénotant l'ensemble des entiers naturels codés sur l'alphabet  $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$   
 **$ER4=0+(1+2+\dots+9)(0+1+2+\dots+9)^*$**
5. Trouvez une expression régulière  $ER5$  dénotant l'ensemble des mots sur l'alphabet  $A=\{a,b,c\}$ :
  - Comportant exactement deux  $a$ .
  - Tout  $b$  est suivi d'au moins deux  $c$ .
  - Se termine par  $a$ .  
 **$ER5=(bcc+c)^*a(bcc+c)^*a$**

#### Exercice 10 :

Donnez une expression régulière qui accepte chacun des langages suivants (définis sur l'alphabet  $A = \{0, 1\}$ ) :

1. L'ensemble  $\{0, 1\}$   
 **$(0+1)$**
2. l'ensemble de toutes les chaînes constituées d'un nombre quelconque (éventuellement nul) de 0 ou de 1.  
 **$(0+1)^*$**
3. Toutes les chaînes qui se terminent par 00.  
 **$(0+1)^*00$**
4. l'ensemble  $\{00, 01, 10, 11\}$ , c'est à dire l'ensemble des chaînes de 0 et de 1 de longueur deux.  
 **$00+01+10+11$  ou bien  $(0+1)(0+1)$**
5. l'ensemble constitué de la chaîne  $a$  et de toutes les chaînes commençant par un nombre quelconque (éventuellement nul) de 0 et se terminant par un 1.  
 **$0^*(0+1)^*1$**
6. Ensemble de toutes les chaînes dans lesquelles chaque paire de 0 apparaît devant une paire de 1.  
 **$(1+01+0011)^*(\epsilon+0)$**

7. Ensemble de toutes les chaînes ne contenant pas 101.

$$(0+11^*00)^*(\epsilon+11^*+11^*0)$$

8. Tous les nombres binaires divisibles par 4.

$$(0+(0/1)^*00)$$

### Exercice 11

Soit l'alphabet  $A = \{a,b\}$ ,

Donner les expressions régulières correspondantes aux langages suivants :

1.  $L1 = \{\epsilon, a, b, ab\}$

$$EX1=(\epsilon+a+b+ab)$$

2.  $L2 = \{b^n / n \geq 2, n \text{ étant un entier}\}$

$$EX2=bbb^*$$

3.  $L3 = \{w \in \{a,b\}^*, \text{ tel que } w \text{ contient seulement } 3b, \text{ le reste c'est des } a's\}$

$$EX3=a^*ba^*ba^*ba^*$$

4.  $L4 = \{w \in \{a,b\}^*, \text{ tel que } w \text{ contient un nombre de } a \text{ divisible par } 3\}$

$$EX4=(b^*ab^*ab^*ab^*)^*+b^*$$

5.  $L5 = \{w \in \{a,b\}^*, \text{ tel que } w \text{ contient un nombre paire de } a\}$

$$EX5=(b^*ab^*ab^*)^*=b^*(ab^*a)^*b^*=(b+ab^*a)^*$$

6.  $L6 = \{w \in \{a,b\}^*, \text{ tel que } w \text{ contient un nombre impaire de } b\}$

$$EX6=a^*b(a^*ba^*ba^*)^*=a^*b(a+ba^*b)^*$$

7.  $L7 = \{w \in A^*, w \text{ ne contient pas } 3b \text{ consécutifs}\}$

$$EX7=(a+ba+bba)^*(\epsilon+b+bb)$$

8.  $L8 = \{w \in \{a,b\}^*, \text{ tel que } w \text{ contient la sous chaîne } aaa \text{ ou la sous chaîne } bbb \text{ mais pas les deux en même temps}\}$

$$\text{On a } L8=L9+L10$$

$L9=$   $w$  contient la sous chaîne  $aaa$  mais pas la sous chaîne  $bbb$

$L10=$   $w$  contient la sous chaîne  $bbb$  mais pas la sous chaîne  $aaa$

$$EX8= EX9+EX10$$

$$=[(a+ba+bba)^*(\epsilon+b+bb)aaa(a+ba+bba)^*(\epsilon+b+bb)]+[(b+ab+aab)^*(\epsilon+a+aa)bbb(b+ab+aab)^*(\epsilon+a+aa)]$$