

## TD N°3

### Exercice 1:

1) Montrer l'inégalité suivante pour  $a, b \in \mathbb{R} : 4ab \leq (a + b)^2$

2) Déterminer les domaines de définition des fonctions

$$f(x) = 2\sqrt{x(1-x)} + 1 \quad , \quad g(x) = 2\sqrt{(x-1)(2-x)} + 3$$

3) En utilisant la question 1), donner un encadrement des éléments de  $f(D_f)$  et  $g(D_g)$ .

4) Montrer que  $g \circ f$  est bien définie sur  $D_f$ . Qu'en est-il pour  $f \circ g$ ?

### Exercice 2:

Soient  $f, g$  deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}^+$  telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ , \quad g(x) > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R}^*$$

1) Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ .

2) Si  $\ell > 0$ , montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

### Exercice 3:

1) Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1$$

2) Soient  $m, n$  des entiers positifs. Etudier la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n} = 1$$

3) Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\sqrt{1+x+x^2} - 1) = \frac{1}{2}$$

### Exercice 4:

Calculer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2|x|}{x}$

2)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x^2 \ln x}$

3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n - 1} \quad (L.E)$

4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2} \quad (L.E)$

5)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$

6)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{\ln x + 1}$

### Exercice 5: (L.E)

Calculer les limites suivantes:

1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2|x|}{x}$

2)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \ln x + \sqrt{x}$

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$

4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x \ln x}$

5)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x+1} \ln \frac{x^3+4}{1-x^2}$

6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$

**Exercice 6:** Calculer les limites suivantes:

$$\begin{array}{lll} 1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{x^n - a^n} & 2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x (\cos 2x - \cos x)} & 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \quad (L.E) \\ 4) \lim_{x \rightarrow 0} xE\left(\frac{1}{x}\right) & 5) \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha} - \sqrt{x - \alpha}}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}} & 6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{1 + x^\alpha \sin^2 x} \quad (L.E) \end{array}$$

**Exercice 7:** Utiliser un changement de variable pour évaluer les limites suivantes:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\ln x)}{\ln x} \qquad b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2x}}{\sin \sqrt{2x}}$$

**Exercice 8:** (L.E)

Trouver pour  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ , les limites suivantes:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x} \qquad b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x}$$

**Exercice 9:** (Rattrapage 2022/2023)

1) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\ln(x+1) - \ln x) \qquad , \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+1) - \ln x)$$

2) Dédurre que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ .

**Indication.** Pour  $b > 0$ , on a :  $\frac{1}{b+1} < \ln(b+1) - \ln b < \frac{1}{b}$ .

**Exercice 10:** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par:

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si } x < 2 \\ a & \text{si } x = 2 \\ x^2 + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Déterminer les nombres  $a$  et  $b$  pour que  $f$  soit continue sur  $\mathbb{R}$ .

