Exercices d'Orsay

Table des matières

Première partie

SM1 Exercices

1 Nombres complexes

1.1 Forme cartésienne, forme polaire

Exercice 1 Calculer le module des nombres complexes suivants :

$$Z_1 = -i \quad ; \quad Z_2 = 1+i \quad ; \quad Z_3 = 2i(3+i)(1+i)$$
$$Z_4 = \frac{(2+3i)(1+2i)}{(-1+i)(1+i)} \quad ; \quad Z_5 = \frac{(1+i)^4}{2+i} \quad ; \quad Z_6 = \frac{2+i}{1-i} + \frac{2i}{1+i}$$

Exercice 2 Placer sur le cercle trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$Z_1 = e^{i0} \quad ; \quad Z_2 = e^{i\pi/6} \quad ; \quad Z_3 = e^{i\pi/4} \quad ; \quad Z_4 = e^{i\pi/2}$$

Exercice 3 Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$1+i \quad ; \quad 1-i\sqrt{3} \quad ; \quad -\sqrt{3}+i \quad ; \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$$

Exercice 4 Mettre sous forme algébrique, c'est-à-dire sous la forme $a+ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$, les nombres complexes suivants :

$$Z_1 = \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad Z_2 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad Z_3 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$$
$$Z_4 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \quad ; \quad Z_5 = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$$

1.2 Trigonométrie

Le but des exercices suivants est de retrouver les formules usuelles de trigonométrie à partir des propriétés de l'exponentielle complexe. On rappelle les propriétés suivantes $(x,\, y \in \mathbb{R})$:

$$|e^{ix}| = 1 \quad ; \quad e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} \quad ; \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x\,.$$

Exercice 5

1. Montrer que $(e^{i\theta})^{-1} = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.
2. Etablir les formules d'Euler :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Exercice 6

1. Calculer $\sin(x+y)$, $\cos(x+y)$ et $\tan(x+y)$ en fonction des sinus, cosinus et tangente de x ou de y ; en déduire les formules de calcul pour $\sin(2x)$, $\cos(2x)$ et $\tan(2x)$ $(x,\, y \in \mathbb{R})$.
2. Calculer $\cos x$ et $\sin x$ en fonction de $\tan\frac{x}{2}$ pour $x \neq \pi + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 7 En utilisant les formules d'Euler,

1. exprimer $\cos a \cos b$, $\sin a \sin b$ et $\cos a \sin b$ à l'aide de somme de cosinus et/ou sinus,
2. linéariser $\cos^2 a$ et $\sin^2 a$.

Exercice 8 Etablir la formule de Moivre ($\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$) :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Exercice 9 Calculer $Z = (1 + i\sqrt{3})^{2003}$.

Exercice 10 Calculer $\cos(\pi/12)$. *Développer* $\cos(x-y)$ *pour de "bonnes" valeurs de* x *et* y.

Exercice 11 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et placer les images des solutions sur le cercle trigonométrique :

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \tan x = -1\,.$$

Exercice 12 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\cos(5x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)\,.$$

1.3 Géométrie

Exercice 13
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z/(z-1) = i$. Donner la solution sous forme algébrique.
2. Soient M, O et A les points d'affixes respectives z, 0, 1 ; on suppose que ces trois points sont distincts. Interpréter géométriquement le module et un argument de $z/(z-1)$ et retrouver la solution de l'équation du (1).

Exercice 14 Trouver les nombres complexes z tels que

$$a)\ \frac{z-1}{z+1} \in \mathbb{R} \quad ; \quad b)\ \frac{z-1}{z+1} \in i\mathbb{R}.$$

2 Ensembles, réels

2.1 Ensembles

Exercice 15 On pose $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ y > x^2 - 1\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ y < 1 - x^2\}$. Représenter graphiquement A, B, $A \cap B$, $A \cup B$, $\complement A$, $\complement B$, $\complement A \cup \complement B$ et $\complement(A \cap B)$. *Tous les complémentaires sont pris ici dans* $\mathbb{R}^2$. Ecrire chacun de ces ensembles sous la forme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ \ldots\}$.

Exercice 16 Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Exprimer $\complement(A \cap B)$ et $\complement(A \cup B)$ à l'aide de $\complement A$ et $\complement B$.

Exercice 17 Montrer que chacun des ensembles suivants est un intervalle, éventuellement vide,

$$I_1 = \bigcup_{n=1}^{10} \left[1 - \frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right] \quad ; \quad I_2 = \bigcap_{n=1}^{10} \left[1 - \frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right]$$

$$I_3 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} [n, +\infty[\quad ; \quad I_4 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n}, +\infty\right[\,.$$

2.2 Réels

Exercice 18 Mettre sous forme de fractions irréductibles les nombres rationnels suivants, donnés par leurs développements décimaux périodiques :

$$x_1 = 3,14\overparen{14}\dots\ ; \quad x_2 = 0,9\overparen{9}\dots\ ; \quad x_3 = 3,149\overparen{9}\dots$$

Exercice 19 1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.

2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

3. En déduire un encadrement de la somme $\sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, pour tout $N \geqslant 1$.
4. Quelle est la partie entière de $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{10000}}$?
   Encadrer séparément la somme de $n = 2$ à $N = 10000$, puis de $n = 1$ à $N - 1$.

Exercice 20 On note $E(x)$ la partie entière d'un réel x, c'est à dire $E(x)$ est l'unique entier relatif vérifiant $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$.

1. Montrer que pour tout réels x et y, on a $E(x) + E(y) \leqslant E(x+y) \leqslant E(x) + E(y) + 1$.
2. Calculer $E(x) + E(-x)$ pour x réel.
3. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ et pour tout réel x, $E(x) = E\big(E(nx)/n\big)$.

Exercice 21 Comparer $6\sqrt{5}$ et $8\sqrt{3}$, puis $\dfrac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ et $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

Exercice 22 Soient x et y des réels tels que $-5 \leqslant x \leqslant 4$ et $-10 \leqslant y \leqslant -6$.
Trouver des encadrements de $x+y$, $x-y$, xy, x/y et $\sqrt{x^2}$. Que peut-on dire de $1/x$?
– *facultatif* même question pour $-7 \leqslant x \leqslant 9$ et $-2 \leqslant y \leqslant -1$.
  Réponse : $-9 \leqslant x+y \leqslant 8$; $-6 \leqslant x-y \leqslant 11$; $-18 \leqslant xy \leqslant 14$; $-9 \leqslant x/y \leqslant 7$; $0 \leqslant \sqrt{x^2} \leqslant 9$
– *facultatif* même question pour $-12 \leqslant x \leqslant 1$ et $-3 \leqslant y \leqslant 4$.
  Réponse : $-15 \leqslant x+y \leqslant 5$; $-16 \leqslant x-y \leqslant 4$; $-48 \leqslant xy \leqslant 36$; $0 \leqslant \sqrt{x^2} \leqslant 12$.
  x/y n'est pas défini pour $y = 0$ et $\{x/y\ ;\ -12 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } -3 \leqslant y \leqslant 4 \text{ et } y \neq 0\}$ est non borné.
– *facultatif* même question pour $3 \leqslant x \leqslant 4$ et $-5 \leqslant y \leqslant -3$
  Réponse : $-2 \leqslant x+y \leqslant 1$; $6 \leqslant x-y \leqslant 9$; $-20 \leqslant xy \leqslant -9$; $-\frac{4}{3} \leqslant x/y \leqslant -\frac{3}{5}$; $3 \leqslant \sqrt{x^2} \leqslant 4$.

Exercice 23 Dans cet exercice, on demande d'utiliser les propriétés de la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ et non d'étudier les variations d'une fonction. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$\begin{array}{ll} a) & |x-3| + |x+4| \leqslant 7 \\ b) & 0 \leqslant \sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+1} \leqslant 1 \\ c) & \sqrt{x^2-4x+4} \geqslant |\dfrac{3x}{2} - 1| \\ d) & 0 < \dfrac{x}{x^2-1} < 1 \end{array}$$

Exercice 24 Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système d'inéquations

$$\left\{\begin{array}{rcl} |x+1| & < & \frac{5}{2} \\ \sqrt{x^2+x-2} & > & 1+\frac{x}{2}. \end{array}\right.$$

Exercice 25 Démontrer l'implication suivante :

$$|x| \leqslant 1 \Longrightarrow \left|\frac{x+\sin x}{x^7+x-3}\right| \leqslant 2$$

Exercice 26 Pour tout réel a non nul, on note $I_a = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < |a|/2\}$.

1. Décrire en termes d'encadrement, puis en termes d'intervalle, l'ensemble I_a. Hachurer sur la droite réelle l'ensemble I_a pour $a=-2$ et $a=1$. Vérifier que pour tout $x \in I_a$, alors x est non nul et a même signe que a.
2. Peut-on dire qu'il existe une constante $m > 0$ indépendante de a telle que pour tout x appartenant à l'ensemble I_a, on ait $|x| > m$?

Exercice 27 Déterminer si les ensembles suivants sont bornés et en donner eventuellement des bornes.

$$\{\frac{n-1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad \{(-1)^n n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad \{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Exercice 28 Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $2 \leqslant |z| \leqslant 4$. Montrer que

$$\frac{1}{5} \leqslant \left|\frac{5-z}{i+z}\right| \leqslant 9.$$

Exercice 29 Trouver les racines carrées complexes des nombres complexes suivants :

$$Z_1 = -1 \ , \quad Z_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \ , \quad Z_3 = 1+i \ , \quad Z_4 = 5-12i \ , \quad Z_5 = \frac{2-i\sqrt{5}}{3} \ .$$

Pour les trois premiers, on donnera le résultat sous forme algébrique et trigonométrique ; pour Z_4 et Z_5, sous forme algébrique.

Exercice 30 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
a) $z^2+(1-2i)z+1+5i=0$, b) $z^4+(1-2i)z^2-3-i=0$,
c) $(z+1)^4+16(z-1)^4=0$, d) $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3+\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3=0$.

Exercice 31 Énoncer la formule du binôme $(z_1+z_2)^n$ et l'expliciter pour $n=5$. A l'aide de la formule d'Euler et de la formule précédente, exprimer $\cos^5(\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$, $\cos(3\theta)$ et $\cos(5\theta)$.
Plus difficile : essayer de généraliser la formuler pour $\cos^n(\theta)$.
Remarque : cette méthode sera réutilisée pour le calcul d'intégrales de fonctions trigonométriques.

Exercice 32 Somme géométrique :

1. Montrer que pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$. *Formule à connaître.*
2. Soit θ un nombre réel. on pose $Z_n = 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \cdots + e^{ni\theta} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$. Simplifier l'expression de Z_n. En déduire des expressions simples de :

- $C_n = 1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$
- $S_n = \sin(\theta) + \sin(2\theta) + \cdots + \sin(n\theta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$
- $D_n(\alpha) = \cos(\alpha) + \cos(\alpha+\theta) + \cos(\alpha+2\theta) + \cdots + \cos(\alpha+n\theta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(\alpha+k\theta)$.

  Pour D_n, utiliser les formules précédentes

3. Déduire également de la question 1) que la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.

Exercice 33 1. Démontrer par récurrence par les formules suivantes :
- $S_1(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ avec $S_1(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$,
- $S_2(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ avec $S_2(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$.

2. Retrouver la valeur de $S_2(n)$ par une preuve constructive. *Ajouter membre à membre les développements de $(1+1)^3, (2+1)^3, \cdots, (n+1)^3$ obtenus par la formule du binôme et utiliser la valeur de $S_1(n)$.*
3. *facultatif* Montrer (par récurrence ou de manière constructive) que

$$S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = S_1(n)^2 \quad \text{avec} \quad S_3(n) = \sum_{k=0}^{n} k^3.$$

3 Logique et raisonnements

Exercice 34 Ecrire les contraposées des implications suivantes et les démontrer. n est un entier naturel, x et y sont des nombres réels.

1. n premier $\Rightarrow n = 2$ ou n est impair ,
2. $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ et $y \neq 0$,
3. $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.

Exercice 35 Ecrire les réponses aux questions suivantes, portant sur des entiers naturels, sous la forme d'assertions mathématiques (écrites avec les symboles "$\forall$", "et", "ou", "$\Rightarrow$", "$\Leftrightarrow$") et les prouver.

1. Le produit de deux nombres pairs est-il pair ?
2. Le produit de deux nombres impairs est-il impair ?
3. Le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est-il pair ou impair ?
4. Un nombre entier est-il pair si et seulement si son carré est pair ?

Exercice 36 Soient les quatre assertions suivantes :

1. $\exists\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}, x + y > 0$,
2. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}, x + y > 0$,
3. $\exists\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}, y^2 > x$,
4. $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists\, \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, |x| < \alpha \Rightarrow |x^2| < \varepsilon$.

Les assertions 1, 2, 3 et 4 sont elles vraies ou fausses ? Donner leurs négations.

Exercice 37 1. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Montrer par l'absurde que, si n n'est pas premier, il admet un diviseur premier p qui est inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

2. A l'aide de ce critère, déterminer si les nombres 89, 167 et 191 sont premiers.

Exercice 38 Montrer que $\sqrt{89}$ est irrationnel.

Exercice 39 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que soit 4 divise n^2, soit 4 divise $n^2 - 1$.

Exercice 40 * Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $n^3 - n$ est divisible par 6 ,
2. $n^5 - n$ est divisible par 30 ,
3. $n^7 - n$ est divisible par 42 .

Indication : Pour 1, on peut factoriser $n^3 - n$ pour voir que ce nombre est multiple de 2 et de 3. Les cas 2 et 3 peuvent se traiter de façon analogue.

Exercice 41 Démontrer par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3\}, \quad n^2 \leqslant 2^n .$$

Exercice 42 Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit deux propriétés :

$$P_n \ : 3 \text{ divise } 4^n - 1 \quad \text{et} \quad Q_n \ : 3 \text{ divise } 4^n + 1 .$$

1. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ et $Q_n \Rightarrow Q_{n+1}$.
2. Montrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Que penser, alors, de l'assertion : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow Q_n$?

4 Fonctions, limites

4.1 Fonctions

Exercice 43 Donner un exemple de fonction f définie sur $I = [0, 2]$ telle que :
- $f(I)$ ne soit pas un intervalle.
- $f(I)$ soit un intervalle fermé borné.
- $f(I)$ soit un intervalle ouvert borné.
- $f(I)$ soit un intervalle non borné.

Exercice 44 Donner un exemple de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ telles que $f\ o\ g \neq g\ o\ f$.

Exercice 45 1. Montrer que : $\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \quad 4ab \leqslant (a+b)^2$.

2. Déterminer les domaines de définition des fonctions :

$$f(x) = 2\sqrt{x(1-x)} + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = 2\sqrt{(x-1)(2-x)} + 3 \quad ,$$

que l'on note D_f et D_g.

3. En utilisant 1, donner un encadrement des éléments de $f(D_f)$. Faire de même pour $g(D_g)$.
4. Montrer que $g\ o\ f$ est bien définie sur D_f. Qu'en est-il pour $f\ o\ g$?

4.2 Notion de limite

Exercice 46 1. Ecrire la division euclidienne de $(x^3 - 13x + 18)$ par $(x - 2)$.

2. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3+3xsin(x)-13x+6}{xsin(x)-4}$. Montrer que f est définie au voisinage de 2 et montrer, en utilisant les théorèmes sur les limites, que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$.
3. En revenant à la définition de la limite, montrer, à l'aide d'une majoration de $|f(x) - 3|$, que la limite de f en 2 existe et vaut 3.

Exercice 47 Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ telles que :

$$(\forall\, x \in \mathbb{R}^+, \quad g(x) > 0) \qquad \text{et} \qquad (\exists\, l \in \mathbb{R}^\times \ / \ \ \lim_{+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l) \quad .$$

1. Montrer que $\lim_{+\infty} f(x) = 0$ si et seulement si $\lim_{+\infty} g(x) = 0$.
2. Montrer que si $l > 0$, alors : $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$ si et seulement si $\lim_{+\infty} g(x) = +\infty$.

4.3 Calculs de limites

Exercice 48 Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels de degrés respectifs n et m. Etudier, suivant les valeurs de n, m et de certains coefficients de P et Q, la limite de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en $+\infty$.

Exercice 49 Soit $n \in \mathbb{Z}$. On rappelle les limites suivantes (à connaître) :

$$\lim_0 \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_0 \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \quad .$$

Lorsque les limites suivantes existent, les déterminer :

$a.$	$\lim_{+\infty} \sqrt{x^2+1} - x$	$b.$	$\lim_1 \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}$
$c.$	$\lim_n \sin(\pi(x - E(x)))$	$d.$	$\lim_n (1 - xE(x))(x - E(x))$
$e.$	$\lim_{0^+} \sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}$	$f.$	$\lim_7 \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$
$g.$	$\lim_1 \frac{(x^2)^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}}+1}{(x-1)^2}$	$h.$	$\lim_{+\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$
$i.$	$\lim_{-\infty} x(\sqrt{1+x^2}+x)$	$j.$	$\lim_{0^+} \sqrt{x}\ \sin(\frac{1}{\sqrt{x}})$
$k.$	$\lim_0 \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$	$l.$	$\lim_{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)-\cos(x)}{1-\tan(x)}$
$m.$	$\lim_1 \frac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)}$	$n.$	$\lim_0 \frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$
$o.$	$\lim_0 \frac{\sin(x)-\sin(2x)}{x^2}$	$p.$	$\lim_0 \frac{x\tan(x)}{\cos^2(x)-1}$

5 Continuité

Exercice 50 Montrer que chacune des équations suivantes admet au moins une solution dans l'intervalle indiqué :

1. $x^5 - x^4 + 1 = 0$ sur $I = [-1, 0]$
2. $\sin(x) + 1 = x$ sur $I =]\frac{\pi}{2}, \pi[$

Exercice 51 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et ne s'annulant pas sur I. Montrer que : $\forall x \in I, f(x) > 0$ ou $\forall x \in I, f(x) < 0$
Dans le cas où $I = [a, b]$ et $\forall x \in I, f(x) > 0$, montrer que :
$\exists \lambda > 0, \forall x \in I, f(x) \geqslant \lambda$

Exercice 52 Trouver dans chacun des cas une fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue vérifiant $f(0)f(1) < 0$ et :

1. n'ayant qu'une seule racine en $x = \frac{1}{2}$
2. ayant 2 racines distinctes
3. ayant une infinité de racines

Un dessin du graphe de la fonction suffira.

Exercice 53 Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue. Montrer que f admat un point fixe, c'est-à-dire $\exists x \in [0, 1], f(x) = x$. Si on suppose de plus que f est décroissante, montrer que ce point fixe est unique. Qu'en est-il si f n'est pas décroissante ?

Exercice 54 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ et périodique. Montrer que f est bornée et atteint ses bornes une infinité de fois.

Exercice 55 Montrer que les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^*$ sont continues sur $\mathbb{R}^*$ et étudier si on peut les prolonger par continuité sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$
2. $g(x) = \frac{(1+x)^3-1}{x}$
3. $h(x) = \sin(x)\sin(\frac{1}{x})$
4. $l(x) = \frac{|sin(x)|}{x}$
5. $m(x) = \frac{\sqrt{1+sinx}-\sqrt{1-sinx}}{x}$

Exercice 56 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = x^2 + b$ si $x \leqslant 0$
2. $f(x) = \frac{\sin(ax)}{x}$ si $x > 0$

Etudiez la continuité de f sur $\mathbb{R}$ en fonction des paramètres a et b.

6 Dérivabilité

6.1 Définition, calcul

Exercice 57 Calculer les dérivées des fonctions (on donnera les domaines de définition) :

$$f(x) = \sqrt{1 + (x\cos x)^2}, \qquad g(x) = \frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right) + 1}{\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1},$$

$$h(x) = \ln(\tan x), \qquad k(x) = \frac{x^4}{(1 + x)^4}.$$

Exercice 58 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer la dérivée de $x \mapsto \sin(f(x)^2)$ et $x \mapsto \sin(f(x^2))$.

2. On suppose que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée de $x \mapsto \ln(|f(x)|)$.

Exercice 59 En utilisant la définition, calculer la dérivée de $f(x) = x^2 - 4x + 5$ au point $x_0 = 2$.

Exercice 60 Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des applications suivantes :

$$f(x) = x|x|, \quad g(x) = \frac{x^2}{1+|x|}, \quad h(x) = \frac{1}{1+|x|}.$$

Exercice 61 La fonction $x \mapsto \cos\sqrt{x}$ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 62 Soit a, b deux réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad f(x) = a(x^2-1) + b \text{ si } x > 1.$$

Déterminer a et b de manière à ce que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 63 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la fonction dérivée d'ordre n de $f(x) = \sin x$.

Exercice 64 Étudier la fonction $f : x \mapsto x^5 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a trois solutions réelles.

Exercice 65
1. Montrer que l'on a $x\cos x - \sin x < 0$ si $x \in]0, \pi[$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction $x \mapsto laystyle\frac{\sin x}{x}$ sur l'intervalle $]0, \pi]$.
3. Démontrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on a $\frac{2x}{\pi} < \sin x < x$.

6.2 Théorème de Rolle et accroissements finis

Exercice 66
1. Calculer la dérivée de $x \mapsto (x^2+1)\sin x$
2. Montrer que l'équation $(x^2+1)\cos x + 2x\sin x = 0$ admet au moins une solution dans $[0, \pi]$.

Exercice 67
1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1[$ s'annulant en 3 points de $]0,1[$. Montrer qu'il existe un point x_0 de $]0,1[$ tel que $f''(x_0) = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]0,1[$ s'annulant en $n+1$ points de $]0,1[$. Montrer qu'il existe un point x_0 de $]0,1[$ tel que $f^{(n)}(x_0) = 0$.

Exercice 68 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad |\sin x - \sin y| \leqslant |x-y|$ et $|\cos x - \cos y| \leqslant |x-y|$.

Exercice 69 En utilisant le théorème des accroissements finis et en distinguant éventuellement les cas $x > 0$ et $x < 0$ démontrer que :
1. pour tout réel x on a $e^x \geqslant 1 + x$;
2. pour tout $x > -1$ on a $\ln(1+x) \leqslant x$.

Exercice 70
1. A l'aide du théorème des accroissements finis montrer que $\forall x > 0, \quad \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$.
2. Calculer $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\ln(x+1) - \ln x)$ et $\lim_{x\to+\infty} x(\ln(x+1) - \ln x)$.

3. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.
4. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$.

Exercice 71 A l'aide du théorème des accroissements finis, calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}\right)$.

Exercice 72 Étant donné α dans $]0,1[$, montrer que pour tout entier naturel n

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leqslant (n+1)^\alpha - n^\alpha \leqslant \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

En déduire la limite $\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\alpha}$.

6.3 Formule de Taylor

Exercice 73

1. Écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 et au point 0 pour la fonction sinus.
2. Montrer que l'on a $|\sin x - x| \leqslant \frac{|x|^3}{6}$ pour tout réel x.

Exercice 74

1. Écrire la formule de Taylor à l'ordre 7 et au point 0 pour la fonction cosinus.
2. Écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 et au point 1 pour la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

Exercice 75 Écrire la formule de Taylor à l'ordre 1, 2 et 3 pour le polynôme $2+3x-4x^2+2x^3$ au point $x=1$.

Exercice 76 Montrer les encadrements suivants :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1+x \leqslant e^x \leqslant 1+x+\dfrac{x^2}{2}e^{|x|}$.
2. $\forall x > 0, \quad x-\dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$.

Exercice 77 En écrivant la formule de Taylor à l'ordre n au point 0 pour la fonction $x \mapsto e^x$ montrer que l'on a

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+r_n \qquad \text{où } |r_n| < \frac{e}{(n+1)!}.$$

Exercice 78 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle $]a-\delta, a+\delta[$, $\delta > 0$. Calculer

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}.$$

7 Convexité

7.1 Convexité, concavité

Exercice 79 Soit $f(x) = \ln(\tan x)$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est π-périodique.

3. Etudier les variations et la convexité de f sur $]0, \pi/2[$.
4. En déduire que pour tout $x \in]0, \pi/2[$, $|f(x)| \geqslant 2|(x - \pi/4)|$.
5. Montrer que la courbe représentative de f est symétrique par rapport au point de coordonnées $(\pi/4, 0)$ et tracer la courbe.

Exercice 80 Soit $g(x) = \ln \ln x$.

1. Donner le domaine de définition de g.
2. Montrer que g est concave sur son domaine de définition.
3. En déduire l'inégalité
$$\forall a > b > 1, \quad \ln \frac{a+b}{2} > \sqrt{\ln a \ln b}.$$

Exercice 81 Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En utilisant la concavité de la fonction logarithme, montrer que
$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{*+})^2, \quad xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{x^q}{q}.$$

7.2 Bijection

Exercice 82 Déterminer les plus grands sous-ensembles A et B de $\mathbb{R}$ pour que la fonction f définie par
$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$
constitue une bijection entre A et B et déterminer la bijection réciproque.
Même question avec la fonction
$$g(x) = \frac{2e^x+1}{e^x+1}.$$

Exercice 83 Soit f la fonction définie sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par
$$f(x) = \cos x + x.$$

1. Montrer que f définie une bijection entre $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et un intervalle I que l'on précisera.
2. On note $g = f^{-1}$ la bijection réciproque de f. Quel est le sens de variation de g.
3. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I sauf en un point que l'on précisera.
4. Calculer $g(1)$, $g'(1)$, $g''(1)$. En déduire une formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, pour la fonction g, au point 1.

7.3 Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 84 Exprimer sans fonctions trigonométriques directes ou réciproques les expressions :

1. $\text{Arccos}(\cos x)$ pour $x \in [0, 4\pi]$;
2. $\text{Arctan} \tan 2x$ pour $x \in [0, \pi]$;
3. $\text{Arccos} \sin x$ pour $x \in [0, 4\pi]$.

Exercice 85

1. Montrer que si $ab < 1$,
$$\text{Arctan}\, a + \text{Arctan}\, b = \text{Arctan} \frac{a+b}{1-ab}.$$
On pourra poser $\theta = \text{Arctan}\, a$ *et* $\phi = \text{Arctan}\, b$ *et calculer* $\tan(\theta + \phi)$.

2. Retrouver ces résultats en dérivant la fonction

$$f(x) = \operatorname{Arctan} \frac{a+x}{1-ax}.$$

3. Qu'en est-il si $ab > 1$?
4. Montrer que pour tout $x > 0$, $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$. En déduire la limite

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\operatorname{Arctan} x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Exercice 86 1. Montrer que si $x \in]0,1[$, $\operatorname{Arcsin} x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. Montrer que $\forall x \in]0,\infty[, \operatorname{Arctan} x \geqslant \frac{x}{1+x^2}$.
3. Montrer que si $x \in]0,1[$, $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin} \sqrt{1-x^2} = \pi/2$.

Exercice 87 On pose

$$f(x) = \operatorname{Arcsin} 2x\sqrt{1-x^2}.$$

1. Préciser le domaine de définition de f et les points où éventuellement il y a un problème de dérivabilité.
2. Calculer et simplifier f' sur son domaine de dérivabilité.
   En déduire une expression simple de f sur son domaine de définition.
3. Retrouver, à l'aide d'un changement de variable, l'expression simplifiée de f.

7.4 Croissance comparée

Exercice 88 Déterminer les limites suivantes, en justifiant vos calculs.

$$1)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{x+2}{x^2 \ln x}; \quad 2)\ \lim_{x\to 0^+} 2x\ln x + \sqrt{x}; \quad 3)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x^2+3}{x\ln x};$$

$$4)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}; \quad 5)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x+1}\ln\frac{x^3+4}{1-x^2}; \quad 6)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2-x};$$

$$7)\ \lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln x}; \quad 8)\ \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x; \quad 9)\ \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3+5}{x^2+2}\right)^{\frac{x+1}{x^2+1}};$$

$$10)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{\ln(x^2+1)}}{1+e^{x-3}}.$$

Exercice 89 Soit α un réel strictement positif. Montrer que

$$\forall x > 0, \quad \frac{\ln(x)}{x^\alpha} < \frac{2}{\alpha x^{\alpha/2}}$$

En déduire que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0, \quad \alpha > 0.$$

Exercice 90 Soit $f(x) = \exp\frac{-1}{x^2}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Soit $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, la dérivée n$^{\text{ième}}$ de f est de la forme

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp \frac{-1}{x^2}$$

où P_n est un polynôme.

3. Montrer que $\tilde{f}$ est de classe $\mathbb{C}\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donner la valeur de $f^{(n)}(0)$.
4. Donner le développement de Taylor de la fonction $\tilde{f}$ en 0 à l'ordre n sur l'intervalle $[0, x]$.

Deuxième partie

SM1 Devoirs

8 Devoir : Nombres complexes

Exercice 91 Trouver les nombres complexes z et u solutions du système d'équations :

$$\begin{cases} (2+i)z - iu & = & 2+i \\ (1+i)z + (2-i)u & = & 2i \end{cases}$$

Exercice 92 Soient u et v des nombres complexes. Démontrer l'égalité

$$|u+v|^2 - |u-v|^2 = 4\Re(u\overline{v}).$$

Exercice 93 Dessiner dans le plan complexe les domaines définis par :

$$D_1 = \{z \colon |z| > 1\} \quad ; \quad D_2 = \{z \colon z + \overline{z} > -1\} \quad ; \quad D_3 = \{z \colon z(1-i) + \overline{z}(1+i) = 4\}.$$

Pour D_2 et D_3, on pourra utiliser l'écriture algébrique.

Exercice 94 Résoudre les équations suivantes :

1. $|\sin(x)| + |\cos(x)| = 0$,
2. $|\sin(x)| + |\cos(x)| = 2$,
3. $2\cos^2(x) - 7\cos(x) + 3 = 0$.

Exercice 95 Soit $z := e^{2i\pi/5}$.

1. Constater que $z^5 = 1$, puis en déduire que $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. On pose $u := z + z^{-1} = 2\cos(2\pi/5)$. Déduire de la question précédente une équation du second degré dont u est solution.
3. Résoudre cette équation et en déduire une formule explicite pour $\cos(2\pi/5)$.
4. En déduire une formule pour $\cos(\pi/5)$, puis $\cos(\pi/10)$.

9 Devoir : Inégalités, nombres complexes, récurrence

9.1 Inégalités

Exercice 96 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inégalité suivante :

$$\sqrt{|x^2+2x-3|} \leqslant \frac{x}{2}+2.$$

Exercice 97 Résoudre l'inégalité suivante :

$$2|x-2| - \sqrt{x^2-1} \geqslant 3.$$

On commencera par déterminer l'ensemble des x pour lesquels l'inégalité est bien définie.

9.2 Nombres complexes

Exercice 98

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$.
2. Soit z_0 une des solutions de cette équation. En séparant parties réelle et imaginaire de $z_0^2 - 2\cos(\theta)z_0 + 1$, retrouver les formules de $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Exercice 99

1. Vérifier que
$$-8+2\sqrt{3}+i(12+4\sqrt{3}) = (1+\sqrt{3}+i2\sqrt{3})^2.$$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré
$$Z^2 + (\sqrt{3}-1)Z + (3-\sqrt{3}-i(3+\sqrt{3})) = 0.$$
3. Mettre les racines de l'équation précédente sous forme trigonométrique puis calculer leurs racines n-ièmes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. À l'aide des questions précédentes, résoudre pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation en z
$$\left(\frac{z-1}{z}\right)^{2n} + (\sqrt{3}-1)\left(\frac{z-1}{z}\right)^{n} + (3-\sqrt{3}-i(3+\sqrt{3})) = 0.$$

9.3 Récurrence

Exercice 100 Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7.
Écrire $3^{2n+2} - 2^{n+1} = 3^{2n}(3^2-2) + 2(3^{2n}-2^n)$.

9.4 Problème

Exercice 101 Le but de ce problème est de déterminer tous les triplets pythagoriciens, c'est-à dire les triplets (a, b, c) d'entiers naturels qui vérifient $a^2+b^2 = c^2$. On note $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ le cercle unité. On note aussi pour $r \in \mathbb{R}$, $D_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = r(x+1)\}$.

1. Montrer qu'à un triplet pythagoricien (a, b, c) correspond un point du cercle à coordonnées rationnelles positives $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$. Réciproquement, montrer que si $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ est un point du cercle à coordonnées rationnelles positives, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, le triplet (ma, mb, mc) est pythagoricien.

2. Soit $r \in \mathbb{R}$. L'intersection $C \cap D_r$ est constitué de deux points, dont l'un est le point A d'affixe -1. Calculer explicitement en fonction de r l'affixe $z_r = x_r + iy_r$ de l'autre point d'intersection M_r. Peut-on exprimer simplement r en fonction d'un argument θ_r de z_r ? Dans quel intervalle doit se situer r pour que x_r et y_r soient positifs ? Faire un dessin.
3. Soit $M \in C$. Montrer que les coordonnées de M sont rationnelles si et seulement si il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $M \in C \cap D_r$.
4. En écrivant $r = p/q$, avec p et q premiers entre eux, exprimer à l'aide de la question 2) l'ensemble des points du cercle à coordonnées rationnelles positives en fonction de p et q.
5. Déduire des questions 1) et 4) que l'ensemble des triplets pythagoriciens est :

$$S = \left\{(m(q^2 - p^2), 2mpq, m(p^2 + q^2)) \mid m \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}^*,\ p \leqslant q\ ,\ p \text{ premier avec } q\right\}.$$

10 Devoir : Fonctions

Exercice 102 Si f et g sont deux fonctions réelles définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on définit la fonction $f.g$ par $f.g : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)g(x)$.
Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, la prouver, sinon écrire et démontrer sa négation.

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x < 2 \Rightarrow x^2 < 4.$
2. $\forall\, f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad (f,\ g \text{ croissantes}) \Rightarrow (f.g \text{ croissante}).$
3. $\forall\, f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad (f,\ g \text{ croissantes et } f \text{ positive }) \Rightarrow f.g \text{ croissante}.$
4. $\forall\, f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad (f,\ g \text{ croissantes et positives }) \Rightarrow f.g \text{ croissante}.$
5. $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists\, \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \quad |x - 1| < \alpha \Rightarrow |3x - 3| < \varepsilon.$
6. $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists\, \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \quad |x - 1| < \alpha \Rightarrow |2x - 1| < \varepsilon.$

Donner une traduction de 5 et 6 en termes de limites.

Exercice 103 Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$. Montrer par l'absurde que, si l'on range $kn + 1$ paires de chaussettes dans n tiroirs, au moins un tiroir contient au moins $k + 1$ paires de chaussettes.

Applications

1. Le restaurant universitaire propose un choix de 5 menus. Montrer que parmi 11 étudiants ayant déjeuné à la cantine, 3 au moins ont mangé le même repas.
2. Soit une liste de n entiers $a_1, ..., a_n \quad (n \geqslant 1)$. Montrer qu'il existe un entier $l \in \{1, ..., n\}$ et l éléments consécutifs de la liste dont la somme est un multiple de n. C'est-à-dire, prouver qu'il existe $l \in \{1, ..., n\}$ et $k \in \{0, ..., n - l\}$ tels que :

   $$a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_{k+l} \quad \text{est un multiple de } n.$$

   On peut introduire les sommes :

   $$S_0 := 0,\ S_1 := a_1,\ S_2 := a_1 + a_2,\ ...,\ S_i := a_1 + a_2 + ... + a_i,\ ...,\ S_n := a_1 + a_2 + ... + a_n$$

   et les ranger dans n tiroirs numérotés de 0 à $n - 1$ en plaçant S_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ dans le tiroir portant le numéro "reste de la division euclidienne de S_i par n."

Exercice 104 On définit :

1. la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x^2 - 4x$,
2. les ensembles $A :=]-\infty, -2[\cup]-2, 1]$ et $B :=]-\infty, 4[$.

Sans faire d'étude de fonction, en revenant aux définitions, montrer que $f(A) = B$.

Exercice 105 1. Etudier la limite de $\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$ en 4.

2. Faire de même pour $\frac{\tan(x)-\sin(x)}{\sin^3(\frac{x}{2})}$ en 0.

Exercice 106 1. On rappelle la définition de la partie entière, $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, $E(x)$ est l'unique entier relatif vérifiant :

$$E(x) \leqslant x < E(x) + 1.$$

Représenter graphiquement la fonction E.

2. Donner le domaine de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^4 E(x) + 2x^3 + (21E(x^2) + 1)x}{x^3 E(x) + 3x^2 + 21E(x^2)}.$$

3. A l'aide des théorèmes sur les limites, montrer que $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.
4. On veut maintenant retrouver le résultat précédent en utilisant seulement la définition de la limite.
   (a) Factoriser les polynômes $X^4 + X^3 - 3X^2 + 22X - 21$ et $2X^2 - 3X + 1$ par $X - 1$.
   (b) Calculer $f(x) - 1$ sur $]1, \frac{4}{3}[$ et déterminer une constante $A \in \mathbb{R}^{+*}$ telle que :
   $$1 < x < \frac{4}{3} \Rightarrow |f(x) - 1| < A|x - 1| \quad .$$
   En revenant à la définition, prouver alors que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$.
   (c) Calculer $f(x) - 1$ sur $]\frac{1}{2}, 1[$ et montrer que :
   $$\frac{1}{2} < x < 1 \Rightarrow |f(x) - 1| < 2|x - 1| \quad .$$
   Toujours en revenant à la définition, prouver alors que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$.
   (d) Conclure.

11 Devoir : Limites, continuité

Exercice 107 Montrez que les limites suivantes existent et calculez leur valeur.

1. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 + 2x^2 + 1}{4x^2 + 3x + 2} \sin(1/x)$
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2}{\sin(x)^2} - \dfrac{1}{1 - \cos(x)}$

Exercice 108 Soit f définie par $f(x) = \frac{a}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

1. f est-elle continue sur son ensemble de définition ?

2. Déterminez en fonction de a la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1 (si cette limite existe). Même chose en -1. (On précisera éventuellement les limites à gauche et à droite si elles diffèrent.)
3. Déterminez en fonction de a si f peut être prolongée par continuité en 1 ? En -1 ?

Exercice 109 Soit f définie sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ où $\varepsilon > 0$. On suppose qu'il existe $k \geqslant 0$ tel que

$$\forall x \in]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus\{0\}, |f(x)| \leqslant k|x|.$$

Expliquez par un dessin ce que signifie cette condition sur f.
Montrez que f continue en 0 si et seulement si $f(0) = 0$.

Exercice 110 Soit f définie par $f(x) = xE(\frac{1}{x})$ où E est la fonction partie entière. Etudiez la continuité de f en chaque point de son ensemble de définition.

Exercice 111 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Montrer que f admet au moins une racine.
Application : montrer qu'un polynôme à coefficients réels de degré impair admet au moins une racine dans $\mathbb{R}$.

12 Devoir : Dérivabilité

Exercice 112 Soit a, b, c trois nombres réels. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ si $x < 0$ et $f(x) = ax^2 + bx + x$ si $x \geqslant 0$. À quelle condition sur a, b, c la fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$? f peut-elle être de classe $\mathcal{C}^3$?

Exercice 113 On définit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Étudier la dérivabilité de f en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 114 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \dfrac{1}{x}$.
2. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a : $\ln(n+1) < S_n < 1 + \ln(n)$.
3. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$?

Exercice 115 Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a

$$1 + x - \frac{x^2}{2} \leqslant \sqrt{1+2x} \leqslant 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2}.$$

Exercice 116 On considère les fonctions $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ et $g(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1}$.

1. Donner les domaines de définition et de dérivabilité de f et g. Calculer f' et g'. Déterminer les extrema locaux de f et g. Existe-t-il des extrema globaux ?
2. Déterminer les asymptotes aux graphes de f et g.
3. Déterminer les intervalles sur lesquels f et g sont convexes, concaves, trouver les points d'inflexion.
4. Tracer les graphes de f et g.

13 Devoir : Fonctions réciproques

Exercice 117 On pose :

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}).$$

1. Préciser les domaines de définition, de continuité, de dérivabilité de f.
2. Dériver et simplifier f' sur le domaine de dérivabilité de f et en déduire une expression plus simple de f sur son domaine de définition.
3. Donner un changement de variable simple permettant de retrouver une expression simplifiée de f.

Exercice 118 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par la formule :

$$f(x) = x^3 \sin(1/x).$$

Montrer que f se prolonge par continuité en 0, en une fonction que l'on notera $\tilde{f}$. Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis que $\tilde{f}$ admet un développement limité d'ordre 2 en 0, sans pour autant être deux fois dérivable en 0.

Exercice 119 On considère la fonction suivante :

$$f(x) = e^{\sin x} + \sin x$$

.

1. Montrer que f définit une bijection entre $[0, \frac{\pi}{2}]$ et un intervalle à déterminer.
   Par la suite, on note g la bijection réciproque.
2. Donner le domaine sur lequel g est de classe C^2.
   Montrer à l'aide de la formule de Taylor-Young que
   $$g(x) = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{16}(x-1)^2 + o((x-1)^2),$$
   lorsque x tend vers 1^+.
3. Déterminer la limite suivante
   $$\lim x_{1^+} \frac{g(x) - \frac{1}{2}(x-1)}{(\ln x)^2}$$

Exercice 120 Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = x - \operatorname{Arctan} x.$$

1. (a) Etudier les variations de f.
   (b) Donner un équivalent le plus simple possible de f en 0.
   (c) Déterminer le développement généralisé à l'ordre 1 de f au voisinage de $+\infty$.
   Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ dont on donnera l'équation et préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote.
2. (a) Montrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose g la bijection réciproque de f. Montrer que g est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et exprimer $g'(x)$ en fonction de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.
   (b) Déterminer un équivalent de $g(x)$ en 0^+.
   (c) Montrer que la courbe représentative de g admet une asymptote oblique en $+\infty$ dont on précisera l'équation et donner la position de la courbe par rapport à son asymptote.

14 Examen

Exercice 121 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 - i = 0$.

Exercice 122 Déterminer les limites suivantes :

$$1)\ \lim_{x\to 0} \frac{x\sin(2x)}{1-\cos(x)}, \qquad 2)\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}.$$

Exercice 123 Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^{-x}\sin(x)}{x}$.

1. Montrer que f se prolonge en une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0 ainsi que la position du graphe de f par rapport à celle-ci.

Exercice 124 Dans cet exercice, on énoncera avec soin chacun des théorèmes utilisés.

Soit f la fonction définie par $f(x) = x\cos(x) + 1$.

1. Calculer f' et f''. Faire le tableau de variation de f' et de f sur l'intervalle $[0, \pi/2]$. Montrer que f a un unique maximum entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ (on ne cherchera pas à calculer sa valeur).
2. (a) Montrer que $-3 \leqslant f''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.
   (b) En déduire que $1 + x - \frac{3x^2}{2} \leqslant f(x) \leqslant 1 + x$ pour tout $x \in [0, 1]$.
3. (a) Montrer que f s'annule au moins une fois sur chacun des intervalles $]\pi/2, \pi[$ et $]\pi, 2\pi[$.
   (b) En déduire que f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]\pi/2, 2\pi[$.

Exercice 125 Soit f la fonction définie par $f(x) = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer f' (on pourra éventuellement simplifier l'expression de $f'(x)$ en utilisant que $(1-X)^2 + 4X = (1+X)^2$). Que vaut la dérivée de $f(x) - 2\,\mathrm{Arctan}(x)$?
3. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
4. En déduire que $f(x) = 2\,\mathrm{Arctan}(x) - \pi$ pour tout $x \in]1, +\infty[$. Donner des formules analogues pour $f(x)$ sur $]-\infty, -1[$ et $]-1, 1[$.

Troisième partie

SM2 Exercices

15 Intégration

Exercice 126 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x) = e^{-x^2}$.

1. Etudier la fonction f. En particulier, montrer que f est décroissante sur l'intervalle $I = [0; 1]$. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle I. (on prendra un repère orthonormé d'unité 5 cm).

On note $\mathcal{A}$ l'aire limitée par les axes de coordonnées, la droite d'équation $x = 1$ et la courbe représentative de f. On se propose de calculer une valeur approchée de $\mathcal{A}$ à $\pm 0,05$ près.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) \quad \text{et} \quad S'_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}).$$

2. Interpréter géométriquement S_n et S'_n et représenter S_{10}, S'_{10} et $\mathcal{A}$ sur le graphique de la question (a). En déduire un encadrement de $\mathcal{A}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer en fonction de n et de f la quantité $|S_n(f) - S'_n(f)|$. Déterminer la plus petite valeur de n pour que $|S_n(f) - S'_n(f)|$ soit strictement inférieure à $0,1$. Donner une valeur approchée de $\mathcal{A}$ à $\pm 0,05$ près.
4. Pour quelle valeur minimale de n obtient-on une valeur approchée de $\mathcal{A}$ à $\pm 5 \cdot 10^{-3}$ près ?

Remarque : Il n'existe pas de primitive de la fonction $f(x) = e^{-x^2}$ donnée par des fonctions connues.

Exercice 127 Calculer les intégrales suivantes :
(a) $\displaystyle\int_0^2 (t^4 + 3t^2 - t)dt$; (b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt$; (c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (t+1)(t+2)(t+3)dt$; (d) $\displaystyle\int_{-1}^{5} |t-3|dt$;
(e) $\displaystyle\int_1^3 (t^{\frac{3}{2}} + t^{-\frac{3}{2}})dt$; (f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^t}{e^t - 1}dt$; (g) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} (\sin t + \cos t)^2 dt$; (h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3t}{\sqrt{1+t^2}}dt$
(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t \cos^2 2t dt$; (j) $\displaystyle\int_1^2 t \ln t dt$.

Exercice 128 Quelle est l'aire limitée par les droites d'équations $y = \frac{x}{4}$ et $y = 2x$ respectivement, et la courbe d'équation $y = \frac{2}{x^2}$?

Exercice 129
1. Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{8x^2 - 4x + 5}{x^4}$ en précisant son domaine de définition.
2. Calculer les primitives de la fonction $x \mapsto \sqrt{2x+7}$ et préciser leurs domaines de définition.
3. Calculer la primitive de la fonction $x \mapsto \tan x$ qui est nulle en $x = \pi$. Préciser son domaine de définition.
4. Calculer $\displaystyle\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \tan x dx$.

Exercice 130 Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant leurs domaines de définition.
(a) $x \mapsto x\ln(x+1)$; (b) $x \mapsto \sqrt{x}\ln x$; (c) $x \mapsto \arctan x$;
(d) $x \mapsto \ln^2 x$; (e) $x \mapsto \cos^2 x$; (f) $x \mapsto \cos^2 x \sin^2 x$.

Exercice 131 Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif. Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant leurs domaines de définition.
(a) $x \mapsto \dfrac{x-3}{2x^2+2x+1}$; (b) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-2x-3}$; (c) $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{(x-1)(2x^2+2x+1)}$;
(d) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$; (e) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$.

Exercice 132 Calculer les intégrales suivantes à l'aide

1. d'un changement de variable d'intégration :
   (a) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dt}{t\ln^2 t}$; (b) $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{t^2}{1-t^3}dt$; (c) $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \frac{\ln t}{1+t^2}dt$ (on prend pour nouvelle variable $x = 1/t$) ;
   (d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t dt}{\sin t(\cos t+1)}$ (on prend pour nouvelle variable $x = \tan(t/2)$).
2. d'un ou plusieurs changements de variables d'intégration :
   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^2\sqrt{1-t^2}dt$ (on prend pour nouvelle variable u telle que $t = \sin u$) ;
   (b) $\displaystyle\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-t^2}dt$ où R est un réel positif. Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 133 Sans calcul et avec justifications, donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sin(t^{2005})}{2+\sqrt{1+t^4}}dt$.

16 Équations différentielles

Exercice 134 Résoudre les équations différentielles suivantes, en précisant les intervalles de validité des solutions :

1. $y' = -\dfrac{2y}{x}$.
2. $y' = 3y$.
3. $y' + xy = 0$.
4. $y' + \dfrac{x}{x^2+1}y = 0$.
5. $xy' - 2y = 0$. A-t-on des solutions définies sur $\mathbb{R}$, si oui lesquelles ?

Exercice 135
1. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle
$$(E) \qquad y' = \frac{2y}{x} + 1$$
puis déterminer la solution de (E) qui vérifie $y(1) = 0$.
2. On considère l'équation différentielle
$$(E) \qquad y' - 3y = e^{2x}.$$
Déterminer la solution de (E) qui vérifie $y'(0) = 1$.

Exercice 136
1. Résoudre l'équation différentielle suivante, à l'aide de la méthode de variation de la constante, tout en précisant les intervalles de validité : $xy' + 2y - x^3 = 0$

2. A-t-on des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

Exercice 137 On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad (x^2 - 3x + 2)y' - y = x - 2$$

1. Résoudre (E) en précisant les intervalles de validité des solutions.
2. Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 4\ln 2$ ainsi que son intervalle de définition.

Exercice 138 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y' - 2y = 0$. Déterminer la solution f qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.
2. $y'' - 4y' + 4y = 0$.
3. $y'' - 4y' + 5y = 0$.
4. $y'' + 4y = 0$.

Exercice 139 Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'' + y' - 2y = e^{3x}$.
b) $y'' + y' - 2y = 3e^{x}$.
c) $y'' + y' - 2y = e^{3x} + 3e^{x}$.
d) $y'' + y' - 2y = 2x^2$.
e) $y'' + y' - 2y = \cos x$.
f) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$.
g) $y'' - 4y' + 5y = (x+1)e^{-x}$.
h) $y'' + 4y = \cos(2x)$.
i) $y'' + 4y = \cos x e^{x}$.

Exercice 140 Soit $\alpha > 0$. À quelle condition sur α l'équation différentielle $y'' + \alpha^2 y = 0$ admet-elle une solution réelle f telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 2$?

17 Matrices, systèmes linéaires

Exercice 141 On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dire lesquelles des matrices $A + B$, AB, BA sont définies et calculer celles qui le sont.

Exercice 142 On considère les deux matrices de $M_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A + B$, $(A + B)^2$, A^2, B^2, AB et BA. En déduire que $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

Exercice 143 À quelle condition sur la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a-t-on $AB = BA$ pour toutes les matrices $B \in M_2(\mathbb{R})$?
Indication : on pourra utiliser $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 144 Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & 2\\ 2x & -y & +z & = & 1\\ 4x & +y & +3z & = & 3\end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rrrrcr} 2x & +2y & -2z & +5t & = & -6\\ 3x & & -z & +t & = & -3\\ 2x & -y & & -3t & = & 2\\ 2x & -y & +z & -t & = & 1\end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rrrcr} x & -y & -2z & = & -1\\ -x & +3y & +3z & = & 2\\ & 4y & +2z & = & 3\end{array}\right. \qquad (S_4)\left\{\begin{array}{rrrcr} x & -y & -2z & = & -1\\ -x & +3y & +3z & = & 2\\ & 4y & +2z & = & 2\end{array}\right.$$

$$(S_5)\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & -2y & +z & -4t & = & 1\\ x & +3y & +7z & +2t & = & 2\\ x & -12y & -11z & -16t & = & 3\end{array}\right.$$

Exercice 145 Résoudre les systèmes linéaires suivants, d'inconnues x, y, z, en discutant suivant les valeurs du paramètre réel α :

$$(S_6)\left\{\begin{array}{rrrcl} \alpha x & +y & +\alpha z & = & 2\alpha\\ \alpha x & -\alpha y & +z & = & 2\alpha\\ \alpha x & -\alpha y & +\alpha z & = & 1+\alpha\end{array}\right. \qquad (S_7)\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +2y & +z & = & 0\\ x & +y & +(1+\alpha)z & = & 1\\ x & +y & -\alpha^2 z & = & \alpha^3\end{array}\right.$$

$$(S_8)\left\{\begin{array}{rrrcl} \alpha x & +y & +z & = & 1\\ x & +\alpha y & +z & = & 1\\ x & +y & +\alpha z & = & 1\end{array}\right.$$

Exercice 146 Discuter et résoudre le système linéaire suivant, où a et b sont des paramètres réels :

$$(S_9)\left\{\begin{array}{rrrrcl} 2x & +y & +3z & +t & = & a\\ 4x & +3y & +7z & +t & = & b\\ x & +2y & +3z & -t & = & 6-a\\ 3x & -2y & +z & +5t & = & 2-7b\end{array}\right.$$

Exercice 147 Calculer les matrices inverses des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Exercice 148

1. Pour toute matrice $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ on introduit la matrice $\tilde{A}=\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$.
   Calculer $A\tilde{A}$ et $\tilde{A}A$. En déduire la formule de l'inverse d'une matrice 2×2 inversible.
2. Application : calculer les inverses des matrices

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \quad A_2=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}, \quad A_3=\begin{pmatrix} 1 & y\\ x & 1+xy\end{pmatrix}.$$

Exercice 149 Soit $A=\begin{pmatrix} 3 & 4\\ 2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Montrer qu'il n'existe aucune matrice $M\in M_{2,3}(\mathbb{R})$ telle que $AM=I$ mais qu'il existe une infinité de matrices $N\in M_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $NA=I$.

18 Espaces vectoriels : définition

Exercice 150 Les parties de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ resp. $\mathbb{R}^3$ définies ci-dessous sont-elles des sous-espaces vectoriels ? (Dessins encouragés !)
- $V_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_1 + 2x_2 = 0\}$;
- $V_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_1 x_2 = 0\}$;
- $V_3 = \{x \in \mathbb{R}^3;\ x_2 \geqslant 0\}$;
- $V_4 = \{x \in \mathbb{R}^3;\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0\}$;
- $V_5 = \{x \in \mathbb{R}^3;\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 2\}$;
- $V_6 = \{x \in \mathbb{R}^3;\ x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}$;
- $V_7 = \{(\alpha, \alpha + \beta, -\beta);\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$;

les parties de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ ci-dessous sont-elles des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel *complexe* $\mathbb{C}^2$?
- $V_8 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2;\ z_1 = (i+1)z_2\}$;
- $V_9 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2;\ Re(z_1) = 0\}$.

Exercice 151 Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle que pour f, g dans E, et λ dans $\mathbb{R}$, les fonctions $f+g$ et $\lambda.f$ sont définies par :

$$\begin{aligned} f + g &: x \longmapsto f(x) + g(x), \\ \lambda.f &: x \longmapsto \lambda f(x). \end{aligned}$$

Les sous-ensembles de E suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
1. $E_1 = \{f \in E,\ f(1) = 0\}$;
2. $E_2 = \{f \in E,\ f(0) = 1\}$;
3. l'ensemble E_3 des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$;
4. l'ensemble E_4 des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$;
5. l'ensemble E_5 des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$f'' + 3f' + 2f = 0.$$

Exercice 152 Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients réels. Vérifier que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Parmi les sous-ensembles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ci-dessous, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

$E_1 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ a+b & -2a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R}\}$;

$E_2 = \{\begin{pmatrix} a+1 & b \\ b & a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R}\}$;

$E_3 = \{\begin{pmatrix} a+1 & b \\ -a-1 & 0 \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 153
1. Montrer que deux vecteurs non-nuls u, v dans $\mathbb{R}^2$ forment une famille libre si et seulement si ils ne sont pas colinéaires ; montrer géométriquement que dans ce cas, ils engendrent $\mathbb{R}^2$; faire un dessin.
2. Soient maintenant u, v, w trois vecteurs (non-nuls) dans $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'ils forment une famille libre si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites : (i) u et v ne sont pas colinéaires et (ii) w n'est pas dans le plan engendré par u et v. Faire un dessin. Montrer que si les conditions (i) et (ii) sont satisfaites, alors u, v, w engendrent $\mathbb{R}^3$.

Exercice 154 Montrer que les vecteurs $u = (1,1)$ et $v = (1,-1)$ engendrent l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Exprimer un élément (x,y) de $\mathbb{R}^2$ comme combinaison linéaire de u et v. Cette décomposition est-elle unique ?

Exercice 155 Montrer que les sous-ensembles suivants d'un espace vectoriel sont des familles libres :
– $F_1 = \{(1,2,3),\ (3,0,2),\ (0,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$;
– $F_2 = \{y_1, y_2, y_3\}$ dans l'espace E des fonctions réelles (exercice 151), où $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{2x}$ et $y_3(x) = e^{5x}$ (on pourrait utiliser le comportement de l'exponentielle à l'infini) ;
– $F_3 = \{X^3, X^3 - X^2 + 1, 2X + 5, X + 2\}$ dans $\mathbb{R}[X]$;
– $F_4 = \{(1+i, 1); (1, 1+i)\}$ dans $\mathbb{C}^2$.
La famille $F_5 = \{(1+i, 1); (2, 1-i)\}$ est-elle libre dans l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^2$?

Exercice 156 Soit $U \subset \mathbb{R}^3$ le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $(1,1,0)$ et $(0,2,1)$, et $V_x \subset \mathbb{R}^3$ la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,0,x)$ ($x \in \mathbb{R}$). A quelle condition sur x, V_x est-elle un supplémentaire de U dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 157 Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices 3×3 à coefficients réels. Vérifier que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Quelle est sa dimension ? Soient $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{A}_3$ les sous-ensembles suivants de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{S}_3 = \{A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ \forall i,j,\ a_{ij} = a_{ji}\}$$
$$\mathcal{A}_3 = \{A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ \forall i,j,\ a_{ij} = -a_{ji}\}\,.$$

(les éléments de $\mathcal{S}_3$ sont appelés matrices symétriques et ceux de $\mathcal{A}_3$ matrices antisymétriques). Vérifier que $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{A}_3$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et donner leurs dimensions. Montrer que $\mathcal{A}_3$ et $\mathcal{S}_3$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Remarque : Ces résultats ne sont pas particuliers à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on peut les généraliser aux matrices $n \times n$ (essayez-le, si l'exercice vous a plu).

19 Espaces vectoriels : bases, dimension

Exercice 158 Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$, on considère les trois triplets $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (-1,0,1)$ et $u_3 = (1,1,1)$. Montrer que u_1, u_2 et u_3 engendrent $\mathbf{R}^3$. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées des vecteurs $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,0,1)$ et $v_3 = (2,-3,1)$ dans cette base.

Exercice 159 Déterminer pour quelles valeurs du réel t, les vecteurs $u_1 = (1,0,t)$, $u_2 = (1,1,t)$ et $u_3 = (t,0,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 160
1. Montrer que les vecteurs $w_1 = (1,-1,i)$, $w_2 = (-1,i,1)$, $w_3 = (i,1,-1)$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ sur $\mathbb{C}$.
2. Déterminer les coordonnées de $v = (1+i, 1-i, i)$ dans cette base.

Exercice 161 Trouver une base du sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ dans chacun des cas suivants.
1. $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x + 2y = 0\}$;
2. F admet comme système d'équations $\begin{cases} x + 2yl &= 0 \\ x - y + z &= 0 \end{cases}$.

3. F est l'ensemble des solutions du système
$$\begin{cases} x+2y-z-t &= 0 \\ x-y+z-t &= 0 \\ 4x-y+2z-4t &= 0 \end{cases}.$$

Dans chacun des cas, préciser un système d'équations paramétriques.

Exercice 162 Déterminer un système d'équations du sous-espace vectoriel F de E dans les cas suivants :

1. $E=\mathbb{R}^3$ et F est engendré par $(1,0,0)$ et $(0,1,1)$;
2. $E=\mathbb{R}^3$ et $F=\text{vect}((1,2,-1))$.
3. $E=\mathbb{R}^2$ et $F=\text{vect}((1,2))$.
4. $E=\mathbb{R}^4$ et $F=\text{vect}((1,2,-1,0),(2,-1,0,1),(0,1,-1,2))$.
5. $E=\mathbb{R}^4$ et $F=\text{vect}((1,-2,-1,0),(2,-2,-1,1),(-1,0,-1,-2))$.
6. $E=\mathbb{R}^4$ et F est l'intersection des sous-espaces définis en (4) et (5).
7. $E=\mathbb{R}^3$ et F est la somme des sous-espaces définis en (1) et (2).

Exercice 163 Soit $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ un élément de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices 3×3 à coefficients réels. Montrer que l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM=MA$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Donner une base et la dimension de ce sous-espace.

Exercice 164 Déterminer la dimension et une base de l'espace vectoriel
$$E=\{(x,y,z,t,u)\in\mathbb{R}^5 | x+2y-5z+3t-u=0, 2x+y-2u=0\}.$$

Exercice 165

1. Montrer que les sous-espaces vectoriels $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x+2y=0\}$ et $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x-y=0\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que les sous-espaces vectoriels $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x+y+z=0\}$ et $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x-y=x+z=0\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que les sous-espaces vectoriels $F=\text{vect}(1-X+X^2, 1+2X-X^3)$ et $G=\{a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3\in\mathbb{R}_3[X]|a_0+a_1-a_2-a_3=0, a_0-a_1+a_2-a_3=0\}$ sont supplémentaires dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur à 3.

Exercice 166 On considère la famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivante :
$$\mathcal{F}=\{v_1=(1,2,0,1), v_2=(4,4,1,2), v_3=(2,0,1,0), v_4=(2,2,\tfrac{1}{2},1)\}.$$

1. La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ? Calculer son rang. Déterminer les relations de dépendance entre les vecteurs de $\mathcal{F}$.
2. Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\mathcal{F}$. Quelle est la dimension de F ? Extraire de $\mathcal{F}$ une famille libre $\mathcal{F}'$ engendrant F.
3. On note $\mathcal{G}$ la famille génératrice de $\mathbb{R}^4$ formée des vecteurs $(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)$ et $(0,0,0,1)$. Compléter $\mathcal{F}'$ en une base de $\mathbb{R}^4$ à l'aide de vecteurs de $\mathcal{G}$.
4. Déterminer un supplémentaire de F.

Exercice 167 Soit E l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients réels. Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ cinq matrices de E.

1. Montrer que la famille $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ engendre E.
2. La famille $\{A_1, A_2, A_4\}$ est-elle liée ? Si oui, préciser les relations de dépendance entre A_1, A_2 et A_4.
3. Extraire de $\mathcal{F}$ une base de E.
4. Déterminer un supplémentaire de $\mathrm{vect}(A_1, A_2)$.

Exercice 168
1. Soit G le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $u = (1, -1, 2, -2)$, $v = (4, 0, 1, -5)$ et $w = (3, 1, -1, -3)$. Déterminer une base, la dimension et un système d'équations de G.
2. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = y = x - y + z + 2t = 0\}$. Déterminer une base, la dimension et un système d'équations paramétriques de H.
3. Déterminer une base de $G \cap H$, la dimension et une base de $G + H$.
4. Déterminer un supplémentaire F de $G + H$ dans $\mathbb{R}^4$.

20 Applications linéaires

Exercice 169 Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ? Pour celles qui sont linéaires, déterminer le noyau, l'image, préciser si l'application est injective, surjective, bijective, et écrire la matrice associée dans les bases canoniques.

(a) $f_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto xy$,

(b) $f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2;\ x \mapsto (0, 2x)$,

(c) $f_3 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C};\ z \mapsto \overline{z}$ où $\mathbb{C}$ est vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel,

(d) $f_4 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C};\ z \mapsto \overline{z}$ où $\mathbb{C}$ est vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel,

(e) $f_5 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto x + y + 1$,

(f) $f_6 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ (x, y) \mapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$,

(g) $f_7 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\ (x, y, z) \mapsto (x + y, x - 2y + z)$,

(h) $f_8 \colon \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X];\ P \mapsto P'$,

(i) $f_9 \colon \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{n+1}[X];\ P \mapsto XP$.

Exercice 170 Dans chacun des cas suivants, déterminer s'il existe une application linéaire $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vérifiant :

1. $f(1, -1) = (2, 3)$ et $f(2, -2) = (3, 2)$,
2. $f(1, -1) = (2, 3)$ et $f(1, 1) = (3, 2)$,
3. $f(1, -1) = (2, 3)$ et $f(3, -3) = (6, 9)$.

Exercice 171 Soit $F = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications infiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si $f \in F$, on note $D(f)$ l'application qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $f'(x) - 2xf(x)$. Montrer que $D(f) \in F$ et que l'application $D \colon F \to F$ ainsi définie est linéaire. Calculer son noyau et son image.

Exercice 172 On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (x+y+z, 2x+y, 2x+z).$$

1. Montrer que f est bijective et calculer f^{-1}.
2. Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x+y+z=0\}$. Donner une équation cartésienne de $f(F)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 173 On considère l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (x+2y-2z, 2x+y-2z, 2x+2y-3z)$$

et $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (-1,1,0)$ et $u_3 = (1,0,1)$.

(a) Écrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(b) Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ et écrire la matrice A' de f dans la base $\mathfrak{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$. Interprétation géométrique.

(c) Trouver une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = A'$.

Exercice 174 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y,z) = (-x+y, x+2y+z)$$

et $u_1 = (1,1,2)$, $u_2 = (1,0,1)$, $u_3 = (1,-1,1)$, $v_1 = (1,1)$ et $v_2 = (1,-1)$.

(a) Montrer que $\mathfrak{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que $\mathfrak{V} = \{v_1, v_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

(b) On note $\mathfrak{B}_3$ (resp. $\mathfrak{B}_2$) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^2$). Écrire la matrice associée à f dans les bases :

  (i) $\mathfrak{B}_3$ et $\mathfrak{B}_2$

  (ii) $\mathfrak{B}_3$ et $\mathfrak{V}$

  (iii) $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$

Exercice 175 Soit p un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que $p^2 = p$.

1. Montrer que, pour tout $x \in E$, on a $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$. En déduire que l'on a $E = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)$.
2. Montrer que l'on a $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$. En déduire que p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Exercice 176

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par
$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$
Démontrer que f est une projection sur un plan vectoriel dont on donnera une équation cartésienne, parallèlement à une droite vectorielle dont on donnera une base.
2. Écrire, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la matrice de la symétrie par rapport au plan d'équation $x+y+z=0$ parallèlement à la droite engendrée par le vecteur $(1,2,-2)$.

Exercice 177 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques est

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 & \alpha-1 \\ 0 & -1 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

Déterminer, suivant la valeur de α, le rang de f_α, une base de $\Im(f_\alpha)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f_\alpha)$.

Exercice 178 Soient $\mathbb{K}$ un corps, V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et u un endomorphisme de V tel que $u \neq 0$ et $u^2 = 0$.

1. Montrer que $\Im(u) \subseteq \mathrm{Ker}(u)$ et déterminer $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(u))$.
2. En déduire qu'il existe une base de V dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 179 Soient $\mathbb{K}$ un corps, V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et E, F deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de V. Soit $\psi \colon E \times F \to V;\ (e, f) \to e - f$. Montrer que ψ est linéaire et donner son image. Montrer que $\mathrm{Ker}(\psi) = \{(x, x),\ x \in E \cap F\}$. Donner la dimension de $E \times F$. En déduire l'égalité $\dim_{\mathbb{K}}(E) + \dim_{\mathbb{K}}(F) = \dim_{\mathbb{K}}(E + F) + \dim_{\mathbb{K}}(E \cap F)$.

21 Intégrales multiples

Exercice 180 Parmi les deux intégrales suivantes, laquelle est la plus facile à calculer ? Effectuer ce calcul.

$$\int_1^{\sqrt{3}} \left(\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} dx \right) dy \quad \text{ou} \quad \int_0^1 \left(\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} dy \right) dx.$$

Exercice 181 Calculer $\int\int_D \frac{xy^2}{1+x^2} dxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leqslant x \leqslant 2,\ \ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

Exercice 182 Calculer $\int_0^1 \left(\int_0^y \frac{2(x+y)}{(1+(x+y)^2)^2} dx \right) dy$, puis $\int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{2(x+y)}{(1+(x+y)^2)^2} dy \right) dx$. L'égalité était-elle prévisible ?

Exercice 183 Calculer $\int_0^1 \left(\int_0^{1-y} a^x b^y dx \right) dy$, où a et b sont des réels strictement positifs, distincts et différents de 1.

Exercice 184 Pour $0 < \varepsilon < 1$, calculer $I_\varepsilon = \int\int_{D_\varepsilon} \exp\left(\frac{y}{x}\right) dxdy$,
où $D_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leqslant y \leqslant x,\ \varepsilon \leqslant x \leqslant 1\}$. Quelle est la limite de I_ε lorsque ε tend vers 0 ?

Exercice 185 Calculer $\int\int_D (1 - x - y) dxdy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$.

Exercice 186 Calculer l'aire du domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant y \leqslant 2 - x^2\}$.

Exercice 187 Calculer (en utilisant les coordonnées polaires) $\int\int_D \frac{y^3}{x^2+y^2} dxdy$,
où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0,\ y \leqslant x\}$.

Exercice 188 Calculer directement, puis à l'aide des coordonnées polaires $\int\int_D \frac{x}{x^2+y^2} dxdy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 \leqslant x \leqslant \sqrt{3},\ \frac{x}{\sqrt{3}} \leqslant y \leqslant x\}$.

Exercice 189 Calculer $\int\int_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dxdy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$.

Exercice 190 Calculer le volume d'une pyramide de hauteur h et de base rectangle de largeur l et de longueur L.

Exercice 191 Soit $a > R > 0$. Calculer l'intégrale suivante, qui détermine le potentiel électrique créé au point $(0, 0, a)$ par la sphère de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon R chargée uniformément par une densité de charge constante ρ.

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\int\int_{B(0,R)} \frac{\rho}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} dxdydz$$

Exercice 192 Déterminer et représenter l'ensemble de définition, puis calculer les dérivées partielles des fonctions définies par :

$$f_1(x, y) = \arctan(xy), \quad f_2(x, y) = \arctan(\frac{x}{y}), \quad f_3(x, y) = \exp(\frac{x}{y}) + \exp(\frac{y}{x}),$$

$$f_4(x, y) = x^2 \sin(y), \quad f_5(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad f_6(x, y) = \ln(x + y).$$

Exercice 193

1. Trouver toutes les fonctions f telles que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3y^2 + 2xy^4 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^4y + 4x^2y^3 + \cos(y)$$

   Comparer $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$ et $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$.

2. Mêmes questions avec :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x$$

Exercice 194

1. Trouver toutes les fonctions $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifient :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}(x, y) = 0.$$

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On pose $F(u, v) = f(u + v, u - v)$ pour $u, v \in \mathbb{R}$. Calculer $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$. En déduire toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 qui vérifient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Exercice 195 Soient $F :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^2 et

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R}. \\ & (x, y, z) & \mapsto & F(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \end{array}$$

Calculer le Laplacien de f en fonction de F' et F'', puis déterminer F telle que $\Delta f = 0$.

Quatrième partie

SM2 Devoirs

22 Devoir : Intégration

Exercice 196 Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$.

1. Justifier que pour tout entier $n \geqslant 0$, I_n existe.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, $I_n \geqslant 0$ et $I_{n+1} \leqslant I_n$.
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$. Expliciter I_n.
4. Exprimer $\int_0^1 (x^2-1)^n dx$ en fonction de I_{2n+1}.
   Indication : On pourra utiliser, en le justifiant, le changement de variable $u = \cos(x)$.

Exercice 197

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$R(X) = \frac{4X}{(1+X)^2(1+X^2)}$$

2. Soit f la fonction qui à x associe

$$f(x) = \frac{\sin x}{1+\sin x}$$

   Montrer que f est définie continue sur $I =]-\pi/2, \pi[$.
3. Calculer les primitives de f sur I.
   Indication : On pourra utiliser, en le justifiant, le changement de variable $u = \tan(\frac{x}{2})$.

23 Devoir : Équations différentielles

Exercice 198 On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad x(x-2)y' + 2(x+1)y = 6x - 1.$$

1. Résoudre sur les intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 2[$ et $]2, +\infty[$ l'équation homogène associée

$$(E_0) \quad x(x-2)y' + 2(x+1)y = 0.$$

   Que se passe-t-il pour les solutions au voisinage de 0 ? au voisinage de 2 ?
2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur chacun des intervalles ci-dessus.

Exercice 199 Le but de cet exercice est de résoudre le système (S) formé des deux équations différentielles suivantes dépendant d'un paramètre ω réel

$$(S) \quad \begin{cases} y'' + y' + 2\omega^2 y = z' + \omega^2 z \\ z'' + z' + 2\omega^2 z = y' + \omega^2 y. \end{cases}$$

1. On pose $u = y + z$ et $v = y - z$. Écrire les équations différentielles vérifiées par u et v.
2. En discutant sur les valeurs du paramètre ω, résoudre les équations différentielles vérifiées par u et v.

3. En déduire, en fonction de ω, l'ensemble des solutions du système d'équations différentielles (S).

Exercice 200 L'évolution de la température $T(t)$ d'un liquide se refroidissant peut être modélisée par l'équation différentielle suivante

$$T\,' = -k(T - T_{ext})$$

où T_{ext} est la température de l'air ambiant et k une constante strictement positive.
D'autre part, si on mélange un volume V_1 de liquide à la température T_1 avec un volume V_2 à la température T_2, la température T du mélange est la moyenne des températures

$$T = \frac{V_1T_1 + V_2T_2}{V_1 + V_2}.$$

Alice et Bernard aiment déguster leur café avec un peu de lait. Ils ont chacun une technique pour faire refroidir leur tasse de café. Alice attend cinq minutes, puis ajoute le lait. Bernard, lui, ajoute d'abord la même quantité de lait, puis attend cinq minutes. Qui d'Alice ou de Bernard boit le café le plus chaud au bout des cinq minutes ?
On suppose que la température du lait est T_{ext}.

24 Devoir : Matrices

Exercice 201 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver l'ensemble des matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.

Exercice 202 Une usine récupère 3 types d'alliages de récupération. Elle les fond, les mélange, et compose d'autres alliages. Les compositions des 3 alliages récupérés sont les suivantes :

type	fer	nickel	cuivre
alliage A	10%	20%	70%
alliage B	30%	40%	30%
alliage C	80%	10%	10%

L'usine a reçu une commande de 100 tonnes d'alliage contenant 34% de fer, 28% de nickel et 38% de cuivre. Combien de tonnes de chaque alliage récupéré faut-il mélanger pour satisfaire cette commande ?
L'usine peut-elle fabriquer de cette manière un alliage contenant 69% de fer, 23% de nickel et 8% de cuivre ?

Exercice 203 Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \alpha & 0 & -1 \end{pmatrix}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
À quelle condition sur α la matrice B est-elle inversible ? Quand B est inversible, calculer B^{-1}.

25 Devoir : Intégration

Exercice 204 Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note f_n la fonction qui à x associe $(\ln x)^n$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, f_n admet une unique primitive sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1. On note F_n cette primitive.

2. Calculer F_1 puis $\lim_{x\to 0^+} F_1(x)$.
3. En s'inspirant du calcul de F_1, trouver une relation entre F_{n+1} et F_n, pour $n \geqslant 1$.
4. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\lim_{x\to 0^+} F_n(x) = (-1)^{n+1} n!$$

Exercice 205 1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$R(X) = \frac{1}{X^4 - 1}$$

2. Soit f la fonction qui à x associe

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 - 2\cos^2 x}$$

Montrer que f est définie continue sur $I =]-\pi/4, \pi/4[$.

3. Calculer les primitives de f sur I (On pourra utiliser, en le justifiant, le changement de variable $u = \tan x$ et remarquer que $1 + \tan^2 x = 1/\cos^2 x$).

26 Devoir : Équations différentielles

Exercice 206 On considère l'équation différentielle suivante

$$(E) \qquad x(1-x^2)y' + (2x^2 - 1)y = 2x^3$$

1. (a) Résoudre l'équation homogène associée

$$(H) \qquad x(1-x^2)y' + (2x^2 - 1)y = 0$$

sur les intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

(b) A-t-on des solutions non nulles définies sur $\mathbb{R}^{+*}$?

2. (a) De même, résoudre l'équation (E) sur chacun des intervalles $]0, 1[$, $]1, +\infty[$.

(b) Montrer qu'il existe une solution définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et la calculer.

Exercice 207 1. Résoudre, suivant la valeur du réel m, l'équation :

$$r^2 + 2mr + 1 = 0$$

2. En déduire suivant les valeurs de m, les solutions de l'équation différentielle :

$$(H) \qquad y'' + 2my' + y = 0$$

3. Résoudre, suivant la valeur de m :

$$(E) \qquad y'' + 2my' + y = xe^x$$

27 Devoir : Matrices, systèmes linéaires

Exercice 208 Résoudre le système suivant, en discutant suivant la valeur du paramètre réel $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(S1) \left\{ \begin{array}{rrcl} x & +(\lambda+1)y & = & 1 \\ \lambda x & +(\lambda+4)y & = & 2 \end{array} \right.$$

Exercice 209 1. Résoudre le système suivant, selon les valeurs de b_1, b_2, b_3, b_4 :

$$(S2) \left\{ \begin{array}{rrrrcl} x & +3y & +4z & +7t & = & b_1 \\ x & +y & +z & +t & = & b_2 \\ x & +3y & +3z & +2t & = & b_3 \\ x & +3y & +4z & +5t & = & b_4 \end{array} \right.$$

2. Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 210 Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il n'existe aucune matrice $M \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ telle que $BM = I_3$ mais qu'il existe une infinité de matrices $N \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $NB = I_2$, où $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont les matrices identité de $M_2(\mathbb{R})$ et $M_3(\mathbb{R})$.

28 Devoir : Espaces vectoriels

Exercice 211 Soit λ un paramètre réel. On considère dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^4$ les vecteurs suivants : $u = (1, -1, 2, 2)$, $v = (1, 1, 0, 2)$ et $w_\lambda = (1, -3, 4, \lambda)$.

1. Déterminer, suivant les valeurs de λ, une base, la dimension et un système d'équations cartésiennes du sous-espace F_λ engendré par les vecteurs u, v et w_λ.
2. Soit $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 | x + y - 2z + 2t = 0\}$. Déterminer une base, la dimension et un système d'équations paramétriques de G.
3. Montrer que $G \cap F_0$ est un plan vectoriel.
4. En déduire $G+F_0$ (on calculera $\dim(G+F_0)$). Les sous-espaces G et F_0 sont-ils supplémentaires ?
5. Existe-t-il une valeur de λ pour laquelle F_λ et G sont supplémentaires ?
6. Déterminer un supplémentaire de $G \cap F_0$ dans $\mathbf{R}^4$.

Exercice 212 Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à deux. Soient a, b, c trois nombres complexes deux à deux distincts.

1. On pose $A(x) = (x - b)(x - c)$, $B(x) = (x - c)(x - a)$ et $C(x) = (x - a)(x - b)$. Montrer que la famille $\{A, B, C\}$ est une base de E.
2. Soit P un élément de E. Calculer les coordonnées de P dans la base (A, B, C). En déduire la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

29 Devoir : Espaces vectoriels

Exercice 213 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant 3$, à coefficients réels.

1. Donner une base de E. Que vaut $\dim_{\mathbb{R}}(E)$?
2. Si $a \in \mathbb{R}$, on pose $\delta_a \colon E \to \mathbb{R}$; $P \mapsto P(a)$. Montrer que δ_a est une application linéaire.
3. Soient a_0, a_1, a_2, a_3 des réels *distincts*. On pose
$$\begin{aligned} \varphi \colon E &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ P &\longmapsto (\delta_{a_0}(P), \delta_{a_1}(P), \delta_{a_2}(P), \delta_{a_3}(P)). \end{aligned}$$
Montrer que φ est une application linéaire. Déterminer son noyau. En déduire que φ est un isomorphisme.
4. Pour $i \in \{0, ..., 3\}$, on pose
$$L_i = \frac{\prod_{j \neq i} (X - a_j)}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)}.$$
Calculer $\varphi(L_i)$. En déduire que $\mathfrak{B} = \{L_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E (les polynômes L_i s'appellent les polynômes d'interpolation de Lagrange en $a_0, ..., a_3$). Soit $P \in E$, en utilisant l'isomorphisme φ, montrer que
$$P = \sum_{i=0}^{3} P(a_i) L_i$$
(formule d'interpolation de Lagrange).

Exercice 214 Soient $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 0, 2)$.

1. Vérifier que $\mathfrak{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base $\mathfrak{B}$ est
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$
Écrire la matrice de g dans la base canonique.

SM 2 Examens

30 Interrogation : Espaces vectoriels

Exercice 215 Déterminer l'ensemble des solutions du système suivant : $\left\{ \begin{array}{rrrcl} x & +y & -z & = & 1 \\ 2x & -y & -3z & = & 2 \\ 2x & -7y & -5z & = & 2 \end{array} \right.$

Exercice 216 Soit $u_1 = (1, -1, -1)$, $u_2 = (2, 1, 0)$, $u_3 = (0, 3, 2)$, $u_4 = (3, -6, -5)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $F = \mathrm{vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Déterminer une base de F. En déduire la dimension de F.

Exercice 217 Soit $v_1 = (1,1,0,1)$, $v_2 = (1,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,1,0)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est-elle libre ? Engendre-t-elle $\mathbb{R}^4$?

Exercice 218 Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par le système d'équations $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+z=0 \end{cases}$ Déterminer une base de G. Quelle est la dimension de G ?

31 Interrogation : Intégration, équations différentielles

Exercice 219

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$.
2. Trouver toutes les primitives de $\dfrac{x}{(x+1)(x^2+2x+2)}$.
3. Trouver la solution s'annulant en $x=9$ de l'équation $2xy'+y=x$.
4. Déterminer toutes les solutions de l'équation $y''+2y'+y=e^{-x}$.

32 Interrogation : Espaces vectoriels

Exercice 220 Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice M est inversible et calculer M^{-1}.

Exercice 221 On considère l'application linéaire $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y,z) = (x+3y+2z, x+y+z).$$

1. Écrire la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\dim \operatorname{Ker} f$ et $\dim \Im f$, donner une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\Im f$

Exercice 222 On se place dans $E=\mathbb{R}^4$. Soit $u_1=(1,2,1,-2)$ et $u_2=(1,1,0,2)$. Donner un système d'équations cartésiennes du sous-espace vectoriel $F=\operatorname{vect}(u_1,u_2)$.

Exercice 223 On se place dans $\mathbb{R}^4$. Soit G le sous-espace vectoriel d'équation cartésienne $2x+y-6z-t=0$.

1. Donner une base du sous-espace vectoriel G.
2. Trouver un supplémentaire de G dans $\mathbb{R}^4$.

33 Examen : partiel

Exercice 224 Calculer l'aire suivante :

Exercice 225 Calculer $\displaystyle\int_1^4 \frac{dt}{t(1+\sqrt{t})}$ *(on pourra poser $u=\sqrt{t}$).*

Exercice 226 Calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ puis calculer $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 227 Soit $f(x) = \frac{x^4-4x}{(x-2)(x^2+2)}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
2. Calculer une primitive de f sur $]-\infty, 2[$ puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Exercice 228 Soit $(E) \quad (x^2-1)y' - 2xy = (x+1)^2$.

1. Résoudre (E) en précisant les intervalles de validité.
2. Trouver la solution de (E) définie sur $]-1, 1[$ telle que $y(0) = 2$.

Exercice 229 On considère l'équation différentielle $(E) \quad y'' + 4y = \cos(4x)\cos(2x)$.

1. Montrer que $\cos(4x)\cos(2x) = \frac{1}{2}(\cos(6x) + \cos(2x))$.
2. Trouver la solution générale de l'équation différentielle $(E1) \quad y'' + 4y = \frac{1}{2}\cos(6x)$.
   Trouver la solution générale de l'équation différentielle $(E2) \quad y'' + 4y = \frac{1}{2}\cos(2x)$.
3. En déduire la solution générale de l'équation différentielle (E).
4. Trouver la solution de (E) déterminée par $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 230 On considère l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti :
$(E) \quad y'' = -y - \lambda y'$ avec $\lambda > 0$.

1. Écrire l'équation caractéristique de (E).
2. Dans cette question, on se place dans le cas $\lambda > 2$. Écrire l'ensemble des solutions de (E). Montrer que les 2 racines de l'équation caractéristique sont strictement négatives. Si y est une solution de (E), quelle est la limite de $y(x)$ quand x tend vers $+\infty$?
3. Écrire l'ensemble des solutions de E pour $0 < \lambda < 2$.
4. Écrire l'ensemble des solutions de E pour $\lambda = 2$.

34 Examen : Juin 2004

Exercice 231 On rappelle que $\mathbb{R}_3[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.

1. Donner une base et la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (X^3+1, X^3-1, X^2+X, X^2-X)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Calculer les coordonnées du polynôme $X^3 + 2X + 1$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 232 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$f(x, y, z) = (6x - 2y + 2z, 10x - 3y + 4z, -2x + y).$$

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Ecrire la matrice $\mathrm{mat}A$ de f dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Donner la dimension et une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Donner la dimension et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   (c) Déterminer l'ensemble des vecteurs $\mathrm{vect}u$ tels que $f(\mathrm{vect}u) = \mathrm{vect}u$.
2. Soit $\mathrm{vect}u_1 = (1, 2, -1)$, $\mathrm{vect}u_2 = (0, 1, 1)$, $\mathrm{vect}u_3 = (1, 2, 0)$ et $\mathcal{B}' = (\mathrm{vect}u_1, \mathrm{vect}u_2, \mathrm{vect}u_3)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

(c) Ecrire la matrice mat$P$ de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Calculer matP^{-1}.

(d) Calculer matP^{-1}matAP. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Exercice 233 Calculer $\displaystyle\iint_D y\, e^x dxdy$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant x \leqslant y^2\}$.

Exercice 234 Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0 \text{ et } x^2+y^2 \leqslant 1\}$.

Exercice 235 1. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 6y' + 9y = \alpha e^{3x}, \qquad (E)$$

où α est un paramètre réel.

2. Pour quelle valeur de α les solutions de (E) forment-elles un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

35 Examen : Septembre 2004

Exercice 236 1. Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{1}{x(1+x^2)}$ en éléments simples.

2. Donner les solutions, sur chacune des demi-droites $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle

$$x^4 y' + 3x^3 y = \frac{1}{1+x^2}.$$

Exercice 237 Dessiner les domaines du plan $\mathbb{R}^2$ rapporté à un repère orthonormé ainsi définis :

$$\mathcal{D}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1\} \text{ et } \mathcal{D}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\}.$$

Calculer l'aire de $\mathcal{D}_1$ et en déduire celle de $\mathcal{D}_2$.

Exercice 238 Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{\sin(x^2+y^2)}{2+\cos(x^2+y^2)}\, dxdy$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Exercice 239 On considère un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ et une base $\mathcal{B} = (\text{vect}e_1, \text{vect}e_2, \text{vect}e_3)$ de E.

Soit f l'application linéaire de E dans E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Trouver le noyau de f.
2. On pose $\text{vect}v_1 = \text{vect}e_1 + 2\text{vect}e_2 + 3\text{vect}e_3$, $\text{vect}v_2 = \text{vect}e_2 + \text{vect}e_3$ et $\text{vect}v_3 = \text{vect}e_1 + 2\text{vect}e_3$. Montrer que les vecteurs $\text{vect}v_1$, $\text{vect}v_2$ et $\text{vect}v_3$ forment une base $\mathcal{B}'$ de E. Calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
3. En déduire que l'on a $\quad f \circ f = -f$.

Exercice 240 On considère dans $\mathbb{R}^3$ les quatre vecteurs $\text{vect}v_1 = (1,1,0)$, $\text{vect}v_2 = (1,2,-1)$, $\text{vect}v_3 = (1,0,2)$ et $\text{vect}v_4 = (2,1,-1)$.
On pose $\quad F = \text{vect}(\text{vect}v_1, \text{vect}v_2) \quad$ et $\quad G = \text{vect}(\text{vect}v_3, \text{vect}v_4)$.

1. Déterminer les dimensions de F et G.
2. Déterminer une base de $F + G$, ainsi qu'une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs vectv_1, vectv_2, vectv_3 et vectv_4.
3. Déterminer la dimension de $F \cap G$ et une base de ce sous-espace.

Exercices d'Orsay

Cinquième partie
Corrections

Correction 1 • $|Z_1| = 1$ • $|Z_2| = \sqrt{2}$ • $|Z_3| = |2i||3+i||1+i| = 2 \times \sqrt{10} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{5}$
• $|Z_4|^2 = \frac{13\times 5}{2\times 2}$ donc $|Z_4| = \frac{\sqrt{65}}{2}$ • $|Z_5| = \frac{|1+i|^4}{|2+i|} = \frac{4}{\sqrt{5}}$
• $Z_6 = \frac{(2+i)(1+i)+2i(1-i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3+5i}{(1-i)(1+i)}$ donc $|Z_6| = \frac{\sqrt{34}}{2}$

Correction 3 • $|1+i| = \sqrt{2}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$ donc $\arg(1+i) = \pi/4 \mod 2\pi$ et $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.
• $|1-i\sqrt{3}| = 2$ et $\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}) = \cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})$ donc $1-i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3}$.
• On a de même $-\sqrt{3}+i = 2e^{i5\pi/6}$.
• On a de même $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$ et $\sqrt{3}-i = 2e^{-i\pi/6}$ donc $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} = e^{i(\pi/3+\pi/6)} = e^{i\pi/2}$.
(On peut aussi remarquer que $(\sqrt{3}-i)i = 1+i\sqrt{3}$ donc $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} = i = e^{i\pi/2}$.)

Correction 4 • $Z_1 = \frac{(3+6i)(3+4i)}{|3-4i|^2} = \frac{-15+30i}{25} = -\frac{3}{5} + i\frac{6}{5}$.
• $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \frac{(1+i)^2(2+i)^2}{(|2-i|^2)^2} = \frac{2i(3+4i)}{25} = \frac{-8+6i}{25}$. En utilisant le 1er point on trouve : $Z_2 = -\frac{23}{5} + i\frac{36}{25}$.
• $Z_3 = z + \overline{z} = 2\Re z$ avec $z = \frac{2+5i}{1-i}$. $z = \frac{(2+5i)(1+i)}{|1+i|^2} = \frac{-3+7i}{2}$. Donc $\Re z = -\frac{3}{2}$ et $Z_3 = -3$.
• $Z_4 = (e^{i2\pi/3})^3 = e^{i2\pi} = 1$.
• $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ donc $Z_5 = (\sqrt{2})^{(9-7)}e^{i(9\pi/4+7\pi/4)} = 2e^{i4\pi} = 2$.
(La présence de fortes puissances doit inciter à passer en forme trigonométrique.)

Correction 5
1. $e^{i\theta}\overline{e^{i\theta}} = |e^{i\theta}|^2 = 1$ donc $\overline{e^{i\theta}} = (e^{i\theta})^{-1}$. $e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i(\theta-\theta)} = e^{i0} = 1$ donc $e^{-i\theta} = (e^{i\theta})^{-1}$.
2. $\cos\theta = \Re e^{i\theta} = \frac{e^{i\theta}+\overline{e^{i\theta}}}{2} = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ par le point a).
(On peut aussi calculer $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cos\theta + \cos(-\theta) + i(\sin\theta + sin(-\theta)) = 2\cos\theta$.)
De même $\sin\theta = \Im e^{i\theta} = \frac{e^{i\theta}-\overline{e^{i\theta}}}{2i} = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$.

Correction 6
1. D'une part $e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i\sin(x+y)$. D'autre part

$$\begin{aligned} e^{i(x+y)} &= e^{ix}e^{iy} = (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) \\ &= (\cos x\cos y - \sin x\sin y) + i(\cos x\sin y + \sin x\cos y) \end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on trouve $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$ et $\sin(x+y) = \cos x\sin y + \sin x\cos y$.

$\tan(x+y) = \frac{\cos x \sin y + \sin x \cos y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$. On a $\sin\theta = \tan\theta\cos\theta$, en remplaçant $\sin x$ et $\sin y$ dans la formule on trouve

$$\tan(x+y) = \frac{\cos x \cos y \tan y + \cos x \cos y \tan x}{\cos x \cos y - \cos x \cos y \tan x \tan y} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

On déduit des formules précédentes :

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \sin(2x) = 2\cos x \sin x, \quad \tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

2. On pose $t = \tan\frac{x}{2}$. Si $x \neq \pi \mod 2\pi$ alors $\cos\frac{x}{2} \neq 0$ et t est bien défini.
   Par le point a), $\sin x = 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$.
   Indication : faire disparaître $\sin\frac{x}{2}$ *d'une part,* $\cos\frac{x}{2}$ *d'autre part, puis utiliser* $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

   $\sin x = 2\cos^2\frac{x}{2}\frac{\sin x/2}{\cos x/2} = 2t\cos^2\frac{x}{2}$. De même $\sin x = 2\frac{1}{t}\sin^2\frac{x}{2}$.
   Donc $t^2\sin x = 2t\sin^2\frac{x}{2}$ et $\sin x(1+t^2) = 2t(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}) = 2t$. On en déduit $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$.
   Par le point a), $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$. Comme $\cos x = \frac{\sin x}{\tan x}$, on en déduit $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.
   Remarque : on peut obtenir $\cos x$ *directement avec une manipulation similaire à* $\sin x$ ($\cos x(1+t^2) = (\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2})(1-t^2)$)*. Ou alors faire la manipulation sur* $e^i x$*, ce qui donne en même temps* $\cos x$ *et* $\sin x$ ($e^{ix}(1+t^2) = (1-t^2+2it)$)*.*

Correction 7 1. $\cos a \cos b = \frac{(e^{ia}+e^{-ia})}{2}\frac{(e^{ib}+e^{-ib})}{2} = \frac{1}{4}(e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)} + e^{i(-a+b)} + e^{i(-a-b)})$.
   On utilise la formule d'Euler en sens inverse : $\frac{e^{i(a+b)}+e^{i(-a-b)}}{2} = \cos(a+b)$ et $\frac{e^{i(a-b)}+e^{i(-a+b)}}{2} = \cos(a-b)$.
   On trouve : $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$.

   De même :
   $\sin a \sin b = \frac{(e^{ia}-e^{-ia})}{2i}\frac{(e^{ib}-e^{-ib})}{2i} = -\frac{1}{4}(e^{i(a+b)} + e^{i(-a-b)} - e^{i(a-b)} - e^{i(-a+b)}) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$.

   $\cos a \sin b = \frac{(e^{ia}+e^{-ia})}{2}\frac{(e^{ib}-e^{-ib})}{2i} = \frac{1}{4i}[(e^{i(a+b)} - e^{i(-a-b)}) - (e^{i(a-b)} - e^{i(-a+b)})] = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b)$.

2. *"Linéariser" signifie faire disparaître les puissances et les produits pour obtenir des sommes de cosinus et sinus. C'est très utile dans le calcul d'intégrales.*
   Par ce qui précède,
   $\cos^2 a = \cos a \cos a = \frac{1}{2}(\cos(2a)a + \cos 0) = \frac{1}{2}(\cos(2a) + 1)$.
   $\sin^2 a = \frac{1}{2}(\cos 0 - \cos(2a)) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2a))$.

Correction 8 $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Correction 9 $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$ donc $Z = 2^{2003}e^{i2003\pi/3}$. 2004 est pair et divisible par 3 donc $\frac{2004\pi}{3} \equiv 0 \mod 2\pi$ et $\frac{2003\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{3} \mod 2\pi$. Donc $Z = 2^{2003}e^{-i\pi/3}$.

Correction 10 On cherche à écrire $\frac{\pi}{12} = x - y$ avec des valeurs de x et de y pour lesquelles on connaît cosinus et sinus ($\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \ldots$). Ensuite on écrit $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$. Si on prend $x = \frac{\pi}{3}$ et $y = \frac{\pi}{4}$ on a $x - y = \frac{\pi}{12}$ donc

$$\cos(\pi/2) = \cos(\pi/3)\cos(\pi/4) + \sin(\pi/3)\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}).$$

Correction 11 • $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \bmod 2\pi$ ou $x = \frac{2\pi}{3} \bmod 2\pi$. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est
$S = \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
• $\tan x = -1 \Leftrightarrow \sin x = -\cos x$, donc $(X, Y) = (\cos x, \sin x)$ est sur la droite $Y = -X$. On voit facilement sur le cercle que ceci est équivalent à $x = -\frac{\pi}{4} \bmod \pi$. L'ensemble des solutions est $S = \{\frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Correction 12 On a $\cos\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta \bmod 2\pi$ ou $\alpha = -\beta \bmod 2\pi$. Donc $\cos(5x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) \Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $5x = \frac{2\pi}{3} - x + 2k\pi$ ou $5x = -\frac{2\pi}{3} + x + 2k\pi$.
$5x = \frac{2\pi}{3} - x + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}$.
$5x = -\frac{2\pi}{3} + x + 2k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$.
L'ensemble des solutions est

$$S = \{\frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}.$$

Correction 13

1. $\frac{z}{z-1} = i$ a un sens seulement si $z \neq 1$. Pour $z \neq 1$, cette équation est équivalente à :
   $z = i(z-1)$
   $z(1-i) = -i$
   $z = \frac{-i}{1-i} = \frac{-i(i+1)}{|1-i|^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. Cette valeur est bien solution car elle est différente de 1.
2. $-z$ correspond au vecteur $\overrightarrow{MO}$ et $1-z$ au vecteur $\overrightarrow{MA}$. Donc $\frac{|z|}{|z-1|} = \frac{OM}{AM}$ et $\arg\frac{z}{z-1} = \arg(-z) - \arg(1-z)$ est l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO})$. Comme $|i| = 1$ et $\arg i = \frac{\pi}{2} \bmod 2\pi$, L'équation $z/(z-1) = i$ est équivalente à $OM = AM$ et $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) = \frac{\pi}{2}$.
   Comme $OM = AM$, M est sur la médiatrice de $[OM]$, donc $\Re z = \frac{1}{2}$. Comme l'angle $\widehat{OMA}$ est droit, M est sur le cercle de diamètre $[OM]$. En raison de l'angle orienté, on retrouve $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

Correction 14 Si $z = -1$, la fraction $\frac{z-1}{z+1}$ n'a pas de sens.
Si $z \neq 1$, $\frac{z-1}{z+1} \in \mathbb{R}$ est équivalent à $\arg\frac{z-1}{z+1} = 0 \bmod \pi$ et $\frac{z-1}{z+1} \in i\mathbb{R}$ est équivalent à $\arg\frac{z-1}{z+1} = \frac{\pi}{2} \bmod \pi$ (on enlève le cas $z = 1$ car 0 n'a pas d'argument).
Interprétation géomtrique de $\arg\frac{z-1}{z+1}$: soit M, A, B les points d'affixes respectives z, 1 et -1, on suppose que M est différent de A et B. $1-z$ correspond au vecteur $\overrightarrow{MA}$ et $-1-z$ au vecteur $\overrightarrow{MB}$, donc $\arg\frac{z-1}{z+1} = \arg(1-z) - \arg(-1-z) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})$.
• Pour $z \neq 1$, l'équation a) est équivalente à $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = 0 \bmod \pi$, c'est-à-dire A, B et M sont alignés, donc $z \in \mathbb{R}$. On voit que $z = 1$ est solution, donc l'ensemble des solutions est $S = \{z \in \mathbb{R}, z \neq -1\}$.
• Pour $z \neq 1$, l'équation b) est équivalente à $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2} \bmod \pi$, c'est-à-dire M est sur le cercle de diamètre $[AB]$, qui est le cercle de centre 0 de diamètre 1. On voit que $z = 1$ est solution, donc l'ensemble des solutions est $S = \{z; |z| = 1\} \setminus \{-1\}$.

Remarque : on peut retrouver ces solutions de façon calculatoire en écrivant $z = x + iy$ et en calculant les parties réelle et imaginaire de $\frac{z-1}{z+1}$.

Correction 18 $x_1 - 3 = 100 \times (x_1 - 3,14) = 100x_1 - 314$ d'où $99x_1 = 311$, $x_1 = \frac{311}{99}$.
$10x_2 - 9 = x_2$ d'où $x_2 = \frac{9}{9} = 1$.
$x_3 - 3,14 = 0,00\overset{\frown}{9} = 10 \times (x_3 - 3,149)$ d'où $9x_3 = \frac{3149-314}{100} = \frac{2835}{100}$ et $x_3 = \frac{315}{100} = \frac{63}{20}$ ($2835 = 9 \times 315$).

Correction 19 1. $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=(n+1)-n=1$ d'où le résultat.

2. Par 1. on a $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Or $\sqrt{n+1}>\sqrt{n}$ donc $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}>2\sqrt{n}$ et $2\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$, d'où la 1ère inégalité.
   Par 1. on a $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$. Or $\sqrt{n}<\sqrt{n-1}$ donc $\sqrt{n}+\sqrt{n-1}<2\sqrt{n}$ et $2\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}>\frac{1}{\sqrt{n}}$, d'où la 2ème inégalité.
3. En appliquant 2. on a

$$\sum_{n=2}^{N}2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}}<\sum_{n=2}^{N}2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$$

   d'où $2(\sqrt{N+1}-\sqrt{2})<\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{N}-1)$.
4. Soit $x=\sum_{n=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Par 3. on a $1+2(\sqrt{10001}-\sqrt{2})<x<1+2\times(100-1)=199$. Or $2(\sqrt{10001}-\sqrt{2})+1\simeq 198,18$ donc $E(x)=198$.

Correction 20 1. On a $E(x)\leqslant x<E(x)+1$ et $E(y)\leqslant y<E(y)+1$ donc $E(x)+E(y)\leqslant x+y<E(x)+E(y)+2$. Comme $E(x+y)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $x+y$, on a $E(x+y)\geqslant E(x)+E(y)$. De plus, $E(x+y)+1$ est le plus petit entier strictement supérieur à $x+y$, on a $E(x+y)+1\leqslant E(x)+E(y)+2$, c'est-à-dire $E(x+y)\leqslant E(x)+E(y)+1$.

2. Si $x\in\mathbb{Z}$ alors $E(x)=x$ et $E(-x)=-x$ donc $E(x)+E(-x)=0$.
   Si $x\notin\mathbb{Z}$ alors $E(x)<x<E(x)+1$ et $-E(x)-1<-x<-E(x)$, donc $E(-x)=-E(x)-1$. Dans ce cas on obtient $E(x)+E(-x)=-1$.
3. Soit $a=E(x)$. On a $na\leqslant nx<n(a+1)$ donc $na\leqslant E(nx)<n(a-1)$ et $a\leqslant\frac{E(nx)}{n}<a-1$. Par définition de $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right)$, on a $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right)=a=E(x)$.

Correction 21 $6\sqrt{5}>0$ et $8\sqrt{3}>0$ donc ils sont ordonnés comme leurs carrés. $(6\sqrt{5})^2=180$, $(8\sqrt{3})^2=192$, donc $6\sqrt{5}<8\sqrt{3}$.

$\frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\frac{2(\sqrt{6}+\sqrt{5})}{6-5}=2(\sqrt{6}+\sqrt{5})$.
$\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2}+\frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2}=\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{2}=\sqrt{5}+\sqrt{6}$.
Donc $\frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}>\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

Correction 22 $-15\leqslant x+y\leqslant -2$.
$6\leqslant -y\leqslant 10$ donc $1\leqslant x-y\leqslant 14$.
On a forcément $y<0$, donc $-y>0$ et $5y\leqslant -xy\leqslant -4y$, soit $4y\leqslant xy\leqslant -5y$. On a $-8\leqslant 4y$ et $-10\leqslant 5y$ donc $-5y\leqslant 10$. On trouve $-8\leqslant xy\leqslant 10$.
Comme $y<0$ on a $\frac{1}{y}<0$ et $\frac{4}{y}\frac{x}{y}\leqslant\frac{-5}{y}$. On a $-1\leqslant\frac{1}{y}\leqslant -\frac{1}{2}$, donc $\frac{4}{y}\geqslant -4$ et $\frac{-5}{y}\leqslant 5$, d'où $-4\frac{x}{y}\leqslant 5$.
$\sqrt{x^2}=|x|$. On a $-5\leqslant x\leqslant 4\leqslant 5$ donc $|x|\leqslant 5$.
On ne peut rien dire de $\frac{1}{x}$ car ce nombre peut être aussi grand qu'on veut si $x\to 0^+$ et aussi petit qu'on veut si $x\to 0-$.

Correction 23 a) $x-3\geqslant 0$ ssi $x\geqslant 3$ et $x+4\geqslant 0$ ssi $x\geqslant -4$. On a 3 cas :
• $x\geqslant 3$, dans ce cas l'inéquation est équivalente à $x-3+x+4\leqslant 7\Leftrightarrow 2x+1\leqslant 7\Leftrightarrow x\leqslant 3$. Solution du cas 1 : $\{3\}$.
• $-4\leqslant x\leqslant 3$, dans ce cas l'inéquation est équivalente à $-x+3+x+4\leqslant 7\Leftrightarrow 7\leqslant 7$. C'est toujours vrai donc la solutions du cas 2 est $[-4,3]$.

• $x \leqslant -4$, dans ce cas l'inéquation est équivalente à $-x+3-x-4 \leqslant 7 \Leftrightarrow -2x \leqslant 8 \Leftrightarrow x \geqslant -4$. Solution du cas 3 : $\{-4\}$.

b) $x^2+3 \geqslant 0$ et $x^2+1 \geqslant 0$ donc les deux racines ont un sens. De plus, $x^2+3 \geqslant x^2+1$ donc $\sqrt{x^2+3} \geqslant \sqrt{x^2+1}$, donc $\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+1} \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
$\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+1} \leqslant 1$ est équivalent à $\sqrt{x^2+3} \leqslant 1 + \sqrt{x^2+1}$ et comme toutes les quantités sont positives, c'est équivalent à $x^2+3 \leqslant 1 + (x2+1) + 2\sqrt{x^2+1} = x^2+2+2\sqrt{x^2+1}$. Or $\sqrt{x^2+1} \geqslant 1$ donc $x^2+2+2\sqrt{x^2+1} \geqslant x^2+4$, et l'inégalité $x^2+3 \leqslant x^2+2+2\sqrt{x^2+1}$ est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$.
L'ensemble des solutions : $\mathbb{R}$.

c) $x^2-4x+4 = (x-2)^2$ donc $\sqrt{x^2-4x+4} = |x-2|$. $\frac{3x}{2} - 1 \geqslant 0$ ssi $x \geqslant \frac{2}{3}$ et $x-2 \geqslant 0$ ssi $x \geqslant 2$. On a donc 3 cas :
• $x \leqslant \frac{2}{3}$, dans ce cas l'inéquation est équivalente à $-x+2 \geqslant -\frac{3x}{2}+1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \geqslant -1 \Leftrightarrow x \geqslant -2$. Solutions du cas 1 : $x \in]-\infty, -2]$
• $\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 2$, dans ce cas l'inéquation est équivalente à $-x+2 \geqslant \frac{3x}{2} - 1 \Leftrightarrow 3 \geqslant \frac{5x}{2} \Leftrightarrow x \leqslant \frac{5}{6}$. Solutions du cas 2 : $x \in \left[\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right]$
• $x \geqslant 2$, dans ce cas l'inéquation est équivalente à $x-2 \geqslant \frac{3x}{2} - 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant \frac{x}{2} \Leftrightarrow x \leqslant -2$. Il n'y a pas de solution.

La solution de c) est $S =]-\infty, -2] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right]$.

Correction 24 $|x+1| < \frac{5}{2} \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < x+1 < \frac{5}{2} \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < x < \frac{3}{2}$.
Pour que $\sqrt{x^2+x-2}$ ait un sens, il faut que $x^2+x-2 \geqslant 0$. $\Delta = 9$, les racines sont $-2, 1$, donc $x^2+x-2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 1$. Si $x \leqslant -2$ alors $1+\frac{x}{2} \leqslant 0$ donc l'équation $\sqrt{x^2+x-2} > 1+\frac{x}{2}$ est satisfaite. Pour $x \geqslant 1$ on peut prendre les carrés dans l'équation $\sqrt{x^2+x-2} > 1+\frac{x}{2}$ car on a des quantités positives, et on doit résoudre $x^2+x-2 > (1+\frac{x}{2})^2 = \frac{x^2}{4}+x+1$, ce qui est équivalent à $\frac{3}{4}x^2 > 3$, soit $x^2 > 4$. Donc $x \geqslant 1$ est solution de $\sqrt{x^2+x-2} > 1+\frac{x}{2}$ ssi $x > 2$ (cette valeur est supérieure à 1).
Les solutions du système d'inéquations sont les x qui vérifient :
– $-\frac{7}{2} < x < \frac{3}{2}$ (1)
et
– $x \leqslant -2$ ou $x > 2$ (2)
On a $2 > \frac{3}{2}$ donc on ne peut pas avoir en même temps $x < \frac{3}{2}$ (1) et $x > 2$ (2e cas de (2)). On doit donc avoir $x \leqslant -2$ (1er cas de (2)). En combinant avec (1) on a $S = \left]-\frac{7}{2}, -2\right]$.

Correction 25 $|x+\sin x| \leqslant |x| + |\sin x| \leqslant 1+1$ ($|x| \leqslant 1$ par hypothèse et $|\sin x| \leqslant 1$ pour tout x). De plus $|x^7+x-3| \geqslant |-3| - (|x^7+x|) \geqslant 3 - |x^7| - |x|$. Or si $|x| \leqslant 1$ alors $|x^7| \leqslant 1$, donc $|x^7+x-3| \geqslant 3-1-1 = 1$. Par conséquent, $\frac{|x+\sin x|}{|x^7+x-3|} \leqslant \frac{2}{1} = 2$.

Correction 29 • $z_1^2+1 = 0$. $\Delta = -4$, $z_1 = \pm i$. Les racines carrées de Z_1 sont $\{i, -i\} = \{e^{i\pi/2}, e^{-i\pi/2}\}$.

• $Z_2 = e^{-i\pi/3}$. On écrit $z_2 = re^{i\theta}$, on trouve $r^2 = 1$ et $2\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. $r > 0$ donc $r = 1$ et $\theta = -\frac{\pi}{6} + k\pi$. Donc $z_2 = e^{-i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$ ou $z_2 = e^{i5\pi/3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$.

• $Z_3 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ donc $z_3 = \sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$ ou $z_3 = \sqrt[4]{2}e^{i9\pi/8}$. Écrivons $z_3 = x+iy$. On a $z_3^2 = (x^2-y^2) + 2ixy$, donc z_3 est racine carrée de Z_3 si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2-y^2 & = & \Re(Z_3) = 1 \\ 2xy & = & \Im(Z_3) = 1 \end{array}\right.$$

On a de plus $|z_3|^2 = x^2+y^2 = |Z_3| = \sqrt{2}$. On cherche d'abord x^2 et y^2 : $x^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$. De plus, $xy > 0$ donc x et y sont de même signe, d'où $z_3 = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$.

• On pose $z_4 = x+iy$. On résoud

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^2-y^2 & = & 5 \\ x^2+y^2 & = & 13 \\ 2xy & = & -12 \end{array}\right.$$

On trouve $x^2 = 9$, $y^2 = 4$, $x = \pm 3$, $y = \pm 2$ et $xy < 0$ donc les racines carréees de Z_4 sont $\{3-2i, -3+2i\}$.

• $x^2-y^2 = 2/3, x^2+y^2 = 1, 2xy = -\sqrt{5}/3 < 0$. D'où $x^2 = 5/6, y^2 = 1/6$ et $z_5 = \pm\left(\sqrt{\frac{5}{6}} - i\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Correction 30 a) $\Delta = -7-24i$. On cherche δ tel que $\delta^2 = \Delta$. $|\Delta| = 25$. $x^2-y^2 = -7$, $x^2+y^2 = 25$, $2xy = -24$. D'où $x^2 = 9$, $y^2 = 16$. $\delta = 3-4i$. Puis $z = \frac{-(1-2i)\pm\delta}{2}$ d'où $S = \{1-i, -2+3i\}$.

b) On pose $Z = z^2$. On résoud $Z^2 + (1-2i)Z - 3 - i = 0$. $\Delta = (1-2i)^2 + 4(3+i) = 9$ d'où $Z = 1+i$ ou $Z = -2+i$. Les solutions sont les racines carrées de $1+i$ et de $-2+i$. Racines de $1+i$: voir exo 12. Racines de $-2+i$: $x^2-y^2 = -2$, $x^2+y^2 = \sqrt{5}$, $2xy = 1$. D'où $x^2 = \frac{\sqrt{5}-2}{2}$, $y^2 = \frac{\sqrt{5}+2}{2}$. $S = \{\sqrt[4]{2}e^{i\pi/4}, -\sqrt[4]{2}e^{i\pi/4}, \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}, -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}\}$.

c) $(z+1)^4 = -16(z-1)^4$. 1 n'est pas solution donc l'équation est équivalente à $\left(\frac{z+1}{2(z-1)}\right)^4 = -1 = e^{i\pi}$. Donc $\frac{z+1}{2(z-1)} = e^{i\theta}$ avec $\theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant k \leqslant 3$. On trouve $z(1-2e^{i\theta}) = -1-2e^{i\theta}$ d'où $z = \frac{-1-2e^{i\theta}}{1-2e^{i\theta}}$ (on a toujours $1-2e^{i\theta} \neq 0$). Il y a 4 solutions.

d) Il faut que $z \neq 1, -1$. L'équation est équivalente à $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 = -\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^6 = -1$. D'où $\frac{z+1}{z-1} = e^{i\theta}$ avec $\theta = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$, $0 \leqslant k \leqslant 5$. On a $z(1-e^{i\theta}) = -1-e^{i\theta}$ et $1-e^{i\theta} \neq 0$ (car $\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}(1+2k)$, et $1+2k$ est impair donc ceci n'est jamais égal à 0 mod 2π). Donc $z = \frac{-1-e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$, $\theta = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$, $0 \leqslant k \leqslant 5$.
Remarque : en mettant $e^{i\theta/2}$ en facteur, on trouve $z = \frac{-2\cos(\theta/2)}{2i\sin(\theta/2)} = i\frac{1}{\tan(\theta/2)}$.

Correction 34
1. n pair, $n \neq 2 \Rightarrow n$ non premier. Démo : si n pair, $n \neq 2$ alors 2 divise n et n n'est pas premier.
2. $x = 0$ ou $y = 0 \Rightarrow xy = 0$. Démo triviale.
3. $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \Rightarrow x = y$. Démo : si $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$ alors en développant $-x+y = x-y$, d'où $2y = 2x$, $x = y$.

Correction 35
1. Oui. n, m pairs $\Rightarrow nm$ pair. Démo : $\exists i, n = 2i$ donc $nm = 2(im)$ est pair.
2. Oui. n, m impairs $\Rightarrow nm$ impair. Démo : $\exists i, j$, $n = 2i+1$, $m = 2j+1$ donc $nm = 2(2ij+i+j)+1$ est impair (ou par contraposée).
3. Pair. (n pair, m impair) $\Rightarrow nm$ pair (cf 1).
4. Oui. n pair $\Leftrightarrow n^2$ pair. Démo : si n pair alors $n^2 = n \times n$ est pair par 1) (sens $\Rightarrow$) ; Si n impair alors n^2 est impair par 2), ce qui donne le sens $\Leftarrow$ par contraposée.

Correction 36
1. Faux. Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y \leqslant 0$ (démo : soit $x \in \mathbb{R}$, on prend $y = -x$).

2. Vrai (démo : $y = -x + 1$). Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \leqslant 0$.
3. Vrai (démo : soit $x = -1$, $\forall y \in \mathbb{R}, y^2 > -1$). Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 \leqslant x$.
4. Vrai (démo : $\alpha = \sqrt{\varepsilon} \in \mathbb{R}^{+*}$). Négation : $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \exists x \in \mathbb{R}, |x| < \alpha$ et $|x^2| \geqslant \varepsilon$.

Correction 37 1. Soit n non premier. Supposons que n n'a pas de diviseur premier $p \leqslant \sqrt{n}$. n non premier $\Rightarrow \exists a, b \geqslant 2$, $n = ab$. Tout nombre $x \geqslant 2$ a un diviseur premier $\leqslant x$. Si $a \leqslant \sqrt{n}$ ou $b \leqslant \sqrt{n}$, cela donne une contradiction. Donc $a > \sqrt{n}$ et $b > \sqrt{n}$, ce qui implique $n > n$, absurde. D'où le résultat.

2. • $\sqrt{89} \simeq 9.4$. 89 n'est pas divisible par $2, 3, 5$ ou 7, donc 89 est premier.
   • $\sqrt{167} \simeq 12.9$. 167 n'est pas divisible par $2, 3, 5, 7, 11$ donc 167 est premier.
   • $\sqrt{191} \simeq 13.8$. 191 n'est pas divisible par $2, 3, 5, 7, 11, 13$ donc 191 est premier.

Correction 38 Raisonnement par l'absurde. Supposons que $\sqrt{89} = \frac{p}{q}$ avec p, q premiers entre eux. Alors $89q^2 = p^2$. 89 est premier (exo 4) donc 89 divise p : il existe k, $p = 89k$. Donc $q^2 = 89k^2$ et 89 divise q. C'est une contradiction donc $\sqrt{89}$ est irrationnel.

Correction 39 Si $n = 2k$ (pair) alors 4 divise $n^2 = 4k^2$. Si $n = 2k + 1$ (impair) alors 4 divise $n^2 - 1 = 4(k^2 + k)$.

Correction 40 $n^3 - n = n(n^2 - 1)$. n pair $\Rightarrow n^3 - n$ multiple de 2. n impair $\Rightarrow n^2 - 1$ pair et $n^3 - n$ multiple de 2.
n multiple de 3 $\Rightarrow n^3 - n$ multiple de 3. $n = 3k + 1 \Rightarrow n^2 - 1 = 3(3k^2 + 2k)$ multiple de 3. $n = 3k + 2 \Rightarrow n^2 - 1 = 3(3k^2 + 4k)$ multiple de 3. Dans les 3 cas, $n^3 - n$ est multiple de 3.
$n^3 - n$ est divisible par 2 et 3 qui sont premiers entre eux donc $n^3 - n$ est divisible par 6.

Correction 41 Initialisation : pour $n = 4$, $4^2 = 16 = 2^4$.
Hérédité : on suppose $n^2 \leqslant 2^n$ avec $n \geqslant 4$. $n > 2$ donc $2n < n \times n$, donc $2n \leqslant n^2 - 1$. D'où $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leqslant n^2 + n^2 \leqslant 2.2^n = 2^{n+1}$. C'est la propriété au rang $n + 1$.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 4$, $n^2 \leqslant 2^n$.

Correction 42 1. Si P_n est vraie alors $4^{n+1} - 1 = 4(4^n - 1) + 3$ est un multiple de 3 donc P_{n+1} est vraie. Si Q_n est vraie alors $4^{n+1} + 1 = 4(4^n + 1) - 3$ est un multiple de 3 donc Q_{n+1} est vraie.

2. Initialisation : $4^0 - 1 = 0$ donc P_0 est vraie. Hérédité : question 1). Conclusion : P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. C'est faux. Preuve par l'absurde : Si Q_{n_0} est vraie alors $(4^{n_0} + 1) + (4^{n_0} - 1) = 4^{n_0}$ est un multiple de 3 à cause de P_{n_0} et Q_{n_0}. Or le seul nombre premier qui divise 4^{n_0} est 2, donc c'est absurde et Q_{n_0} est fausse.

Correction 44 $(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$, $f \circ g(x) = (x + 1)^2$, $g \circ f(x) = x^2 + 1$. Ces 2 fonctions sont différentes, par exemple $f \circ g(1) = 4$ n'est pas égal à $g \circ f(1) = 2$.

Correction 45 1. $(a + b)^2 - 4ab = a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geqslant 0$ donc $(a + b)^2 \geqslant 4ab$.

2. Pour que f soit définie, il faut $x(1 - x) \geqslant 0$.

	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$1 - x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$x(1 - x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $D_f = [0, 1]$.
Pour que g soit définie, il faut $(x - 1)(2 - x) \geqslant 0$, donc $D_g = [1, 2]$.

3. Si $ab \geqslant 0$ alors par la question 1) $2\sqrt{ab} \leqslant \sqrt{(a+b)^2} = |a+b|$. De plus $\sqrt{y} \geqslant 0$ pour tout $y \geqslant 0$. Donc $1 \leqslant f(x) \leqslant |x+(1-x)|+1 = |1|+1 = 2$ et $3 \leqslant g(x) \leqslant |(x-1)+(2-x)|+3 = 4$.
4. Par la question 3), $f(D_f) \subset [1,2] = D_g$, donc $g \circ f$ est définie sur D_f. Par contre $g(D_g) \subset [3,4]$ et $[3,4] \cap D_f = \emptyset$ donc le domaine de définition de $f \circ g$ est vide.

Correction 46 1. $x^3 - 13x + 18 = (x-2)(x^2+2x-9)$.

2. $|x \sin x - 4| \geqslant 4 - |\sin x||x| \geqslant 4 - |x|$ donc si $|x| < 4$ alors $f(x)$ est définie (autrement dit $]-4,4[\subset D_f)$.
   $\lim_{x\to 2} x\sin x - 4 = 2\sin(2) - 4 \neq 0$ et $\lim_{x\to 2} x^3 + 3x\sin x - 13x + 6 = -12 + 6\sin(2)$ donc $\lim_{x\to 2} f(x) = \dfrac{-12+6\sin(2)}{-4+2\sin(2)} = 3$.
3. $f(x) - 3 = \frac{x^3-13x+18}{x\sin(x)-4} = \frac{(x-2)(x^2+2x-9)}{x\sin(x)-4}$ par la question 1). De plus si $1 \leqslant x \leqslant 3$ alors $|x^2+2x-9| \leqslant 9+6+9 = 24$ et $|x\sin(x)-4| \geqslant 4-|x| \geqslant 1$ donc $|f(x)-3| \leqslant |x-2|\frac{|x^2+2x-9|}{|x\sin(x)-4|} \leqslant 24|x-2|$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $|x-2| < \min\{\varepsilon/24, 1\}$, $|f(x)-3| < \varepsilon$ donc $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$.

Correction 47 (avec $l > 0$)

1. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ signifie $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists M_1 \in \mathbb{R}^+, x \geqslant M_1 \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| < \varepsilon$. Donc pour tout $x \geqslant M_1$, $l - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < l + \varepsilon$. Comme $g(x) > 0$, $(l-\varepsilon)g(x) < f(x) < (l+\varepsilon)g(x)$. Si $l > 0$ et $\varepsilon < l/2$ on a $l - \varepsilon > \frac{l}{2}$ et $l + \varepsilon < 2l$ d'où $\frac{l}{2}g(x) < f(x) < 2lg(x)$ et $\frac{1}{2l}f(x) < \frac{f(x)}{l+\varepsilon} < g(x) < \frac{f(x)}{l-\varepsilon} < \frac{2}{l}f(x)$.
   – Si $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ alors $\forall \alpha > 0, \exists M_2, x \geqslant M_2 \Rightarrow |g(x)| < \alpha$. Si $\varepsilon < \frac{l}{2}$, $\alpha < \frac{\varepsilon}{2l}$ et $x > \max\{M_1, M_2\}$, alors $0 < f(x) < 2l\alpha < \varepsilon$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   – Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ alors $\forall \alpha > 0, \exists M_3, x \geqslant M_3 \Rightarrow |f(x)| < \alpha$. Si $\varepsilon < \frac{l}{2}$, $\alpha < \frac{l\varepsilon}{2}$ et $x > \max\{M_1, M_3\}$, alors $0 < g(x) < \frac{2}{l}\alpha < \varepsilon$, donc $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

   [Si $l < 0$ et $\varepsilon < -l/2$ alors on a $2lg(x) < f(x) < \frac{l}{2}g(x)$ et $\frac{2}{l}f(x) < \frac{f(x)}{l-\varepsilon} < g(x) < \frac{f(x)}{l+\varepsilon} < \frac{1}{l}f(x)$ donc on obtient de la même façon $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.]
2. – Si $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\forall A \in \mathbb{R}^+, \exists B \in \mathbb{R}^+, x > B \Rightarrow g(x) > A$. Si $\varepsilon < \frac{l}{2}$, $A > \frac{2A'}{l}$ et $x > \max\{M_1, B\}$ alors $f(x) > \frac{l}{2}A > A'$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   – Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\forall A \in \mathbb{R}^+, \exists B \in \mathbb{R}^+, x > B \Rightarrow f(x) > A$. Si $\varepsilon < \frac{l}{2}$, $A > 2lA'$ et $x > \max\{M_1, B\}$ alors $g(x) > \frac{l}{2l}A > A'$ donc $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Correction 48 On écrit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ avec $a_n \neq 0$ et $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0$ avec $b_m \neq 0$. On a : $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = x^{n-m}\dfrac{a_n + a_{n-1}x^{-1} + \cdots + a_0 x^{-n}}{b_m + b_{m-1}x^{-1} + \cdots + b_0 x^{-m}}$. On obtient :
• si $n < m$, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$, • si $n = m$, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{a_n}{b_m}$,
• si $n > m$, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = +\infty$ si $\frac{a_n}{b_m} > 0$ et $-\infty$ si $\frac{a_n}{b_m} < 0$.

Correction 49 a) $\sqrt{x^2+1}-x = \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$. D'où $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x = 0$.
b) $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1}\left(1-\frac{2}{x+1}\right) = \frac{1}{x-1}\frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{x+1}$. D'où $\lim_{x\to1} \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}$.
c) $\lim_{x\to n^+} \sin(\pi(x-E(x))) = \lim_{x\to n^+} \sin(\pi(x-n)) = 0$ car $E(x)=n$ si $n \leqslant x < n+1$ et $\lim x-n = 0$.
$\lim_{x\to n^-} \sin(\pi(x-E(x))) = \lim_{x\to n^-} \sin(\pi(x-n+1)) = \sin(\pi) = 0$ car $E(x) = n-1$ si $n-1 \leqslant x < n$ et $\lim x-n = 0$. Donc la limite existe et vaut 0.
d) $\lim_{x\to n^+}(1-xE(x))(x-E(x)) = \lim_{x\to n^+}(1-nx)(x-n) = 0$. $\lim_{x\to n^+}(1-xE(x))(x-E(x)) = \lim_{x\to n^+}(1-(n-1)x)(x-n+1) = 1-n(n-1)$. Donc si $n=0$ ou $n=1$ la limite existe et vaut 0 et si $n \notin \{0,1\}$ la limite n'existe pas.
e) $\sqrt{1+\dfrac{1}{x}} - \sqrt{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{x}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{x}}}$ donc $\lim_{x\to0^+} \sqrt{1+\dfrac{1}{x}} - \sqrt{\dfrac{1}{x}} = 0$.
f) $\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = \dfrac{4-(x-3)}{(x-7)(x+7)(2+\sqrt{x-3})} = \dfrac{-1}{(x+7)(2+\sqrt{x-3})}$. Donc $\lim_{x\to7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = -\dfrac{1}{56}$.
g) Soit $y = x^{\frac{1}{3}}$. Alors $\dfrac{(x^2)^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}}+1}{(x-1)^2} = \dfrac{y^2-2x+1}{(y^3-1)^2} = \dfrac{(y-1)^2}{(y^3-1)^2} = \left(\dfrac{y-1}{(y-1)(y^2+y+1)}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{y^2+y+1}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{(x^2)^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1}\right)^2$. D'où $\lim_{x\to1} \dfrac{(x^2)^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}}+1}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{9}$.
h) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$. D'où $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = 0$.
i) $x(\sqrt{1+x^2}+x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-x} = \frac{1}{-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-1}$ (pour $x<0$). D'où $\lim_{x\to-\infty} x(\sqrt{1+x^2}+x) = -\dfrac{1}{2}$.
j) On a $-\sqrt{x} \leqslant \sqrt{x}\sin(\frac{1}{\sqrt{x}}) \leqslant \sqrt{x}$. Par le théorème des gendarmes, on a donc $\lim_{x\to0^+} \sqrt{x}\sin(\dfrac{1}{\sqrt{x}}) = 0$.
k) $\dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)} = \dfrac{\sin(2x)}{2x}\dfrac{3x}{\sin(3x)}\dfrac{2}{3}$. D'où $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)} = \dfrac{2}{3}$.
l) $\dfrac{\sin(x)-\cos(x)}{1-\tan(x)} = \dfrac{\cos(x)(\sin(x)-\cos(x))}{\cos(x)-\sin(x)} = -\cos(x)$. D'où $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin(x)-\cos(x)}{1-\tan(x)} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
m) $\sin(y) = \sin(\pi-y) = \sin(3\pi-y)$, donc $\dfrac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)} = \dfrac{\sin(\pi-\pi x)}{\sin(3\pi-3\pi x)} = \dfrac{\sin(\pi(1-x))}{\pi(1-x)}\dfrac{3\pi(1-x)}{\sin(3\pi(1-x))}\dfrac{1}{3}$.
On a $\lim_{x\to1}\pi(1-x) = 0$ donc par composition de limites :
$\lim_{x\to1}\dfrac{\sin(\pi(1-x))}{\pi(1-x)} = 1$ et $\lim_{x\to1}\dfrac{\sin(3\pi(1-x))}{3\pi(1-x)} = 1$. D'où $\lim_{x\to1}\dfrac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)} = \dfrac{1}{3}$.
n) $\dfrac{x\sin x}{1-\cos x} = \dfrac{\sin x}{x}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$. D'où $\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{1-\cos x} = 2$.
o) $\dfrac{\sin(x)-\sin(2x)}{x^2} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\sin(x)}{x} - 2\dfrac{\sin(2x)}{2x}\right)$. On a $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{x} - 2\dfrac{\sin(2x)}{2x} = 1-2 = -1$. Donc $\lim_{x\to0^+}\dfrac{\sin(x)-\sin(2x)}{x^2} = -\infty$ et $\lim_{x\to0^-}\dfrac{\sin(x)-\sin(2x)}{x^2} = +\infty$. La limite n'existe pas.
p) $\dfrac{x\tan(x)}{\cos^2(x)-1} = \dfrac{\sin(x)}{x}\dfrac{1}{\cos(x)}\dfrac{1}{(\cos(x)-1)(\cos(x)+1)}$. Donc $\lim_{x\to0}\dfrac{x\tan(x)}{\cos^2(x)-1} = 1\times1\times(-2)\times\dfrac{1}{2} = -1$.

Correction 50 1. $f(x) = x^5 - x^4 + 1$. $f(-1) = -1 < 0$, $f(0) = 1 > 0$, f continue donc par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $x_0 \in [-1, 0]$ tel que $f(x_0) = 0$.

2. $g(x) = \sin(x)+1-x$. $g(\pi/2) = 2-\frac{\pi}{2} > 0$, $g(\pi) = 1-\pi < 0$, g continue donc par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $x_0 \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ tel que $g(x_0) = 0$, donc $\sin(x_0) + 1 = x_0$.

Correction 51 Preuve par l'absurde : on suppose $\exists x_1 \in I, f(x_1) \leqslant 0$ et $\exists x_2 \in I, f(x_2) \geqslant 0$. f ne s'annule pas donc $f(x_1) < 0$ et $f(x_2) > 0$. Si $x_1 < x_2$ alors par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $y \in [x_1, x_2] \subset I$ tel que $f(y) = 0$. Si $x_2 < x_1$ alors par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $y \in [x_2, x_1] \subset I$ tel que $f(y) = 0$. On obtient une contradiction. Donc $\forall x \in I, f(x) > 0$ ou $\forall x \in I, f(x) < 0$.
Si $I = [a, b]$ et $\forall x \in I, f(x) > 0$, soit $\lambda = \min\{f(x); x \in I\}$ (f est continue sur I intervalle fermé borné donc elle atteint ses bornes). Il existe $y \in I$ tel que $f(y) = \lambda$ donc $\lambda > 0$. Et par définition de λ, pour tout $x \in I, f(x) \geqslant f(y) = \lambda$.

Correction 52 1. $f(x) = -1 + 2x$. unique racine $\frac{1}{2}$, $f(0) = -1$, $f(1) = 1$.

2. $f(x) = -1+4x$ pour $x \in [0, 1/2]$, $f(x) = 3-4x$ pour $x \in]1/2, 3/4]$, $f(x) = -3+4x$ pour $x \in]3/4, 1]$. f est continue (les morceaux se recollent), f a exactement 2 racines $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$, $f(0) = -1$, $f(1) = 1$.
3. $f(x) = -1 + 4x$ pour $x \in [0, 1/4]$, $f(x) = 0$ pour $]1/4, 3/4]$, $f(x) = -3 + 4x$ pour $x \in]3/4, 1]$. f est continue, tous les points de $[1/4, 3/4]$ sont des racines de f, $f(0) = -1$, $f(1) = 1$.

Correction 53 Soit $g(x) = f(x) - x$. $f(0) \in [0, 1]$ donc $f(0) \geqslant 0$ et $g(0) \geqslant 0$. $f(1) \in [0, 1]$ donc $f(1) \leqslant 1$ et $g(1) \leqslant 0$. La fonction g est continue. Si $g(0) = 0$ ou $g(1) < 1$ alors 0 ou 1 est point fixe de f. Si $g(0) > 0$ et $g(1) < 0$ alors par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $x \in]0, 1[$ tel que $g(x) = 0$, d'où $f(x) = x$.
Si f est décroissante, soit x tel que $f(x) = x$. Si $x' < x$ alors $f(x') \geqslant f(x) = x > x'$ donc $f(x') \neq x'$. Si $x' > x$ alors $f(x') \leqslant f(x) = x < x'$ donc $f(x') \neq x'$. Donc x est l'unique point fixe de f.
Si f n'est pas décroissante, tous les cas sont possibles (une ou plusieurs racines, ou une infinité).

Correction 54 Soit T la période de f : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$. On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, f(x + nT) = f(x)$ (récurrence), puis $\forall n \in \mathbb{Z}, f(x + nT) = f(x)$ (si $n = -k < 0$, on pose $y = x - kT$, on a $f(y + kT) = f(y)$, c'est-à-dire $f(x) = f(x + nT)$).
Soit $m = \min\{f(x); x \in [0, T]\}$, $M = \max\{f(x); x \in [0, T]\}$ et $y_1, y_2 \in [0, T]$ tels que $f(y_1) = m$, $f(y_2) = M$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n = E\left(\frac{x}{T}\right)$. On a $0 \leqslant \frac{x}{T} - n < 1$ donc $0 \leqslant x - nT < T$. Soit $y = x - nT$. Par ce qui précède, $f(x) = f(y)$ et comme $y \in [0, T]$ on a $m \leqslant f(y) \leqslant M$, donc $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Donc f est bornée sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(y_1 + nT) = m$ et $f(y_2 + nT) = M$ donc f atteint ses bornes une infinité de fois.

Correction 55 • $\frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, sin est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}^*$ par composition. Soit $x_k = \frac{1}{2k\pi}$ et $y_k = \frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. On a $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = 0$, $\lim\limits_{k\to+\infty} y_k = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}*$ $f(x_k) = 0$, $f(y_k) = 1$.
Supposons que f ait une limite en 0, qu'on appelle l. Soit $\varepsilon = 1/4$. $\exists \alpha > 0$, $0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < 1/4$. Si k est assez grand alors $|x_k| < \alpha$ donc $|0 - l| < 1/4$, c'est-à-dire $-1/4 < l < 1/4$, et aussi $|y_k| < \alpha$ donc $|1 - l| < 1/4$, c'est-à-dire $3/4 < l < 5/4$. Contradiction. Donc f n'a pas de limite en 0.

• $(1+x)^3-1$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de fonctions continues, $\frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc g est continue sur $\mathbb{R}^*$ (produit). $g(x)=\frac{x^3+3x^2+3x}{x}=x^2+3x+3$ donc $\lim_{x\to 0} g(x)=3$. g est prolongeable en 0 en posant $g(0)=3$.

• $\frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, $\sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc h est continue sur $\mathbb{R}^*$ (composition et produit).
$h(x)=\frac{\sin x}{x}\times x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. $-x\leqslant x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\leqslant x$ donc par le théorème des gendarmes $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$. Donc $\lim_{x\to 0} h(x)=0$. h est prolongeable par continuité en posant $h(0)=0$.

• $|x|$ et $\sin x$ sont continues sur $\mathbb{R}$, $\frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc l est continue sur $\mathbb{R}^*$ (produit et composition).
Si $x\in]0,\pi/2[$ alors $l(x)=\frac{\sin x}{x}$ et $\lim_{x\to 0^+} l(x)=1$. Si $x\in]-\pi/2,0[$ alors $l(x)=-\frac{\sin x}{x}$ et $\lim_{x\to 0^-} l(x)=-1$. Donc l n'est pas prolongeable par continuité en 0.

• $\forall x\in\mathbb{R}$, $1+\sin x\geqslant 0$ et $1-\sin x\geqslant 0$. $\sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$, $\sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc $\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et m est continue sur $\mathbb{R}^*$.
$m(x)=\frac{2\sin x}{x(\sqrt{1+sinx}+\sqrt{1-\sin x})}$ donc $\lim_{x\to 0} m(x)=2\times 1\times\dfrac{1}{2}=1$. m est prolongeable par continuité.

Correction 56 f est continue sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$. Il reste à étudier la continuité en 0.
$f(x)=x^2+b$ si $x\leqslant 0$ donc $\lim_{x\to 0^-} f(x)=b=f(0)$.
$f(x)=\frac{\sin(ax)}{x}$ si $x>0$. Si $a\neq 0$ alors $f(x)=a\times\frac{\sin(ax)}{ax}$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x)=a$. Si $a=0$ alors $f(x)=0$ pour tout $x>0$ donc $\lim_{x\to 0^+} f(x)=a$.
Conclusion : f est continue si et seulement si $a=b$.

Correction 57 • $1+(x\cos x)^2>0$ pour tout x donc $D_f=D_{f'}=\mathbb{R}$.
$f'(x)=\dfrac{(x^2\cos^2 x)'}{2\sqrt{1+x^2\cos^2 x}}=\dfrac{2x\cos^2 x-2x^2\cos x\sin x}{2\sqrt{1+x^2\cos^2 x}}=\dfrac{x\cos x(\cos x-x\sin x)}{\sqrt{1+x^2\cos^2 x}}$.
• Il faut $x\neq 0$ sinon $\frac{1}{x}$ non défini, et $\exp(\frac{1}{x})\neq 1$ (dénominateur non nul) c'est-à-dire $\frac{1}{x}\neq 0$, ce qui est toujours vrai. D'où $D_g=D_{g'}=\mathbb{R}^*$. $(\exp(\frac{1}{x}))'=-\frac{1}{x^2}\exp(\frac{1}{x})$ d'où
$g'(x)=\dfrac{-\frac{1}{x^2}\exp(\frac{1}{x})(\exp(\frac{1}{x})-1)+\frac{1}{x^2}\exp(\frac{1}{x})(\exp(\frac{1}{x})+1)}{(\exp(\frac{1}{x})-1)^2}=\dfrac{2\exp(\frac{1}{x})}{x^2(\exp(\frac{1}{x})-1)^2}$.
• Il faut $\tan x>0$ d'où $D_h=D_{h'}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi,k\pi+\pi/2[$. $h'(x)=\dfrac{(\tan x)'}{\tan x}=\dfrac{1}{\cos^2 x\tan x}=\dfrac{1}{\cos x\sin x}$.
• $D_k=D_{k'}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. $k'(x)=4x^3(1+x)^{-4}-4x^4(1+x)^{-5}=\dfrac{4x^3[(1+x)-x]}{(1+x)^5}=\dfrac{4x^3}{(1+x)^5}$.

Correction 58
1. $(\sin(f(x)^2))'=2f(x)f'(x)\cos(f(x))$. $(\sin(f(x^2)))'=2xf'(x)\cos(f(x))$.
2. Si $f(x)>0$ alors $\ln|f(x)|=\ln(f(x))$ d'où $(\ln|f(x)|)'=\frac{f'(x)}{f(x)}$. Si $f(x)<0$ alors $\ln|f(x)|=\ln(-f(x))$ d'où $(\ln|f(x)|)'=\frac{-f'(x)}{-f(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}$. Conclusion : dans les 2 cas, $(\ln|f(x)|)'=\frac{f'(x)}{f(x)}$.

Correction 59 $f(2)=1$, $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{x^2-4x+4}{x-2}=\frac{(x-2)^2}{x-2}=x-2$ donc $\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=0$ et $f'(2)=0$.

Correction 60 La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, $1+|x|$ est strictement positif pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc f, g, h sont définies et continues sur $\mathbb{R}$ et dérivables sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et quotient de fonctions dérivables. Étudions la dérivabilité en 0. • $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$ et $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{-x\to 0^+} x = 0$ donc $f'(0)$ existe et vaut 0.

• $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+|x|} = 0$ donc $g'(0)$ existe et vaut 0.

• $\lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{1+x} = -1$ et $\lim_{x\to 0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1-x} = 1$. Donc h n'est pas dérivable en 0 ($h'_g(0) = 1$ et $h'_d(0) = -1$).

Correction 61 Soit $y = \sqrt{x}$. $\frac{\cos\sqrt{x} - \cos(\sqrt{0})}{x-0} = \frac{\cos y - 1}{y^2}$, qui a $-\frac{1}{2}$ pour limite quand $y \to 0$ donc $\cos\sqrt{x}$ est dérivable en 0 de dérivée $-\frac{1}{2}$.

Correction 62 Il faut d'abord que f soit continue. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 1$ et $\lim_{x\to 1^+} f(x) = b$, il faut donc $b = 1$. Ensuite il faut que les dérivées à droite et à gauche coïncident : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ si $x < 1$ d'où $f'_g(1) = \frac{1}{2}$, et $f'(x) = 2ax$ si $x > 1$ d'où $f'_d(1) = 2a$. Il faut donc $a = 1$. Conclusion : si $a = b = 1$ alors f est $mathcalC^1$.

Correction 63 On a $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$. Une récurrence immédiate montre que $f^{(4k)}(x) = \sin x$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc si on écrit $n = 4k + r$ avec $0 \leqslant r \leqslant 3$ on a $f^{(n)}(x) = f^{(r)}(x)$ (déjà calculée).

Correction 64 f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^2-1)(x^2+1)$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ ou $x < -1$. On calcule les limites en $+\infty$ et $-\infty$. Tableau de variation :

	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

$f(x) = 0$ a donc exactement 3 solutions (dans $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$).

Correction 65

1. Soit $f(x) = x\cos x - \sin x$. $f'(x) = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x < 0$ pour tout $x \in]0, \pi[$. Donc f est strictement décroissante sur $[0, \pi]$. Or $f(0) = 0$ donc $f(x) < 0$ pour tout $x \in]0, \pi[$.
2. Soit $g(x) = \frac{\sin x}{x}$. $g'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{\sin^2 x} = \frac{f(x)}{\sin^2 x}$. Par a) $g'(x) < 0$ pour tout $x \in]0, \pi[$ donc g est strictement décroissante sur $]0, \pi]$.
3. On a $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$ donc g est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$. Comme g est continue sur $[0, \pi]$ et strictement décroissante sur $]0, \pi]$ par b), g est déstrictement croissante sur $[0, \pi]$, donc $g(0) > g(x) > g(\pi/2)$ pour tout $x \in]0, \pi/2[$, c'est-à-dire $\frac{1}{\pi/2} < \frac{\sin x}{x} < 1$. Comme $x > 0$ on obtient $\frac{2x}{\pi} < \sin x < x$ pour tout $x \in]0, \pi/2[$.

Correction 66

1. Soit $f(x) = (x^2+1)\sin x$. $f'(x) = 2x\sin x + (x^2+1)\cos x$.
2. On a $f(0) = f(\pi) = 0$ donc par le théorème de Rolle il existe $x \in]0, \pi[$ tel que $f'(x) = 0$.

Correction 67

1. Soit $a_0 < a_1 < a_2$ dans $]0, 1[$ tels que $f(a_i) = 0$. Par le théorème de Rolle il existe $b_0 \in]a_0, a_1[$ et $b_1 \in]a_1, a_2[$ tels que $f'(b_0) = f'(b_1) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle à f' on trouve qu'il existe $c_0 \in]b_0, b_1[$ tel que $f''(c_0) = 0$.

2. On le montre par récurrence sur n. Pour $n = 1$ c'est le théorème de Rolle, pour $n = 2$ c'est a). On suppose que c'est vrai pour n pour toute fonction et on considère f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ avec $n+2$ zéros dans $]0,1[$. En appliquant Rolle à f on trouve que f' a n zéros dans $]0,1[$. Comme f' est $\mathcal{C}^n$ on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $(f')^{(n)}(x_0) = 0$, c'est-à-dire $f^{(n+1)}(x_0) = 0$. Conclusion [...]

Correction 68 On a $(\sin x)' = \cos x$ et $|\cos x| \leqslant 1$ pour tout $x \in R$. Par l'inégalité des accroissements finis on a $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.
De même, $(\cos x)' = -\sin x$ et $|-\sin x| \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc par l'inégalité des accroissements finis on a $|\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

Correction 69

1. On a $(e^x)' = e^x$. Soit $x > 0$. Par le théorème des accroissements finis il existe $c \in [0, x]$ tel que $e^x - e^0 = (x-0)e^c$ donc $e^x = xe^c + 1 \geqslant x + 1$ (car $e^c \geqslant e^0 = 1$ par croissance de e^x). De même si $x < 0$ il existe $c \in [x, 0]$ tel que $e^0 - e^x = (0-x)e^c$ donc $e^x = xe^c + 1 \geqslant x + 1$ (car $e^c \leqslant e^0 = 1$ par croissance et $x < 0$). Pour $x = 0$ on a bien $e^x = x + 1$. Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$.
2. Soit $f(x) = \ln(1+x)$. On a $f(1) = 0$ et $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ (décroissante sur $]-1, +\infty[$). Soit $x > 0$. Par le théorème des accroissements finis il existe $c \in]0, x[$ tel que $f(x) - f(0) = xf'(c)$ donc $f(x) \leqslant xf'(0) = x$. Si $-1 < x < 0$, il existe $c \in]x, 0[$ tel que $f(0) - f(x) = (0-x)f'(c)$ d'où $f(x) = xf'(c) \leqslant xf'(0) = x$ (car f' décroissante et $x < 0$). L'inégalité est réalisée pour $x = 0$, donc : $\forall x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

Correction 70

1. Soit $f(y) = \ln(y)$. On a $f'(y) = \frac{1}{y}$, décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Soit $x > 0$. Par le théorème des accroissements finis sur $[x, x+1]$ il existe $c \in]x, x+1[$ tel que $f(x+1) - f(x) = (x+1-x)f'(c) = f'(c)$. Donc $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$.
2. Par (1) on a $\frac{1}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} < \sqrt{x}(\ln(x+1) - \ln(x)) < \frac{1}{\sqrt{x}}$ donc par le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}(\ln(x+1) - \ln(x)) = 0$.
De même, on a $\frac{1}{1+\frac{1}{x}} < x(\ln(x+1) - \ln(x)) < 1$ donc par le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to +\infty} x(\ln(x+1) - \ln(x)) = 1$.
3. $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x\ln\frac{x+1}{x} = x(\ln(x+1) - \ln x)$. Par b) ceci a pour limite 1 en $+\infty$. Par composition de limite (en prenant l'exponentielle) on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$.
4. On a $\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = x(\ln(x-1) - ln(x))$. En utilisant a) avec $x - 1$ on obtient $1 < x(\ln(x) - \ln(x-1)) < \frac{1}{1-\frac{1}{x}}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x(\ln(x-1) - \ln(x)) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x = \dfrac{1}{e}$.

Correction 71 Soit $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$. On applique le théorème des accroissements finis entre x et $x+1$ (avec $x > 0$) et on trouve qu'il existe $c \in [x, x+1]$ tel que $f(x+1) - f(x) = f'(c)$. D'où $x^2\left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}\right) = -\dfrac{x^2}{c^2}e^{\frac{1}{c}}$.
$0 < x \leqslant c \leqslant x+1$ d'où $0 < \frac{1}{(x+1)^2} \leqslant \frac{1}{c^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$ et $0 < e^{\frac{1}{x+1}} \leqslant e^{\frac{1}{c}} \leqslant e^{\frac{1}{x}}$ (car $t \mapsto e^t$ est croissante) donc
$\dfrac{x^2}{(x+1)^2}e^{\frac{1}{x+1}} \leqslant -x^2\left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}\right) \leqslant e^{\frac{1}{x}}$.
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{(x+1)^2} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x+1}} = e^0 = 1$ on trouve $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}\right) = -1$.

Correction 72 Soit $f(x)=x^\alpha$. $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}=\frac{\alpha}{x^{1-\alpha}}$. On applique le théorème des accroissements finis à f sur $[n,n+1]$ et on utilise la décroissance de f' pour obtenir : $\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}}\leqslant (n+1)^\alpha-n^\alpha\leqslant\frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$.
On somme ces inégalités entre $n=1$ et $n=N$ en l'appliquant à $\beta=1-\alpha\in]0,1[$ et on obtient : $\beta\displaystyle\sum_{n=1}^N\frac{1}{(n+1)^{1-\beta}}\leqslant(N+1)^\beta-1\leqslant\beta\sum_{n=1}^N\frac{1}{n^{1-\beta}}$.
On a $\beta>0$ donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}(N+1)^\beta-1=+\infty$. Comme $1-\beta=\alpha$, on en déduit $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^N\frac{1}{n^\alpha}=+\infty$.

Correction 73

1. $\sin x=x-\frac{x^3}{6}\cos(c)$ avec $c\in]0,x[$ ou $c\in]x,0[$ (car $\sin 0=0$, $(\sin x)'=\cos x$, $(\sin x)''=-\sin x$ et $(\sin x)'''=-\cos x$).
2. Par (1) pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $|\sin x-x|=\frac{|x|^3}{6}|\cos c|\leqslant\frac{|x|^3}{6}|$.

Correction 74

1. $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}\cos(c)$ avec $c\in]0,x[$ ou $c\in]x,0[$.
2. $f(x)=\sqrt{x}$, $f(1)=1$. $f'(x)=\frac12x^{-1/2}$, $f'(1)=\frac12$. $f''(x)=-\frac14x^{-3/2}$, $f''(1)=-\frac14$. $f^{(3)}(x)=\frac38x^{-5/2}$. D'où $\sqrt{x}=1+\frac{x-1}{2}-\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{(x-1)^3}{16}c^{-5/2}$ avec $c\in]1,x[$ ou $c\in]x,1[$.

Correction 75 $P(x)=2+3x-4x^2+2x^3$, $P(1)=3$. $P'(x)=3-8x+6x^2$, $P'(1)=1$. $P''(x)=-8+12x$, $P''(1)=4$. $P^{(3)}(x)=12$. $P^{(4)}(x)=0$. D'où
• ordre 1 : $P(x)=3+(x-1)+(x-1)^2(-4+6c)$ avec $c\in]0,x[$ ou $c\in]x,0[$.
• ordre 2 : $P(x)=3+(x-1)+2(x-1)^2+2(x-1)^3$ (car $P^{(3)}(c)=12$).
• ordre 3 : $P(x)=3+(x-1)+2(x-1)^2+2(x-1)^3$ (car $P^{(4)}(c)=0$).

Correction 76

1. Taylor en 0 à l'ordre 1 pour e^x : $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}e^c$ avec $c\in]0,x[$ si $x>0$ et $c\in]x,0[$ si $x<0$ (et n'importe quel c pour $x=0$). Dans tous les cas on peut prendre $c\leqslant|x|$ et on a : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\frac{x^2}{2}e^c\geqslant0$, d'où $1+x\leqslant e^x\leqslant1+x+\frac{x^2}{2}e^{|x|}$.
2. Taylor en 0 à l'ordre 3 pour $\ln(1+x)$ $(x>0)$: $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\frac{1}{(1+c)^3}$ avec $0<c<x$. On a $0<\frac{x^3}{3}\frac{1}{(1+c)^3}<\frac{x^3}{3}$ car $1+c>1$ d'où : $\forall x>0,\ x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

Correction 77 Soit $x>0$. $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c$ avec $c\in]0,x[$. On prend $x=1$ et on pose $r_n=\frac{1}{(n+1)!}e^c$. Alors $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+r_n$ avec $0<r_n<\frac{e}{(n+1)!}$.

Correction 78 On applique la formule de Taylor à f en a à l'ordre 2 avec $|h|<\delta$:
il existe $c,d\in]a-h,a+h[$ (ou $]a+h,a-h[$ si $h<0$) tels que $f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(c)$ et $f(a-h)=f(a)-hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(d)$. D'où $\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\frac{\frac{h^2}{2}(f''(c)+f''(d))}{h^2}=\frac{f''(c)+f''(d)}{2}$.
Soit $\varepsilon>0$. Comme f'' est continue, il existe $\alpha>0$ tel que $|x-a|<\alpha\Rightarrow|f''(x)-f''(a)|<\varepsilon$. On en déduit que si $|h|<\alpha$ alors $\frac{f''(c)+f''(d)}{2}-f''(a)|<\varepsilon$ (car $|c-a|<|h|$ et $|d-a|<|h|$). Donc :
$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0,\ |h|<\alpha\Rightarrow\left|\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}-f''(a)\right|<\varepsilon$.
C'est-à-dire $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a)$.

Correction 80

1. $D_g=]1,+\infty[$.
2. $g'(x)=\frac{1}{x\ln x}$. $g''(x)=\frac{-(\ln(x)+1)}{(x\ln x)^2}<0$ car $\ln(x)+1>1>0$. Donc g est strictement concave sur $]1,+\infty[$.

3. Par concavité, on a $g\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{g(a)+g(b)}{2}$, autrement dit $\ln\left(\ln\frac{a+b}{2}\right) > \frac{\ln(\ln a)+\ln(\ln b)}{2} = \ln((\ln a \ln b)^{1/2})$. On prend l'exponentielle et on obtient $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) > (\ln a \ln b)^{1/2}$.

Correction 81 $f(x) = \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$ car $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Soit $\lambda = \frac{1}{p} \in]0,1[$ et $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$. Par concavité on a $\ln(\lambda x^p + (1-\lambda)y^q) \geqslant \lambda \ln(x^p) + (1-\lambda)\ln(y^q)$. Or $\lambda \ln(x^p) = \frac{1}{p} p \ln(x) = \ln(x)$ et $(1-\lambda)\ln(y^q) = \frac{1}{q} q \ln(y) = \ln y$. Donc $\ln(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}) \geqslant \ln x + \ln y = \ln(xy)$. Conclusion : $\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geqslant xy$.

Correction 82 $D_g = \mathbb{R}$.
Soit $y \in \mathbb{R}$. On cherche à résoudre $y = g(x)$ (l'inconnue étant x). Cette équation est équivalente à $e^x = \frac{y-1}{2-y}$. Cette équation a une solution si et seulement si $\frac{y-1}{2-y} > 0$, ce qui est équivalent à $y \in]1,2[$. Dans ce cas il y a une unique solution qui est $x = \ln\left(\frac{y-1}{2-y}\right)$. Si $A = \mathbb{R}$ et $B =]1,2[$, $g\colon A \to B$ est une bijection de bijection réciproque $g^{-1}\colon B \to A$, $g^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y-1}{2-y}\right)$.

Correction 84 1.

2. **Rappel :** $\operatorname{Arctan}(\tan y) = y$ **si** $\boldsymbol{y \in]-\pi/2, \pi/2[}$.
   Si $x \in [0, \pi/4[$ alors $y = 2x \in [0, \pi/2]$ et $\operatorname{Arctan}(\tan 2x) = y = 2x$.
   Si $x \in]\pi/4, 3\pi/4[$ alors $\tan 2x = \tan(2x - \pi)$ avec $y = 2x - \pi \in]-\pi/2, \pi/2[$ donc $\operatorname{Arctan}(\tan 2x) = 2x - \pi$.
   Si $x \in]3\pi/4, \pi]$ alors $\tan 2x = \tan(2x - 2\pi)$ avec $y = 2x - 2\pi \in]-\pi/2, 0]$ donc $\operatorname{Arctan}\tan 2x = 2x - 2\pi$.
   La fonction $\operatorname{Arctan}(\tan 2x)$ n'est pas définie en $x = \pi/4$ et $x = 3\pi/4$.
3. On a $\sin x = \cos(x - \pi/2)$ pour tout x. On a calculé en TD $\operatorname{Arccos}(\cos y)$ pour $y \in [-\pi/2, 4\pi]$. En posant $y = x - \pi/2$ on obtient les formules pour $\operatorname{Arccos}(\sin x) = \operatorname{Arccos}(\cos y)$.

Correction 86 1.

2. On applique le théorème des accroissements finis à la fonction Arctan entre 0 et $x > 0$: il existe $x \in]0, x[$ tel que $\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} 0 = x\frac{1}{1+c^2}$. Comme $0 < c < x$ on a $\frac{1}{1+c^2} > \frac{1}{1+x^2}$ donc
   $\forall x \in]0, +\infty[$, $\operatorname{Arctan} x > \frac{x}{1+x^2}$.
3. Soit $x \in]0,1[$. On pose $\theta = \operatorname{Arcsin} x$, de sorte que $x = \sin\theta$ et $\theta \in]0, \pi/2[$.
   On a $1 - x^2 = 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$. Comme $\theta \in]0, \pi/2[$ on a $\cos\theta > 0$ donc $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta$. De plus, $\cos\theta = \sin(\pi/2 - \theta)$ et $\pi/2 - \theta \in]0, \pi/2[$ donc $\operatorname{Arcsin}(\sin(\pi/2 - \theta)) = \pi/2 - \theta$. On en déduit :
   $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x^2} = \theta + (\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{\pi}{2}$.

Correction 89 Soit $f(x) = \frac{\ln x}{x^{\alpha/2}}$ pour $x > 0$. f est dérivable et $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}x^{\alpha/2} - \frac{\alpha}{2}x^{\alpha/2-1}\ln x}{x^\alpha} = \dfrac{1 - \frac{\alpha}{2}\ln x}{x^{\alpha/2+1}}$. Comme $x^{\alpha/2+1} > 0$, f' est du signe de $1 - \frac{\alpha}{2}\ln x$. On a $1 - \frac{\alpha}{2}\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{2}{\alpha} \Leftrightarrow x = e^{2/\alpha} > 0$.

	0		$e^{2/\alpha}$		$+\infty$
f'	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$\Vert$	$\nearrow$		$\searrow$	

Vu le tableau de variation, la fonction f atteint son maimum au point $x_0 = e^{2/\alpha}$, donc pour tout $x > 0$, $f(x) \leqslant f(x_0)$. Comme $f(x_0) = \frac{2}{\alpha e}$ on a $\frac{\ln x}{x^{\alpha/2}} \leqslant \frac{2}{\alpha e} < \frac{2}{\alpha}$ (car $e > 1$). En divisant par $x^{\alpha/2}$ on trouve $\frac{\ln x}{x^\alpha} < \frac{2}{\alpha x^{\alpha/2}}$ pour tout $x > 0$.

Si $x > 1$ alors $\ln x > 0$ donc $0 < \frac{\ln x}{x^\alpha} < \frac{2}{\alpha x^{\alpha/2}}$. Comme $\alpha > 0$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\alpha x^{\alpha/2}} = 0$. Le théorème des gendarmes implique que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.

Correction 91 On note L_1 et L_2 les deux lignes du système. En remplaçant L_2 par $(2-i)L_1 + iL_2$ dans le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} (2+i)z - iu & = & 2+i \\ (1+i)z + (2-i)u & = & 2i \end{array}\right. ,$$

on obtient le système équivalent

$$\left\{\begin{array}{lcl} (2+i)z - iu & = & 2+i \\ (4+i)z & = & 3 \end{array}\right. .$$

Ainsi $z = 3/(4+i) = \frac{12}{17} - \frac{3}{17}i$, et $u = (2+i)(1-z)/(-i) = \frac{-11}{17} + \frac{7}{17}i$.

Correction 92 En utilisant la définition $|z|^2 = z\overline{z}$ et les propriétés de la conjugaison complexe, on obtient

$$|u+v|^2 - |u-v|^2 = (u+v)(\overline{u}+\overline{v}) - (u-v)(\overline{u}-\overline{v}) = 2u\overline{v} + 2v\overline{u} = 2(u\overline{v} + \overline{u\overline{v}}) = 4\Re(u\overline{v}).$$

Correction 93
– Si on note O le point d'affixe 0, D_1 est le complémentaire du disque fermé de centre O et de rayon 1.
– Comme $z + \overline{z} = 2\Re(z)$, la condition définissant D_2 est équivalente à $\Re(z) > -1/2$. Si on note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x = -1/2$, D_2 est donc le demi-plan situé à droite de $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ étant exclue.
– Si on note $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, la condition définissant D_3 est équivalente à $2x + 2y = 4$ soit $x + y = 2$. Il s'agit donc de la droite passant par les points de coordonnées $(0,2)$ et $(2,0)$, parallèle à la deuxième bissectrice.

Correction 94

1. Comme une valeur absolue est positive, $|\sin x| + |\cos x| = 0$ n'est possible que si $\sin x = \cos x = 0$. (En effet, si $a, b \in \mathbb{R}^+$, alors $a + b \geqslant a \geqslant 0$; si $a + b = 0$, on en déduit que $a = 0$, puis que $b = 0$ par le même raisonnement.) Or c'est impossible car $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $0^2 + 0^2 = 0 \neq 1$. Donc il n'y a pas de solutions.
2. Comme $|\sin x|$ et $|\cos x|$ sont bornés par 1, $|\sin x| + |\cos x| \leqslant 2$, avec égalité si et seulement si $|\sin x| = |\cos x| = 1$. On en déduit que
$$\sin^2 x + \cos^2 x = |\sin x|^2 + |\cos x|^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \neq 1.$$
Toujours à cause de l'identité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, c'est impossible. Donc il n'y a pas de solutions.
3. On pose $X = \cos x$. L'équation s'écrit $2X^2 - 7X + 3 = 0$ dont les solutions sont $X = 3$ et $X = 1/2$. Comme $\cos x \leqslant 1$, $X = 3$ est impossible. L'équation de départ est donc équivalente à $\cos x = 1/2 = \cos(\pi/3)$. Soit $x = \pi/3\ [2\pi]$ ou $x = -\pi/3\ [2\pi]$.

Correction 95

1. $z^5 = (e^{2i\pi/5})^5 = e^{2i\pi} = 1$. Puisque $z \neq 1$ (car un argument de z est $0 < 2\pi/5 < 2\pi$), on a
$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = (z^5 - 1)/(z - 1),$$

comme somme des termes d'une suite géométrique de raison z. D'où le résultat puisque $z^5 - 1 = 0$.

Autre méthode : pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, l'identité remarquable

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = (x-1)\sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

est très utile. On peut la démontrer par récurrence. Ou bien par un calcul direct dans le cas particulier $n = 5$, qui est celui qui nous intéresse ici.

2. En divisant l'identité $1+z+z^2+z^3+z^4 = 0$ par $z^2 \neq 0$, on obtient $z^{-2}+z^{-1}+1+z+z^2 = 0$. Comme $u^2 = z^{-2} + z^2 + 2$, soit $z^{-2} + z^2 = u^2 - 2$, on en déduit que $(u^2 - 2) + u + 1 = 0$. Finalement $u^2 + u - 1 = 0$.
3. Les deux solutions de cette équation sont $u_1 = (-1 - \sqrt{5})/2 < 0$ et $u_2 = (-1 + \sqrt{5})/2$. Comme $0 < 2\pi/5 < \pi/2$, on a $\cos(2\pi/5) > 0$, puis $u = 2\Re(z) = 2\cos(2\pi/5) > 0$. On en déduit que $u = u_2$, puis que
$$\cos(2\pi/5) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$
4. On utilise la formule $\cos^2(x/2) = (1 + \cos x)/2$ pour $x = 2\pi/5$. Si $a \in \mathbb{R}^+$, une équation du type $y^2 = a$ possède deux solutions $y = \sqrt{a}$ et $y = -\sqrt{a}$, confondues si $a = 0$. Comme $0 < \pi/5 < \pi/2$, on a $\cos(\pi/5) > 0$, donc il faut prendre la racine positive et
$$\cos(\pi/5) = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}, \quad \text{puis} \quad \cos(\pi/10) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}}{2}},$$
par la même méthode (on a $\cos(\pi/10) > 0$ car $0 < \pi/10 < \pi/2$).
Autre méthode : On remarque que $\cos(\pi/5) = -\cos(4\pi/5) = 1 - 2\cos^2(2\pi/5)$. Soit
$$\cos(\pi/5) = \frac{1+\sqrt{5}}{4},$$
qui est une simplification de la racine carrée ci-dessus.

Correction 96 Pour $x \in \mathbb{R}$, $|x^2 + 2x - 3|$ est toujours positif donc $\sqrt{|x^2 + 2x - 3|}$ est bien défini pour tout x dans $\mathbb{R}$ et est un nombre positif. Pour que x vérifie l'inégalité, il faut donc nécéssairement que $x/2 + 2$ soit positif, c'est-à-dire $x \geqslant -4$.

$$\mathcal{S} \subset [-4, +\infty[$$

Pour $x \geqslant -4$, les deux membres de l'inégalité sont positifs. La fonction "carré" étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, les nombres $\sqrt{|x^2 + 2x - 3|}$ et $x/2 + 2$ sont rangés comme leurs carrés. Sur $[-4, +\infty[$, l'inégalité est équivalente à

$$|x^2 + 2x - 3| \leqslant \frac{x^2}{4} + 2x + 4.$$

Étudions le signe de $x^2 + 2x - 3$. Ses racines sont -3 et 1. Donc $x^2 + 2x - 3$ est positif sur $[-4, -3] \cup [1, +\infty[$ et strictement négatif sur $]-3, 1[$.

– Pour $x \in [-4,-3] \cup [1,+\infty[$, $|x^2+2x-3| = x^2+2x-3$. Pour de tels x, l'inégalité est équivalente à $\frac{3}{4}x^2 - 7 \leqslant 0$ ou encore $x \in [-\frac{2}{3}\sqrt{21}, \frac{2}{3}\sqrt{21}]$. Comme $-4 < -\frac{2}{3}\sqrt{21} < -3$ et $\frac{2}{3}\sqrt{21} > 1$, on a :

$$\mathcal{S} \cap ([-4,-3] \cup [1,+\infty[) = \left[-\frac{2}{3}\sqrt{21}, -3\right] \cup \left[1, \frac{2}{3}\sqrt{21}\right]$$

– Pour $x \in]-3,1[$, $|x^2+2x-3| = -x^2-2x+3$. Pour de tels x, l'inégalité est équivalente à $\frac{5}{4}x^2+4x+1 \geqslant 0$. Les zéros du trinôme $\frac{5}{4}x^2+4x+1$ sont $\frac{-8-2\sqrt{11}}{5}$ et $\frac{-8+2\sqrt{11}}{5}$ qui sont tous les deux dans l'intervalle $]-3,1[$. Comme $\frac{5}{4}x^2+4x+1$ est positif a l'extérieur de ses racines, on a :

$$\mathcal{S} \cap]-3,1[= \left]-3, \frac{-8-2\sqrt{11}}{5}\right] \cup \left[\frac{-8+2\sqrt{11}}{5}, -1\right[$$

Finalement, l'ensemble des solutions, étant compris dans $[4,+\infty[$ est égal à :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= (\mathcal{S} \cap ([-4,-3] \cup [1,+\infty[)) \cup (\mathcal{S} \cap]-3,1[) \\
&= \left[-\frac{2}{3}\sqrt{21}, -3\right] \cup \left[1, \frac{2}{3}\sqrt{21}\right] \cup]-3, \frac{-8-2\sqrt{11}}{5}] \cup \left[\frac{-8+2\sqrt{11}}{5}, -1\right[\\
&= \left[-\frac{2}{3}\sqrt{21}, \frac{-8-2\sqrt{11}}{5}\right] \cup \left[\frac{-8+2\sqrt{11}}{5}, \frac{2}{3}\sqrt{21}\right]
\end{aligned}$$

Correction 97 Pour que l'expression soit définie, il faut que x^2-1 soit positif. Donc l'inéquation n'a de sens que sur $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$. On distingue 2 cas suivant le signe de $|x-2|$ afin de supprimer les valeurs absolues.

– Pour $x \in]-\infty,-1] \cup [1,2]$:
  $x-2$ est négatif. Donc pour ces x, l'inégalité est équivalente à : $4-2x-\sqrt{x^2-1} \geqslant 3$ ou encore $\sqrt{x^2-1} \leqslant -1-2x$. Le membre de gauche de la dernière inéquation est toujours positif. Le membre de droite est strictement négatif pour $x > -1/2$ (c'est-à-dire pour $x \in [1,2]$) donc l'inéquation n'est pas vérifiée.
  Pour $x \leqslant -1/2$, les deux membres de l'inégalité sont positifs. Comme la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, ils sont rangés dans le même ordre que leurs carrés. Pour $x \in]-\infty,1]$, l'inéquation est équivalente à $x^2-1 \leqslant 1+4x+4x^2$ ou encore $3x^2+4x+2 \geqslant 0$. Le discriminant de $3x^2+4x+2$ étant strictement négatif, $3x^2+4x+2$ est positif (strictement) sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $x \in [-\infty,1]$. Donc l'inégalité est vérifiée sur tout $]-\infty,-1]$.

$$\mathcal{S} \cap (]-\infty,-1] \cup [1,2]) =]-\infty,-1]$$

– Pour $x \in]2,+\infty[$:
  $x-2$ est positif. L'inégalité est équivalente à $2x-4-\sqrt{x^2-1} \geqslant 3$ ou encore $2x-7 \geqslant \sqrt{x^2-1}$. Pour $x < 7/2$, le membre de gauche de la dernière inéquation est strictement négatif donc l'inégalité n'est pas vérifiée.
  Pour $x \geqslant 7/2$, les deux membres sont positifs. Donc, la fonction carré étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, ces deux nombres sont rangés comme leurs carrés. Pour $x \in [7/2,+\infty[$, l'inéquation est équivalente à $4x^2-28x+49 \geqslant x^2-1$ ou encore $3x^2-28x+50 \geqslant 0$. Les zéros de $3x^2-28x+50$ sont $\frac{14}{3}-\frac{\sqrt{46}}{3}$ et $\frac{14}{3}+\frac{\sqrt{46}}{3}$. Seul le deuxième est dans $[7/2,+\infty[$. Donc sur cet intervalle, $3x^2-28x+50 \geqslant 0$ est équivalent à $x \geqslant \frac{14}{3}+\frac{\sqrt{46}}{3}$. On a donc :

$$\mathcal{S}\cap]2,+\infty] = \left[\frac{14}{3}+\frac{\sqrt{46}}{3},+\infty\right[$$

Pour conclure, on regroupe les solutions trouvées sur chacun des domaines$]-\infty,-1]\cup[1,2]$ et $]2,+\infty]$:

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= (\mathcal{S}\cap(]-\infty,-1]\cup[1,2]))\cup(\mathcal{S}\cap]2,+\infty])\\ &=]-\infty,-1]\cup\left[\frac{14}{3}+\frac{\sqrt{46}}{3},+\infty\right[\end{aligned}$$

Correction 98 L'équation $z^2-2\cos(\theta)z+1=0$ a pour discriminant $\Delta=(2\cos(\theta))^2-4=-4\sin(\theta)^2$. Les racines carrées de Δ sont $2i\sin(\theta)$ et $-2i\sin(\theta)$. Les solutions de l'équation sont donc $\cos(\theta)+i\sin(\theta)=e^{i\theta}$ et $\cos(\theta)-i\sin(\theta)=e^{-i\theta}$.
Soit $z_0=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$. Alors $z_0^2=\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)$ par la formule de Moivre. On a donc :

$$z_0^2-2\cos(\theta)z_0+1=\cos(2\theta)-2\cos(\theta)^2+1+i(\sin(2\theta)-2\sin(\theta)\cos(\theta))=0.$$

Par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe, on a en identifiant parties réelle et imaginaire :

$$\cos(2\theta)=2\cos(\theta)^2-1,\quad \sin(2\theta)=2\sin(\theta)\cos(\theta).$$

Correction 99

1. Développons le carré du membre de droite :

$$(1+\sqrt{3}+i2\sqrt{3})^2=(1+\sqrt{3})^2-(2\sqrt{3})^2+2i(1+\sqrt{3})(2\sqrt{3})=-8+2\sqrt{3}+i(12+4\sqrt{3})$$

2. Soit (E) l'équation

$$Z^2+(\sqrt{3}-1)Z+(3-\sqrt{3}-i(3+\sqrt{3}))=0.$$

Son discriminant vaut

$$\begin{aligned}\Delta &= (\sqrt{3}-1)^2-4(3-\sqrt{3}+i(3+\sqrt{3}))=3+1-2\sqrt{3}-12+4\sqrt{3}+4i(3+\sqrt{3})\\ &= -8+2\sqrt{3}+i(12+4\sqrt{3})\end{aligned}$$

D'aprés la première question, les deux racines carrées de Δ sont $\delta=1+\sqrt{3}+i2\sqrt{3}$ et $-\delta$. Les solutions de l'équation sont

$$Z_1=\frac{-\sqrt{3}+1+\delta}{2}=1+i\sqrt{3}=2e^{i\pi/3}\quad\text{et}\quad\frac{-\sqrt{3}+1-\delta}{2}=-\sqrt{6}(1+i)=\sqrt{6}e^{i5\pi/4}$$

3. Les racines nièmes de Z_1 sont les nombres $2^{\frac{1}{n}}e^{i(\frac{\pi}{3n}+\frac{2k\pi}{n})}$ pour $0\leqslant k\leqslant n-1$. Les racines nièmes de Z_2 sont les nombres $6^{\frac{1}{2n}}e^{i(\frac{5\pi}{4n}+\frac{2k\pi}{n})}$ pour $0\leqslant k\leqslant n-1$. Remarquez bien que Z_1 et Z_2 ont chacun n racines nièmes distinctes, comme tout nombre complexe non nul.
4. Soit (E') l'équation

$$\left(\frac{z-1}{z}\right)^{2n}+(\sqrt{3}-1)\left(\frac{z-1}{z}\right)^{n}+(3-\sqrt{3}-i(3+\sqrt{3}))=0.$$

On peut résoudre (E') par la suite d'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} z \text{ est solution de } (E') &\Leftrightarrow \left(\frac{z-1}{z}\right)^n \text{ est solution de } (E) \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{z-1}{z}\right) \text{ est une racine nième de } Z_1 \text{ ou } Z_2 \\ &\Leftrightarrow z = \frac{1}{1-2^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\pi}{3n}+\frac{2k\pi}{n})}} \text{ ou } z = \frac{1}{1-6^{\frac{1}{2n}} e^{i(\frac{5\pi}{4n}+\frac{2k\pi}{n})}} \text{ avec } 0 \leqslant k \leqslant n-1 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ s'écrit :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{1-2^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\pi}{3n}+\frac{2k\pi}{n})}} \ ; \ 0 \leqslant k \leqslant n-1 \right\} \cup \left\{ \frac{1}{1-6^{\frac{1}{2n}} e^{i(\frac{5\pi}{4n}+\frac{2k\pi}{n})}} \ ; \ 0 \leqslant k \leqslant n-1 \right\}.$$

Correction 100 Soit $P(n)$ la propriété : "$3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7". Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation $P(0)$ est vraie. En effet, $3^{0+2} - 2^{0+1} = 9 - 2 = 7$ est divisible par 7.

Hérédité Supposons qu'il existe k entier positif tel que $P(k)$ est vraie. Montrons alors que $P(k+1)$ est vraie.

$$3^{2(k+1)+2} - 2^{(k+1)+1} = 3^{2k+4} - 2^{k+2} = 3^{2k+2}(3^2-2) + 2(3^{2k+2} - 2^k)$$

$3^2 - 2$ est égal à 7 donc $3^{2k+2}(3^2-2)$ est divisible par 7. De plus $3^{2k+2} - 2^k$ est divisible par 7 d'aprés l'hypothèse de récurrence, donc $2(3^{2k+2} - 2^k)$ aussi. On en déduit que $3^{2(k+1)+2} - 2^{(k+1)+1}$ est divisible 7, comme somme de deux multiples de 7 : $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion D'aprés le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout n positif.

Correction 101

1. Soit (a,b,c) un triplet pythagoricien différent de $(0,0,0)$. Alors, comme $c > 0$, on a en divisant par c^2 : $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$. Donc le point de coordonnées $(a/c, b/c)$ est un point du cercle trigonométrique puisqu'il satisfait l'équation $x^2+y^2 = 1$. Réciproquement, si $(a/c, b/c)$ est un point du cercle unité, alors $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$, donc en multipliant par m^2c^2, on obtient :
$$(ma)^2 + (mb)^2 = (mc)^2$$
ce qui signifie que (ma, mb, mc) est un triplet pythagoricien.
2. Un point de l'intesection $C \cap D_r$ de coordonnées a des coordonnées (x,y) qui satisfont à la fois l'équation du cercle et celle de la droite D_r. On doit donc résoudre le système
$$\left\{ \begin{array}{rcl} y^2 &=& 1 - x^2 \\ y &=& r(x+1) \end{array} \right.$$
En élevant la deuxième équation au carré et en soustrayant la première, on voit que nécessairement, x est solution de l'équation du deuxième degré :
$$(1+r^2)x^2 + 2r^2x + r^2 - 1 = 0$$
dont les solutions sont $x = 1$ et $x = \frac{1-r^2}{1+r^2}$. La deuxième équation permet de déterminer les y correspondant à ces x. On montre ainsi que l'ensemble des solutions du système est

inclus dans $\left\{(-1,0)\ ,\ \left(\frac{1-r^2}{1+r^2},\frac{2r}{1+r^2}\right)\right\}$. On vérifie que ces deux couples sont bien solutions du système, ce qui montre que les deux points d'intersection de D_r et C sont bien les deux points d'affixe -1 et $z_r = \frac{1-r^2}{1+r^2} + i\frac{2r}{1+r^2}$. Si θ_r est un argument de z_r, alors $x_r = \cos(\theta)$, $y = \sin(\theta)$ et $r = \frac{y}{x+1} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Pour que x_r et y_r soient positifs, il faut et il suffit que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, et donc que $0 \leqslant r \leqslant 1$.

3. Supposons que tout d'abord qu'il existe un $r \in \mathbb{Q}$ tel que $M \in C \cap D_r$. De deux choses l'une : soit M a pour affixe -1, et est donc à coordonnées rationnelles, soit M a pour affixe z_r dont les parties réelles et imaginaires sont des fractions rationnelles (des quotients de polynômes) en $r \in \mathbb{Q}$, et donc elles-même dans $\mathbb{Q}$.

   Supposons maintenant que M est à coordonnées rationnelles. Soit M a pour affixe -1, et dans ce cas M est dans $C \cap D_r$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$, Soit l'abscisse de M est différente de -1, et dans ce cas on pose $r = y/(x+1)$ (c'est un nombre rationnel !). Dans ce cas M est sur le cercle par hypothèse et sur la droite D_r par définition de r, ce qui termine la démonstration.

4. Les points à coordonnées positives rationnelles sur le cercle unité sont les points de la forme $\left(\frac{1-r^2}{1+r^2},\frac{2r}{1+r^2}\right)$ avec $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$. En écrivant $r = \frac{p}{q}$, avec $p \leqslant q$ et p premier avec q, on a que l'ensemble des points à coordonnées positives rationnelles sur le cercle unité est :

$$\mathcal{W} = \left\{\left(\frac{q^2-p^2}{p^2+q^2},\frac{2pq}{p^2+q^2}\right)\ \mid p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}^*,\ p \leqslant q,\ p \text{ premier avec } q\right\}$$

5. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des triplets pythagoriciens et $\mathcal{T}$ l'ensemble défini par

$$\mathcal{T} = \left\{(m(q^2-p^2), 2mpq, m(p^2+q^2)) \mid m \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}^*,\ p \leqslant q\ ,\ p \text{ premier avec } q\right\}.$$

   Il faut montrer que ces deux ensembles sont égaux. Montrons d'abord que $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Soit (a,b,c) un triplet pythagoricien. Alors d'après la question 1), $(a/c, b/c)$ est un point du cercle unité à coordonnés rationnelles positives que l'on peut écrire $\left(\frac{q^2-p^2}{p^2+q^2},\frac{2pq}{p^2+q^2}\right)$ d'après la question 4). Les deux fractions $\frac{q^2-p^2}{p^2+q^2}$ et $\frac{2pq}{p^2+q^2}$ sont sous forme irréductible car p et q sont premiers entre eux. Donc c est un multiple de p^2+q^2. En posant $c = m(p^2+q^2)$, on trouve que $(a,b,c) = (m(q^2-p^2, 2mpq, m(p^2+q^2))$. Donc $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$.

   Il suffit de vérifier que tous les éléments de $\mathcal{T}$ sont des triplets pythagoriciens, ce qui se vérifie facilement par calcul :

$$(m(q^2-p^2))^2 + (2mpq)^2 = m^2(q^4+p^4-2p^2q^2+4p^2q^2) = m^2(p^2+q^2)^2$$

   Donc $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$. Par double inclusion, on a montré que $\mathcal{S} = \mathcal{T}$.

Correction 102 1. – Fausse.
– Négation : $\exists\, x \in \mathbb{R},\quad x < 2$ et $x^2 \geqslant 4$.
– Preuve de la négation : $x = -3$ convient.

2. – Fausse.
– Négation : $\exists\, f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\quad (f,\ g$ croissantes) et ($f \cdot g$ non croissante[1]).
– Preuve de la négation : $f :\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x-2$ et $g :\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x$ sont toutes deux croissantes. Mais $f \cdot g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto x^2 - 2x$ n'est pas croissante.

1. Une fonction non croissante n'est pas nécessairement décroissante. Par exemple la fonction : $\varphi\ :\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = (x-1)^2$ n'est ni croissante, ni décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

3. – Fausse.
   – Négation : $\exists\, f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad (f,\, g \text{ croissantes et } f \text{ positive }) \text{ et } (f \cdot g \text{ non croissante})$.
   – Preuve de la négation : $f :\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + 2$ est croissante, positive et $g :\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x - 10$ est croissante. Mais $f \cdot g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 8x - 20$ n'est pas croissante.
4. – Vraie.
   – Preuve : soient $x, y \in \mathbb{R}^+$ tels que $x \leqslant y$. Comme f, g sont croissantes et positives, on a les inégalités :

$$(I_f) \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant f(y) \qquad \text{et} \qquad (I_g) \quad 0 \leqslant g(x) \leqslant g(y).$$

   On multiplie (I_f) par $g(x)$ ($g(x) \geqslant 0$) et (I_g) par $f(y)$ ($f(y) \geqslant 0$) pour obtenir :

$$f(x)g(x) \leqslant f(y)g(x) \qquad \text{et} \qquad f(y)g(x) \leqslant f(y)g(y).$$

   On a donc $f(x)g(x) \leqslant f(y)g(y)$ (transitivité de $\leqslant$).
5. – Vraie.
   – Preuve : soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. On pose $\alpha = \frac{\varepsilon}{3}$. Alors :

$$|x-1| < \alpha = \frac{\varepsilon}{3} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{3|x-1|}_{=|3x-3|} < 3 \times \alpha = \varepsilon.$$

   – Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x$.

$$\begin{aligned} (5) \quad &\Leftrightarrow \quad f(1) = 3 \quad \text{et} \quad \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists\, \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \quad 0 < |x-1| < \alpha \Rightarrow |3x-3| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad f(1) = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1} f(x) = 3. \end{aligned}$$

6. – Fausse.
   – Négation : $\exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \exists\, x \in \mathbb{R}, \quad |x-1| < \alpha \quad \text{et} \quad |2x-1| \geqslant \varepsilon$.
   – Preuve de la négation : On choisit $\varepsilon = 1$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Alors :

$$\text{si on pose } x = 1, \quad 0 = |x-1| < \alpha \quad \text{et} \quad 1 = |2x-1| \geqslant \varepsilon = 1.$$

   – Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x$. Alors :

$$(6) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to 1} g(x) = 1 \quad \text{et} \quad g(1) = 1.$$

Correction 103 On raisonne par l'absurde. On suppose que l'on a rangé $nk + 1$ paires de chaussettes dans n tiroirs, numérotés de 1 à n, et que tous les tiroirs contiennent au plus k paires de chaussettes.
On note, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, N_i le nombre de paire(s) de chaussettes qui se trouve(nt) dans le tiroir numéro i. Alors on a :

$$\begin{cases} (1) & : \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad N_i \leqslant k, \\ (2) & : \quad N_1 + N_2 + \cdots + N_n = nk + 1. \end{cases}$$

En sommant les inégalités de (1), on obtient : $N_1 + N_2 + \cdots + N_n \leqslant nk$. En utilisant (2), on trouve :

$$nk + 1 \leqslant nk \quad \text{(ce qui est faux)} .$$

On note (P) la proposition que l'on vient de démontrer.

Applications

1. On applique (P) avec $n=5$ et $k=2$.
2. On définit les $n+1$ sommes suivantes :

$$S_0 := 0,\ S_1 := a_1,\ S_2 := a_1+a_2,\ \dots,\ S_i := a_1+a_2+\dots+a_i,\ \dots,\ S_n := a_1+a_2+\dots+a_n\ .$$

Pour $i \in \{0,\dots,n\}$, on note $r_i \in \{0,\dots,n-1\}$, le reste de la division euclidienne de S_i par n. On range alors les sommes S_i, $i \in \{0,\dots,n\}$, dans n tiroirs numérotés de 0 à $n-1$ en mettant la somme S_i dans le tiroir numéroté r_i. On applique (P) avec "$n=n$" et $k=1$. Un des tiroirs contient donc (au moins) $2=k+1$ sommes S_i. Ainsi,

$$\exists\, p,q \in \{0,..,n\},\ p<q, \quad \text{tels que} \quad r_p = r_q.$$

Donc n divise $S_q - S_p$. On explicite l'expression de $S_q - S_p$, pour obtenir :

$$n \quad \text{divise} \quad a_{p+1} + a_{p+2} + \dots + \underbrace{a_{p+(q-p)}}_{a_q}.$$

Correction 104 On procède par double inclusion.

– Montrons que $f(A) \subset B$.
Soit $x \in A$. $f(x) = -x^2-4x = -(x+2)^2+4$. Comme $x \neq -2$, $-(x+2)^2 < 0$. Donc $f(x) < 4$, i.e. $f(x) \in B$.

– Montrons que $B \subset f(A)$.
Soit $b \in B$. On cherche $x \in A$ tel que $f(x) = b$. Autrement dit, on souhaite trouver une solution de l'équation :

$$(E) \quad -x^2-4x-b=0 \qquad \text{qui est } \textit{dans } A.$$

Le discriminant vaut $16-4b > 0$ car $b < -4$ ($b \in B$). (E) a donc deux solutions *dans* $\mathbb{R}$:

$$x_- = \frac{-4-\sqrt{16-4b}}{2} \quad \text{et} \quad x_+ = \frac{-4+\sqrt{16-4b}}{2}.$$

On remarque que $x_- \in A$.
Conclusion : il existe $x \in A$ ($x = \frac{-4-\sqrt{16-4b}}{2}$) tel que $f(x) = b$.

Correction 105 1. On a une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$".

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} &= \left(\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2x+1}+3}{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}\right) \times \frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3} \\ &= \underbrace{\frac{(\sqrt{2x+1})^2-3^2}{(\sqrt{x-2})^2-(\sqrt{2})^2}}_{=2} \times \underbrace{\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3}}_{\underset{x\to 4}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{2}}{3}} \quad \underset{x\to 4}{\longrightarrow} \quad \frac{2\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

2. On a également une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$".

$$\begin{aligned}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{\sin^3(\frac{x}{2})} &= \sin(x) \times \frac{1-\cos(x)}{\cos(x)\sin^3(\frac{x}{2})} \\ &= \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1} \times \underbrace{\frac{1-\cos(x)}{x^2}}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}} \times \underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1} \times \underbrace{\frac{(\frac{x}{2})^3}{\sin^3(\frac{x}{2})}}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1} \times 2^3 \quad \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \quad 4.\end{aligned}$$

Correction 106 1. Représentation graphique de la fonction partie entière :

2. On note $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ avec

$$N(x) := x^4E(x) + 2x^3 + (21E(x^2) + 1)x \quad \text{et} \quad D(x) := x^3E(x) + 3x^2 + 21E(x^2).$$

– Si $x < 0$, alors $E(x) \leqslant -1$. On a $xE(x) \geqslant -x > 0$, $3x^2 > 0$, $21E(x^2) \geqslant 0$.
$D(x) > 0$, donc $f(x)$ est bien défini.
– Si $x > 0$, alors $E(x) \geqslant 0$. On a $xE(x) \geqslant 0$, $3x^2 > 0$, $21E(x^2) \geqslant 0$.
$D(x) > 0$, donc $f(x)$ est bien défini.
– Si $x = 0$, alors $D(x) = 0$ donc $f(x)$ n'est pas défini.
Conclusion : le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^*$.

3. La présence de la fonction partie entière dans l'expression de f nous contraint à scinder l'étude en deux parties.
– On sait que $\lim_{x\to 1^+} E(x) = 1$ et $\lim_{x\to 1^+} E(x^2) = 1$. Donc :

$$\lim_{x\to 1^+} N(x) = 25 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} D(x) = 25.$$

Le théorème sur “les quotients de limites” s'applique. On obtient : $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$.
– On a $\lim_{x\to 1^-} E(x) = 0$ et $\lim_{x\to 1^-} E(x^2) = 0$. Donc

$$\lim_{x\to 1^-} N(x) = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^-} D(x) = 3.$$

On conclut comme ci-dessus : $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$.
Conclusion : $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.

4. (a)
$$X^4 + X^3 - 3X^2 + 22X - 21 = (X-1)(X^3 + 2X^2 - X + 21)$$
$$\text{et} \quad 2X^2 - 3X + 1 = (X-1)(2X-1).$$

(b) Si $x \in]1, \frac{4}{3}[$, alors $E(x) = 1$ et $E(x^2) = 1$ ($1 < x^2 < \frac{16}{9} < 2$). $f(x) - 1$ s'écrit :

$$\frac{x^4 + 2x^3 + 22x}{x^3 + 3x^2 + 21} - 1 = \frac{x^4 + x^3 - 3x^2 + 22x - 21}{x^3 + 3x^2 + 21} = (x-1) \times \frac{x^3 + 2x^2 - x + 21}{x^3 + 3x^2 + 21},$$

d'après 4(a). On pose $P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 21$ et $Q(x) = x^3 + 3x^2 + 21$. Sur $]1, \frac{4}{3}[$, on a donc :

$$|f(x) - 1| = |x - 1|\frac{|P(x)|}{|Q(x)|}. \tag{$\star$}$$

– Si $x \in]1, \frac{4}{3}[$, on a $Q(x) > 1^3 + 3 \times 1^2 + 21 = 25$, donc

$$|Q(x)| > 25. \tag{$\star\star$}$$

– Si $x \in]1, \frac{4}{3}[$, d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$|P(x)| \leqslant |x^3| + 2|x^2| + |x| + 21 < \left(\frac{4}{3}\right)^3 + 2 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} + 21 = \frac{763}{27} \tag{$\star\star\star$}$$

De $(\star)$, $(\star\star)$, $(\star\star\star)$, on déduit que sur $]1, \frac{4}{3}[$, on a

$$|f(x) - 1| < A|x-1| \quad \text{avec} \quad A = \frac{763}{675}.$$

Montrons maintenant que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$ en revenant à la définition, i.e. prouvons :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists\, \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \quad 1 < x < 1+\alpha \Rightarrow |f(x)-1| < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. On définit α comme étant le plus petit des deux nombres $\frac{\varepsilon}{A}$ et $\frac{1}{3}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $1 < x < 1+\alpha$. D'après le choix de α, on a $1 < x < \frac{4}{3}$ et $|x-1| < \frac{\varepsilon}{A}$ et donc :

$$|f(x)-1| < A|x-1| < A \times \frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon.$$

(c) Si $x \in]\frac{1}{2}, 1[$, alors $E(x) = 0$ et $E(x^2) = 0$ $(0 \leqslant \frac{1}{4} < x^2 < 1)$. $f(x) - 1$ s'écrit :

$$\frac{2x^3+x}{3x^2} - 1 = \frac{2x^2-3x+1}{3x} = (x-1) \times \frac{2x-1}{3x} \qquad \text{(d'après 4(a))}.$$

Sur $]\frac{1}{2}, 1[$, on a donc :

$$|f(x)-1| = |x-1|\frac{|2x-1|}{|3x|}.$$

Si $x \in]\frac{1}{2}, 1[$, alors :

$$|2x-1| \leqslant 2|x| + 1 < 3 \quad \text{et} \quad |3x| > \frac{3}{2}.$$

Finalement

$$\frac{1}{2} < x < 1 \Rightarrow |f(x)-1| < 2|x-1|.$$

La preuve de $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$ est analogue à celle faite pour $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$.

(d) Des résultats (4b) et (4c), on déduit : $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.

Correction 107 1. Soit $x > 0$. $\frac{x^3+2x^2+1}{4x^2+3x+2}\sin(\frac{1}{x})$ est bien défini donc on peut s'intéresser à la limite en $+\infty$ et $\frac{x^3+2x^2+1}{4x^2+3x+2}\sin(\frac{1}{x}) = \frac{x^3+2x^2+1}{4x^2+3x+2}\frac{1}{x}\frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \frac{x^3+2x^2+1}{4x^3+3x^2+2x}\frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \frac{x^3(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3})}{x^3(4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2})}\frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \frac{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$.

Or, $\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}$ tend vers $\frac{1}{4}$ quand x tend vers $+\infty$.

D'autre part, $X = \frac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et $\frac{\sin(X)}{X}$ tend vers 1 quand X tend vers 0 donc par composition de limites $\frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.

Finalement, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x^2+1}{4x^2+3x+2}\sin(\frac{1}{x}) = \frac{1}{4}$.

2. Soit $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$. Alors $\frac{2}{\sin(x)^2} - \frac{1}{1-\cos(x)}$ est bien défini donc on peut s'intéresser à la limite en 0 et $\frac{2}{\sin(x)^2} - \frac{1}{1-\cos(x)} = \frac{2}{1-\cos(x)^2} - \frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)^2} = \frac{2-(1+\cos(x))}{1-\cos(x)^2} = \frac{1-\cos(x)}{1-\cos(x)^2} = \frac{1}{1+\cos(x)}$ donc $\lim_{x\to 0} \frac{2}{\sin(x)^2} - \frac{1}{1-\cos(x)} = \frac{1}{2}$ car cos est continue en 0 et $\cos(0) = 1$.

Correction 108 Soit f définie par $f(x) = \frac{a}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

1. $f(x)$ est défini si et seulement si $1-x \neq 0$ et $1-x^2 \neq 0$ donc l'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. f est une somme d'inverses de fonctions continues ne s'annulant pas sur D_f donc f est continue sur D_f.

2. Soit $x \in D_f$. $f(x) = \frac{a-2+ax}{(1+x)(1-x)}$.
   – $\lim_{x\to-1} \frac{a-2+ax}{1-x} = -1$. $\lim_{x\to-1^+} \frac{1}{1+x} = +\infty$ et $\lim_{x\to-1^-} \frac{1}{1+x} = -\infty$ donc $\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$
   – Si $a = 1$,$f(x) = -\frac{1}{1+x}$ donc $\lim_{x\to1} f(x) = -\frac{1}{2}$.
     Si $a \neq 1$, $\lim_{x\to+1} \frac{a-2+ax}{1+x} = a-1$. $\lim_{x\to1^+} \frac{1}{1-x} = -\infty$ et $\lim_{x\to1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$
     Si $a > 1$,$\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$
     Si $a < 1$,$\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$
3. – f n'a pas de limite finie en -1 donc f n'est pas prolongeable par continuité en -1, quelle que soit la valeur de a.
   – Si $a \neq 1$, f n'a pas de limite finie en 1 donc f n'est pas prolongeable par continuité en 1.
     Si $a = 1$, on peut prolonger f par continuité en 1 en posant $f(1) = -\frac{1}{2}$.

Correction 109 – La condition sur f signifie que son graphe privé du point $(0, f(0))$ est compris entre les droites $y = kx$ et $y = -kx$. Comme f est enfermée dans cet entonnoir,on devine que $\lim_{x\to0} f(x) = 0$.
– $\forall x \in]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus \{0\}, 0 \leqslant |f(x)| \leqslant k|x|$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x\to0} f(x) = 0$. Or, f continue en 0 ssi $\lim_{x\to0} f(x) = f(0)$. Donc f continue en 0 ssi $0 = f(0)$.

Correction 110 – Si $x > 1$, $0 < \frac{1}{x} < 1$ donc $E(\frac{1}{x}) = 0$ donc $f(x) = 0$ donc f est nulle donc continue sur $]1, +\infty[$.
– Si $0 < x \leqslant 1, \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \frac{1}{n+1} < x \leqslant \frac{1}{n}$ donc $f(x) = nx$ (car $n \leqslant \frac{1}{x} < n+1$ donc $E(\frac{1}{x}) = n$) donc f est continue sur chacun des intervalles $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$. En particulier, on a $f(\frac{1}{n}) = 1$.
– Si $x > 1, f(x) = 0$ donc $\lim_{x\to1^+} f(x) = 0 \neq 1 = f(1)$ donc f n'est pas continue en 1.
– Si $\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \frac{1}{n+1} < x \leqslant \frac{1}{n}$, alors $f(x) = nx$ donc $\lim_{x\to\frac{1}{n+1}^+} f(x) = \frac{n}{n+1} \neq 1 = f(\frac{1}{n+1})$ donc f n'est pas continue en $\frac{1}{n+1}$.
– Le même genre de travail montre que f est continue sur $]-\infty, -1[$,sur $]-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}[$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mais qu'elle n'est pas continue en $-\frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

– On peut prolonger f par continuité en 0. En effet, si $x \neq 0$, $E(\frac{1}{x}) \leqslant \frac{1}{x} < E(\frac{1}{x})+1$ par définition de la partie entière donc $\frac{1}{x}-1 < E(\frac{1}{x}) \leqslant \frac{1}{x}$ donc $1-x < f(x) \leqslant 1$ si $x > 0$ ou $1-x > f(x) \geqslant 1$ si $x < 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^-} f(x) = 1$. On peut donc prolonger f par continuité en posant $f(0) = 1$.

Correction 111 – $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc $\exists B > 0, \forall x \geqslant B, f(x) \geqslant 1)$.
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ donc $\exists A < 0, \forall x \leqslant A, f(x) \leqslant -1)$
$A < B$, f continue sur $[A, B]$, $f(A) < 0$ et $f(B) > 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists c \in]A, B[, f(c) = 0$.
– Quitte à changer le polynôme P en $-P$, P satisfait les conditions précédentes,c'est-à-dire $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ (car il est de degré impair) et P est continu sur $\mathbb{R}$ donc il admet une racine réelle.

Correction 112 Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto ax^2+bx+c$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. La fonction f étant définie par morceaux sur $]-\infty, 0[$ et $[0, +\infty[$, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ (de plus f est continue à droite en 0 et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ elle a une dérivée n-ième à droite en 0).

Continuité en 0. $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = e^0 = 1$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = c = f(0)$. On en déduit que f est continue en 0 si et seulement si $c = 1$.

Dérivabilité en 0. Si f n'est pas continue alors elle n'est pas dérivable. On étudie donc la dérivabilité en 0 uniquement quand $c = 1$.
• $\forall x \geqslant 0, f(x) = ax^2 + bx + 1$. Cette formule est valable à droite de 0, **y compris en 0**, donc en la dérivant selon les règles usuelles on peut calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et $f'_d(0)$ (dérivée à droite). On obtient : $\forall x > 0$, $f'(x) = 2ax + b$, $f'_d(0) = b$ et $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = f'_d(0)$.
• $\forall x \leqslant 0, f(x) = e^x$ (cette formule est aussi valable en $x = 0$ car $f(0) = c = 1 = e^0$). En dérivant cette formule, on peut donc calculer $f'(x)$ pour $x < 0$ et $f'_g(0)$. On obtient : $\forall x < 0$, $f'(x) = e^x$, $f'_g(0) = e^0 = 1$ et $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = f'_g(0)$.
On en déduit que f est dérivable en 0 si et seulement si $f'_g(0) = f'_d(0)$, c'est-à-dire $b = 1$. Dans ce cas $f'(0) = 1$ et f' est continue en 0, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Dérivée seconde en 0. On procède comme pour f'. Si f n'est pas $\mathcal{C}^1$ alors f' n'est pas dérivable, on se place donc dans le cas $b = c = 1$.
• $\forall x \geqslant 0, f'(x) = 2ax+1$ (cette formule est valable en 0 car on a calculé ci-dessus que $f'(0) = 1$) donc $\forall x > 0$, $f''(x) = 2a$, $f''_d(0) = 2a$ et $\lim_{x\to 0^+} f''(x) = f''_d(0)$.
• $\forall x \leqslant 0, f'(x) = e^x$ (formule valable en 0 car $f'(0) = 1 = e^0$) donc $\forall x < 0$, $f''(x) = e^x$, $f''_g(0) = e^0 = 1$ et $\lim_{x\to 0^-} f''(x) = f''_g(0)$.
On en déduit que f' est dérivable en 0 si et seulement si $f''_g(0) = f''_d(0)$, c'est-à-dire $a = \frac{1}{2}$. Dans ce cas $f''(0) = 1$ et f'' est continue en 0, donc f est de classe $\mathcal{C}^2$.

Dérivée troisième en 0. On étudie l'existence de $f^{(3)}(0)$ pour $a = \frac{1}{2}$, $b = c = 1$. Par la même méthode que précédemment on trouve $f^{(3)}_g(0) = e^0 = 1$ et $f^{(3)}_d(0) = 0$. Les dérivées à gauche et à droite sont différentes donc $f^{(3)}$ n'est pas définie en 0.

Conclusion. f est $\mathcal{C}^2$ si et seulement si $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 1$ et f n'est jamais $\mathcal{C}^3$.

Autre méthode. On peut étudier la dérivabilité en 0 en utilisant les taux d'accroissement. Nous montrons ici comment calculer $f'_g(0)$ et $f'_d(0)$, les dérivées supérieures se traitant de la même manière. Si $x > 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x} = ax + b$ donc $f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = b$. Dans le cas $c = 1$ la dérivée à gauche (si elle existe) est donnée par la limite en 0^- de $\frac{e^x-1}{x}$; or par définition $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ est égale à la dérivée en 0 de $g(x) = e^x$. Comme $g'(x) = e^x$, on obtient que $f'_g(0) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{e^x - 1}{x} = g'(0) = 1$.

Correction 113 $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \cos x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composition de fonctions dérivables. Étudions la dérivabilité en 0. $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\cos\frac{1}{x}$. Comme $|\cos\frac{1}{x}| \leqslant 1$ on a $|x\cos\frac{1}{x}| \leqslant |x|$ d'où $-|x| \leqslant x\cos\frac{1}{x} \leqslant |x|$. On a $\lim_{x\to 0} |x| = 0$ donc par le théorème des gendarmes $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x\cos\dfrac{1}{x}$ existe et vaut 0.

Conclusion. f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Si $x \neq 0$, $f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$. Cette fonction n'a pas de limite en 0 (cf feuille 4, ex. 6, $f(x)$), donc f n'est pas $\mathcal{C}^1$.

Correction 114
1. Soit $f(x) = \ln x$ pour $x > 0$. f est dérivable et $\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x}$. On applique le théorème des accroissements finis entre x et $x+1$ ($x > 0$) : il existe $c \in]x, x+1[$ tel que $\ln(x + 1) - \ln(x) = \frac{1}{c}$. Comme $0 < x < c < x + 1$ on a $0 < \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ donc $\forall x > 0$, $\frac{1}{x+1} < \ln(x + 1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$.

2. On applique la question (1) pour $x = 1, 2, \dots, k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et on somme les inégalités obtenues. Comme

$$\ln(k+1) - \ln(k) + \ln(k) - \ln(k-1) + \cdots + \ln(2) - \ln(1) = \ln(k+1) - \ln(1),$$

on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln(1) < 1 + \frac{1}{2} + + \cdots + \frac{1}{k},$$

autrement dit $S_{k+1} - 1 < \ln(k+1) < S_k$. En prenant $k = n-1$ ($n \geqslant 2$ donc $k \geqslant 1$) la 1ère inégalité donne $S_n < 1 + \ln(n)$ et en prenant $k = n$ la 2ème inégalité donne $\ln(n+1) < S_n$. Donc $\forall n \geqslant 2$, $\ln(n+1) < S_n < 1 + \ln(n)$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$ et par la question (2) $S_n > \ln(n+1)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Correction 115 Soit $f(x) = \sqrt{1+2x}$. La fonction f est définie sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ et elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$. On a $f(0) = 1$, $f'(x) = (1+2x)^{-\frac{1}{2}}$, $f'(0) = 1$, $f''(x) = -(1+2x)^{-\frac{3}{2}}$, $f''(0) = -1$, $f^{(3)}(0) = 3(1+2x)^{-\frac{5}{2}}$. On applique la formule de Taylor au point 0 à l'ordre 2 :

$$\forall x > 0,\ \exists c \in]0, x[,\ f(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2}(1+2c)^{-\frac{5}{2}}.$$

$c > 0$ donc $1 + 2c > 1$, $(1+2c)^{\frac{5}{2}} > 1 > 0$ et $0 < (1+2c)^{-\frac{5}{2}} < 1$. Comme $x > 0$ on a $0 < \frac{x^3}{2}(1+2c)^{-\frac{5}{2}} < \frac{x^3}{2}$, donc $1 + x - \frac{x^2}{2} < f(x) < 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2}$ pour tout $x > 0$. On remarque que $f(0) = 1$ donc

$$\forall x \geqslant 0,\ 1 + x - \frac{x^2}{2} \leqslant f(x) \leqslant 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2}.$$

Correction 116 1. **Étude de f.**

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$ donc $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

$(x^2+1)^2$ est toujours strictement positif donc le signe de f' est donné par celui de $1 - x^2$.

Tableau de variation de f :

	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x + \frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x + \frac{1}{x}} = 0$$

On déduit du tableau de variation que f a un unique minimum local en -1 qui est aussi un minimum global, et f a un unique maximum local en 1, qui est aussi un maximum global.

Étude de g.

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ donc $\mathcal{D}_g = \mathcal{D}_{g'} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. $\forall x \neq 1$, $g'(x) = \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$.

Comme $(x-1)^2 > 0$, le signe de g' est donné par celui de $x^2 - 2x - 2$. $\Delta = 12$, $x_1 = 1 - \sqrt{3} < 1$, $x_2 = 1 + \sqrt{3} > 1$.

	$-\infty$		x_1			1			x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$		$\|\|$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = +\infty$

$g(x) = \frac{x+1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$ d'où

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

On déduit du tableau de variation que g a un unique minimum local en x_2 et un unique maximum local en x_1. La fonction g n'a pas d'extremum global.

2. D'après le tableau de variation de f, f a une asymptote horizontale $y = 0$ en $-\infty$ et $+\infty$.

   D'après le tableau de variation de g, g a une asymptote verticale en $x = 1$. Étudions les asymptotes en $\pm\infty$. On fait la division euclidienne (avec reste) de $x^2 + x - 1$ par $x - 1$ et on trouve $x^2 + x - 1 = (x-1)(x+2) + 1$. Donc $g(x) = x + 2 + \frac{1}{x-1}$. On a donc $\lim_{x\to+\infty} g(x) - (x+2) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x) - (x+2) = 0$. Par conséquent, g admet la droite $y = x + 2$ pour asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. $f''(x) = \dfrac{-2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$. Comme $(x^2+1) > 0$, le signe de f'' est donné par le numérateur :

	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$-2x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$3-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

   On déduit du tableau de signe de f'' que f est concave sur $]-\infty, -\sqrt{3}]$ et $[0, \sqrt{3}]$ et que f est convexe sur $[-\sqrt{3}, 0]$ et $[\sqrt{3}, +\infty[$. De plus, f a 3 points d'inflexion, en $-\sqrt{3}$, 0 et $\sqrt{3}$.

   $g''(x) = \dfrac{6}{(x-1)^3}$ donc g'' ne s'annule jamais et g'' est du signe de $x - 1$, c'est-à-dire $g''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$ et $g''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$. On en déduit que g est concave sur $]-\infty, 1[$ et convexe sur $]1, +\infty[$. La fonction g n'a pas de point d'inflexion.

4. **Graphe de f.**
   Remarque : on montre facilement que f est impaire, donc le graphe de f est symétrique par rapport au point $(0,0)$.

   Graphe de g.
   Remarque : pour tout $h \geqslant 0$, $\frac{g(1+h)+g(1-h)}{2} = 3$ donc le graphe de g est symétrique par rapport au point $(1,3)$.

Correction 169 (a) On a $f_1(2(1,1)) = f_1(2,2) = 4$ et $2f_1(1,1) = 2$, donc $f_1(2(1,1)) \neq 2f_1(1,1)$: l'application f_1 n'est pas linéaire.

(b) Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f_2(x_1 + \lambda x_2) = (0, 2(x_1 + \lambda x_2)) = (0, 2x_1) + \lambda(0, 2x_2)$ donc $f_2(x_1 + \lambda x_2) = f_2(x_1) + \lambda f_2(x_2)$. L'application f_2 est donc linéaire.
On a $f_2(x) = (0,0) \Rightarrow (0, 2x) = (0,0) \Rightarrow x = 0$, donc $\mathrm{Ker}(f_2) = \{0\}$. On a $\Im(f_2) = \mathbb{R}(0,1)$. L'application f_2 est injective, mais pas surjective.
On a $f_2(1) = (0,2)$, la matrice de f_2 dans les bases canoniques est donc $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(c) On a $f_3(i) = -i \neq i = if_3(1)$: l'application f_3 n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire.

(d) Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f_4(z_1 + \lambda z_2) = \overline{z_1 + \lambda z_2} = \overline{z}_1 + \overline{\lambda}\overline{z}_2$. Comme $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\overline{\lambda} = \lambda$. On a donc $f_4(z_1 + \lambda z_2) = f_4(z_1) + \lambda f_4(z_2)$. L'application f_4 est donc linéaire.
On a $f_4(f_4(z)) = z$: l'application f_4 est donc bijective, et donc $\mathrm{Ker}(f_4) = \{0\}$ et $\Im(f_4) = \mathbb{C}$.
La base canonique de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$ est $\big(1, i\big)$. On a $f_4(1) = 1$ et $f_4(i) = -i$, la matrice de f_4 dans la base canonique est donc $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(e) On a $f_5(0,0) = 1 \neq 0$: l'application f_5 n'est pas linéaire.

(f) Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $(x_1, y_1) + \lambda(x_2, y_2) = (x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2)$, donc $f_6\big((x_1, y_1) + \lambda(x_2, y_2)\big) = \big(\frac{x_1+\lambda x_2+y_1+\lambda y_2}{2}, \frac{x_1+\lambda x_2-y_1+\lambda y_2}{2}\big) = \big(\frac{x_1+y_1+\lambda(x_2+y_2)}{2}, \frac{x_1-y_1+\lambda(x_2-y_2)}{2}\big)$ et donc $f_6\big((x_1, y_1) + \lambda(x_2, y_2)\big) = \big(\frac{x_1+y_1}{2} + \lambda\frac{x_2+y_2}{2}, \frac{x_1-y_1}{2} + \lambda\frac{x_2-y_2}{2}\big) = f_6(x_1, y_1) + \lambda f_6(x_2, y_2)$. L'application f_6 est donc linéaire.
Si $(x, y) \in \mathrm{Ker}(f_6)$, on a $x + y = 0$ et $x - y = 0$, donc $x = y = 0$, *i.e.* $\mathrm{Ker}(f_6) = \{0\}$ et l'application f_6 est injective.
Si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a $f_6(\alpha+\beta, \alpha-\beta) = (\alpha, \beta)$: l'application f_6 est surjective et $\Im(f_6) = \mathbb{R}^2$.
On a $f_6(1,0) = \big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big)$ et $f_6(0,1) = \big(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\big)$. La matrice de f_6 dans la base canonique est donc $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

(g) Un calcul analogue à celui du (f) montre que f_7 est linéaire. On a $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f_7)$ si et seulement si $x = -y$ et $z = 3y$ *i.e.* si et seulement si $(x, y, z) = (-y, y, 3y)$. On a donc $\mathrm{Ker}(f_7) = \mathbb{R}(-1, 1, 3)$. En particulier, l'application f_7 n'est pas injective.
Si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a $f_7(\alpha, 0, \beta - \alpha) = (\alpha, \beta)$: l'application f_7 est surjective et $\Im(f_7) = \mathbb{R}^2$.
On a $f_7(1,0,0) = (1,1)$, $f_7(0,1,0) = (1,-2)$ et $f_7(0,0,1) = (0,1)$. La matrice de f_7 dans la base canonique est donc $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

(h) Si $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $(P + \lambda Q)' = P' + \lambda Q'$. L'application f_8 est donc linéaire.
Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$, on a $f_8(P) = a_1 + 2a_2 X + \cdots + n a_n X^{n-1}$. On a donc $f_8(P) = P' = 0$ si et seulement si $a_1 = \cdots = a_n = 0$ *i.e.* si et seulement si $P \in \mathbb{R}$ (polynôme contant). On a donc $\mathrm{Ker}(f_8) = \mathbb{R}$ et f_8 n'est pas injective. Comme $f_8(P) = a_1 + 2a_2 X + \cdots + n a_n X^{n-1}$, on a $\Im(f_8) \subseteq \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Si $Q = b_0 + b_1 X + \cdots + b_{n-1} X^{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $f_8\big(b_0 X + \frac{b_1}{2} X^2 + \cdots + \frac{b_{n-1}}{n} X^n\big) = Q$ et $Q \in \Im(f_8)$: on a $\Im(f_8) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et f_8 n'est pas surjective.
La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\big(1, X, ..., X^n\big)$. Pour $i \in \{0, 1, ..., n\}$, on a $f_8(X^i) = iX^{i-1}$.
La matrice de f_8 dans la base canonique est donc $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n-1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & n \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.

(i) Si $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $X(P + \lambda Q) = XP + \lambda XQ$. L'application f_9 est donc linéaire.
Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$, on a $f_9(P) = a_0 X + a_1 X^2 + \cdots + a_n X^{n+1}$. On a donc $f_9(P) = 0$ si et seulement si $a_0 = \cdots = a_n = 0$ *i.e.* si et seulement si $P = 0$. On a donc $\mathrm{Ker}(f_9) = \{0\}$ et f_9 est injective. Comme $f_9(P) = a_0 X + a_1 X^2 + \cdots + a_n X^{n+1}$ on a $\Im(f_9) = \{Q \in \mathbb{R}_{n+1}[X],\ Q(0) = 0\}$, en particulier f_9 n'est pas surjective.
Pour $i \in \{0, 1, ..., n\}$, on a $f_9(X^i) = X^{i+1}$. La matrice de f_9 dans la base canonique est

donc

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Remarque : cette matrice a $n+1$ lignes et n colonnes.

Correction 170 1. On a $2f(1,-1) = (4,6) \neq (3,2) = f(2,-2) = f(2(1,1))$: il n'existe aucune application linéaire f telle que $f(1,-1) = (2,3)$ et $f(2,-2) = (3,2)$.

2. La famille $\{(1,-1),(1,1)\}$ est libre, il existe donc une application linéaire f telle que $f(1,-1) = (2,3)$ et $f(1,1) = (3,2)$ (comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2, la famille $\big((1,-1),(1,1)\big)$ est même une base : il en existe en fait une seule).
3. Toute application linéaire f vérifiant $f(1,-1) = (2,3)$ (c'est le cas de l'application définie par (b)) vérifie aussi $f(3,-3) = 3f(1,-1) = (6,9)$. Il existe donc une application linéaire f telle que $f(1,-1) = (2,3)$ et $f(3,-3) = (6,9)$ (il y en a en fait une infinité, autant que de choix possibles pour $f(1,1)$ par exemple).

Correction 171 L'ensemble F des applications de classe C^∞ est stable par dérivation, addition et multiplication. Si $f \in F$, on a $f' \in F$. Comme $x \mapsto 2x$ appartient à F, on a bien $D(f) \in F$. On peut donc parler de l'application $D\colon F \to F$.
Montrons qu'elle est linéaire : soient $f, g \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a $D(f+\lambda g)(x) = (f+\lambda g)'(x) - 2x(f+\lambda g)(x) = f'(x) + \lambda g'(x) - 2x(f(x)+\lambda g(x)) = f'(x) - 2xf(x) + \lambda\big(g'(x) - 2xg(x)\big)$ soit $D(f+\lambda g)(x) = D(f)(x) + \lambda D(g)(x)$. Comme c'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien $D(f+\lambda g) = D(f) + \lambda D(g)$ et D est linéaire.
Soit $f \in \operatorname{Ker}(D)$, on a $f'(x) - 2xf(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que f est l'application $x \mapsto \lambda e^{x^2}$. Le sous-espace $\operatorname{Ker}(D)$ de F est donc la droite engendrée par la fonction $x \mapsto e^{x^2}$.
Calcul de $\Im(D)$: on cherche quelles sont les fonctions $g \in F$ telles qu'il existe $f \in F$ avec $D(f) = g$ *i.e.* $f'(x) - 2xf(x) = g(x)$. Pour résoudre cette équation différentielle, on utilise la méthode de la variation de la constante : on cherche f sous la forme $x \mapsto \lambda(x)e^{x^2}$. L'équation se réécrit $\lambda'(x)e^{x^2} = g(x)$ soit $\lambda'(x) = g(x)e^{-x^2}$. Or pour tout $g \in F$, cette équation a des solutions dans F (par exemple $\lambda_0\colon x \mapsto \int_0^x g(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t$, qui est bien une fonction de classe C^∞ car g l'est). On a donc $\Im(D) = F$ et D est surjective.

Remarque : si φ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension *finie*, il résulte du théorème noyau-image qu'on a l'implication φ surjectif $\Rightarrow$ φ injectif. Ici on peut avoir D surjectif et pas injectif parce que F est dimension infinie.

Correction 172 1. Comme f est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, pour prouver que f est bijective, il suffit de montrer qu'elle est injective (cela résulte du théorème noyau-image) *i.e.* que son noyau est nul. Mais comme on nous demande de calculer f^{-1}, on ne procède pas ainsi : on va résoudre l'équation

$$(*) \quad f(\alpha,\beta,\gamma) = (x,y,z).$$

Cette équation équivaut au système suivant :

$$(S) \qquad \begin{cases} \alpha & +\beta & +\gamma & = & x & (L1) \\ 2\alpha & +\beta & & = & y & (L2) \\ 2\alpha & & +\gamma & = & z & (L3) \end{cases} .$$

On applique la méthode du pivot :

$$(S) \iff \begin{cases} \alpha & +\beta & +\gamma & = & x & (L1) \\ 2\alpha & +\beta & & = & y & (L2) \\ 3\alpha & & & = & -x+y+z & (L2)+(L3)-(L1) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 3\alpha & & & = -x+y+z \\ & 3\beta & & = 2x+y-2z \\ & & 3\gamma & = 2x-2y+z \end{cases} .$$

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, l'équation $(*)$ admet une unique solution : l'application f est bijective. Par ailleurs, on a $f^{-1}(x, y, z) = \frac{1}{3}(-x+y+z, 2x+y-2z, 2x-2y+z)$.

2. Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme f est bijective, on a $v \in f(F) \Leftrightarrow f^{-1}(v) \in F$. Comme $f^{-1}(v) = f^{-1}(x, y, z) = \frac{1}{3}(-x+y+z, 2x+y-2z, 2x-2y+z)$, on a $v \in f(F) \Leftrightarrow (-x+y+z, 2x+y-2z, 2x-2y+z) \in F \Leftrightarrow 2(-x+y+z)+(2x+y-2z)+(2x-2y+z) = 0$ soit $v \in f(F) \Leftrightarrow 2x+y+z = 0$. Le sous-espace $f(F)$ admet donc $2x+y+z = 0$ pour équation cartésienne (on a donc $f(F) = F$).

Correction 173 (a) On a $f(1, 0, 0) = (1, 2, 2)$, $f(0, 1, 0) = (2, 1, 2)$ et $f(0, 0, 1) = (-2, -2, -3)$. La matrice de f dans la base canonique est donc

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

(b) On a $f(u_1) = f(1, 1, 1) = (1, 1, 1) = u_1$, $f(u_2) = f(-1, 1, 0) = (1, -1, 0) = -u_2$ et $f(u_3) = f(1, 0, 1) = (-1, 0, -1) = -u_3$. La matrice de f dans la base $\mathfrak{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est donc

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Interprétation géométrique : l'application f laisse tout vecteur de $\mathrm{vect}(u_1)$ invariant et transforme les vecteurs de $\mathrm{vect}\{u_2, u_3\}$ en leur opposé, c'est donc la symétrie par rapport à la droite $\mathrm{vect}(u_1)$ parallèlement au plan $\mathrm{vect}\{u_2, u_3\}$.

(c) D'après la formule de changement de base, on peut prendre pour P la matrice de changement de base de la base canonique à $\mathfrak{B}'$. Elle s'écrit

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Correction 174 (a) Comme la famille $\mathfrak{U}$ a trois éléments et $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = 3$, il suffit de montrer que $\mathfrak{U}$ est génératrice (remarque : il suffit aussi de montrer qu'elle est libre, en résolvant un système). Posons $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ (de sorte que

$\mathfrak{B}_3 = \big(e_1, e_2, e_3\big)$). On a $e_2 = u_2 - u_3 \in \text{vect}(\mathfrak{U})$, d'où $e_3 = u_1 - u_2 - e_2 \in \text{vect}(\mathfrak{U})$ et $e_1 = u_2 - e_3 \in \text{vect}(\mathfrak{U})$. On a donc $\{e_1, e_2, e_3\} \subset \text{vect}(\mathfrak{U})$ d'où $\text{vect}(\mathfrak{U}) = \mathbb{R}^3$ et $\mathfrak{U}$ est génératrice.
De même, il suffit de montrer que $\mathfrak{V}$ est génératrice. Posons $e_1' = (1,0)$ et $e_2' = (0,1)$ (de sorte que $\mathfrak{B}_2 = \big(e_1', e_2'\big)$). On a $e_1' = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$ et $e_2' = \frac{1}{2}(v_1 - v_2)$ donc $\{e_1', e_2'\} \subset \text{vect}(\mathfrak{V})$ et $\mathfrak{V}$ est génératrice.

(b) (i) Rappelons que $\mathfrak{B}_3 = \big(e_1, e_2, e_3\big)$. On a $f(e_1) = f(1,0,0) = (-1,1)$, $f(e_2) = f(0,1,0) = (1,2)$ et $f(e_3) = f(0,0,1) = (0,1)$. La matrice de f dans les bases $\mathfrak{B}_3$ et $\mathfrak{B}_2$ s'écrit donc

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Rappelons que $\mathfrak{B}_2 = \big(e_1', e_2'\big)$. On a $e_1' = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$ et $e_2' = \frac{1}{2}(v_1 - v_2)$, donc $f(e_1) = (-1,1) = -e_1' + e_2' = -v_2$. De même, on a $f(e_2) = (1,2) = e_1' + 2e_2' = \frac{3}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2$ et $f(e_3) = (0,1) = e_2' = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2$. La matrice de f dans les bases $\mathfrak{B}_3$ et $\mathfrak{V}$ s'écrit donc

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Remarque : notons Q la matrice de changement de base de $\mathfrak{B}_2$ à $\mathfrak{V}$ (elle s'écrit $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$). Alors on a $B = Q^{-1}A$.

(iii) Les coordonnées de $f(x,y,z)$ dans la base $\mathfrak{V}$ sont données par le produit $B.\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ (où B est la matrice de f dans les bases $\mathfrak{B}_3$ et $\mathfrak{V}$ calculée dans la question précédente). On applique ceci à u_1, u_2 et u_3, on trouve $f(u_1) = \frac{5}{2}v_1 - \frac{5}{2}v_2$, $f(u_2) = \frac{1}{2}v_1 - \frac{3}{2}v_2$ et $f(u_3) = -v_1 - v_2$. La matrice de f dans les bases $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ s'écrit donc

$$C = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

Remarques :

- On peut calculer $f(u_1) = (0,5)$, $f(u_2) = (-1,2)$ et $f(u_3) = (-2,0)$ dans la base canonique et calculer leurs coordonnées dans la base $\mathfrak{V}$ comme dans la question précédente, mais c'est plus long.
- Notons P la matrice de changement de base de $\mathfrak{B}_3$ à $\mathfrak{U}$ (elle s'écrit $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$). Alors on a $C = BP$, c'est d'ailleurs précisément le calcul qu'on a fait pour calculer C.

Correction 175 1. Soit $x \in E$, on a $p\big(x - p(x)\big) = p(x) - p(p(x)) = (p - p^2)(x) = 0$ vu que $p^2 = p$. On a donc $x - p(x) \in \text{Ker}(p)$.
Si $x \in E$, on a $x = (x - p(x)) + p(x)$. Comme $x - p(x) \in \text{Ker}(p)$ d'après ce qui précède et $p(x) \in \Im(p)$, on a $x \in \text{Ker}(p) + \Im(p)$. On a donc $E = \text{Ker}(p) + \Im(p)$.

2. Soit $x \in \text{Ker}(p) \cap \Im(p)$. Comme $x \in \Im(p)$, il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$. Par ailleurs, on a $x \in \text{Ker}(p)$,

donc $p(x) = 0$, soit $p(p(y)) = 0$. Comme $p^2 = p$, on a $p(p(y)) = p(y) = x$, d'où $x = 0$. On a donc $\text{Ker}(p) \cap \Im(p) = \{0\}$. Comme on sait, d'après la question précédente, que

$E = \mathrm{Ker}(p) + \Im(p)$ on a $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \Im(p)$.
Soit $x \in E$. Comme $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \Im(p)$, on peut écrire, de façon *unique*, $x = x' + x''$ avec $x' \in \mathrm{Ker}(p)$ et $x'' \in \Im(p)$. Comme $x' \in \mathrm{Ker}(p)$, on a $p(x') = 0$. Comme $x'' \in \Im(p)$, il existe $y \in E$ tel que $x'' = p(y)$. On a alors $p(x'') = p(p(y)) = p(y) = x''$ (car $p^2 = p$). On a donc $p(x) = p(x') + p(x'') = x''$. L'application p associe au vecteur x sa composante x'' dans $\Im(p)$: c'est la projection sur $\Im(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Correction 176 1. Notons A la matrice $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ de f. La matrice de f^2 dans la base canonique est A^2. On a $A^2 = A$, donc $f^2 = f$. L'endomorphisme f est donc la projection de $\mathbb{R}^3$ sur $\Im(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.
On a $(x, y, z) \in \Im(f)$ si et seulement si $(\exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3)\ f(\alpha, \beta, \gamma) = (x, y, z)$. Cela équivaut à

$$
\begin{aligned}
& (\exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3) \quad \begin{cases} 5\alpha & -2\beta & +\gamma & = 6x & (L1) \\ -2\alpha & +2\beta & +2\gamma & = 6y & (L2) \\ \alpha & +2\beta & +5\gamma & = 6z & (L3) \end{cases} \\
\iff & (\exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3) \quad \begin{cases} \alpha & +2\beta & +5\gamma & = & 6z & (L3) \\ & 6\beta & +12\gamma & = & 6y + 12z & (L2) + 2(L3) \\ & -12\beta & -24\gamma & = & 6x - 30z & (L1) - 5(L3) \end{cases} \\
\iff & (\exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3) \quad \begin{cases} \alpha & +2\beta & +5\gamma & = & 6z \\ & \beta & +2\gamma & = & y + 2z \\ & & 0 & = & 6x + 12y - 6z \end{cases} \\
\iff & x + 2y - z = 0.
\end{aligned}
$$

On a donc $\Im(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - z = 0\}$.
D'après le calcul qui précède, on a $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si

$$
\begin{aligned}
\begin{cases} \alpha & +2\beta & +5\gamma & = 0 \\ & \beta & +2\gamma & = 0 \end{cases} \quad & \iff \quad \begin{cases} \alpha & & +\gamma & = 0 \\ & \beta & +2\gamma & = 0 \end{cases} \\
& \iff \quad (\alpha, \beta, \gamma) = (-\gamma, -2\gamma, \gamma) = -\gamma(1, 2, -1).
\end{aligned}
$$

On a donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{vect}\{(1, 2, -1)\}$.
L'endomorphisme f est donc la projection sur le plan d'équation $x + 2y - z = 0$ parallèlement à la droite engendrée par le vecteur $(1, 2, -1)$.

(b) Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan P d'équation $x + y + z = 0$ parallèlement à la droite D engendrée par le vecteur $v_0 = (1, 2, -2)$, et B sa matrice dans la base canonique. Le plan P et la droite D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ (parce que $v_0 \notin P$) :

tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de façon unique $u = u' + u''$ avec $u' \in D$ et $u'' \in P$. On a alors $s(u) = -u' + u''$. L'endomorphisme s est donc caractérisé par les deux propriétés suivantes : $s(u)+u = 2u'' \in P$ et $u-s(u) = 2u' \in D$. On a $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $s(u) = u+\lambda v_0$ et $s(u)+u = 2u+\lambda v_0 \in P$. Si $u = (x, y, z)$, on a $2u+\lambda v_0 = (2x+\lambda, 2y+2\lambda, 2z-2\lambda)$ et donc $2x+\lambda+2y+2\lambda+2z-2\lambda = 0$, soit $\lambda = -2(x+y+z)$. On a donc $s(u) = u-2(x+y+z)v_0$. En particulier, on a $s(1, 0, 0) = (-1, -4, 4)$, $s(0, 1, 0) = (-2, -3, 4)$ et $s(0, 0, 1) = (-2, -4, 5)$. On a donc

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -4 & -3 & -4 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Correction 177 Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a $(x, y, z, t) \in \mathrm{Ker}(f_\alpha)$ si et seulement si

$$(S_\alpha) \qquad \begin{cases} x & +\alpha y & & +(\alpha-1)t & = 0 & (L1) \\ & -y & +z & +\alpha t & = 0 & (L2) \\ x & & +\alpha z & +t & = 0 & (L3) \end{cases}$$

On applique la méthode du pivot :

$$(S_\alpha) \iff \begin{cases} x & +\alpha y & & +(\alpha-1)t & = 0 & (L1) \\ & -y & +z & +\alpha t & = 0 & (L2) \\ & & & (\alpha^2+\alpha-2)t & = 0 & (L1)+\alpha(L2)-(L3) \end{cases}.$$

On a $\alpha^2 + \alpha - 2 = (\alpha - 1)(\alpha + 2)$.
<u>Premier cas</u> : $\alpha \notin \{-2, 1\}$. On a $\alpha^2 + \alpha - 2 \neq 0$ donc

$$\begin{aligned} (S_\alpha) \iff & \begin{cases} x & +\alpha y & & = 0 \\ & y & -z & = 0 \\ & & t & = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x & +\alpha z & & = 0 \\ y & -z & & = 0 \\ & & t & = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

On a donc $(x, y, z, t) = (-\alpha z, z, z, 0) = z(-\alpha, 1, 1, 0)$, soit $\mathrm{Ker}(f_\alpha) = \mathrm{vect}\{(-\alpha, 1, 1, 0)\}$. D'après le théorème noyau-image appliqué à f_α, on a $\dim_{\mathbb{R}}(\Im(f_\alpha)) = 4 - \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(f_\alpha)) = 3$. On a donc $\Im(f_\alpha) = \mathbb{R}^3$ et f_α est de rang 3.
<u>Deuxième cas</u> : $\alpha = -2$. On a

$$(S_{-2}) \iff \begin{cases} x & -2y & & -3t & = 0 \\ & y & -z & +2t & = 0 \end{cases}.$$

On a donc $(x, y, z, t) = (2y+3t, y, y+2t, t) = y(2, 1, 1, 0)+t(3, 0, 2, 1)$: la famille $\big((2, 1, 1, 0), (3, 0, 2, 1)\big)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f_{-2})$. En particulier, on a $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(f_{-2})) = 2$. D'après le théorème noyau-image appliqué à f_{-2}, on a $\dim_{\mathbb{R}}(\Im(f_{-2})) = 4 - \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(f_{-2})) = 2$: f_{-2} est de rang 2. Les deux premières colonnes de la matrice de f_{-2} sont linéairement indépendantes : la famille $\big((1, 0, 1), (2, 1, 0)\big)$ est une base de $\Im(f_{-2})$.
<u>Troisième cas</u> : $\alpha = 1$. On a

$$(S_1) \iff \begin{cases} x & +y & & & = 0 \\ & y & -z & -t & = 0 \end{cases}.$$

On a donc $(x, y, z, t) = (-y, y, y-t, t) = y(-1, 1, 1, 0)+t(0, 0, -1, 1)$: la famille $\big((-1, 1, 1, 0), (0, 0, -1, 1)\big)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f_1)$. En particulier, on a $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(f_1)) = 2$. D'après le théorème noyau-image appliqué à f_1, on a $\dim_{\mathbb{R}}(\Im(f_1)) = 4 - \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(f_1)) = 2$: f_1 est de rang 2. Les deux premières colonnes de la matrice de f_1 sont linéairement indépendantes : la famille $\big((1, 0, 1), (1, -1, 0)\big)$ est une base de $\Im(f_1)$.

Correction 178 1. Soit $x \in \Im(u)$: il existe $y \in V$ tel que $x = u(y)$. On a donc $u(x) = u^2(y) = 0$ (vu que $u^2 = 0$) *i.e.* $x \in \mathrm{Ker}(u)$. On a donc $\Im(u) \subseteq \mathrm{Ker}(u)$.
D'après le théorème noyau-image appliqué à u, on a $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(u)) + \dim_{\mathbb{K}}(\Im(u))$. Comme $\Im(u) \subseteq \mathrm{Ker}(u)$, on a $\dim_{\mathbb{K}}(\Im(u)) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(u))$. On a donc $3 = \dim_{\mathbb{K}}(V) \leqslant 2\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(u))$ *i.e.* $\frac{3}{2} \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(u)) \leqslant 3$ soit $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(u)) \in \{2, 3\}$. Comme $u \neq 0$, on a $\mathrm{Ker}(u) \neq V$ donc $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(u)) \neq 3$. On a donc $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(u)) = 2$.

2. L'énoncé demande de montrer qu'il existe une base $\big(v_1, v_2, v_3\big)$ de V telle que $u(v_1) = v_2$, $u(v_2) = u(v_3) = 0$.
Il suffit pour cela de choisir $v_1 \in V$ tel que $u(v_1) \neq 0$ (c'est possible vu que $u \neq 0$) et de poser $v_2 = u(v_1)$. D'après la question (a), on a $v_2 \in \mathrm{Ker}(u)$. Comme $v_2 \neq 0$ et $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(u)) = 2$, on peut compléter la famille libre $\{v_2\}$ de $\mathrm{Ker}(u)$ en une base $\big(v_2, v_3\big)$ de $\mathrm{Ker}(u)$. Par construction, on a $u(v_3) = 0$.
Il reste à montrer que la famille $\mathcal{V} = \big(v_1, v_2, v_3\big)$ ainsi construite est une base. Comme V est de dimension 3, il suffit de vérifier qu'elle est libre. Supposons que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$. En appliquant u, on tire $\lambda_1 u(v_1) = 0$ (car $u(v_2) = u(v_3) = 0$). Comme $u(v_1) \neq 0$, on a $\lambda_1 = 0$ et donc $\lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$. Comme $\big(v_2, v_3\big)$ est une base de $\mathrm{Ker}(u)$, on a $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et la famille $\mathcal{V}$ est bien une base de V.

Correction 179 Soient $(e_1, f_1), (e_2, f_2) \in E \times F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $(e_1, f_1) + \lambda(e_2, f_2) = (e_1 + \lambda e_2, f_1 + \lambda f_2)$ donc $\psi\big((e_1, f_1) + \lambda(e_2, f_2)\big) = \big(e_1 + \lambda e_2\big) - \big(f_1 + \lambda f_2\big) = e_1 - f_1 + \lambda(e_2 - f_2)$ soit $\psi\big((e_1, f_1) + \lambda(e_2, f_2)\big) = \psi(e_1, f_1) + \lambda\psi(e_2, f_2)$: l'application ψ est bien linéaire.
L'image de ψ est composée des éléments de V qui peuvent s'écrire comme la somme d'un élément de E et d'un élément de F. On a donc $\Im(\psi) = E + F$.
Soit $(e, f) \in \mathrm{Ker}(\psi)$. On a $e - f = 0$ *i.e.* $e = f$. Comme $e \in E$ et $f \in F$, on a $e \in E \cap F$ et donc $(e, f) = (e, e) \in \{(x, x),\ x \in E \cap F\}$. Réciproquement, si $x \in E \cap F$, on a $\psi(x, x) = x - x = 0$ donc $(x, x) \in \mathrm{Ker}(\psi)$. On a donc $\mathrm{Ker}(\psi) = \{(x, x),\ x \in E \cap F\}$.
Soit $\big(e_1, ..., e_n\big)$ (resp. $\big(f_1, ..., f_p\big)$) une base de E (resp. de F). Alors la famille $\big((e_1, 0), ..., (e_n, 0), (0, f_1), ...$ est une base de $E \times F$ (parce qu'on a $(e, f) = (e, 0) + (0, f)$ dans $E \times F$). On a donc $\dim_{\mathbb{K}}(E \times F) = \dim_{\mathbb{K}}(E) + \dim_{\mathbb{K}}(F)$.
D'après le théorème noyau-image appliqué à ψ, on a $\dim_{\mathbb{K}}(E \times F) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(\psi)) + \dim_{\mathbb{K}}(\Im(\psi))$, soit $\dim_{\mathbb{K}}(E) + \dim_{\mathbb{K}}(F) = \dim_{\mathbb{K}}(E + F) + \dim_{\mathbb{K}}(E \cap F)$ d'après ce qui précède.

Correction 196 Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \sin^n(x)$ est définie et continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, I_n est donc bien définie.
2. Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \sin^{n+1}(x) \leqslant \sin^n(x)$.
Par théorème de comparaison des intégrales, on obtient donc $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$.
3. On calcule I_{n+2} par une intégration par parties, en posant :
$$\begin{array}{rr} u'(x) = \sin(x) & v(x) = \sin^{n+1}(x) \\ u(x) = -\cos(x) & v'(x) = (n+1)\cos(x)\sin^n(x) \end{array}$$
On obtient :
$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x)\,dx \\ &= [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x)\,dx \\ &= \big[-\cos(x)\sin^{n+1}(x)\big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin^n(x)\,dx \end{aligned}$$

$\left[-\cos(x)\sin^{n+1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$ et comme $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(x))\sin^n(x)\,dx \\ &= (n+1)\,(I_n - I_{n+2}) \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit aussi $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

De plus $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.
Donc si n est pair, $I_n = \frac{(n-1)(n-3)...1}{n(n-2)...2}\frac{\pi}{2}$
et si n est impair, $I_n = \frac{(n-1)(n-3)...2}{n(n-2)...3}$.

4. La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est définie et dérivable de $[0,\frac{\pi}{2}]$ dans $[0,1]$, on peut donc effectuer le changement de variable $u = \cos(x)$ sur [0,1].
On a alors $du = -\sin(x)dx$ et comme $\cos^2(x) - 1 = -\sin^2(x)$, on obtient :

$$\int_0^1 (u^2-1)^n du = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(x)-1)^n \sin(x)\,dx = (-1)^{n+1} I_{2n+1}.$$

Correction 197 1. D'après le théorème de décomposition des fractions rationnelles en éléments simples :

$$R(X) = \frac{4X}{(1+X)^2(1+X^2)} = \frac{a}{1+X} + \frac{b}{(1+X)^2} + \frac{cX+d}{1+X^2}.$$

Pour trouver les coefficients a, b, c et d, il y a plusieurs possibilités, par exemple :
– Si on multiplie $R(X)$ par $(1+X)^2$ puis on fait $X=-1$, on obtient $b=-2$.
– Si on multiplie par X et qu'on fait tendre X vers $+\infty$, on a $a+c=0$
– Si on calcule $R(0)$, on a $0 = a+b+d$.
– Enfin, si on calcule $R(1)$, on obtient $\frac{1}{2} = \frac{a}{2}+\frac{b}{4}+\frac{c+d}{2}$, c'est à dire $1 = a+\frac{b}{2}+c+d$
Comme $a+c=0$ et $b=-2$, la dernière équation nous donne $d=2$, donc $a=0$ d'après la troisième équation et par conséquent $c=0$. On a finalement :

$$R(X) = \frac{-2}{(1+X)^2} + \frac{2}{1+X^2}$$

2. Le dénominateur de f s'annule si et seulement si $\sin(x) = -1$, c'est à dire si et seulement si $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\quad k \in \mathbb{N}$. Donc f est bien définie et continue sur $I =]-\frac{\pi}{2},\pi[$. f admet donc des primitives sur I, définies à une constante près.

3. La fonction $\varphi : x \mapsto \tan(\frac{x}{2})$ est définie, dérivable sur I et sa dérivée ne s'annulle pas : $\varphi'(x) = \frac{1}{2}(1+\tan^2(\frac{x}{2}))$. On peut donc effectuer le changement de variable $u = \tan(\frac{x}{2})$. Alors :

$$dx = \frac{2}{1+u^2}du$$

et

$$\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{\frac{2u}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}} \frac{2du}{1+u^2} \\ &= \int \frac{2u}{1+u^2+2u} \frac{2du}{1+u^2} \\ &= \int \frac{4u}{(1+u)^2(1+u^2)} du \\ &= \int R(u)du\end{aligned}$$

On utilise alors la décomposition en éléments simples obtenue à la question **a)** :

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \left(\frac{-2}{(1+u)^2} + \frac{2}{1+u^2} \right) du \\ &= \frac{2}{1+u} + 2\arctan(u) + C \\ &= \frac{2}{1+\tan(\frac{x}{2})} + 2\arctan(\tan(\frac{x}{2})) + C\end{aligned}$$

où C est une constante réelle.
Comme $x \in]-\frac{\pi}{2}, \pi[$, $\frac{x}{2} \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$, donc $\arctan(\tan(\frac{x}{2})) = \frac{x}{2}$. D'où

$$\int f(x)dx = \frac{2}{1+\tan(\frac{x}{2})} + x + C$$

Correction 198 1. On désigne les trois intervalles par :

$$I_1 =]-\infty, 0[, \quad I_2 =]0, 2[, \quad I_3 =]2, +\infty[.$$

Soit $k \in \{1, 2, 3\}$. Pour x appartenant à I_k, l'équation homogène (E_0) peut se récrire

$$y' + \frac{2(x+1)}{x(x-2)} y = 0,$$

dont l'ensemble des solutions sur I_k est constitué des fonctions

$$\begin{aligned} y : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto C_k \cdot \exp(-F(x)) \end{aligned}$$

où F est une primitive de la fonction rationnelle $f : x \mapsto \frac{2(x+1)}{x(x-2)}$ sur I_k, et C_k un réel quelconque. Pour trouver F, on commence par décomposer en éléments simples la fraction rationnelle, en cherchant deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ on ait

$$\frac{2(x+1)}{x(x-2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2}. \tag{1}$$

On peut procéder par exemple par substitution : en multipliant l'égalité (1) par x, on obtient

$$\frac{2(x+1)}{x-2} = a + \frac{bx}{x-2}.$$

Si on prend $x = 0$ dans cette nouvelle égalité, on aura $a = 2/(-2) = -1$. De même, en multipliant l'égalité (1) par $(x-2)$ et en prenant $x = 2$, on obtiendra $b = 2(3)/2 = 3$. On en déduit la relation valable pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

$$\frac{2(x+1)}{x(x-2)} = -\frac{1}{x} + \frac{3}{x-2}.$$

Il est maintenant aisé de trouver les primitives de f qui sont

$$\int -\frac{1}{x} + \frac{3}{x-2}\mathrm{d}x = -\ln|x| + 3\ln|x-2| + c$$

où c est une constante réelle. On choisit

$$F(x) = -\ln|x| + 3\ln|x-2|.$$

Donc l'ensemble $\mathcal{S}_k^{(E_0)}$ des solutions sur I_k de l'équation homogène est l'ensemble des fonctions y définies sur I_k par

$$y(x) = C_k \cdot \exp(-F(x)) = C_k \cdot \exp\left(\ln|x| - 3\ln|x-2|\right) = C_k \frac{|x|}{|x-2|^3}.$$

Les signes de x et de $(x-2)$ sont constants sur I_k. Pour $x \in I_1$ ou $x \in I_2$, on a

$$\frac{|x|}{|x-2|^3} = \frac{x}{(x-2)^3},$$

et pour $x \in I_2$, on a

$$\frac{|x|}{|x-2|^3} = -\frac{x}{(x-2)^3}.$$

En posant $D_1 = C_1, D_2 = -C_2$ et $D_3 = C_3$, on peut récrire les solutions sans valeurs absolues. Finalement, sur I_k (k=1,2 ou 3), l'ensemble des solutions est donné par

$$\mathcal{S}_k^{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{rl} y : I_k \to \mathbb{R} & \\ x \mapsto D_k \frac{x}{(x-2)^3} & ; \; D_k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

Si y_3 est une solution de (E_0) sur I_3, et que la constante D_3 n'est pas nulle, alors

$$\lim_{x \to 2^+} |y_3(x)| = +\infty.$$

De même, si y_2 est une solution de (E_0) sur I_2, et que la constante D_2 n'est pas nulle, alors

$$\lim_{x \to 2^-} |y_2(x)| = +\infty.$$

Les solutions non nulles de (E_0) définies sur I_2 et I_3 divergent quand x tend vers 2.
En revanche, une solution y_2 de (E_0) sur I_2 a une limite à droite en 0 et

$$\lim_{x \to 0^+} y_2(x) = 0.$$

De même, si $y_1 \in \mathcal{S}_1^{(E_0)}$, $\lim_{x \to 0^-} y_1(x) = 0$. On peut donc espérer pouvoir prolonger des solutions en 0 pour obtenir des solutions de (E_0) sur $]-\infty, 2[$. À partir de deux solutions

$$\begin{array}{rl} y_1 : I_1 \to \mathbb{R} \\ x \mapsto D_1 \frac{x}{(x-2)^3} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} y_2 : I_2 \to \mathbb{R} \\ x \mapsto D_2 \frac{x}{(x-2)^3} \end{array}$$

on définit une fonction y sur $]-\infty, 2[$ par

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) & \text{si } x \in I_1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ y_2(x) & \text{si } x \in I_2. \end{cases}$$

y_1 et y_2 sont continues et dérivables sur I_1 et I_2 respectivement. Le fait que y_1 et y_2 tendent vers 0 quand x tend vers 0 montrent que y est continue en 0. Donc y est continue sur tout son intervalle de définition. En revenant à la définition, on peut montrer que y admet des nombres dérivés à gauche et à droite en 0, et que

$$y'_g(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{y_1(h) - 0}{h} = -\frac{D_1}{8} \qquad y'_d(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{y_2(h) - 0}{h} = -\frac{D_2}{8}$$

La fonction y est donc dérivable en 0 si et seulement si $D_1 = D_2$. Dans ce cas, y est dérivable sur son ensemble de définition et satisfait en tout point de cet intervalle l'équation (E_0). On peut donc recoller en 0 des solutions sur I_1 et I_2 à la condition que $D_1 = D_2$.

2. Soit $k = 1, 2$ ou 3. On cherche une solution particulière de l'équation (E) sur I_k par la méthode de la variation de la constante sous la forme

$$y(x) = D_k(x) \frac{x}{(x-2)^3}.$$

La dérivée de la fonction D_k doit vérifier

$$D'_k(x) = \frac{(6x-1)}{x(x-2)} \frac{(x-2)^3}{x} = 6x - 25 + \frac{28}{x} - \frac{4}{x^2}.$$

On peut donc prendre pour D_k la fonction donnée par

$$D_k(x) = 3x^2 - 25x + 28 \ln|x| + \frac{4}{x}.$$

Une solution particulière y sur I_k de l'équation différentielle (E) est donc définie par

$$y(x) = \frac{x}{(x-2)^3} \left(3x^2 - 25x + 28 \ln|x| + \frac{4}{x} \right).$$

Les solutions de (E) sur l'intervalle I_k sont la somme de la solution particulière ci-dessus et d'une solution générale de l'équation homogène associée (E_0).
L'ensemble $\mathcal{S}_k^{(E)}$ des solutions de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle I_k est donc

$$\mathcal{S}_k^{(E)} = \left\{ \begin{array}{l} y : I_k \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto \frac{x}{(x-2)^3} \left(3x^2 - 25x + 28 \ln|x| + \frac{4}{x} + A_k \right) \end{array} ; \ A_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Correction 199 1. En faisant la somme et la différence des deux équations du système différentiel, on obtient le système d'équations différentielles vérifiées par u et v :

$$\begin{cases} u'' + \omega^2 u &= 0 \\ v'' + 2v' + 3\omega^2 v &= 0. \end{cases}$$

2. Résolvons d'abord l'équation différentielle vérifiée par u. L'équation caractéristique est

$$r^2 + \omega^2 = 0.$$

Si $\omega = 0$, alors 0 est racine double de l'équation caractéristique et l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est

$$\mathcal{S}^u = \left\{ \begin{array}{l} u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \qquad t \mapsto At + B \end{array} ; (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Si $\omega \neq 0$, l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées $i\omega$ et $-i\omega$. Dans ce cas l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}^u = \left\{ \begin{array}{l} u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \qquad t \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \end{array} ; (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle vérifiée par v est

$$r^2 + 2r + 3\omega^2 = 0.$$

Si $|\omega| < \frac{1}{\sqrt{3}}$, le discriminant du trinôme est strictement positif. L'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes :

$$-1 + \sqrt{1 - 3\omega^2} \text{ et } -1 - \sqrt{1 - 3\omega^2}.$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est

$$\mathcal{S}^v = \left\{ \begin{array}{l} v : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \qquad t \mapsto e^{-t}(Ce^{t\sqrt{1-3\omega^2}} + De^{-t\sqrt{1-3\omega^2}}) \end{array} ; (C, D) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Si $|\omega| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, -1 est racine double de l'équation caractéristique. L'ensemble des solutions est alors

$$\mathcal{S}^v = \left\{ \begin{array}{l} v : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \qquad t \mapsto e^{-t}(Ct + D) \end{array} ; (C, D) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Si enfin $|\omega| > \frac{1}{\sqrt{3}}$, l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées

$$-1 + i\sqrt{3\omega^2 - 1} \text{ et } -1 - i\sqrt{3\omega^2 - 1}.$$

L'ensemble $\mathcal{S}^v$ est alors égal à

$$\mathcal{S}^v = \left\{ \begin{array}{l} v : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \qquad t \mapsto e^{-t}\left(C\cos(t\sqrt{3\omega^2 - 1}) + D\sin(t\sqrt{3\omega^2 - 1})\right) \end{array} ; (C, D) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

3. Comme $y = (u + v)/2$ et $z = (u - v)/2$, on peut déterminer l'ensemble des solutions du système (S) en fonction de ω. Il est constitué des couples de fonctions (y, z) définies sur $\mathbb{R}$ par :
   - si $\omega = 0$,

   $$\begin{array}{l} y(t) = A + tB + e^{-t}\left(Ce^t + De^{-t}\right) \\ z(t) = A + tB - e^{-t}\left(Ce^t + De^{-t}\right) \quad ; \quad (A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4, \end{array}$$

   ou encore

   $$\begin{array}{l} y(t) = \hat{A} + tB + De^{-2t} \\ z(t) = \hat{C} + tB - De^{-2t} \quad ; \quad (\hat{A}, B, \hat{C}, D) \in \mathbb{R}^4, \end{array}$$

   où on a posé $\hat{A} = A + C$ et $\hat{C} = A - C$.

- Si $0 < |\omega| < \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$$\begin{aligned} y(t) &= A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + e^{-t}\left(Ce^{t\sqrt{1-3\omega^2}} + De^{-t\sqrt{1-3\omega^2}}\right) \\ z(t) &= A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) - e^{-t}\left(Ce^{t\sqrt{1-3\omega^2}} + De^{-t\sqrt{1-3\omega^2}}\right) \quad ; \quad (A,B,C,D) \in \mathbb{R}^4, \end{aligned}$$

- si $|\omega| = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$$\begin{aligned} y(t) &= A\cos(\frac{t}{\sqrt{3}}) + B\sin(\frac{t}{\sqrt{3}}) + e^{-t}(Ct+D) \\ z(t) &= A\cos(\frac{t}{\sqrt{3}}) + B\sin(\frac{t}{\sqrt{3}}) - e^{-t}(Ct+D) \quad ; \quad (A,B,C,D) \in \mathbb{R}^4, \end{aligned}$$

- et enfin si $|\omega| > \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$$\begin{aligned} y(t) &= A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + e^{-t}\left(C\cos(t\sqrt{3\omega^2-1}) + D\sin(t\sqrt{3\omega^2-1})\right) \\ z(t) &= A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) - e^{-t}\left(C\cos(t\sqrt{3\omega^2-1}) + D\sin(t\sqrt{3\omega^2-1})\right) \;\; ; \; (A,B,C,D) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Correction 200 L'équation différentielle modélisant le refroidissement d'un liquide est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre. La solution générale de cette équation différentielle s'écrit

$$T(t) = T_{ext} + Ae^{-kt}$$

où A est une constante. Si $T(0) = T_0$, alors en faisant $t = 0$ dans l'expression de $T(t)$, on obtient $A = T_0 - T_{ext}$. On tire donc de la résolution de l'équation différentielle le fait suivant : si un liquide est initialement à la température T_0, alors au bout d'un temps t, il est à la température

$$T(t) = T_{ext} + (T_0 - T_{ext})e^{-kt}.$$

Soit T_c la température initiale du café. Étudions d'abord la technique d'Alice. Alice attend d'abord 5 minutes. La température du café au bout de 5 minutes est, d'après la formule ci-dessus

$$T(5) = T_{ext} + (T_c - T_{ext})e^{-5k}.$$

Après le mélange avec le lait, la température du liquide à l'intérieur de la tasse est

$$T_A = \frac{(T_{ext} + (T_c - T_{ext})e^{-5k})V_{\text{café}} + T_{ext}V_{\text{lait}}}{V_{\text{café}} + V_{\text{lait}}} = T_{ext} + (T_c - T_{ext})\frac{V_{\text{café}}}{V_{\text{café}} + V_{\text{lait}}}e^{-5k}.$$

Analysons maintenant la technique de Bernard. Il mélange d'abord le lait avec le café de sa tasse. Il obtient un liquide à la température

$$\frac{T_cV_{\text{café}} + T_{ext}V_{\text{lait}}}{V_{\text{café}} + V_{\text{lait}}}.$$

Il attend ensuite 5 minutes pour obtenir un liquide à la température

$$T_B = T_{ext} + \left(\frac{T_cV_{\text{café}} + T_{ext}V_{\text{lait}}}{V_{\text{café}} + V_{\text{lait}}} - T_{ext}\right)e^{-5k} = T_{ext} + (T_c - T_{ext})\frac{V_{\text{café}}}{V_{\text{café}} + V_{\text{lait}}}e^{-5k}.$$

On a donc $T_A = T_B$. Finalement, les deux techniques mènent à la même température. Au moment de la dégustation, les cafés d'Alice et de Bernard sont aussi chauds l'un que l'autre.

Correction 201 Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

$$AM = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad MA = \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix}$$

$$AM = MA \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+c & = & a+b \\ b+d & = & a+b \\ a+c & = & c+d \\ b+d & = & c+d \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & d \\ b & = & c \end{array} \right.$$

L'ensemble des matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$ est donc $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Correction 202 Soit a le nombre de tonnes d'alliage A, b le nombre de tonnes d'alliage B et c le nombre de tonnes d'alliage C. On mélange ces 3 quantités. Le nombre de tonnes de fer contenu dans le mélange est $0,1a + 0,3b + 0,8c$. On veut obtenir 100 tonnes d'alliage contenant 34% de fer, donc contenant 34 tonnes de fer, il faut donc $0,1a + 0,3b + 0,8c = 34$. On fait de même pour le nickel et le cuivre, ce qui donne le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{llllll} 0,1a & +0,3b & +0,8c & = & 34 \\ 0,2a & +0,4b & +0,1c & = & 28 \\ 0,7a & +0,3b & +0,1c & = & 38 \end{array} \right.$$

On multiplie les 3 lignes par 10 :

$$\left\{ \begin{array}{llllll} a & +3b & +8c & = & 340 & L1 \\ 2a & +4b & +c & = & 280 & L2 \\ 7a & +3b & +c & = & 380 & L3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{llllll} a & +3b & +8c & = & 340 & L1 \\ & 2b & +15c & = & 400 & 2L1 - L2 \rightarrow L2 \\ & 18b & +55c & = & 2000 & 7L1 - L3 \rightarrow L3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{llllll} a & +3b & +8c & = & 340 & \\ & 2b & +15c & = & 400 & L2 \\ & & 80c & = & 1600 & 9L2 - L3 \end{array} \right.$$

On trouve $c = 20$, $b = 50$, $a = 30$. Il faut donc mélanger 30 tonnes d'alliage A, 50 tonnes d'alliage B et 20 tonnes d'alliage C pour réaliser la commande.

Peut-on produire le deuxième alliage ? Remarquons tout d'abord que si on sait produire 100 tonnes de cet alliage alors on sait en produire n'importe quelle quantité par proportionnalité, et réciproquement. On va donc chercher si on peut produire 100 tonnes de cet alliage (on peut aussi raisonner sur les proportions). On obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{llllll} 0,1a & +0,3b & +0,8c & = & 69 \\ 0,2a & +0,4b & +0,1c & = & 23 \\ 0,7a & +0,3b & +0,1c & = & 8 \end{array} \right.$$

On remarque que seul le second membre a changé, on peut donc reprendre les mêmes opérations sur les lignes pour diagonaliser le système, ce qui donne :

$$\left\{ \begin{array}{lllll} a & +3b & +8c & = & 690 \\ & 2b & +15c & = & 1150 \\ & & 80c & = & 2600 \end{array} \right.$$

On trouve $c = 70$, $b = 50$, $a = -20$. On ne peut pas avoir de masse négative, donc cette solution n'est pas acceptable pour le problème posé. On ne peut pas obtenir un alliage contenant 69% de fer, 23% de nickel et 8% de cuivre.
Sans faire de calcul, on peut également remarquer que les alliages A, B, C contiennent tous au moins 10% de cuivre, on ne peut donc pas obtenir un allliage ne contenant que 8% de cuivre.

Correction 203 Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

Pour savoir si B est inversible, on va résoudre le système $BX = Y$, c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{lllcll} x_1 & +x_2 & & = & y_1 & L1 \\ & x_2 & -x_3 & = & y_2 & L2 \\ \alpha x_1 & & -x_3 & = & y_3 & L3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lllcll} x_1 & +x_2 & & = & y_1 & L1 \\ & x_2 & -x_3 & = & y_2 & L2 \\ & -\alpha x_2 & -x_3 & = & y_3 - \alpha y_1 & L3 - \alpha L1 \to L3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lllcll} x_1 & +x_2 & & = & y_1 & L1 \\ & x_2 & -x_3 & = & y_2 & L2 \\ & & -(\alpha+1)x_3 & = & y_3 - \alpha y_1 + \alpha y_2 & L3 + \alpha L2 \end{array}\right.$$

• **1er cas : $\boldsymbol{\alpha \neq -1}$**. Alors $\alpha + 1 \neq 0$ et le système est triangulaire, donc il a une unique solution et B est inversible. On obtient :
$x_3 = \frac{1}{\alpha+1}(\alpha y_1 - \alpha y_2 - y_3)$, $x_2 = y_2 + x_3 = \frac{1}{\alpha+1}(\alpha y_1 + y_2 - y_3)$, $x_1 = y_1 - x_2 = \frac{1}{\alpha+1}(y_1 - y_2 + y_3)$.
On trouve $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha+1} & \frac{-1}{\alpha+1} & \frac{1}{\alpha+1} \\ \frac{\alpha}{\alpha+1} & \frac{1}{\alpha+1} & \frac{-1}{\alpha+1} \\ \frac{\alpha}{\alpha+1} & \frac{-\alpha}{\alpha+1} & \frac{-1}{\alpha+1} \end{pmatrix}$.

• **2ème cas : $\boldsymbol{\alpha = -1}$**. Le système ci-dessus devient

$$\left\{\begin{array}{lllcl} x_1 & +x_2 & & = & y_1 \\ & x_2 & -x_3 & = & y_2 \\ & & 0 & = & y_3 + y_1 - y_2 \end{array}\right.$$

Ce système n'a pas une unique solution (selon les valeurs de Y, il a soit une infinité de solutions soit pas de solution), donc B n'est pas inversible.

Correction 208 On raisonne par systèmes équivalents en indiquant les opérations sur les lignes.

$$\text{(S1)} \left\{\begin{array}{llcll} x & +(\lambda+1)y & = & 1 & (L1) \\ \lambda x & +(\lambda+4)y & = & 2 & (L2) \end{array}\right.$$

$$\text{(S1)} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llcll} x & +(\lambda+1)y & = & 1 & (L1) \\ & [\lambda + 4 - \lambda(\lambda+1)]y & = & 2 - \lambda & (L2 - \lambda L1) \end{array}\right.$$

$$\text{(S1)} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llcl} x & +(\lambda+1)y & = & 1 \\ & [4 - \lambda^2]y & = & 2 - \lambda \end{array}\right.$$

$$\text{(S1)} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llcl} x & +(\lambda+1)y & = & 1 \\ & (2-\lambda)(2+\lambda)y & = & 2 - \lambda \end{array}\right.$$

• Si $\lambda \neq 2, -2$ alors $(2-\lambda)(2+\lambda) \neq 0$ et $y = \frac{1}{2+\lambda}$. En remplaçant dans (L1) on trouve $x = 1 - \frac{\lambda+1}{2+\lambda} = \frac{1}{2+\lambda}$. Donc le système (S1) a une unique solution $\left(\frac{1}{2+\lambda}, \frac{1}{2+\lambda}\right)$.

• Si $\lambda = 2$ alors le système devient $\left\{\begin{array}{rrcl} x & +3y & = & 1 \\ & 0 & = & 0 \end{array}\right.$

La dernière ligne disparaît, le système se réduit à une seule ligne. On a $x = 1 - 3y$ et le système (S1) admet une infinité de solutions $\{(1-3y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

• Si $\lambda = -2$ alors le système devient $\left\{\begin{array}{rrcl} x & -y & = & 1 \\ & 0 & = & 4 \end{array}\right.$

La dernière égalité n'est jamais satisfaite donc le système (S1) n'admet aucune solution.

Correction 209 1. On raisonne par systèmes équivalents en indiquant les opérations sur les lignes.

$$\text{(S2)} \left\{\begin{array}{rrrrcll} x & +3y & +4z & +7t & = & b_1 & (L1) \\ x & +y & +z & +t & = & b_2 & (L2) \\ x & +3y & +3z & +2t & = & b_3 & (L3) \\ x & +3y & +4z & +5t & = & b_4 & (L4) \end{array}\right.$$

$$\text{(S2)} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcll} x & +3y & +4z & +7t & = & b_1 & (L1) \\ & -2y & -3z & -6t & = & b_2 - b_1 & (L2 \leftarrow L2 - L1) \\ & & -z & -5t & = & b_3 - b_1 & (L3 \leftarrow L3 - L1) \\ & & & -2t & = & b_4 - b_1 & (L4 \leftarrow L4 - L1) \end{array}\right.$$

On a obtenu un système triangulaire, on le résoud en partant du bas :
• $t = \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_4$,
• $z = b_1 - b_3 - 5t = -\frac{3}{2}b_1 - b_3 + \frac{5}{2}b_4$,
• $y = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 - \frac{3}{2}z - 3t = \frac{5}{4}b_1 - \frac{1}{2}b_2 + \frac{3}{2}b_3 - \frac{9}{4}b_4$,
• $x = b_1 - 3y - 4z - 7t = -\frac{1}{4}b_1 + \frac{3}{2}b_2 - \frac{1}{2}b_3 + \frac{1}{4}b_4$.

On a montré que le système (S2) a une unique solution quels que soient les nombres b_1, b_2, b_3, b_4, qui est $\left\{\frac{1}{4}b_1 + \frac{3}{2}b_2 - \frac{1}{2}b_3 + \frac{1}{4}b_4, \frac{5}{4}b_1 - \frac{1}{2}b_2 + \frac{3}{2}b_3 - \frac{9}{4}b_4, -\frac{3}{2}b_1 - b_3 + \frac{5}{2}b_4, \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_4\right\}$.

2. Le système (S2) est équivalent à l'équation matricielle $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$.

À la question a) on a résolu ce système et on a trouvé :

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} x = & -\frac{1}{4}b_1 & +\frac{3}{2}b_2 & -\frac{1}{2}b_3 & +\frac{1}{4}b_4 \\ y = & \frac{5}{4}b_1 & -\frac{1}{2}b_2 & +\frac{3}{2}b_3 & -\frac{9}{4}b_4 \\ z = & -\frac{3}{2}b_1 & +0b_2 & -b_3 & +\frac{5}{2}b_4 \\ t = & \frac{1}{2}b_1 & +0b_2 & +0b_3 & -\frac{1}{2}b_4 \end{array}\right.$$

donc la matrice A est inversible et les coefficients de x, y, z, t en fonction de b_1, b_2, b_3, b_4 (dans l'ordre) donnent A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{9}{4} \\ -\frac{3}{2} & 0 & -1 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Correction 210 Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$. On a $BM = \begin{pmatrix} 3a+4d & 3b+4e & 3c+4f \\ 2a+3d & 2b+3e & 2c+3f \\ a+d & b+e & c+f \end{pmatrix}$, donc $BM = I_3$ si et seulement si

$$\begin{cases} 3a+4d &= 1 & (L1) \\ 3b+4e &= 0 & (L2) \\ 3c+4f &= 0 & (L3) \\ 2a+3d &= 0 & (L4) \\ 2b+3e &= 1 & (L5) \\ 2c+3f &= 0 & (L6) \\ a+d &= 0 & (L7) \\ b+e &= 0 & (L8) \\ c+f &= 1 & (L9) \end{cases}$$

On voit que les inconnues a, d n'apparaissent que dans les lignes $(L1)$, $(L4)$ et $(L7)$.
De $(L7)$ on déduit que $d = -a$ et en remplaçant dans $(L4)$ on trouve $a = 0$, donc $d = 0$. Mais alors $(L1)$ n'est pas vérifiée, donc le système n'a pas de solution.

Conclusion : il n'existe aucune matrice $M \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ telle que $BM = I_3$.

Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$. On a $NB = \begin{pmatrix} 3a+2b+c & 4a+3b+c \\ 3d+2e+f & 4d+3e+f \end{pmatrix}$,
donc $NB = I_2$ si et seulement si

$$\begin{cases} 3a+2b+c &= 1 & (L1) \\ 4a+3b+c &= 0 & (L2) \\ 3d+2e+f &= 0 & (L3) \\ 4d+3e+f &= 1 & (L4) \end{cases}$$

On remarque que les inconnues a, b, c n'apparaissent que dans $(L1)$ et $(L2)$ et les inconnues d, e, f dans $(L3)$ et $(L4)$.

$$\begin{cases} 3a+2b+c &= 1 & (L1) \\ a+b &= -1 & (L2-L1) \\ 3d+2e+f &= 0 & (L3) \\ d+e &= 1 & (L4-L3) \end{cases} \qquad \begin{cases} 2b+c &= 1-3a \\ b &= -1-a \\ 2e+f &= -3d \\ e &= 1-d \end{cases} \qquad \begin{cases} c &= 3-a \\ b &= -1-a \\ f &= -2-d \\ e &= 1-d \end{cases}$$

Les inconnues principales sont b, c, e, f, les inconnues secondaires sont a, d.

Conclusion : on a une infinité de matrices $N \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $NB = I_2$, qui sont les matrices $N = \begin{pmatrix} a & -1-a & 3-a \\ d & 1-d & -2-d \end{pmatrix}$ pour tous les réels $a, d \in \mathbb{R}$.

Correction 211 1. Par définition de F_λ, la famille $\{u, v, w_\lambda\}$ est génératrice de F_λ. Elle est une base de F_λ si et seulement si elle est libre. Etudions l'indépendance linéaire de $\{u, v, w_\lambda\}$.

Déterminons les triplets de réels (a, b, c) tels que $au + bv + cw_\lambda = 0$, c'est-à-dire ceux qui sont solutions du système

$$(S) \quad \begin{cases} a+b+c=0 \\ -a+b-3c=0 \\ 2a+4c=0 \\ 2a+2b+\lambda c=0 \end{cases}.$$

On applique la méthode du pivot :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ 2b-2c=0 \\ -2b+2c=0 \\ (\lambda-2)c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ b-c=0 \\ (\lambda-2)c=0 \end{cases}$$

Si $(\lambda - 2) \neq 0$, c'est-à-dire $\lambda \neq 2$, (S) est un système de 3 inconnues et de rang 3. Il possède une unique solution qui est $(0, 0, 0)$ ((S) est homogène). Si $\lambda = 2$, (S) est de rang 2. L'ensemble des solutions est $\{(-2c, c, c), c \in \mathbb{R}\}$.

Par conséquent, si $\lambda \neq 2$, la famille $\{u, v, w_\lambda\}$ est libre. Elle forme une base de F_λ.

Si $\lambda = 2$, la famille $\{u, v, w_\lambda\}$ est liée et $-2u + v + w_2 = 0$ (en considérant la solution où $c = 1$). Ainsi, w_2 est combinaison de u et v : la famille $\{u, v\}$ est encore génératrice de F_2. Elle est libre car u et v ne sont pas colinéaires. Donc, $\{u, v\}$ est une base de F_2.

On en déduit immédiatement : $\dim F_\lambda = 3$ si $\lambda \neq 2$; $\dim F_\lambda = 2$ si $\lambda = 2$.

Pour obtenir un système d'équations cartésiennes de F_λ, il suffit de déterminer les conditions de compatibilité du système d'inconnues a, b, c

$$(S') \quad \begin{cases} a + b + c = x \\ -a + b - 3c = y \\ 2a + 4c = z \\ 2a + 2b + \lambda c = t \end{cases}$$

en fonction des paramètres x, y, z, t.

En reprenant les calculs précédents, on obtient :

$$(S') \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = x \\ 2b - 2c = y + x \\ 0 = z - x + y \\ (\lambda - 2)c = t - 2x \end{cases}.$$

Par conséquent, si $\lambda \neq 2$, il y a une seule condition de compatibilité, à savoir $z - x + y = 0$. Ceci est une équation cartésienne de F_λ.

Si $\lambda = 2$, les conditions de compatibilité de F_2 sont $\begin{cases} z - x + y = 0 \\ t - 2x = 0 \end{cases}$. Ceci forme un système d'équations cartésiennes de F_2.

2. On a : $(x, y, z, t) \in G \Leftrightarrow x = -y + 2z - 2t \Leftrightarrow (x, y, z, t) = y(-1, 1, 0, 0) + z(2, 0, 1, 0) + t(-2, 0, 0, 1)$.

   Donc $\{(-1, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (-2, 0, 0, 1)\}$ est une famille génératrice de G. Elle est libre car le système d'équations $a(-1, 1, 0, 0) + b(2, 0, 1, 0) + c(-2, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$, c'est-à-dire $(-a + 2b - 2c, a, b, c) = (0, 0, 0, 0)$, a pour unique solution $(0, 0, 0)$. Ainsi, la famille $\{(-1, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (-2, 0, 0, 1)\}$ est une base de G et G est de dimension 3.

   Un système d'équations paramétriques est : $x = -y + 2z - 2t, y, z, t \in \mathbb{R}$.

3. On obtient un système d'équations cartésiennes de $G \cap F_0$ en rassemblant un système d'équations cartésiennes de G et un de F_0, soit $\begin{cases} x + y - 2z + 2t = 0 \\ z - x + y = 0 \end{cases}$. Ce système est de rang 2 (prendre t comme première inconnue et z comme deuxième). La dimension de $G \cap F_0$ est donc $\dim \mathbb{R}^4 - 2 = 2$: $G \cap F_0$ est bien un plan vectoriel.

4. On sait que : $\dim(G + F_0) = \dim G + \dim F_0 - \dim(G \cap F_0)$. Donc, par ce qui précède, la dimension de $(G + F_0)$ est 4. Comme $G + F_0$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 4, c'est $\mathbb{R}^4$.

   Les sous-espaces G et F_0 ne sont pas supplémentaires puisque leur intersection est un plan.

5. Si F_λ et G sont supplémentaires, la somme de leur dimension est 4. Or ceci n'est jamais le cas d'après a) et b). Il n'existe pas de valeur de λ pour lesquelles G et F_λ soient supplémentaires.

6. Choisissons deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$ parmi ceux de la base canonique qui ne satisfont pas le système d'équations cartésiennes de $G \cap F_0$, par exemple $(0,0,1,0)$ et $(0,0,0,1)$. Posons $H = \mathrm{vect}((0,0,1,0),(0,0,0,1))$. C'est un plan vectoriel d'équations cartésiennes $x = y = 0$. Alors $(G \cap F_0) \cap H$ a pour système d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} 2t - 2z + y + x = 0 \\ z + y - x = 0 \\ y \qquad = 0 \\ x = 0 \end{cases},$$

système homogène à 4 inconnues, de rang 4. Donc $(G \cap F_0) \cap H$ est réduit à 0.
De plus, la somme des dimensions de $(G \cap F_0)$ et de H est 4 : $(G \cap F_0)$ et H sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Correction 212 1. Montrons tout d'abord que la famille $\{A, B, C\}$ est libre.
Soient α, β, γ trois nombres complexes tels que $\alpha A + \beta B + \gamma C = 0_E$, c'est-à-dire tels que
$$\alpha(x-b)(x-c) + \beta(x-c)(x-a) + \gamma(x-a)(x-b) = 0_E$$
ou encore, en développant,
$(\alpha+\beta+\gamma)x^2 - (\alpha(b+c) + \beta(c+a) + \gamma(a+b))x + (\alpha bc + \beta ca + \gamma ab) = 0_E$.
Nécessairement, (α, β, γ) est solution du système homogène à 3 inconnues :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha(b+c) + \beta(c+a) + \gamma(a+b) = 0 \\ \alpha bc + \beta ca + \gamma ab = 0 \end{cases}$$

Résolvons-le par la méthode du pivot.
$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha(b+c) + \beta(c+a) + \gamma(a+b) = 0 \\ \alpha bc + \beta ca + \gamma ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta(a-b) + \gamma(a-c) = 0 \\ \beta c(a-b) + \gamma b(a-c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta(a-b) + \gamma(a-c) = 0 \\ \gamma(b-c)(a-c) = 0 \end{cases}$$
Comme a, b, c sont deux à deux distincts, ce système est de rang 3. Il a pour unique solution $(0,0,0)$.

Donc la famille (A, B, C) est libre. Comme l'espace vectoriel E est de dimension 3, elle forme une base de E.

2. Soit $P(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2$ un élément de E ($p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{C}$). Soit (α, β, γ) ses coordonnées dans la base (A, B, C). On a alors une autre expression de P :
$P(x) = \alpha(x-b)(x-c) + \beta(x-c)(x-a) + \gamma(x-a)(x-b)$.
En reprenant les calculs précédents, on obtient le système (d'inconnues α, β, γ) :
$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = p_2 \\ \alpha(b+c) + \beta(c+a) + \gamma(a+b) = -p_1 \\ \alpha bc + \beta ca + \gamma ab = p_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = p_2 \\ \beta(a-b) + \gamma(a-c) = -p_1 - (b+c)p_2 \\ \gamma(b-c)(a-c) = p_0 + cp_1 + c^2 p_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{P}{(a-} \\ \beta = \frac{P}{(a-b} \\ \gamma = \frac{P}{(b-c} \end{cases}$$
Ainsi,
$P(x) = \frac{P(a)}{(a-b)(a-c)} \cdot (x-b)(x-c) + \frac{P(b)}{(a-b)((c-b)} \cdot (x-c)(x-a) + \frac{P(c)}{(b-c)(a-c)} \cdot (x-a)(x-b)$,
et par suite,

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{P(a)}{(a-b)(a-c)} \cdot \frac{1}{x-a} + \frac{P(b)}{(a-b)(c-b)} \cdot \frac{1}{x-b} + \frac{P(c)}{(b-c)(a-c)} \cdot \frac{1}{x-c}.$$

Correction 213 1. La famille $\{1, X, X^2, X^3\}$ est une base de E, on a donc $\dim_{\mathbb{R}}(E) = 4$.

2. Si $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\delta_a(P+\lambda Q) = (P+\lambda Q)(a) = P(a)+\lambda Q(a)$ soit $\delta_a(P+\lambda Q) = \delta_a(P) + \lambda\delta_a(Q)$. L'application δ_a est donc linéaire.
3. D'après la question précédente, les composantes de φ sont des applications linéaires, il en est donc de même de φ.
   Pour $i \in \{0,1,2,3\}$, on a $\varphi(X^i) = (a_0^i, a_1^i, a_2^i, a_3^i)$. La matrice de φ dans les bases canoniques est donc
   $$\begin{bmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & a_0^3 \\ 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \end{bmatrix}.$$
   Soit $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. On a alors
   $$P(a_0) = P(a_1) = P(a_2) = P(a_3) = 0.$$
   Le polynôme P est de degré $\leqslant 3$ et a quatre racines distinctes : il est nul. On a donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ et φ est injective.
   D'après le théorème noyau-image, on a
   $$\dim_{\mathbb{R}}(E) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(\varphi)) + \dim_{\mathbb{R}}(\Im(\varphi))$$
   donc $\dim_{\mathbb{R}}(\Im(\varphi)) = 4$ d'après la question (a) et ce qui précède. On a donc $\Im(\varphi) = \mathbb{R}^4$ et φ est surjective : c'est un isomorphisme.
4. Soient $i, j \in \{0,1,2,3\}$. Si $i \neq j$, on a $\delta_{a_j}(L_i) = L_i(a_j) = 0$. Par ailleurs, on a $\delta_{a_i}(L_i) = L_i(a_i) = 1$. On a donc
   $$\varphi(L_0) = (1,0,0,0), \quad \varphi(L_1) = (0,1,0,0), \quad \varphi(L_2) = (0,0,1,0) \quad \text{et} \quad \varphi(L_3) = (0,0,0,1).$$
   L'image par φ de la famille $\mathfrak{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Comme φ est un isomorphisme, la famille $\mathfrak{B}$ est une base de E.
   Soit $P \in E$. On a $\varphi(P) = \big(P(a_0), P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big)$. Le calcul des $\varphi(L_i)$ montre alors que
   $$\big(P(a_0), P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) = P(a_0)\varphi(L_0) + P(a_1)\varphi(L_1) + P(a_2)\varphi(L_2) + P(a_3)\varphi(L_3).$$
   Par linéarité de φ, on a
   $$P(a_0)\varphi(L_0)+P(a_1)\varphi(L_1)+P(a_2)\varphi(L_2)+P(a_3)\varphi(L_3) = \varphi\big(P(a_0)L_0+P(a_1)L_1+P(a_2)L_2+P(a_3)L_3\big).$$
   On a donc
   $$\varphi(P) = \varphi\big(P(a_0)L_0 + P(a_1)L_1 + P(a_2)L_2 + P(a_3)L_3\big).$$
   Comme φ est un isomorphisme, on a bien
   $$P = P(a_0)L_0 + P(a_1)L_1 + P(a_2)L_2 + P(a_3)L_3$$
   (c'est l'écriture de P dans la base $\mathfrak{B}$).

Correction 214 1. La famille $\mathfrak{B}$ a trois éléments. Comme $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = 3$, pour montrer que $\mathfrak{B}$ est une base, il suffit de montrer que c'est une famille génératrice.
Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a $e_3 = u_1 - u_2$, donc $e_3 \in \mathrm{vect}(\mathfrak{B})$, d'où $e_1 = u_3 - 2e_3 \in \mathrm{vect}(\mathfrak{B})$ et $e_2 = u_2 - e_1 \in \mathrm{vect}(\mathfrak{B})$. Le sous-espace $\mathrm{vect}(\mathfrak{B})$ contient la base canonique : c'est $\mathbb{R}^3$. La famille $\mathfrak{B}$ est donc génératrice, et c'est une base.
Remarque : on peut aussi montrer que $\mathfrak{B}$ est une base en vérifiant que c'est une famille libre (en résolvant un système).

2. D'après la question (a), on a $e_3 = u_1 - u_2$, $e_1 = u_3 - 2e_3 = -2u_1 + 2u_2 + u_3$ et $e_2 = u_2 - e_1 = 2u_1 - u_2 - u_3$. On a donc

$$\begin{aligned} g(e_1) &= -2g(u_1) + 2g(u_2) + g(u_3) \\ &= -2(2u_1 + u_2) + 2(3u_1 - u_2 + u_3) + (-u_1 + 4u_2 + 2u_3) \\ &= u_1 + 4u_3 \\ &= (e_1 + e_2 + e_3) + 4(e_1 + 2e_3) \\ &= 5e_1 + e_2 + 9e_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(e_2) &= 2g(u_1) - g(u_2) - g(u_3) \\ &= 2(2u_1 + u_2) - (3u_1 - u_2 + u_3) - (-u_1 + 4u_2 + 2u_3) \\ &= 2u_1 - u_2 - 3u_3 \\ &= 2(e_1 + e_2 + e_3) - (e_1 + e_2) - 3(e_1 + 2e_3) \\ &= -2e_1 + e_2 - 4e_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(e_3) &= g(u_1) - g(u_2) \\ &= (2u_1 + u_2) - (3u_1 - u_2 + u_3) \\ &= -u_1 + 2u_2 - u_3 \\ &= -(e_1 + e_2 + e_3) + 2(e_1 + e_2) - (e_1 + 2e_3) \\ &= e_2 - 3e_3 \end{aligned}$$

La matrice de g dans la base canonique est donc

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 9 & -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Calcul de $\mathrm{Ker}(g)$ et de $\Im(g)$.
On a $xu_1 + yu_2 + zu_3 \in \mathrm{Ker}(g)$ si et seulement si

$$\begin{cases} 2x & +3y & -z & = 0 & (L1) \\ x & -y & +4z & = 0 & (L2) \\ & y & +2z & = 0 & (L3) \end{cases} \iff \begin{cases} x & -y & +4z & = 0 & (L2) \\ & y & +2z & = 0 & (L3) \\ & & -19z & = 0 & (L1) - 2(L2) - 5(L3) \end{cases}$$

et donc $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, soit $\mathrm{Ker}(g) = \{0\}$.
D'après le théorème noyau-image, on a

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(g)) + \dim_{\mathbb{R}}(\Im(g)),$$

donc $\dim_{\mathbb{R}}(\Im(g)) = 3$, *i.e.* $\Im(g) = \mathbb{R}^3$.

Correction 231 1. $(1, X, X^2, X^3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. La dimension de $\mathbb{R}_3[X]$ est 4.

2. Montrons que $\mathcal{B} = (X^3+1, X^3-1, X^2+X, X^2-X)$ est une famille libre.
Soit a,b,c,d des scalaires tels que $a(X^3+1)+b(X^3-1)+c(X^2+X)+d(X^2-X)=0$.
Ceci nous donne $(a+b)X^3+(c+d)X^2+(c-d)X+(a-b)=0$, ce qui est équivalent à
$$\left\{\begin{array}{lcll} a+b & = & 0 & (L1) \\ c+d & = & 0 & (L2) \\ c-d & = & 0 & (L3) \\ a-b & = & 0 & (L4) \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{lcll} a+b & = & 0 & (L1) \\ c+d & = & 0 & (L2) \\ 2c & = & 0 & (L3+L2) \\ 2a & = & 0 & (L4+L1) \end{array}\right.$$
Les deux dernières lignes donnent $c=0$ et $a=0$, puis on trouve $b=d=0$. Donc $\mathcal{B}$ est une famille libre. Comme elle a 4 éléments et que $\dim \mathbb{R}_3[X]=4$, on en déduit que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

3. Comme $\mathcal{B}$ est une base, on sait que X^3+2X+1 peut s'écrire comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$, donc il existe des scalaires a,b,c,d tels que
$$X^3+2X+1 = a(X^3+1)+b(X^3-1)+c(X^2+X)+d(X^2-X).$$
En identifiant les coefficients, on obtient le système
$$\left\{\begin{array}{lcll} a+b & = & 1 & (L1) \\ c+d & = & 0 & (L2) \\ c-d & = & 2 & (L3) \\ a-b & = & 1 & (L4) \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{lcll} a+b & = & 1 & (L1) \\ c+d & = & 0 & (L2) \\ 2c & = & 2 & (L3+L2) \\ 2a & = & 2 & (L4+L1) \end{array}\right.$$
donc $\left\{\begin{array}{lcr} a & = & 1 \\ b & = & 0 \\ c & = & 1 \\ d & = & -1 \end{array}\right.$

Les coordonnées de X^3+2X+1 dans la base $\mathcal{B}$ sont donc $(1,0,1,-1)$.

Correction 232 1. (a) On a $f(1,0,0)=(6,10,-2)$, $f(0,1,0)=(-2,-3,1)$ et $f(0,0,1)=(2,4,0)$ donc la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ est mat$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 10 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Calculons $\mathrm{Ker}(f)$.
$f(x,y,z)=(0,0,0)$ si et seulement si
$$\left\{\begin{array}{rrrcll} 6x & -2y & +2z & = & 0 & (L1) \\ 10x & -3y & +4z & = & 0 & (L2) \\ -2x & +y & & = & 0 & (L3) \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{rrrcll} 6x & -2y & +2z & = & 0 & (L1) \\ -2x & +y & & = & 0 & (L2 \leftarrow L2-2L1) \\ -2x & +y & & = & 0 & (L3) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcll} 3x & -y & +z & = & 0 & (\frac{1}{2}L1) \\ -2x & +y & & = & 0 & (L2) \\ & & 0 & = & 0 & (L3-L2) \end{array}\right.$$

On exprime les inconnues principales y et z en fonction de l'inconnue secondaire x :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} -y & +z & = & -3x \\ y & & = & 2x \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x \\ z & = & -x \end{array}\right.$$

Donc $(x,y,z) = (x,2x,-x) = x(1,2,-1)$.
On en déduit que $(1,2,-1)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et que $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1$.

Par le théorème noyau-image, $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \Im(f)$, donc $\dim \Im(f) = 3-1 = 2$.
On sait que l'image d'une partie génératrice d'un sous-espace vectoriel F est une partie génératrice de $f(F)$, donc $\Im(f) = \mathrm{vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$. Ces vecteurs ont été calculés à la question 1.a).

La matrice des vecteurs $f(e_2)$, $f(e_3)$ est $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
on voit qu'elle est échelonnée en partant du bas, donc $f(e_2)$ et $f(e_3)$ sont linéairement indépendants. Comme $\dim \Im(f) = 2$, on en déduit que $((-2,-3,1),(2,4,0))$ est une base de $\Im(f)$.

(c) Soit $\mathrm{vect}u = (x,y,z)$. L'égalité $f(\mathrm{vect}u) = \mathrm{vect}u$ est équivalente au système linéaire suivant

$$\left\{\begin{array}{lrrcl} 6x & -2y & +2z & = & x \\ 10x & -3y & +4z & = & y \\ -2x & +y & & = & z \end{array}\right.$$

On fait passer toutes les inconnues à gauche :

$$\left\{\begin{array}{lrrcl} 5x & -2y & +2z & = & 0 \\ 10x & -4y & +4z & = & 0 \\ -2x & +y & -z & = & 0 \end{array}\right.$$

On permute les lignes pour obtenir :

$$\left\{\begin{array}{lrrcll} -2x & +y & -z & = & 0 & (L1) \\ 5x & -2y & +2z & = & 0 & (L2) \\ 10x & -4y & +4z & = & 0 & (L3) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lrrcll} -2x & +y & -z & = & 0 & (L1) \\ x & & & = & 0 & (L2+2L1) \\ 2x & & & = & 0 & (L3+4L1) \end{array}\right.$$

On obtient donc $\left\{\begin{array}{l} y-z=0 \\ x=0 \end{array}\right.$

Donc $(x,y,z) = (0,z,z) = z(0,1,1)$.
L'ensemble des vecteurs $\mathrm{vect}u$ tels que $f(\mathrm{vect}u) = \mathrm{vect}u$ est donc le sous-espace vectoriel $\mathrm{vect}(0,1,1)$.

2. (a) Montrons que les vecteurs $\mathrm{vect}u_1, \mathrm{vect}u_2, \mathrm{vect}u_3$ sont linéairement indépendants. Soit a,b,c des scalaires tels que $au_1 + bu_2 + cu_3 = (0,0,0)$. Ceci est équivalent au système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{llllll} a & & +c & = & 0 & (L1) \\ 2a & +b & +2c & = & 0 & (L2) \\ -a & +b & & = & 0 & (L3) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llllll} a & & +c & = & 0 & (L1) \\ & b & & = & 0 & (L2 \leftarrow L2-2L1) \\ -a & +b & & = & 0 & (L3) \end{array}\right.$$

$L2$ donne $b = 0$, puis $L3$ donne $a = 0$ et $L1$ donne $c = 0$. On en déduit que $\mathcal{B}' = (\text{vect}u_1, \text{vect}u_2, \text{vect}u_3)$ est une famille libre. Comme elle a trois éléments et que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ on en déduit que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) $f(u_1) = (0,0,0)$, $f(u_2) = (0,1,1) = u_2$, $f(u_3) = (2,4,0) = 2u_3$ donc

$$\left\{\begin{array}{lll} f(u_1) & = & 0u_1 + 0u_2 + 0u_3 \\ f(u_2) & = & 0u_1 + 1u_2 + 0u_3 \\ f(u_3) & = & 0u_1 + 0u_2 + 2u_3 \end{array}\right.$$

et la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est $\text{mat}A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Remarque : On a vu à la question 1.b) que $\text{vect}u_1$ *est une base de* $\text{Ker}(f)$ *et à la question 1.c) que* $\text{vect}u_2$ *est une base de l'ensemble des vecteurs* $\text{vect}u$ *tels que* $f(\text{vect}u) = \text{vect}u$. *Les vecteurs* $\text{vect}u_1$ *et* $\text{vect}u_2$ *ont donc été choisis de sorte que* $f(\text{vect}u_1) = (0,0,0)$ *et* $f(\text{vect}u_2) = \text{vect}u_2$.

(c) La matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $\text{mat}P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Comme $\text{mat}P$ est une matrice de changement de base, elle est inversible. Calculons $\text{mat}P^{-1}$.

L'équation $P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est équivalente au système linéaire

$$\left\{\begin{array}{llllll} x & & +z & = & a & (L1) \\ 2x & +y & +2z & = & b & (L2) \\ -x & +y & & = & c & (L3) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llllll} x & & +z & = & a & (L1) \\ & y & & = & b-2a & (L2 \leftarrow L2-2L1) \\ -x & +y & & = & c & (L3) \end{array}\right.$$

$L2$ donne $y = -2a + b$, puis $L3$ donne $x = -2a + b - c$ et $L1$ donne $z = 3a - b + c$, donc

$$\left\{\begin{array}{llllll} x & = & -2a & +b & -c \\ y & = & -2a & +b & +0c \\ z & = & 3a & -b & +c \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \text{mat}P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) $\text{mat}P^{-1}\text{mat}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $(\text{mat}P^{-1}\text{mat}A)\text{mat}P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ce résultat était prévisible puisque la formule de changement de base dit que $\text{mat}A' = \text{mat}P^{-1}\text{mat}A\text{mat}P$, où $\text{mat}A'$ est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ calculée au 2.a).

Correction 233

$$\iint_D y\,e^x dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} y\,e^x dx \right) dy = \int_0^1 [y\,e^x]_{x=0}^{x=y^2} dy = \int_0^1 (y\,e^{y^2} - y) dy = \left[\frac{1}{2} e^{y^2} - \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=1}$$

donc $\displaystyle\iint_D y\,e^x dxdy = \frac{e-2}{2}$.

Domaine d'intégration de l'exercice 233.

Correction 234 On fait un changement de variables en coordonnées polaires : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$
Le domaine D est le demi-disque supérieur de centre 0 de rayon 1, donc $0 \leqslant r \leqslant 1$ et $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.
Soit $\Delta = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$.
On a $x^2 + y^2 = r^2$. La formule de changement de variables en coordonnées polaires nous donne

$$\iint_D \frac{dxdy}{1+x^2+y^2} = \iint_\Delta \frac{rdrd\theta}{1+r^2} = \int_0^\pi \left(\int_0^1 \frac{r}{1+r^2} dr \right) d\theta = \int_0^\pi \left[\frac{1}{2} \ln(1+r^2) \right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \int_0^\pi \frac{\ln 2}{2} d\theta$$

donc $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{1+x^2+y^2} = \frac{\pi \ln 2}{2}$.
Domaine d'intégration de l'exercice 234.

Correction 235

1. On résout tout d'abord l'équation homogène $y'' - 6y' + 9y = 0$. Son polynôme caractéristique est $r^2 - 6r + 9 = 0$, $\Delta = 0$, $\alpha = 3$ (racine double). Donc la solution générale de l'équation homogène est $y_H = (\lambda + \mu x)e^{3x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   On cherche ensuite une solution particulière sous la forme $y_0 = Ax^2 e^{3x}$.
   On a $y_0' = (3Ax^2 + 2Ax)e^{3x}$ et $y_0'' = (9Ax^2 + 12Ax + 2A)e^{3x}$ donc $y_0'' - 6y_0' + 9y_0 = 2Ae^{3x}$.
   On prend donc $A = \frac{\alpha}{2}$ et $y_0 = \frac{\alpha}{2} x^2 e^{3x}$ est une solution de (E).

   La solution générale de (E) est alors $y = y_H + y_0 = \left(\lambda + \mu x + \frac{\alpha}{2} x^2\right) e^{3x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2. Si l'ensemble des solutions de (E) est un sous-espace vectoriel, alors il contient la fonction nulle, autrement dit il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\left(\lambda + \mu x + \frac{\alpha}{2} x^2\right) e^{3x} = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme $e^{3x} > 0$, on a nécessairement $\lambda + \mu x + \frac{\alpha}{2} x^2 = 0$ pour tout x. Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls donc $\lambda = \mu = \alpha = 0$. On en déduit que si $\alpha \neq 0$ l'ensemble des solutions de (E) n'est pas un sous-espace vectoriel.

   Si $\alpha = 0$, l'équation (E) devient (E_0) : $y'' - 6y' + 9y = 0$.
   – La fonction nulle est une solution de (E_0).
   – Soit y_1, y_2 deux solutions de (E_0) et $A \in \mathbb{R}$ un scalaire. Si on pose $z = y_1 + Ay_2$ alors $z'' - 6z' + 9z = (y_1'' - 6y_1' + 9y_1) + A(y_2'' - 6y_2' + 9y_2) = 0$ donc z est aussi une solution de (E_0).

   Conclusion : l'ensemble des solutions de (E_0) est un sous-espace vectoriel.