الفصل الثاني: المجموعات، العلاقات و التطبيقات
Ensembles, relations et applications

1.2 المجموعات Ensembles

- **المجموعة Ensemble**

المجموعة مفهوم أساسي في جميع فروع الرياضيات، ويعتبر من المفاهيم الأولية التي لا تُعرَّف. لكنه يمكن تصور المجموعة على أنها طائفة (اوتجمع) من الأشياء famille (ou rassemblement) d'objets او الكائنات الموضوعة سوياً، وتسمى هذه الأشياء **عناصر (Eléments) هذه المجموعة.**

يرمز للمجموعة بالأحرف اللاتينية الكبيرة: A, B, E, F,... وعادة ما تكتب المجموعة باستخدام طريقتين:

اما باعطاء عناصرها بين حاضنتين مثلا **E={a, b, c}**.

اما باعطاء الخاصية المميزة لعناصرها **E={x / p(x) }** حيث p(x) عبارة رياضية متعلقة بـمتغير x.

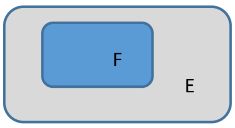
- **مجموعات أساسية:**

- $\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}$ مجموعة الاعداد الطبيعية (entiers naturels)
- $\mathbb{Z}=\{...,-2,-1,0,1,2,...\}$ مجموعة الاعداد الصحيحة او النسبية (entiers relatifs)
- $\mathbb{Q}=\{\frac{p}{q}\,/\,p,q\in\mathbb{Z}\ et\ q\neq 0\}$ مجموعة الاعداد الصحيحة او النسبية (nombres rationnels ou fractions)
- مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ (nombres réels)
- مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ (nombres complexes)

- **مفهوم الانتماء (appartenance)** اذا كان a عنصرا من مجموعة E نكتب $a\in E$ و تقرأ a ينتمي الى E.

- **فهوم الاحتواء و المجموعة الجزئية (Inclusion et sous-ensemble)**

- نقول عن الجموعة F انها محتواة (inclus) بالمجموعة E و نكتب $F\subset E$ اذا كانت كل عناصر F هي عناصر من E أي اذا تحقق الاستلزام: $(\forall x): x\in F\Rightarrow x\in E$. نقول كذلك: F مجموعة جزئية من E



- **المساواة (l'égalité)**

نقول عن الجموعة F انها مساوية (égale à) بالمجموعة E و نكتب E=F اذا كانت $F\subset E$ و $F\supset E$ أي اذا تحقق الاستلزام: $(\forall x): x \in F \Leftrightarrow x \in E$

- **المجموعة الخالية (L'ensemble vide)** هي المجموعة التي لا تشمل أي عنصرو يرمز لها $\varnothing$

- **مجموعة أجزاء مجموعة (ensemble de partie)**

مجموعة أجزاء مجموعة E هي مجموعة كل المجموعات الجزئية للمجموعة E و يرمز لها P(E).

اي $P(E)=\{A/ A\subset E\}$ و لدينا : $A\in P(E) \Leftrightarrow A\subset E$

ملاحظة:

- $\varnothing\in P(E)$ و $E\in P(E)$.
- اذا كان عدد عناصر E هو n فان عدد عناصر P(E) هو 2^n

مثال: $E=\{a,b,c\}$ فان $P(E)=\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, E\}$

2.2 عمليات على المجموعات Opérations sur les ensembles

- **التقاطع L'intersection**

نعتبر الآن E و F مجموعتين كيفيتين

التقاطع:

نسمي تقاطع المجموعتين E و F المجموعة الجديدة التالية

$$E\cap F=\{x \,/\, x\in E \wedge x\in F\}$$

- **الاتحاد L'union**

الاتحاد:

نسمي اتحاد المجموعتين E و F المجموعة الجديدة التالية

$$E\cup F=\{x \,/\, x\in E \vee x\in F\}$$

مثال: $E=\{a,2,c,3\}$ و $F=\{1,a,2,b\}$ فان $E\cap F=\{a,2\}$ و $E\cup F=\{1,a,2,b,3,c\}$.

- **الفرق La différence**

الفرق بين مجموعتين:

نسمي **الفرق بين المجموعتين** E و F المجموعة الجديدة التالية

$$E-F=\{x \,/\, x\in E \wedge x\notin F\}$$

- **الفرق التناظري La différence symétrique**

الفرق التناظري:

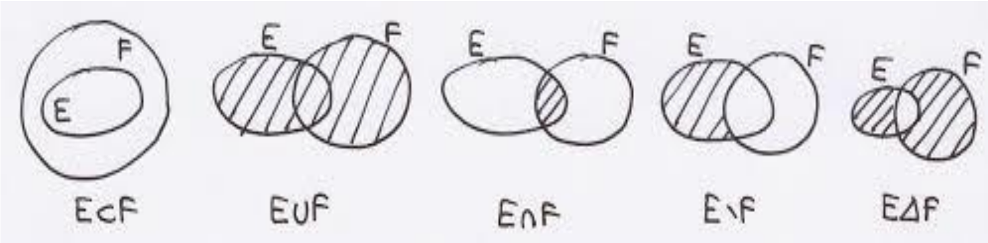
نسمي **الفرق التناظري** بين المجموعتين E و F المجموعة الجديدة التالية

$$E \Delta F = \left(E \cup F\right) - \left(E \cap F\right)$$

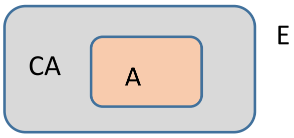
مثال: E={a,2,c,3, d} و F={1,a,2,b} فان E-F={c,3,d} و F-E={1, b } و EΔF={1,b,c,3,d}.

لاحظ ان: E⋃F={1,2,3,a,b,c,d} و E⋂F={a,2} و ان

E⋃F- E⋂F={1,3,b,c,d}= EΔF



- **متممة مجموعة Complementaire d'un sous-ensemble**



لتكن A مجموعة جزئية من المجموعة E.

تعريف 3: نسمي **متممة** A في E المجموعة التالية

$$C_E A = \left\{x \,/\, x \in E \wedge x \notin A\right\} = E - A$$

خواص :

1. $C_E \phi = E \, , C_E E = \phi$
2. $C_E\left(C_E A\right) = A$
3. $C_E\left(A \cap B\right) = C_E B \cup C_E A \, , C_E\left(A \cup B\right) = C_E B \cap C_E A$

مثال: E=ℕ و P= $\{0,2,4,6,\dots\}$ مجمزعة الاعداد الزوجية I={ $1,3,5,\dots$ } مجمزعة الاعداد الفردية.

P و I يتممان بعضهما البعض للمجموعة ℕ.

- **تجزئة مجموعة Partition d'un ensemble**

لتكن E مجموعة كيفية و $\{A_i \, , i \in I\}$ (حيث I مجموعة أدلة) عائلة أجزاء من E.

نقول أن تشكل **تجزئة** للمجموعة E إذا تحقق ما يلي

1. $E = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$
2. الأجزاء متقاطعة مثنى مثنى وهو ما نعبر عنه بــ:

$$A_i \cap A_j = \phi \, , i \neq j$$

- **الجداء الديكارتي Le produit cartésien**

لتكن E و F مجموعتين

تعريف : نسمي **الجداء الديكارتي** للمجموعتين E و F المجموعة التالية

$$E \times F = \{(a,b)/a \in E, b \in F\}$$

نسمي العنصر (a,b) ثنائية مرتبة ولدينا

$$(a,b) = (a',b') \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b'$$

بعض الخــــواص:

1. $E \times \phi = \phi$
2. $E \times F \neq F \times E$ ، إذا كان $E \neq F$
3. إذا كان عدد عناصر E هو m وعدد عناصر F هو n فإن عدد عناصر $E \times F$ هو $m.n$

أمثلة :

1. لتكن المجموعة $E = \{1,2,3\}$.

إن العائلة $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ تشكل تجزئة للمجموعة E

إن العائلة $\{\{1\},\{2,3\}\}$ تشكل تجزئة أخرى للمجموعة E

2. اذا كانت A مجموعة جزئية من مجموعة E فان المجموعة $\{A, \bar{A}\}$ تشكل تجزئة لـ E.

3. اذا كانت A={a, b, c} و B={1, 2} فان AxB={(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)}

BxA={ (1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c) } و B^2=BxB={(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)}

3,2 خواص العمليات على المجموعات

نظرية : لتكن A ,B, C اجزاء من E و D,H اجزاء من F اذن لدينا :

$$(1)\ A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A, A \cap \phi = \phi, A \cup \phi = A, C_E(C_E A) = A$$

$$[A \subset B \Leftrightarrow C_E B \subset C_E A], A \cap C_E A = \phi, A \cup C_E A = E(2)$$

$$(3) C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B, C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$$

$$(4)\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(5)\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$(6)\ (A \times D) \cap (B \times H) = (A \cap B) \times (D \cap H)$$

البرهان: نكتفي ببرهان (3) و (6).

3) لنثبت ان $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cup B} &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow (x \notin A \text{ et } x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (x \in \bar{A} \text{ et } x \in \bar{B}) \\ &\Leftrightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}. \text{ donc } \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}. \end{aligned}$$

بنفس الطريقة يتم اثبات $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

6) نثبت ان $(A \times D) \cap (B \times H) = (A \cap B) \times (D \cap H)$.

$$\begin{aligned} (x,y) \in (A \times D) \cap (B \times H) &\Leftrightarrow [(x,y) \in (A \times D) \text{ et } (x,y) \in (B \times H)] \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } y \in D \text{ et } x \in B \text{ et } y \in H) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B \text{ et } y \in D \text{ et } y \in H) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cap B \text{ et } y \in D \cap H) \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in (A \cap B) \times (D \cap H). \end{aligned}$$

و منه $(A \times D) \cap (B \times H) = (A \cap B) \times (D \cap H)$.