Chapitre 3 :
Suites numériques

Motivation.

Les suites numériques ont des applications dans de nombreux problèmes dans la vie quotidienne, elles répondent également aux plusieurs questions lié à des phénomènes dans d'autres sciences. Par exemple :

- **Etude du marché :** Le prix d'un ordinateur portable acheté est 430 €. On estime qu'une fois sorti du magasin sa valeur u_n (en euro) après n mois est donnée par la formule :

$$u_n = 40 + 300 \times (0.95)^n$$

Question : Déterminer le mois à partir duquel l'ordinateur aura une valeur inférieure à 100 € ?

- **Modèle proie/prédateur** : On s'intéresse à l'évolution de la population de truites (les proies) et de brochets (les prédateurs) dans la Meuse. On désigne par T_n et B_n le nombre respectif de truites et de brochets dans la Meuse le premier juin de l'année $m = 2021 + n$.

Question : Quels sont les nombres des truites et des brochets dans la Meuse pour que ceux-ci soit constante ?

++

3.1. Définitions et propriétés.

Définition 1.

- Une **suite numérique** est une liste de nombres réels ou complexes définie comme étant une application, donnée par :

$$\begin{aligned} u :\quad & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}\ (ou\ \mathbb{C}) \\ & \quad n \longmapsto u(n) \end{aligned}$$

- $u(n)$ est l'image de n, on utilise la notation u_n. On note la suite par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Les éléments de la suite sont appelés « termes ».
- u_n s'appelle terme général de la suite, et n est son indice.
- On peut définir u_n par une formule explicite ou par une formule implicite (récurrente).

Exemples.

1) La liste des nombres impairs $(1\,;3\,;5\,;7\,;9\ ;\dots)$ est une suite définie par la formule explicite : $u_n = 2n + 1 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
2) La liste des nombres $\left(0\,;1\,;\sqrt{2}\,;\sqrt{3}\,;\sqrt{4}\,;\sqrt{5}\,;\dots\right)$ est une suite définie par la formule explicite : $u_n = \sqrt{n} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

3) La suite **arithmétique** est donnée par la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + q \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$ avec le premier u_0 et la raison q.

On peut définir la suite arithmétique par la relation explicite : $u_n = nq + u_0 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

4) La suite de **Fibonacci** est donnée par la relation de récurrence : $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$ avec les deux premiers termes : $F_0 = 1 \quad , \quad F_1 = 1$.

Définitions 2.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** si : $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_{n+1} \geq u_n$.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement croissante** si : $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_{n+1} > u_n$.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** si : $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_{n+1} \leq u_n$.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement décroissante** si : $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_{n+1} < u_n$.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** si elle croissante ou décroissante
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Astuces.

➡ Pour étudier la monotonie, il suffit de déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$. Elle est croissante ssi $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_{n+1} - u_n \geq 0$ (et vice versa).

➡ Si la suite est strictement positive, elle est croissante ssi : $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ (et vice versa).

➡ Si on pose $f(n) = u_n$, il suffit d'étudier le sens de variation de la fonction $f(x)$ avec x positive.

Exemples.

1) La suite des nombres impairs $(1\,;3\,;5\,;7\,;9\,;11\,;\ldots)$ est strictement croissante, puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} - u_n = (2(n+1)+1) - (2n+1) = 2 > 0$$

2) La suite de terme général $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ est décroissante, puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \times \sqrt{n} < 1$$

3) La suite arithmétique est monotone, puisque : $u_{n+1} - u_n = q \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Par exemple, elle est strictement croissante si la raison q est positive. De plus, elle est constante si $q = 0$.

4) La suite définie par le terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad , \quad n \in \mathbb{N}^*$, n'est ni croissante ni décroissante.

Exercice. Démontrer que :

- La somme de deux suites croissantes (resp. décroissantes) est une suite croissante (resp. décroissante).
- Le produit d'une suite croissante (resp. décroissante) par un nombre réel positif est une suite croissante (resp. décroissante).
- Le produit d'une suite croissante (resp. décroissante) par un nombre réel négatif est une suite décroissante (resp. croissante).

Définitions 3.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **constante** si : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} = u_n$.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **stationnaire** si : $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ ,\ \forall n \geq n_0\ :\ u_{n+1} = u_n$.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **périodique** si : $\exists s \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+s} = u_n$.

Exemples.

1) La suite de terme général $u_n = 5\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$ est constante (tous les termes égaux).
2) La suite définie par $u_0 = 1\ ,\ u_1 = 3\ ,\ u_2 = 5\ ,\ u_3 = 7\ ,\ u_n = 2\ ,\ \forall n \geq 4$ est stationnaire.
3) La suite définie par le terme général $u_n = \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)\ ,\ n \in \mathbb{N}$ est périodique avec $s = 6$.

Définitions 4.

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n \leq M$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** si : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n \geq m$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ |u_n| \leq M$

  C'est-à-dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** et **minorée**.

Exemples.

1) La suite des nombres impairs $\{1\,;3\,;5\,;7\,;9\,;11\,;\ldots\}$ n'est pas majorée, elle est minorée par $m = 1$ (atteint pour $n = 0$).
2) La suite de terme général $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ est bornée, elle est minorée par $m = 0$ (jamais atteint), elle est majorée par $M = 1$ (atteint pour $= 1\ , u_1 = M$)
3) La suite géométrique $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $m = 1$ (atteint pour $n = 0$), elle n'est pas majorée.
4) La suite géométrique $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $m = 0$ (jamais atteint), elle est majorée par $M = 1$ (atteint pour $n = 0$).

++

3.2. Convergence et limites.

Dans cette section, on va introduire la notion de la limite d'une suite numérique.

Définition 5.

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$, quand $n \to +\infty$ ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\ :\ \ n > N \Longrightarrow\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Dans ce cas, on écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Définitions 6.

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, on dit qu'elle est divergente, c'est-à-dire si la limite est infinie ou n'existe pas.
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, ssi :
$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \ : \quad n > N \Longrightarrow \quad u_n > A$$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, ssi :
$$\forall \mathrm{B} < 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \ : \quad n > N \Longrightarrow \quad u_n < \mathrm{B}$$

Proposition 1. (Unicité de la limite)

La limite d'une suite convergente est unique.

Preuve. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers deux limites ℓ , ℓ' .
Alors, d'après la définition 3.5, on a :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \ : \quad n > N \Longrightarrow \quad |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \ : \quad n > N' \Longrightarrow \quad |u_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
On prend $N" = \max\{N, N'\}$, on aura pour $n > N"$ (i.e. $n > N$ et $n > N'$) :
$$|\ell - \ell'| = |\ell - u_n + u_n - \ell'| \leq |u_n - \ell| + |u_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
Donc : $\forall \varepsilon > 0 , |\ell - \ell'| < \varepsilon$, ce qui veut dire $|\ell - \ell'| = 0$, d'où le résultat $\ell = \ell'$. ■

Exemples.

1) La suite de terme général $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ tend vers « 0 ». En effet, on a :
$$|u_n - 0| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon^2} \leq n$$
Dans il suffit de prendre $N = \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1$, pour que la définition de la convergence soit vérifié:
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \ : \quad n > N \Longrightarrow \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

2) La suite géométrique $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente, elle tend vers $+\infty$.

3) La suite géométrique $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle tend vers 0.

4) Dans le cas général : La suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si : $-1 < q \leq 1$.

Exemple important. La suite de terme général $u_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ est divergente, puisque elle n'admet pas de limite quand $n \to +\infty$ (On donne la démonstration dans la dernière section).

Exercice. Pour les suites suivantes : $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $y_n = n^2$, $z_n = 1 - 10n$
Créer un tableur Excel qui calcule les premiers termes (jusqu'au $n = 20$) .

Proposition 2.

Toute suite converge est bornée.

Preuve. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers ℓ . D'après la définition 3.5, on a pour $\varepsilon = 1$:

$$\exists N \in \mathbb{N} \; : \quad n > N \Longrightarrow \quad |u_n - \ell| \leq 1,$$

Donc pour $> N$, on a

$$|u_n| = |\ell + u_n - \ell| \leq |\ell| + |u_n - \ell| \leq |\ell| + 1$$

On pose $M = \max(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_N|, |\ell| + 1)$. On aura $\forall n \in \mathbb{N} \; : \; |u_n| \leq M$. ■

Remarque. L'inverse n'est pas toujours vrai : une suite bornée ne converge pas forcément.

Par exemple, la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est bornée (elle veut +1 ou -1 suivant la parité de n), mais cette suite ne converge pas.

Propriétés. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes vers ℓ et ℓ' (respectivement).

1) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha u_n = \alpha\ell$.
2) $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = \ell \times \ell'$.
3) Pour $\ell \in \mathbb{R}^*$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{v_n}{u_n}\right) = \frac{\ell'}{\ell}$.
4) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - \ell) = 0$.

+++

3.3. Théorèmes de convergence.

Dans cette section on va donner des théorèmes pour démontrer la convergence d'une suite.

Théorème 1. (Règle de comparaison)

- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n \leq v_n$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n .$$

- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n \leq v_n$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty .$$

Théorème 2. (Théorème des gendarmes)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n \leq w_n \leq v_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell.$$

Alors la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{w}_n = \ell$.

Conséquence.

✓ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n \geq 0$. Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 0$.

✓ **Attention !** si $u_n > 0$ n'implique pas $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > 0$.

Contre-exemple : $\frac{1}{n} > 0$. Mais on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exemple. Pour démontrer la convergence de la suite de terme général $w_n = \frac{(-1)^n}{1+n+n^2}$, on doit trouver deux suites encadrent $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et qui sont convergentes vers la même limite. En effet, on a :

$$1+n+n^2 \geq n^2 \Leftrightarrow \frac{1}{1+n+n^2} \leq \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{n^2} \leq \frac{(-1)^n}{1+n+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

D'autre part, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\right) = 0$$

Alors : $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$.

Proposition 3. (Limite d'un produit)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites, telles que :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Alors : $\lim_{n\to+\infty}(u_n \times v_n) = 0$.

Exemple. Soient les deux suites : $x_n = \sin n$, $y_n = \frac{1}{n^4}$. Il est clair que Sinus est bornée ($|\sin n| \leq 1$) et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^4} = 0$. Alors, d'après le théorème 1, on aura : $\lim_{n\to+\infty}(x_n \times y_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{n^4} = 0$.

Proposition 4. (Approximation des réels)

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite, telles que :

$$u_n = \frac{E(10^n\, x)}{10^n}.$$

Alors, u_n est une approximation décimale du nombre x à 10^{n} près, et de plus on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = x .$$

Preuve. D'après la définition de la partie entière, on a : $E(10^n\, x) \leq 10^n\, x < E(10^n\, x) + 1$. Alors

$$\frac{E(10^n\, x)}{10^n} \leq x < \frac{E(10^n\, x)}{10^n} + \frac{1}{10^n}$$

D'où $u_n \leq x < u_n + \frac{1}{10^n}$, c'est-à-dire $0 \leq x - u_n < \frac{1}{10^n}$

D'autre part, on a $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{10^n} = 0$ (suite géométrique de raison $q = \frac{1}{10}$)

Enfin, d'après le théorème de gendarmes : $\lim_{n\to+\infty} u_n = x$. ■

Exemple. Soient le nombre $\pi = 3{,}14159265\ldots$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donnée par :

$$u_0 = \frac{E(10^0\, \pi)}{10^0} = E(\pi) = 3 \qquad , \qquad u_1 = \frac{E(10^1\, \pi)}{10^1} = \frac{E(31{,}415\ldots)}{10} = 3{,}1$$

$$u_2 = \frac{E(10^2\,\pi)}{10^2} = \frac{E(314.15\,\dots)}{100} = 3{,}14$$

......

$$u_n = \frac{E(10^n\,\pi)}{10^n} = \frac{E(31415\,\dots)}{10^n} = 3,\underbrace{1415\,\dots\,\dots x_n}_{n \text{ chifres}}$$

Exercice. Montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{E(10^n\,x)}{10^n}$ est croissante.

Théorème 3. (Convergence et monotonie)

- Toute suite croissante et majorée est convergente, de plus on a :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sup(u_n)_{n\in\mathbb{N}} .$$
- Toute suite décroissante et minorée est convergente et on a :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \inf(u_n)_{n\in\mathbb{N}} .$$

Remarques.

- Toute suite croissante qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante qui n'est pas minorée tend vers $-\infty$.

Exemple. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \frac{5n-2}{3n+1}$ est croissante, car :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5n+3}{3n+4} \times \frac{3n+1}{5n-2} \geq 1$$

On peut démontrer par définition que : $\sup(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{5}{3}$. Alors, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{5}{3}$.

Définitions 7. (Suites adjacentes متتاليات متجاورة)

On dit que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes** si :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n \leq v_n$.
- $\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Théorème 4.

Les suites adjacentes convergent vers la même limite.

Preuve. D'après la deuxième condition, on a :

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq . \dots \leq u_n \leq . \dots \dots \leq v_n \leq . \dots \leq v_2 \leq v_1 \leq v_0$$

D'après la première condition, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, donc elle converge vers ℓ . La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, donc elle converge vers ℓ' .

D'autre part, $\ell' - \ell = \lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$. Alors : $\ell' = \ell$. ■

Exemple. Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots\dots + \frac{1}{n^3} \qquad , \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

On va montrer que ces deux suites sont adjacentes, en effet on a :

1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, car : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^3} > 0$.

   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante, car : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{n} < 0$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n} > 0 \Longrightarrow u_n + \frac{1}{n} > u_n \Longrightarrow v_n > u_n$.

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Alors, d'après le théorème, les deux suites convergent vers la même limite ℓ, qui s'appelle « **constante d'Apéry** » noté $\zeta(3)$ (la fonction zeta) . On peut calculer des valeurs approchées de $\zeta(3)$ en utilisant l'encadrement $u_n \le \zeta(3) \le v_n$. Par exemple, pour $n = 4$, on a :

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} \le \zeta(3) \le 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4}$$

C'est-à-dire : $1{,}177662\overline{037}\dots \le \zeta(3) \le 1{,}427662\overline{037}\dots$

Exercice. Montrer la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\dots + \frac{1}{n^2}$

++

3.4. Suites récurrentes.

Définitions 8. (Suites récurrentes متتاليات تراجعية)

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **récurrente** si :

- Le terme initial u_0 est donné.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$,
  telle que f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque : On peut définir les termes de la suite récurrente par :

$$u_0 \;, \quad u_1 = f(u_0) \,, \quad u_2 = f(u_1) = f(f(u_0)) \;, \quad u_3 = f(u_2) = f\Big(f\big(f(u_0)\big)\Big) \,, \dots\dots$$

Exemples.

1) La suite définie par le premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} ,$$

Est une suite récurrente, avec $f(x) = 1 + \sqrt{x}$. Dans ce cas les premiers termes sont :

$$u_0 = 1 \;, u_1 = 2 \,, u_2 = 1 + \sqrt{2} \;, u_3 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}} \,, u_4 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}} \,, \dots\dots$$

2) La suite définie par le premier terme $u_0 = 0$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = a + \frac{u_n}{2(1+u_n^2)} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad a \in \mathbb{R}_+^*$$

Est une suite récurrente, avec $f(x) = a + \frac{x}{2(1+x^2)}$. Dans ce cas les premiers termes sont :

$$u_0 = 0 \ , u_1 = a \ , u_2 = a + \frac{a}{2(1+a^2)} \ , u_3 = a + \frac{a + \frac{a}{2(1+a^2)}}{2\left(1 + \left(a + \frac{a}{2(1+a^2)}\right)^2\right)} \ , \dots \dots$$

Proposition 5.

Si la fonction f est **continue** et la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers ℓ , alors cette limite est un **point fixe** de f , i.e. : $f(\ell) = \ell$

Preuve. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, et comme f est continue alors :

$$f(\ell) = f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$$

Proposition 6.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente. La monotonie de la suite est donnée par :

***1)** Si f est croissante alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, et on a deux cas :*

- *$u_1 \geq u_0 \implies (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.*
- *$u_1 \leq u_0 \implies (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*

***2)** Si f est décroissante alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone. Donc, elle ne converge pas.*

***3)** Si f est constante alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Donc, elle est convergente.*

Preuve. On suppose que $u_1 \geq u_0$, pour le cas $u_1 \leq u_0$, on fait la même chose.

1) Si f est croissante et $u_1 \geq u_0$, on a : $u_2 = f(u_1) \geq f(u_0) = u_1$, puis $u_3 \geq u_2$, ... etc. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2) Si f est décroissante et $u_1 \geq u_0$, on a :

$$u_2 = f(u_1) \leq f(u_0) = u_1 \ , u_3 \geq u_2 \ \ , u_4 \leq u_3, u_5 \geq u_4 \ \ , u_6 \leq u_5 \ .$$

D'où $u_{n+1} - u_n$ est de signe alterné, donc la suite ne sera pas convergente.

3) Si f est constante on a : $u_2 = f(u_1) = f(u_0) = u_1 \ , u_3 = u_2 \ \ , u_4 = u_3, u_5 = u_4$.

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Donc, elle est convergente. ∎

Proposition 7.

Soient $f: [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue et croissante. Alors la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liée à f est convergente vers $\ell \in [a,b]$, avec $f(\ell) = \ell$.

Preuve. Si f est croissante et $u_1 \geq u_0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (d'après la proposition 6) et majorée par b (car $u_{n+1} = f(u_n) \in [a,b]$), donc elle est convergente. Si f est croissante et $u_1 \leq u_0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et minorée par a, donc elle est convergente.

Remarque : Dans la pratique, il suffit de vérifier que $f([a,b]) \subset [a,b]$.

Exemple1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente définie par la donnée de $u_0 \in [0,2]$, et la relation :

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}({u_n}^2 - 1)(u_n - 2) + u_n .$$

- La fonction f est un polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 1)(x - 2) + x$. Cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de plus elle est strictement croissante sur l'intervalle $[0,2]$, donc la suite est monotone et on a $f([0,2]) = \left[\frac{1}{2}, 2\right] \subset [0,2]$.
- Les points fixes de la fonction f sont: $x = -1 \ \vee \ x = 1 \vee x = \ 2$
  Donc, la limite de la suite est l'un des points fixes $\{-1, 1, 2\}$.
- Etude des cas :

a. Si $u_0 = 1$ ou $u_0 = 2$, on a : $\quad u_1 = u_0 \quad , \quad u_2 = u_0 \quad , \quad \ldots\ldots$

Alors la suite est constante, donc converge vers u_0 .

b. Si $u_0 \in [0,1[$, on a $f([0,1]) = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \subset [0,1]$ et $u_1 - u_0 = \frac{1}{4}({u_0}^2 - 1)(u_0 - 2) \geq 0$.

Alors la suite est croissante et majorée par 1, donc elle converge vers $\ell \in [0,1]$.

D'autre part ℓ est un point fixe de , c'est-à-dire $\ell \in \{-1, 1, 2\}$. Donc $\ell = 1$.

c. Si $u_0 \in]1,2[$, on a $f([1,2]) = [1,2]$ et $u_1 - u_0 = \frac{1}{4}({u_0}^2 - 1)(u_n - 2) \leq 0$.

Alors la suite est décroissante et minorée par 1, ce qui veut dire qu'elle est convergente vers $\ell \in [1,2]$. D'autre part ℓ est un point fixe de , c'est-à-dire $\ell \in \{-1, 1, 2\}$. Donc $\ell = 1$.

Exemple.2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente définie par $u_0 = 3$ et la relation : $\quad u_{n+1} = 4e^{u_n - 4}$

- La fonction définie par $f(x) = 4e^{x-4}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est strictement croissante sur $[0,4]$ donc la suite est monotone.
- On cherche les points fixes de la fonction f : (l'intersection du graphe de f et la droite $y = x$)
  $$f(x) = x \Leftrightarrow 4e^{x-4} = x \Leftrightarrow x = 4, x = c \quad \text{tel que} \quad c \in]0.08, 0.09[$$
- On démontre par récurrence que $0 \leq u_n \leq 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$. En effet, on a :
  $$u_0 = 3 \leq 4 \quad \text{et} \quad u_n \leq 4 \Leftrightarrow u_n - 4 \leq 0 \Leftrightarrow 4e^{u_n - 4} \leq 4 \Leftrightarrow u_{n+1} \leq 4$$

L'inégalité à gauche est évidente, car l'exponentielle est strictement positive.

- La suite est décroissante (puisque $u_1 = \frac{4}{e^3} \leq 3 = u_0$) et minorée par 0 , donc elle est convergente vers $\ell \in [0,4]$. D'autre part $\ell \in \{c, 4\}$ c'est un point fixe de f . Donc $\ell = c$.

++

3.5. Suites extraites.

Définitions 9. (Suites extraites متتاليات مستخرجة)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On appelle suite **extraite** ou **sous-suite** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que : $v_m = u_{\varphi(n)}$

Où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Exemples. Soit la suite définie par le terme : $u_n = (-1)^n$. On peut extraire plusieurs sous-suites :

- Pour $\varphi(n) = 2n+1$, nous avons la sous-suite de terme général $u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$.

$$u_1 = -1, u_3 = -1, u_5 = -1, u_7 = -1, \dots, u_{2n+1} = -1$$

- Pour $\varphi(n) = 3n$, nous avons la sous-suite de terme général $u_{3n} = (-1)^{3n} = (-1)^n$.

$$u_0 = 1, u_3 = -1, u_6 = 1, u_9 = -1, \dots, u_{3n} = (-1)^n$$

Proposition 8.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors toute sous-suite converge aussi vers la même limite, i.e.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \Longrightarrow \quad \forall\varphi \ : \ \lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$$

Exemple. La suite définie par le terme général : $u_n = \frac{1}{2^n}$, converge vers $\ell = 0$. Toutes les sous-suites extraites convergent vers $\ell = 0$: $\left(\frac{1}{4^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\frac{1}{8^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\frac{1}{2.4^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, ……

Corollaire 2.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet deux sous-suites ne convergent pas vers la même limite, ou bien une sous-suite divergente, alors cette suite est divergente.

Exemple. Les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ de la suite $u_n = (-1)^n$ convergent vers deux limites différentes $\ell_1 = 1$ et $\ell_2 = -1$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exemple important. La suite de terme général $u_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ est divergente. En effet, soit les deux sous-suites extraites suivantes : $u_{2n} = \sin(n\pi) = 0$, $u_{4n+1} = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$

Ce qui veut dire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 0 \neq 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{4n+1}$.

Théorème 5. (Bolzano-Weierstrass)

Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.