TD N°3 - BIS

Exercice 11: En utilisant le théorème des gendarmes, étudier la nature des suites suivantes :

$$x_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n^2+k} \quad , \quad y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+k}} \ \ (\boldsymbol{L.E}) \quad , \quad t_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n^3+1}}$$

Exercice 12: Etudier la convergence de la suite complexe $(\mathfrak{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\mathfrak{z}_0 \in \mathbb{C} \quad , \quad \mathfrak{z}_n = \frac{2\mathfrak{z}_n - \overline{\mathfrak{z}_n}}{3} \quad \text{pour} \ \ n \in \mathbb{N}$$

Exercice 13:

1) Montrer que les suites suivantes sont adjacentes:

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(4k+1)(4k+3)} \quad , \quad v_n = u_n + \frac{1}{4n-1}$$

2) Même question pour les suites :

$$u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k\,k!}\right) \quad , \quad v_n = \left(1 + \frac{1}{n.n!}\right) u_n$$

Exercice 14:

Pour $a, b \in \,]0,1[$ tel que $a \leq b$, soient les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = a \ , \ v_0 = b \ , \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = (u_n)^{v_n} \quad , v_{n+1} = (v_n)^{u_n}$$

1) Vérifier que : $u_n, v_n \in \,]0,1[$ pour tout$n \in \mathbb{N}$.
2) Montrerque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3) Montrer pour tout$n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq v_n$.
4) Etablir la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers$0 < \lambda \leq 1$, et la convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\mu = 1$.

Exercice 15: Soient la fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$f(x) = \frac{1}{9}(x^3 + 6x + 1) \quad , \quad x_0 = 0 \ , \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1) Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ possède une solution unique $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.
2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation de la question (1), et en déduire que $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

3) Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

4) Montrer que $f\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$, en déduire que $0 \leq x_n < \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

5) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers .

Exercice 16:(Devoir 2022/2023)$(L.E)$

Le prix d'un ordinateur portable acheté est 430€. On estime qu'une fois sorti du magasin sa valeur u_n (en euro) après n mois est donnée par la formule :

$$u_n = 40 + 300 \times (0.95)^n$$

1) Que vaut l'ordinateur à la sortie du magasin ?
2) Que vaut l'ordinateur une année après l'achat ?
3) A long terme, à quel prix peut-on espérer revendre cet ordinateur ?
4) Déterminer le mois à partir duquel l'ordinateur aura une valeur inférieure à 100 €.

Exercice 17: Pour $p \in \mathbb{N}^*$, soit la suite définie par :

$$u_0 = p \qquad , \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = p + \frac{1}{u_n}$$

1) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que :
   a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   b) $u_n \in \mathbb{Q}$.
   c) Calculer u_1 , u_2 , u_3.
2) Soient $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$, tout $\in \mathbb{N}$.
   a) Vérifier que :

$$v_{n+1} = \frac{(p^2+1)v_n + p}{pv_n + 1} \qquad , \qquad w_{n+1} = \frac{(p^2+1)w_n + p}{pw_n + 1}$$

   b) Ecrire les deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide d'une fonction .
   c) Etudier la monotonie de la fonction f, en déduire la monotonie des deux suites.
   d) Montrer que les deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.
3) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et calculer sa limite ℓ .
4) Que peut-on remarquer, quant à la nature des termes u_n et de la limite ℓ ?