سلسلة الأعمال رقم: 04

التمرين الاول: $\mathbb{R}$ مزود بالقانونين الداخليين: $a\Delta b = a + b - 2 \;\; et \; a\odot b = ab - 2a - 2b + 6$

-1 **إثبات أن $(\mathbb{R},\Delta)$ زمرة تبديلية** : $((\mathbb{R},\Delta)$ زمرة تبديلية$)\Leftrightarrow((\Delta)$ قانون تركيب داخلي, تجميعي , يقبل عنصر حيادي و لكل عنصر من $\mathbb{R}$ نظير في $\mathbb{R}$ و **أيضا** (Δ) تبديلي).

a) (Δ) قانون تركيب داخلي من المعطيات.

b) $((\Delta)$ تجميعي$) \Leftrightarrow (\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : (a\Delta b)\Delta c = a\Delta(b\Delta c))$

لدينا: $(a\Delta b)\Delta c = (a+b-2)\Delta c = (a+b-2)+c-2 = a+(b+c-2)-2 = a\Delta(b\Delta c)$

(لأن $(+)$ تجميعي و تبديلي على $\mathbb{R}$) و منه (Δ) تجميعي.

e) $((\Delta)$ تبديلي$) \Leftrightarrow (\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2 : a\Delta b = b\Delta a)$

لدينا: $a\Delta b = a+b-2 = b+a-2 = b\Delta a$ (لأن$(+)$ تبديلي) و منه (Δ) تبديلي.

c) $((\Delta)$ يقبل عنصر حيادي$) \Leftrightarrow (\exists e\in\mathbb{R}, \forall a\in\mathbb{R} : a\Delta e = e\Delta a = a)$

بما أن (Δ) تبديلي يكفي أن نحل المعادلة: $a\Delta e = a$ لدينا

$a\Delta e = a \Leftrightarrow a+e-2 = a \Leftrightarrow e = 2$ و منه $((\Delta)$ يقبل عنصر حيادي $e = -1$.

d) (لكل عنصر من $\mathbb{R}$ نظير في $\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow (\forall a\in\mathbb{R}, \exists a'\in\mathbb{R} : a\Delta a' = a'\Delta a = e)$

بما أن (Δ) تبديلي يكفي أن نحل المعادلة: $a\Delta a' = e$ لدينا

$a\Delta a' = e \Leftrightarrow a+a'-2 = 2 \Leftrightarrow a' = -a+4\in\mathbb{R}$ و منه لكل عنصر $a\in\mathbb{R}$ نظير

$a' = -a+4\in\mathbb{R}$.

-2 **إثبات أن $(\mathbb{R},\Delta,\odot)$ حلقة تبديلية واحدية:**

$((\mathbb{R},\Delta,\odot)$ **حلقة تبديلية واحدية**$)\Leftrightarrow \begin{cases} I - (\mathbb{R},\Delta) \text{ زمرة تبديلية} \\ II - (\odot) \text{ قانون تركيب داخلي} \\ III - (\odot)\text{تجميعي} \\ IV - (\odot) \text{ توزيعي على} (\Delta) \\ V - (\odot) \text{ تبديلي} \\ VI - (\odot) \text{ يقبل عنصر حيادي} \end{cases}$

I- $(\mathbb{R},\Delta)$ زمرة تبديلية مما سبق حيث $0_{\mathbb{R}} = 2$.

II- $(\odot)$ قانون تركيب داخلي من المعطيات.

III- $((\odot)$ تجميعي$) \Leftrightarrow (\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : (a\odot b)\odot c = a\odot(b\odot c))$

لدينا من جهة : $(a\odot b)\odot c = (ab-2a-2b+6)\odot c$

$= (ab-2a-2b+6)c - 2(ab-2a-2b+6) - 2c + 6$.

$= abc - 2ac - 2bc - 2ab + 4a + 4b + 4c - 6 \ldots(1)$.

من جهة أخرى : $a\odot(b\odot c) = a\odot(bc-2b-2c+6)$

$= a(bc-2b-2c+6) - 2a - 2(bc-2b-2c+6) + 6$.

$$= abc - 2ab - 2ac + 4a - 2bc + 4b + 4c - 6 \dots (2).$$

من (1)و (2) نجد المساواة و منه $(\odot)$ تجميعي.

-V $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : a\odot b = b\odot a) \Leftrightarrow$ (تبديلي $(\odot)$)

لدينا: $a\odot b = ab - 2a - 2b + 6 = ba - 2b - 2a + 6 = b\odot a$ (لأن$(+)$و$(\times)$ تبديليان)

و منه $(\odot)$ تبديلي.

-IV $\left(\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} a\odot(b\Delta c) = (a\odot b)\Delta(a\odot c) \\ (b\Delta c)\odot a = (b\odot a)\Delta(c\odot a) \end{cases}\right) \Leftrightarrow$ ($(\odot)$ توزيعي على (Δ))

بما أن $(\odot)$ تبديلي يكفي إثبات أن $a\odot(b\Delta c) = (a\odot b)\Delta(a\odot c)$. لدينا من جهة

$$a\odot(b\Delta c) = a\odot(b + c - 2) = a(b + c - 2) - 2a - 2(b + c - 2) + 6.$$

$$= ab + ac - 4a - 2b - 2c + 10 \dots (1').$$

من جهة أخرى $(a\odot b)\Delta(a\odot c) = (ab - 2a - 2b + 6)\Delta(ac - 2a - 2c + 6)$

$$= (ab - 2a - 2b + 6) + (ac - 2a - 2c + 6) - 2,$$

$$= ab + ac - 4a - 2b - 2c + 10 \dots (2').$$

من $(1')$و $(2')$ نجد أن $(\odot)$ توزيعي على(Δ) .

-VI $(\exists e \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R} : a\odot e = e\odot a = a) \Leftrightarrow$ ($(\odot)$ يقبل عنصر حيادي)

بما أن $(\odot)$ تبديلي يكفي أن نحل المعادلة: $a\odot e = a$ لدينا :

$$a\odot e = a \Leftrightarrow ae - 2a - 2e + 6 = a \Leftrightarrow e(a - 2) = 3(a - 2), \forall a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e = 3$$

و منه $(\odot)$ يقبل عنصر حيادي $e = 1_{\mathbb{R}} = 3$.

3- تعيين مجموعة العناصر القابلة للقلب $U(\mathbb{R})$:

($a \in \mathbb{R}$ قابل للقلب) $\Leftrightarrow$ (a له نظير بالنسبة للقانون$(\odot)$) $\Leftrightarrow (\exists a' \in \mathbb{R} : a\odot a' = a'\odot a = 1_{\mathbb{R}})$

بما أن $(\odot)$ تبديلي يكفي أن نحل المعادلة: $a\odot a' = 1_{\mathbb{R}}$ لدينا

$$a\odot a' = 1_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow aa' - 2a - 2a' + 6 = 3 \Leftrightarrow a'(a - 2) = 2a - 3 \Leftrightarrow a' = \frac{2a-3}{a-2}, a \neq 2$$

و منه $\boldsymbol{U}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} - \{\mathbf{2} = 0_{\mathbb{R}}\}$.

الاستنتاج: بما أن $(\mathbb{R}, \Delta, \odot)$ حلقة واحدية و $\boldsymbol{U}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} - \{\mathbf{2} = 0_{\mathbb{R}}\}$ **فإن** $(\mathbb{R}, \Delta, \odot)$ حقل

و بما أن $(\odot)$ تبديلي **فإن** $(\mathbb{R}, \Delta, \odot)$ حقل تبديلي.

التمرين الثاني: $\mathbb{R}^2$ مزود بالقانونين $\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2 : (x,y)\oplus(x',y') = (x + x', y + y')$

$$(x,y)\otimes(x',y') = (x.x', y.y'),$$

1- إثبات أن $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ حلقة تبديلية واحدية:

-I $(\mathbb{R}^2, \oplus)$ زمرة تبديلية؟

a) $(\oplus)$ قانون تركيب داخلي من المعطيات.

b) (تجميعي $(\oplus)$) $\Leftrightarrow$ ($\forall (x,y),(x',y'),(x'',y'')\in\mathbb{R}^2:$

$$[(x,y)\oplus(x',y')]\oplus(x'',y'')=(x+x',y+y')\oplus(x'',y'')$$

$$,=((x+x')+x'',(y+y')+y'')$$

$$.=(x+(x'+x''),y+(y'+y''))$$ (لأن $(+)$ تجميعي في $\mathbb{R}$)

$$.=(x,y)\oplus(x'+x'',y'+y'')=(x,y)\oplus[(x',y')\oplus(x'',y'')]$$

و منه $(\oplus)$ تجميعي.

e) (تبديلي $(\oplus)$) $\Leftrightarrow$ $(\forall (x,y)(x',y')\in\mathbb{R}^2:(x,y)\oplus(x',y')=(x',y')\oplus(x,y))$

لدينا: $(x,y)\oplus(x',y')=(x+x',y+y')=(x'+x,y'+y)=(x',y')\oplus(x,y)$ (لأن$(+)$ تبديلي في $\mathbb{R}$) و منه $(\oplus)$ تبديلي.

c) (يقبل عنصر حيادي $(\oplus)$) $\Leftrightarrow$ ($\exists (e_1,e_2)\in\mathbb{R}^2,\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2:$
$,(x,y)\oplus(e_1,e_2)=(e_1,e_2)\oplus(x,y)=(x,y)$

بما أن $(\oplus)$ تبديلي يكفي أن نحل المعادلة: $(x,y)\oplus(e_1,e_2)=(x,y)$ لدينا

$$.\ (x,y)\oplus(e_1,e_2)=(x,y)\Leftrightarrow(x+e_1,y+e_2)=(x,y)\Leftrightarrow\begin{cases}x+e_1=x\\ \wedge\\ y+e_2=y\end{cases}\Leftrightarrow e_1=e_2=0$$

و منه $(\oplus)$ يقبل عنصر حيادي $(e_1,e_2)=(0,0)$ $.0_{\mathbb{R}^2}=$

d) (لكل عنصر من $\mathbb{R}^2$ نظير في $\mathbb{R}^2$) $\Leftrightarrow$ ($\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\exists (x',y')\in\mathbb{R}^2:$
$(x,y)\oplus(x',y')=(x',y')\oplus(x,y)=0_{\mathbb{R}^2}$

بما أن $(\oplus)$ تبديلي يكفي أن نحل المعادلة: $(x,y)\oplus(x',y')=0_{\mathbb{R}^2}$ لدينا

$$.\ (x,y)\oplus(x',y')=0_{\mathbb{R}^2}\Leftrightarrow(x+x',y+y')=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}x+x'=0\\ \wedge\\ y+y'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=-x\in\mathbb{R}\\ \wedge\\ y'=-y\in\mathbb{R}\end{cases}$$

و منه لكل عنصر $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ نظير $.(x',y')=(-x,-y)\in\mathbb{R}^2$

من *a),b) , c),d)* و *e)* ينتج أن $(\mathbb{R}^2,\oplus)$ زمرة تبديلية.

II- $(\otimes)$ قانون تركيب داخلي من المعطيات.

III- (تجميعي $(\otimes)$) $\Leftrightarrow$ ($\forall (x,y),(x',y'),(x'',y'')\in\mathbb{R}^2:$

$$[(x,y)\otimes(x',y')]\otimes(x'',y'')=(x.x',y.y')\otimes(x'',y'')$$

$$,=((x.x').x'',(y.y').y'')$$

$$.=(x.(x'.x''),y.(y'.y''))$$ (لأن $(\times)$ تجميعي في $\mathbb{R}$)

$$.=(x,y)\otimes(x'.x'',y'.y'')=(x,y)\otimes[(x',y')\otimes(x'',y'')]$$

و منه $(\otimes)$ تجميعي.

V- (تبديلي $(\otimes)$) $\Leftrightarrow$ $(\forall (x,y)(x',y')\in\mathbb{R}^2:(x,y)\otimes(x',y')=(x',y')\otimes(x,y))$

لدينا: $(x,y)\otimes(x',y')=(x.x',y.y')=(x'.x,y'.y)=(x',y')\otimes(x,y)$ (لأن$(\times)$ تبديلي في $\mathbb{R}$) و منه $(\otimes)$ تبديلي.

-IV	$(\otimes)$ توزيعي على $(\oplus) \Leftrightarrow ($ $(\forall(x,y),(x',y'),(x'',y'')\in\mathbb{R}^2:$
$$\begin{cases}(x,y)\otimes[(x',y')\oplus(x'',y'')]=[(x,y)\otimes(x',y')]\oplus[(x,y)\otimes(x'',y'')]\\ [(x',y')\oplus(x'',y'')]\otimes(x,y)=[(x',y')\otimes(x,y)]\oplus[(x'',y'')\otimes(x,y)]\end{cases})$$

بما أن $(\otimes)$ تبديلي يكفي إثبات المساواة الأولى. لدينا

$$(x,y)\otimes[(x',y')\oplus(x'',y'')]=(x,y)\otimes(x'+x'',y'+y'')=(x(x'+x''),y(y'+y'')).$$
$$=(xx'+xx'',yy'+yy'')=(xx',yy')\oplus(xx'',yy'').$$
$$=[(x,y)\otimes(x',y')]\oplus[(x,y)\otimes(x'',y'')].$$

ومنه $\otimes$ توزيعي على$\oplus$.

-VI	$((\otimes)$ يقبل عنصر حيادي$) \Leftrightarrow ($ $(\exists(e_1,e_2)\in\mathbb{R}^2,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2:$
$$(x,y)\otimes(e_1,e_2)=(e_1,e_2)\otimes(x,y)=(x,y)),$$

بما أن $(\otimes)$ تبديلي يكفي أن نحل المعادلة: $(x,y)\otimes(e_1,e_2)=(x,y)$ لدينا

$$(x,y)\otimes(e_1,e_2)=(x,y)\Leftrightarrow(x.e_1,y.e_2)=(x,y)\Leftrightarrow\begin{cases}x.e_1=x\\ \wedge\\ y.e_2=y\end{cases}\Leftrightarrow e_1=e_2=1.$$

و منه $(\otimes)$ يقبل عنصر حيادي $1_{\mathbb{R}^2}=(e_1,e_2)=(1,1)$

مما سبق نجد أن $(\mathbb{R}^2,\oplus,\otimes)$ **حلقة تبديلية واحدية.**

-2 $(\mathbb{R}^2,\oplus,\otimes)$ حلقة ليست تامة لأن لها قواسم الصفر مثلا $0_{\mathbb{R}^2}=(0,0)\neq(1,0)$ و $(0,1)\neq 0_{\mathbb{R}^2}$ لكن $(1,0)\otimes(0,1)=(0,0)=0_{\mathbb{R}^2}$.

-3 $(\mathbb{R}^2,\oplus,\otimes)$ ليست حقل لأن قواسم الصفر غير قابلة للقلب ومنه $U(\mathbb{R}^2)\neq\mathbb{R}^2-\{(0,0)=0_{\mathbb{R}^2}\}$.

التمرين الثالث: $B=\left\{\frac{m}{2^n};m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}\right\}$

-1 اثبات أن B حلقة جزئية من $(\mathbb{Q},+,\times)$ (واضح أن $B\subset\mathbb{Q}$)

- (B حلقة جزئية من$(\mathbb{Q},+,\times)$) $\Leftrightarrow$
$$\left.\begin{array}{r}0_{\mathbb{Q}}\in B\quad\neq\emptyset\ (1\\ \forall(x,y)\in B^2\ :x+y\in B\ \ (2\\ \forall x\in B\ :-x\in B\ \ (3\\ \forall(x,y)\in B^2\ :x\times y\in B\ (4\end{array}\right\}$$

1) $\left(0_{\mathbb{Q}}=\frac{0}{2^0};0\in\mathbb{Z},\ 0\in\mathbb{N}\right)\Longrightarrow 0_{\mathbb{Q}}\in B\quad\neq\emptyset.$

2) $\begin{cases}x\in B\\ \wedge\\ y\in B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{m}{2^n};m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}\\ \wedge\\ y=\frac{m'}{2^{n'}};m'\in\mathbb{Z},\ n'\in\mathbb{N}\end{cases}\Longrightarrow x+y=\frac{m}{2^n}+\frac{m'}{2^{n'}}=\frac{m.2^{n'}+m'.2^n}{2^{n+n'}}.$

$$\Longrightarrow x+y=\frac{m''}{2^{n''}}\ ;m''=m.2^{n'}+m'.2^n\in\mathbb{Z},\ n''=n+n'\in\mathbb{N}\quad.$$

$$\Longrightarrow x+y\in B.$$

3) $x\in B\Longrightarrow x=\frac{m}{2^n};m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}\Longrightarrow -x=\frac{-m}{2^n};-m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}$
$$\Longrightarrow -x\in B\ .$$

$$4)\begin{cases} x \in B \\ \wedge \\ y \in B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{m}{2^n}; m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \\ \wedge \\ y = \frac{m'}{2^{n'}}; m' \in \mathbb{Z},\ n' \in \mathbb{N} \end{cases} \Longrightarrow x \times y = \frac{m}{2^n} \times \frac{m'}{2^{n'}} = \frac{m.m'}{2^{n+n'}}.$$

$$\Longrightarrow x \times y = \frac{m''}{2^{n''}}\ ; m'' = m.m' \in \mathbb{Z},\ n'' = n + n' \in \mathbb{N} \quad .$$

$$\Longrightarrow x \times y \in B.$$

و منهB حلقة جزئية من $(\mathbb{Q}, +, \times)$.

2- **<u>إثبات أن</u> مجموعة العناصر القابلة للقلب هي** $U(B) = \{\pm 2^k, k \in \mathbb{Z}\}$

ليكن $x = \frac{m}{2^n} \in B$, لدينا x قابل للقلب في B معناه $x^{-1} \in B$ أي $\frac{2^n}{m} = \frac{m'}{2^{n'}}$ و معناه $m.m' = 2^{n+n'}$

حيث m و m' عددين صحيحين أي أن 2 هوالعدد الأولي الوحيد في تفكيكm و m' الى جداء عوامل اولية ومعناه

$m = \pm 2^l, l \in \mathbb{N}$. و منه $x = \frac{\pm 2^l}{2^n} = \pm 2^k$ حيث $k = l - n \in \mathbb{Z}$.

3- B ليس حقل جزئي من $(\mathbb{Q}, +, \times)$. لأن

$$(B\text{حقل جزئي من}(\mathbb{Q}, +, \times)) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 0_{\mathbb{Q}}, 1_{\mathbb{Q}} \in B \quad \neq \emptyset\ (1 \\ \forall (x, y) \in B^2\ : x + y \in B\ \ (2 \\ \forall x \in B\ : -x \in B\ \ (3 \\ \forall (x, y) \in B^2\ : x \times y \in B\ (4 \\ \forall x \in B - \{0_{\mathbb{Q}}\}\ : x^{-1} \in B\ \ (5 \end{array}\right\}.$$

و الشرط 5) غير محقق من الجزء 2 السابق

$\exists\ \frac{3}{2} \in B - \{0_{\mathbb{Q}}\}\ : \frac{2}{3} \notin B$.