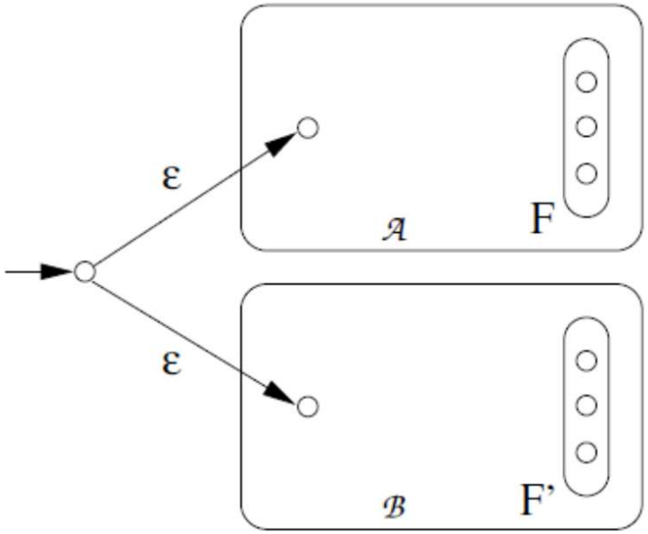
Opérations sur les automates

Opérations sur les automates

1. Union

Si L_1 et L_2 sont les langages acceptes par deux automates A et B finis, alors $L_1 \cup L_2$ est aussi accepte par un automate fini C.

Automate acceptant $L(C)= L_1(A) \cup L_2(B)$ est le suivant



$A = (\Sigma^{(a)}, Q^{(a)}, q_0^{(a)}, Q_F^{(a)}, \delta^{(a)})$ et $B = (\Sigma^{(b)}, Q^{(b)}, q_0^{(b)}, Q_F^{(b)}, \delta^{(b)})$

$C = (\Sigma^{(c)}, Q^{(c)}, q_0^{(c)}, \delta^{(c)})$

$\Sigma^{(c)} = \Sigma^{(a)} \cup \Sigma^{(b)}$

$Q^{(c)} = Q^{(a)} \cup Q^{(b)} \cup \{ q_0^{(c)} \}$

$q_0^{(c)}$ (un nouvel état)

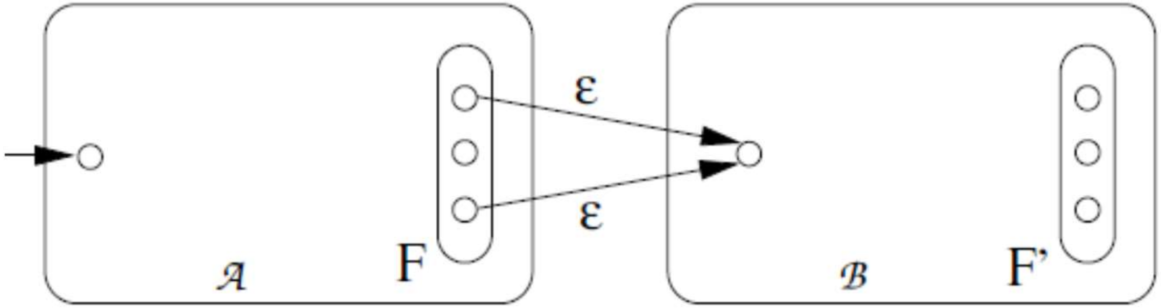
$Q_F^{(c)}, = Q_F^{(a)} \cup Q_F^{(b)}$

$\delta^{(c)} = \delta^{(a)} \cup \delta^{(b)} \cup \{ \delta(q_0^{(c)}, \varepsilon) = \{ q_0^{(a)}, q_0^{(b)} \} \}$

2. Concaténation

Si L_1 et L_2 sont les langages acceptes par deux automates finis A et B, alors $L_1.L_2$ est aussi accepte par un automate fini C.

Automate acceptant $L(C)= L_1\ (A)\ .\ L_2(B)$ est le suivant



$$A = (\Sigma^{(a)}, Q^{(a)}, q_0^{(a)}, Q_F^{(a)}, \delta^{(a)}) \text{ et } B = (\Sigma^{(b)}, Q^{(b)}, q_0^{(b)}, Q_F^{(b)}, \delta^{(b)})$$

$$C = (\Sigma^{(c)}, Q^{(c)}, q_0^{(c)}, \delta^{(c)})$$

$$\Sigma^{(c)} = \Sigma^{(a)} \cup \Sigma^{(b)}$$

$$Q^{(c)} = Q^{(a)} \cup Q^{(b)}$$

$$q_0^{(c)} = q_0^{(a)}$$

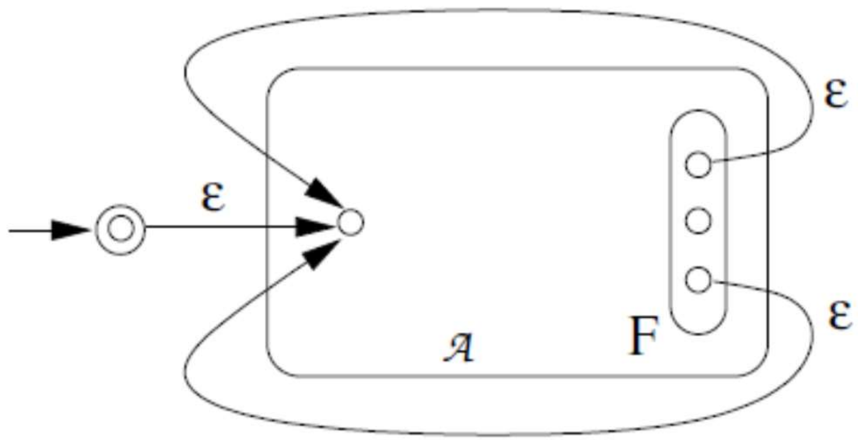
$$Q_F^{(c)}, = Q_F^{(b)}$$

$$\delta^{(c)} = \delta^{(a)} \cup \delta^{(b)} \cup \{ \delta(Q_F^{(a)}, \varepsilon) = \{ q_0^{(b)} \} \}$$

3. puissance

Si L est accepte par un automate fini A, alors L* l'est aussi accepte par un automate fini C

Automate acceptant (L(A))*est le suivant



$A = (\Sigma^{(a)}, Q^{(a)}, q_0^{(a)}, Q_F^{(a)}, \delta^{(a)})$

$C = (\Sigma^{(c)}, Q^{(c)}, q_0^{(c)}, \delta^{(c)})$

$\Sigma^{(c)} = \Sigma^{(a)}$

$Q^{(c)} = Q^{(a)}$

$q_0^{(c)}$ = (un nouvel état)

$Q_F^{(c)}, = \{ q_0^{(c)} \}$

$\delta^{(c)} = \delta^{(a)} \cup \{ \delta (Q_F^{(a)}, \varepsilon)=\{ q_0^{(a)} \}\}$

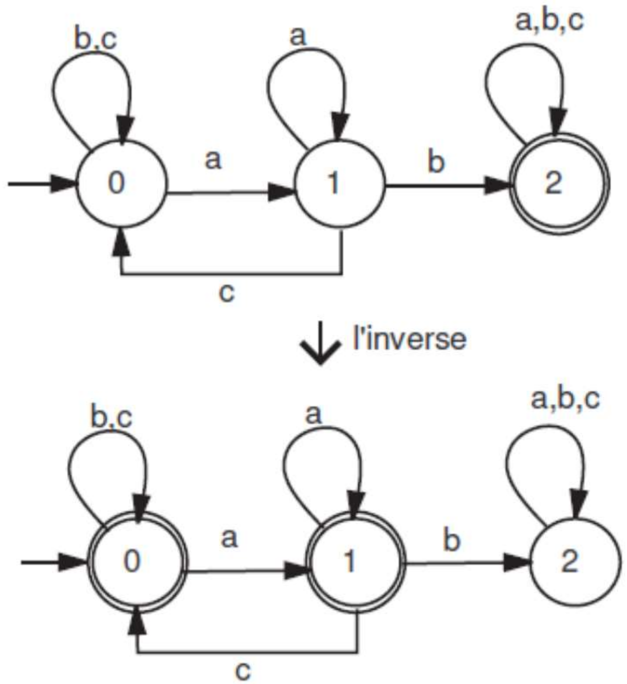
4. Complément

Si L $\subset$ A* est accepte par un automate fini X déterministe et complet , alors A*/L (le complémentaire de L) est aussi accepte par un automate fini.

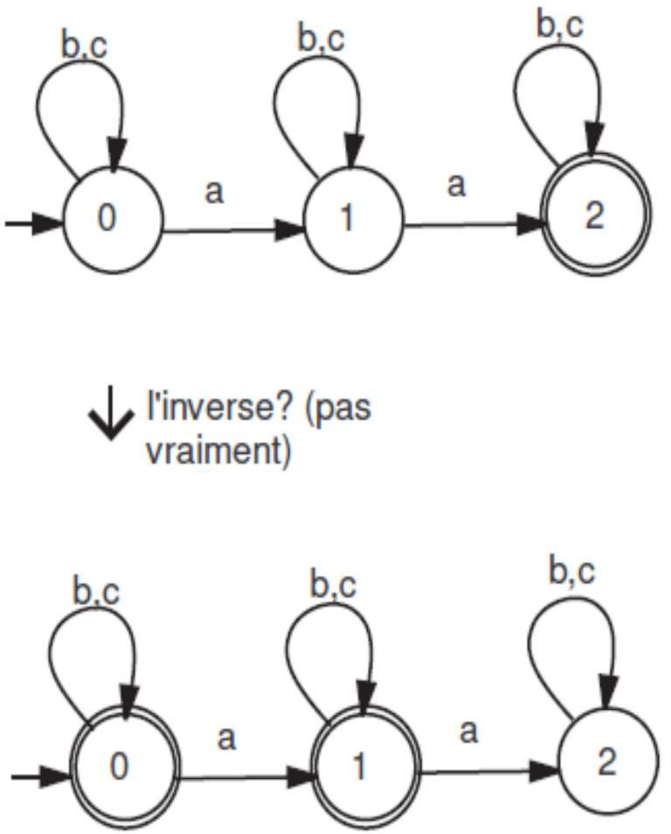
- Si on inverse les statuts final/non final de chacun des états de A, on obtient un nouvel automate acceptant exactement A*/L(X)

Exemple

- Soit le langage des mots définis sur l'alphabet {a, b, c} **<u>contenant le facteur ab</u>**.
- appliquer la propriété précédente pour trouver l'automate des mots qui **<u>ne contiennent</u>** pas le facteur **ab**

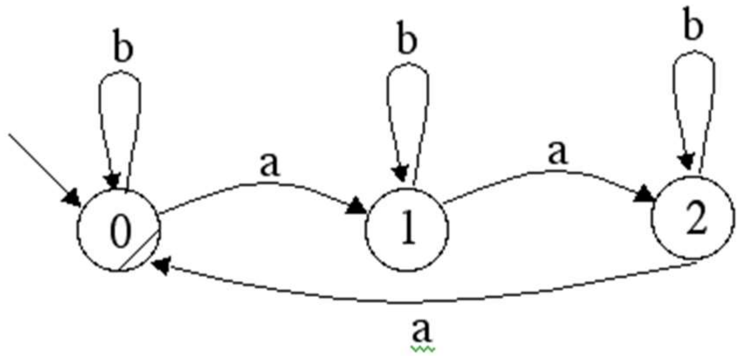


- Exemple

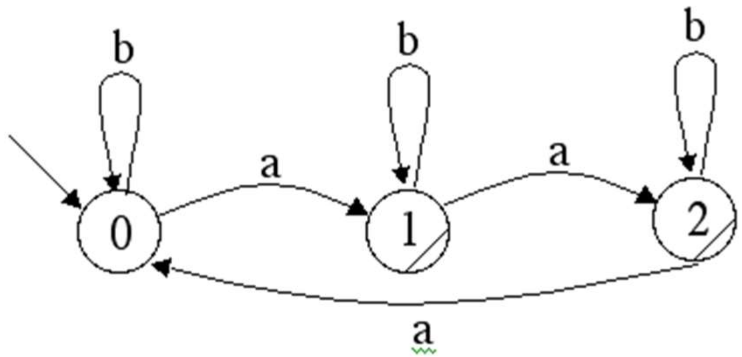


- L’automate obtenu reconnaît les mots contenant au plus 1 a

- On commence par L1 ayant un nombre de a multiple de 3. L1' est le complementaire de L1 (le nombre de a n'est pas multiple de 3).
- L1



- L1'



Exemple:

L= { w $\in$ {0, 1}* / w ***ne contient pas*** la sous chaîne «010» }

= complémentaire de L' tel que :

L'={ w $\in$ {0, 1}* / w ***contient*** la sous chaîne «010» }

Si L est un langages acceptes par l'automate finis A, alors L est aussi accepte par un automate fini C

- Les étapes:
    1. On construit l'automate A
    2. Déterminiser A
    3. Rendre l'automate déterministe complet
    4. on inverse les statuts final/non final de chacun des états de A, on obtient l'automate C

5. Miroire

- Si L est un langage accepte par un automate fini X, alors L^R est aussi accepte pa un automate fini X^R

Soit $X = (A , Q, q_0 , Q_F , \delta)$ un AFND acceptant L.

L'automate $X^R = (A,Q, Q_F , q_0 , \delta^R)$ un automate fini acceptant L^R

Si ($\delta(q_i,a)=q_j$ dans X) alors ($\delta^R (q_j,a)=q_i$ dans X^R)

Les étapes pour construire XR:

1. Construire l'automate X
2. Rendre l'automate X avec un seule état final
3. inverser le sens de tous les arcs
4. inverse les statuts final/non final (l'état final devient initial et l'état initial devient final
5. L'automate obtenu c'est l'automate X^R

. **intersection**

L_1 et L_2 sont les langages acceptes par deux automates finis déterministes et B, alors $L_1 \cap L_2$ est aussi accepte par un automate fini C = A x B.

les automates finis déterministes A et B possèdent le même alphabet Σ

$= (\Sigma^{(a)}, Q^{(a)}, q_0^{(a)}, Q_F^{(a)}, \delta^{(a)})$ et $B = (\Sigma^{(b)}, Q^{(b)}, q_0^{(b)}, Q_F^{(b)}, \delta^{(b)})$

$= (\Sigma^{(c)}, Q^{(c)}, q_0^{(c)}, \delta^{(c)})$

$\Sigma^{(c)} = \Sigma^{(a)} = \Sigma^{(b)}$

$Q^{(c)} = Q^{(a)} \times Q^{(b)}$

$q_0^{(c)} = (q_0^{(a)}, q_0^{(b)})$

$Q_F^{(c)}, = Q_F^{(a)} \times Q_F^{(b)}$

$\delta^{(c)}((q,q'),a) = (\delta^{(a)}(q,a), \delta^{(b)}(q',a))$

Exemple

Construisez des automates finis déterministes acceptant le langage décrit dans chacun des cas suivants :

- L1= {w ∈ {a, b}* | w contient à la fois ***ab*** et ***ba*** }

  = {w ∈ {a, b}* | w contient ***ab*** } et {w ∈ {a, b}* | w contient à ***ba*** }

  =L1’ ∩ L1’’

Si L1’ et L1’’ sont les langages acceptes par deux automates finis A et B, alors L1 est aussi accepte par un automate fini C, tel que C = A x B