Université Mohamed Seddik Ben Yahia de Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département d'Informatique

Date : 08 /02/2020
L2– Informatique

Examen du Logique Mathématique (Durée 1h30)

Exercice 1 (3 pts) Calculez la valeur de vérité des phrases suivantes dans chacune des situations proposées

1. Amine a réussi son examen ou Nabil est contente
2. Amine a réussi son examen et il n'est pas vrai que Nabil est contente
3. Il n'est pas vrai qu'Amine a réussi son examen et Nabil est contente
4. Il n'est pas vrai qu'Amine a réussi son examen ou il n'est pas vrai que Nabil est contente
5. Si Amine a réussi son examen, il n'est pas vrai que Nabil est contente
6. Il n'est pas vrai qu'Amine a réussi son examen si Nabil est contente

Situations proposées :

a. Amine a réussi son examen, Nabil est contente
b. Amine a réussi son examen, Nabil n'est pas contente
c. Amine n'a pas réussi son examen, Nabil est contente

X **Exercice 2** (5 pts). On va montrer que d'une proposition fausse on peut déduire n'importe quoi. Nous choisissons $A \wedge \neg A$ comme proposition fausse.

1. Calculez sa table de vérité et vérifiez qu'elle est bien une *contradiction*.
2. Dans notre logique nous avons fait le choix d'utiliser seulement les symboles $\rightarrow$ et $\neg$. En utilisant les équivalences bien connues,
   a) Montrer que le système $\{\neg, \rightarrow\}$ est un système complet de connecteurs
   b) transformez $A \wedge \neg A$ en une formule équivalente qui n'utilise que $\neg$ et $\rightarrow$. Vérifiez que les deux formules sont bien équivalentes à l'aide des tables de vérité.

Exercice 3 (4 pts) Soient les formules propositionnelles suivantes

$F1 \equiv (\neg A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$
$F2 \equiv (A \rightarrow B) \rightarrow C$

1. En utilisant la méthode de table de vérité, montrer que F1 est satisfiable et déduire toutes les modèles de F1
2. En utilisant la méthode de déduction naturelle, montrer que : $F1 \vdash F2$

Exercice 4 (8 pts). On se place sur un langage avec un prédicat binaire $S(x; y)$, une constante l et deux symboles de fonction unaires b_0 et b_1. On introduit les formules suivantes

$S_0 : S(l; b_0(l))$
$S_1 : \forall x : S(b_0(x); b_1(x))$
$S_2 : \forall x : S(x; y) \Rightarrow S(b_1(x); b_0(y))$

1. Mettre les formules S_0; S_1 et S_2 en forme FNC.
2. En utilisant la méthode de résolution, montrer que la formule $\exists x; S(x; b_0(b_1(l)))$ est une conséquence logique des formules S_0; S_1 et S_2.
3. Un étudiant se demande s'il peut prouver la formule $\exists x; S(x; l)$ par résolution à partir de S_0; S_1 et S_2. Il essaie d'utiliser la même méthode, que constate-t-il ?
4. La formule $(S_0 \wedge S_1 \wedge S_2) \Rightarrow \exists x; S(x; l)$ est-elle valide ? est-elle satisfiable ?

Soit le système de déduction :

$$\frac{A\rightarrow B,\ A}{B}\ (MP) \qquad \frac{A\rightarrow B,\ \neg B}{\neg A}\ (MT)$$

$$\frac{A\ ,\ B}{A\wedge B}\ (i\wedge) \qquad \frac{A\wedge B}{A}\ (e \qquad \frac{A\wedge B}{B}\ (e2\wedge)$$

$$\frac{A}{A\vee B}\ (i1\vee) \qquad \frac{B}{A\vee B}\ (i2\vee) \qquad \frac{T\vdash A\vee B \quad T,A\vdash C \quad T,B\vdash C}{C}\ (ev)$$

$$\frac{T,A\vdash B}{T,\vdash A\rightarrow B}\ (i\rightarrow) \qquad \frac{T,\ A\vdash\bot}{\neg A}\ (i\neg)$$

$$\frac{A \quad \neg A}{\bot}\ (e\neg) \qquad \frac{\bot}{A}\ (efalso) \qquad \frac{\neg A\vdash\bot}{A}\ (double\ \neg)$$

Bon courage

Corrigé type LM (examen 2020)

exo1: V.p : A : "Amine à réussi son examen"
N : "Nabil est content"

les formules:

$F1 : A \vee N$

$F2 : A \wedge \neg N$

$F3 : \neg(A \wedge N)$

$F4 : \neg(A \vee \neg N)$

$F5 : A \to \neg N$

$F6 : \neg(N \to A)$

les situation

a| $(A, N) = (1, 1) \Rightarrow v(F1) = 1$, et les autres faux

b| $(A, N) = (1, 0) \Rightarrow v(F6) = 0$, et les autres vraie

c| $(A, N) = (0, 1) \Rightarrow v(F2) = 0$, et les autres vraie

A	N	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
0	0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0

exo2:

1| T.V

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
0	1	0
1	0	0

toutes les ligne d'interpretations sont faux $\Rightarrow (A \wedge \neg A)$ une contradiction

2| a| $\{\neg, \to\}$ syst complet : on montre par recurrence sur le nbre des connecteurs (n)

$n = 1$: soient a, b deux v.p :

$\neg a \equiv \neg a$

$a \wedge b \equiv \neg(\neg a \vee \neg b) \equiv \neg(a \to \neg b)$

$a \vee b \equiv \neg\neg a \vee b \equiv \neg a \to b$

$a \to b \equiv a \to b$

$a \leftrightarrow b \equiv (a \to b) \wedge (b \to a) \equiv$
$\equiv \neg((a \to b) \to \neg(b \to a))$

hypothese (n) soient deux formules α, β de la LP qui contient n_1, n_2 resp des connecteurs, et soient α', β' deux formules de la LP qui ne contient que $\{\neg, \to\}$ et $\alpha' \equiv \alpha$, $\beta' \equiv \beta$, $(n_1 + n_2) = n$

$(n+1)$:

$\neg \alpha \equiv \neg \alpha'$

$\alpha \wedge \beta \equiv \alpha' \wedge \beta' \equiv \neg(\alpha' \to \neg \beta')$

$\alpha \vee \beta \equiv \alpha' \vee \beta' \equiv \neg \alpha' \to \beta'$

$\alpha \to \beta \equiv \alpha' \to \beta'$

$\alpha \leftrightarrow \beta \equiv \alpha' \leftrightarrow \beta'$
$\equiv \neg((\alpha' \to \beta') \to \neg(\beta' \to \alpha'))$

donc par recurrence, syst $\{\neg, \to\}$ est un syst complet des connecteurs

b| $A \wedge \neg A \equiv \neg(A \to \neg(\neg A))$

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$	$\neg(\neg A)$	$A \to \neg(\neg A)$	$\neg(A \to \neg(\neg A))$
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0

exo3:

$F1 \equiv (\neg A \to C) \wedge (B \to C)$

$F2 \equiv (A \to B) \to C$

1|

A	B	C	$\neg A \to C$	$B \to C$	F1
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

d'après T.V : on remarque qu'il existe des "1" donc la formule F1 est satisfiable.

modèls :
$(A, B, C) = \{(0,0,1), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,1)\}$.

2| $f_1 \vdash f_2$ par déduction naturelle :

$(\neg A \to C) \wedge (B \to C) \vdash (A \to B) \to C$.

il suffit de démontrer :

0,25 ✓

$(\neg A \to C) \wedge (B \to C), (A \to B), \neg C \vdash \bot$.

2

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\neg A \to C)\wedge(B \to C)\ (hyp)}{B \to C}(e2\wedge) \quad \neg C\ (hyp)}{\neg B}MT \quad (A \to B)(hyp)}{\neg A}MT \quad \dfrac{(\neg A \to C)\wedge(B\to C)\ (hyp)}{\neg A \to C}(e1\wedge)}{C}MP \quad \neg C\ (hyp)}{\bot}(e\neg)$$

0,25 ✓ 0,25 ✓ 0,25 ✓ 0,25 ✓ 0,25 ✓ 0,25 ✓

donc :

$$\dfrac{\dfrac{(\neg A \to C)\wedge(B \to C), (A \to B), \neg C \vdash \bot}{(\neg A \to C)\wedge(B\to C), (A \to B) \vdash C}(\text{double } \neg)}{(\neg A \to C)\wedge(B \to C) \vdash (A \to B) \to C}(i\to)$$

0,25 ✓ 0,25 ✓

exo 4 :

1| Forme FNC

$S_0 \equiv S(\ell, b_0(\ell)) = C_1$

1,5 $S_1 \equiv \forall x (S(b_0(x), b_1(x)) \equiv S(b_0(x), b_1(x)) = C_2$

$S_2 = \forall x (S(x,y) \to S(b_1(x), b_0(y))) \equiv \forall x (\neg S(x,y) \vee S(b_1(x), b_0(y)))$

$\equiv \neg S(x,y) \vee S(b_1(x), b_0(y)) = C_3$.

2| $S_0, S_1, S_2 \models \overbrace{\exists x\, S(x, b_0(b_1(\ell)))}^{f}$ par résolution

alors il suffit de montrer $sk(S_0), sk(S_1), sk(S_2), sk(\neg f) \models \bot$. 0,25

$\neg(f) \equiv \neg(\exists x\, S(x, b_0(b_1(\ell))))$

$\equiv \forall x\, \neg S(x, b_0(b_1(\ell)))$

$\equiv \neg S(x, b_0(b_1(\ell))) = C_4$

$C_1 = S(\ell, b_0(\ell))$

$C_2 = S(b_0(x), b_1(x))$ 1 ✓

$C_3 = \neg S(x,y) \vee S(b_1(x), b_0(y))$

$C_4 = \neg S(x, b_0(b_1(\ell)))$.

$C_5 = S(b_1(b_0(x)), b_0(b_1(x)))$ res $(C_2 ; C_3(x/b_0(x)), y/b_1(x))$

$C_6 = [\,]$ res $(C_4(x / b_1(b_0(\ell))), C_5(x/\ell))$

alors par réfutation $S_0, S_1, S_2 \models f$.

4| $(S_0 \wedge S_1 \wedge S_2) \to \exists x\, S(x,\ell)$ valide ?

puisque $S_0, S_1, S_2 \not\models \exists x\, S(x,\ell)$ alors

$\models (S_0 \wedge S_1 \wedge S_2) \to \exists x\, S(x,\ell)$ n'est pas valide.

1

3| $S_0, S_1, S_2 \overset{?}{\models} \exists x\, S(x,\ell)$.

~~donc~~ il suffit de montrer $sk(S_0), sk(S_1), sk(S_2), sk(\neg \exists x\, S(x,\ell)) \overset{?}{\models} \bot$.

$sk(\neg \exists x\, S(x,\ell)) = \forall x\, \neg S(x,\ell) \equiv \neg S(x,\ell) = C_4$

$C_1 = S(\ell, b_0(\ell))$

$C_2 = S(b_0(x), b_1(x))$ 2

$C_3 = \neg S(x,y) \vee S(b_1(x), b_0(y))$

$C_4 = \neg S(x,\ell)$

$C_5 = S(b_1(b_0(x)), b_0(b_1(x)))$ res $(C_2, C_3(x/b_0(x)), y/b_1(x))$

et on se bloque !!

alors système stable.

alors

$S_0, S_1, S_2 \not\models \exists x\, S(x,\ell)$

Soit le système de déduction :

$\dfrac{A\to B,\ A}{B}$ (MP) $\qquad \dfrac{A\to B,\ \neg B}{\neg A}$ (MT)

$\dfrac{A,\ B}{A\wedge B}$ (i∧) $\qquad \dfrac{A\wedge B}{A}$ (e $\qquad \dfrac{A\wedge B}{B}$ (e2∧)

$\dfrac{A}{A\vee B}$ (i1∨) $\qquad \dfrac{B}{A\vee B}$ (i2∨) $\qquad \dfrac{T\vdash A\vee B \quad T,A\vdash C \quad T,B\vdash C}{C}$ (e∨)

$\dfrac{T,A\vdash B}{T,\vdash A\to B}$ (i→) $\qquad \dfrac{T,A\vdash \bot}{\neg A}$ (i¬)

$\dfrac{A \quad \neg A}{\bot}$ (e¬) $\qquad \dfrac{\bot}{A}$ (efalso) $\qquad \dfrac{\neg A\vdash \bot}{A}$ (double ¬)

Bon courage

$(S_0 \wedge S_1 \wedge S_2) \to \exists x\, S(x,l)$ satisfiable ? 1,5

par resolution:

$S_0\wedge S_1\wedge S_2 \to \exists x\, S(x,l) \equiv \neg S_0 \vee \neg S_1 \vee \neg S_2 \vee \exists x\, S(x,l)$

$\equiv \neg S(l,b_0(l)) \vee \exists x\, \neg S(b_0(x),b_1(x)) \vee \neg(\forall x(S(x,y)\to S(b_1(x),b_0(y))) \vee \exists x\, S(x,l)$

$\equiv \neg S(l,b_0(l)) \vee \exists x\, \neg S(b_0(x),b_1(x)) \vee \neg(\forall x\, \neg S(x,y) \vee S(b_1(x),b_0(y))) \vee \exists x\, S(x,l)$

$\equiv \neg S(l,b_0(l)) \vee \exists x_1 \neg S(b_0(x_1),b_1(x_1)) \vee \exists x_2 (S(x_2,y) \wedge \neg S(b_1(x_2),b_0(y))) \vee \exists x_3\, S(x_3,$

$\equiv \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 [\neg S(l,b_0(l)) \vee \neg S(b_0(x_1),b_1(x_1)) \vee S(x_3,l) \vee (S(x_2,y) \wedge \neg S(b_1(x_2),b_0(y))$

$\equiv \neg S(l,b_0(l)) \vee \neg S(b_0(a),b_1(a)) \vee S(c,l) \vee (S(b,y) \wedge \neg S(b_1(b),b_0(y)))$

$\equiv [\underbrace{\neg S(l,b_0(l) \vee \neg S(b_0(a),b_1(a)) \vee S(c,l) \vee S(b,y)}_{C_1}] \wedge [\underbrace{\neg S(l,b_0(l) \vee \neg S(b_0(a),b_1(a)) \vee S(c,l) \vee \neg S(b_1(b),b_0(y)))}_{C_2}]$

$C_1 =$
$C_2 =$

on remarque que on ne peut pas instantier la constante donc on peut pas deduire la clause [ ] donc syst est stable.

donc la formule est satisfiable.