DEVOIR

Exercice 1: On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}$$

1) Ecrire la suite sous la forme :

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

telle que f est une fonction à déterminer.

2) Est-ce que on peut utiliser la formule de la moyenne pour calculer la limite de la suite ?

3) Considérer une subdivision de l'intervalle $[0,1]$, montrer que

$$\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) f\left(\frac{k}{n}\right) < \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\mathrm{d}x < \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

4) En utilisant la question (3), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n - \frac{1}{n} f\left(1-\frac{1}{n}\right) < \int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x < S_n - \frac{1}{n}$$

5) En trouvant un encadrement de S_n , Déduire que la suite est convergente et calculer sa limite.

Exercice 2: Pour $a \in \mathbb{R} \setminus \{1,-1\}$ soit l'intégrale définie par

$$K(a) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a\cos t + a^2)\ \mathrm{d}t$$

1) Montrer que, $\forall t \in [0,\pi]\ :\ 1 - 2a\cos t + a^2 > 0.$

Déduire que la fonction $f(t) = \ln(1 - 2a\cos t + a^2)$ est intégrable.

2) Par les changements de variables $u = 2t$ et $v = 2\pi - u$, montrer que :

$$K(a) + K(-a) = K(a^2)$$

3) Par le changement de variable $y = \pi - t$, montrer que $K(a)$ est paire.

4) Montrer par récurrence que :

$$K(a) = \frac{1}{2^n} K\left(a^{2^n}\right) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

5) Montrer que , $\forall t \in [0, \pi]$, $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$, on a:

$$|\ln(1 - 2a \cos t + a^2)| \leq 2 \ln(1 + |a|)$$

6) Déduire que : $|K(a)| \leq 2\pi \ln(1 + |a|)$, et que $\lim_{a \to 0} K(a) = 0.$

7) En utilisant les questions (4) et (6), montrer pour $|a| < 1$ que : $|K(a)| = 0.$

8) Montrer que pour tous $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$, on a :

$$K\left(\frac{1}{a}\right) = K(a) - \pi \ln(a^2)$$

9) Déduire la valeur de $K(a)$ pour $|a| > 1$.