

Examen

Exercice 01 (4pts) : Grammaires & langages

1. Soit la grammaire $G = (\{a, b, c\}, \{S, A, B\}, S, P)$; où P contient les règles suivantes :

$S \rightarrow aS \mid aA$; $A \rightarrow bB \mid \varepsilon$; $B \rightarrow bA$

- Donner 4 mots qui sont générés par G (justifier)

Exemple d'un mot : 'aabbbb'

$S \rightarrow aS \rightarrow aaA \rightarrow aabB \rightarrow aabbA \rightarrow aabbbB \rightarrow aabbbbA \rightarrow aabbbb \in L(G)$

- Trouver le langage généré par G (qu'on note $L(G)$).

$L(G) = \{w \in \{a, b\}^* / w = a^n a (bb)^m \mid n, m \geq 0\}$

2. Donner une grammaire pour exprimer le langage suivant :

- $L = \{w \in \{a, b, c\}^* / w = a^{2n} c c b^{n+1} \mid n \geq 0 \text{ ou } w = b^n a^m \mid n > m \geq 0\}$

$L = \{w \in \{a, b, c\}^* / w = (aa)^n c c b b^n \mid n \geq 0 \text{ ou } w = b^{i+m} a^m \mid i > 0, m \geq 0\}$

$L = \{w \in \{a, b, c\}^* / w = (aa)^n c c b b^n \mid n \geq 0 \text{ ou } w = b^i b^m a^m \mid i > 0, m \geq 0\}$

$L = \{w \in \{a, b, c\}^* / w = (aa)^n c c b b^n \mid n \geq 0\} \cup \{w \in \{a, b, c\}^* / w = b^i b^m a^m \mid i > 0, m \geq 0\}$

Donc la grammaire comme suit :

$G = (\{a, b, c\}, \{S, A, B, C\}, S, P)$

Où $P = \{S \rightarrow A \mid B ; A \rightarrow aaAb \mid ccb ; B \rightarrow bB \mid bC ; C \rightarrow bCa \mid \varepsilon ;\}$

Exercice 02 (5pts) : Expressions régulières & Automates

1. Pour chacune des expressions régulières qui suivent, dessinez un automate (sans ε -transitions) reconnaissant le langage qu'elle dénote

$L1 = (c^* b + c b^* a)^* (a c + a^* b)$

1 2 3 4 5 6 7 8 9

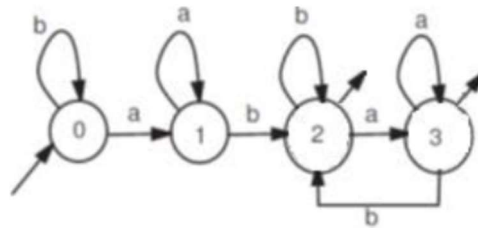
	a	b	c
0	6,8	2,9	1,3
1	-	2	1
2	6,8	2,9	1,3
3	5	4	-
4	5	4	-
5	6,8	9,2	3,1
6	-	-	7
7			
8	8	9	
9			

$L2 = b(b a^* b)^* + a(c a)^* b(a + b a)^*$

On peut dessiner l'automate directement à partir de l'expression

2. Donner l'expression régulière du langage reconnu par chacun des automates suivants :

Automate A



1^{er} méthode

$$EXP_A = b^*aa^*b((b+aa^*b)^* + a(a+bb^*a)^*)$$

2^{ème} méthode (on utilise le système d'équation (lemme de Arden)

$$L_0 = bL_0 + aL_1 = b^*aL_1$$

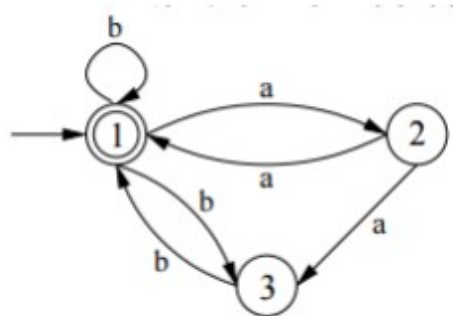
$$L_1 = aL_1 + bL_2 = a^*bL_2$$

$$L_3 = aL_3 + bL_2 + \epsilon = a^*(bL_2 + \epsilon) = a^*bL_2 + a^*$$

$$L_2 = bL_2 + aL_3 + \epsilon = bL_2 + a(a^*bL_2 + a^*) + \epsilon = (b + aa^*b)L_2 + aa^* + \epsilon = (b + aa^*b)^*(aa^* + \epsilon)$$

$$\text{On a } L_1 = aL_1 + bL_2 = a^*bL_2 \text{ et } L_2 = (b + aa^*b)^*(aa^* + \epsilon)$$

$$L_0 = b^*aL_1 = b^*aa^*bL_2 = \mathbf{b^*aa^*b(b + aa^*b)^*(aa^* + \epsilon)}$$



Automate B

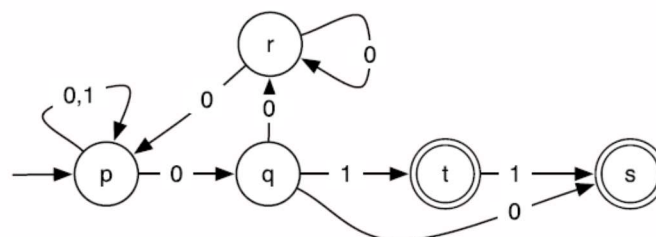
$$L_3 = bL_1$$

$$L_2 = aL_1 + aL_3 = aL_1 + abL_1 = (a + ab)L_1$$

$$L_1 = bL_1 + aL_2 + bL_3 + \epsilon = bL_1 + a(a + ab)L_1 + bL_1 + \epsilon = (b + a(a + ab) + b)L_1 + \epsilon = \mathbf{(b + a(a + ab) + bb)^*}$$

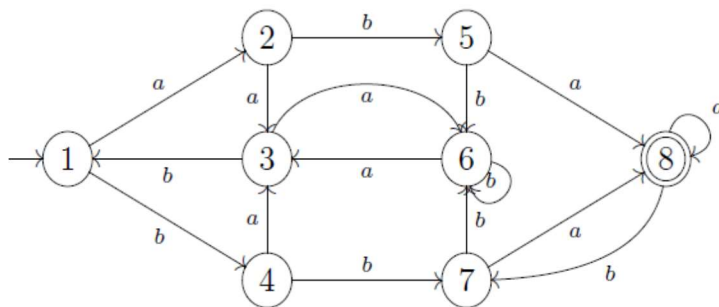
Exercice 03 (4,5pts): Détermination & Minimisation

1. Déterminez l'automate suivant et dessinez le graphe de l'automate obtenu



	0	1
p	p,q	p
p,q	P,q,r,s	p ,t
P,q,r,s	P,q,r,s	p ,t
p,t	p,q	p,s
p,s	p,q	p

2. Minimisez l'automate suivant et dessinez le graphe de l'automate minimal obtenu.



	a	b
1	2	4
2	3	5
3	6	1
4	3	7
5	8	6
6	3	6
7	8	6
8	8	7

E0 : A={1,2 ,3,4,5,6,7} B={8}

E1 : A={1,2 ,3,4,6} B={8}C={5,7}

E2 : A={1,3,6} B={8}C={5,7} D={2,4}

E2 : A={3,6} B={8}C={5,7} D={2,4} E={1}

E2 : A={3} B={8}C={5,7} D={2,4} E={1} F={6}

	a	b
E	D	D
D	A	C
A	F	E
C	B	F
F	A	F
B	B	C

3. Rendre l'automate minimal obtenu complet

L'automate minimal obtenu est complet

Exercice 04 (4pts) : opérations sur les automates

1. Donner un automate qui accepte chacun des langages suivants :
 - a. $L1 = \{ w \in \{a, b\}^*, \text{ tel que } w \text{ contient un nombre impair de } b \}$
 - b. $L2 = \{ w \in \{a, b\}^*, \text{ tel que la longueur de } w \text{ est paire} \}$
 - c. $L3 = \{ w \in \{a, b\}^*, \text{ tel que la longueur de } w \text{ est un multiple de 3} \}$
 - d. $L4$ le langage complémentaire de $L3$.
2. Expliquez comment construire un automate d'états fini A qui reconnaît chacun des langages suivants
 - a. $L5 = \{ w \in \{a, b\}^*, \text{ tel que } w \text{ contient un nombre impair de } b \text{ et la longueur de } w \text{ est paire} \}$
 - b. $L6 = \{ w \in \{a, b\}^* \text{ et } w \text{ commence par } a \text{ et ne contient pas 'ba'} \}$

Exercice 05 (2,5pts) : Grammaires algébriques

1. Trouver une grammaire réduite (dont tous les non terminaux sont utiles) équivalente à la grammaire suivante :

$$G = (\{a,b\}, \{S,A,B,C\}, S, \{ S \rightarrow AB \mid CA ; A \rightarrow a ; B \rightarrow BC \mid AB ; C \rightarrow aB \mid b \})$$

On supprime le symbole B (le symbole B **non-productifs**)

La grammaire devient :

$$G = (\{a,b\}, \{S,A,C\}, S, \{ S \rightarrow CA ; A \rightarrow a ; C \rightarrow b \})$$

tous les non terminaux sont utiles, donc la grammaire est réduite

2. Trouver une grammaire propre équivalente à la grammaire suivante :

$$H = (\{a,b\}, \{S,A,B\}, S, \{ S \rightarrow ASB \mid \epsilon ; A \rightarrow aAS \mid a ; B \rightarrow SbS \mid A \mid bb \})$$

Rendre la grammaire propre

Correction

1- Ajouter la règle : $S' \rightarrow S$ (S' nouvelle axiome)

On obtient

$$S' \rightarrow S$$

$$S \rightarrow ASB \mid \epsilon ; A \rightarrow aAS \mid a ; B \rightarrow SbS \mid A \mid bb$$

2- Elimination de : $S \rightarrow \epsilon$

La grammaire obtenue est :

$$S' \rightarrow S \mid \epsilon$$

$$S \rightarrow ASB \mid AB ; A \rightarrow aA \mid aAS \mid a ; B \rightarrow SbS \mid bS \mid Sb \mid b \mid A \mid bb$$

3- Elimination les règles unitaires : $B \rightarrow A$

La grammaire devient :

$$S' \rightarrow S \mid \epsilon$$

$$S \rightarrow ASB \mid AB ;$$

$$A \rightarrow aA \mid aAS \mid a ;$$

$$B \rightarrow SbS \mid bS \mid Sb \mid b \mid aA \mid aAS \mid a \mid bb$$

La grammaire obtenue est une grammaire propre

Bon courage