1. Concept de graphe

Un graphe G est un couple (S, A) défini par:

- un ensemble S de points (objets) appelés sommets.
- un ensemble A de liaisons (relations) entre deux sommets appelées arêtes ou arcs.

Une arête a est une paire de sommets {x, y} avec x, *y* ∈ S. x et y sont appelées les extrémités de l'arête a.

Un arc est un couple de sommets (x, y) ∈ A avec x, y ∈ S. x est appelée l'extrémité initiale de l'arc (x, *y*) et y est appelée extrémité terminale (finale) de l'arc (x, *y*).
On dit que y est un **successeur** de x ; on dit aussi que x est un **prédécesseur** de y.

Lorsque plusieurs arêtes (arcs) relient deux sommets, on les appelle des **arêtes (arcs) multiples.**

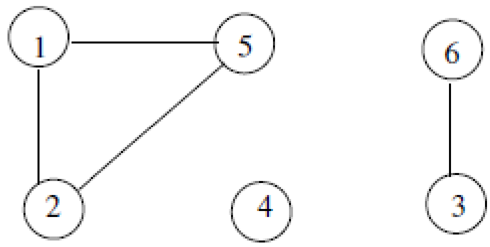
Une boucle est une arête (un arc) reliant un sommet à lui-même.

Un graphe est **simple** s''il ne contient ni boucle ni arêtes multiples.

Un **multi-graphe (graphe multiple)** est un graphe qui contient des **arêtes multiples.**

Exemple:

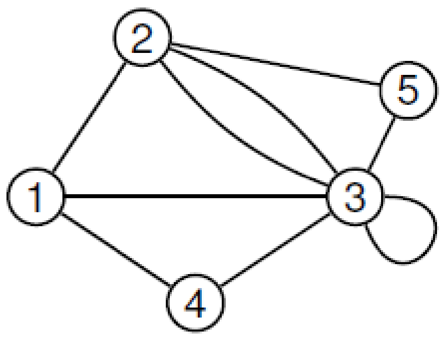
- Soit le graphe non orientée G1 suivant :



Le graphe G1 = (S, A) est un graphe simple avec :

S= {1, 2, 3, 4, 5, 6} et A= {{1, 2}, ……………………………………………}

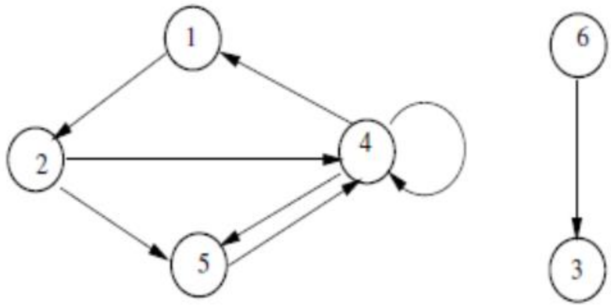
- Soit le graphe non orientée G2 suivant:



Le graphe G2 = (S, A) est un graphe multiple avec :

S= {1, 2, 3, 4, 5, 6} et A= {……………………………………………………….}

- Soit le graphe orienté **G3** suivant:



Le graphe G3 = (S, A) est un graphe multiple avec:
S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
A = {(1,2), ………………………………………………………………….}

- **Ordre d'un graphe**

L'ordre d'un graphe **n** est le nombre de ses sommets.

n= |S|.

Exemple : l'ordre du graphe G3 est n=…….

- **Taille d'un graphe**

La taille d'un graphe **m** est le nombre de ses arêtes.

m=|A|.

Exemple : la taille du graphe G3 est m = ……

- **Incidence/adjacence dans un graphe**

Un sommet x est incident à une arête (un arc) a si x est une extrémité de a.

Une arête (Un arc) a est incident(e) à un sommet x si x est une extrémité de a.

Un sommet x est adjacent (voisin) à un sommet y si {x, y} est une arête (si (x, y) est un arc).

Deux arêtes (arcs) sont adjacent(e)s si elles (ils) ont un sommet en commun.

Le voisinage d'un sommet x (noté **Γ(x)**) est l'ensemble des sommets adjacents à x.

Remarque:
Dans un graphe orienté, le voisinage d'un sommet x $\mathbf{\Gamma(x)= \Gamma^{+} (x) \cup \Gamma^{-} (x)}$ avec:
$\mathbf{\Gamma^{-} (x) = \{y} \in S / (y,x) \in A\}$ est l'ensemble des prédécesseurs (voisinage entrant) d'un sommet x.
$\mathbf{\Gamma^{+} (x) = \{y} \in S / (x,y) \in A\}$ est l'ensemble des successeurs (voisinage sortant) d'un sommet x.

Exemple :
- Dans le graphe non orientée G1:

Le sommet …….. est incident à l'arête ……………
L'arête …………. est incidente aux sommets …… et …….
Le sommet ……… est adjacent au sommet ……
Les arêtes …………. et ………… sont adjacentes
Γ(1)= ……………..
Γ(5)= ……………..
Γ(4)= …….

- Dans le graphe orientée G3:

Le sommet ….. est incident à l'arc ………..
L'arc ………….. est incidente aux sommets ……... et ………
Le sommet ………. est adjacent au sommet ……..
Les arcs ……………. et …………… sont adjacentes
$\mathbf{\Gamma^{-} (1)=}$ ………. $\mathbf{\Gamma^{+} (1)=}$………. **Γ(1)=** ………..
$\mathbf{\Gamma^{-} (4)=}$ ………….. $\mathbf{\Gamma^{+} (4)=}$…………….. **Γ(4)=** ……………….

- **Degré d'un sommet**

Le degré d'un sommet x est le nombre d'arêtes incidentes à x (le nombre d'arcs sortant ou rentrant du sommet x). Il est noté d(x).

Lorsque d(x)=0, on dit que le sommet x est **isolé**.
Lorsque d(x)=1, on dit que le sommet x est **pendant**.

Remarque:
Dans un graphe orienté, $d(x) = d^{+}(x) + d^{-}(x)$ avec :
$d^{+}(x)$: Le **demi-degré extérieur (degré sortant)** d'un sommet x (nombre d'arcs sortant de x).
$d^{-}(x)$: Le **demi-degré intérieur (degré entrant)** d'un sommet x (nombre d'arcs arrivant en x).

Exemple :
- Dans le graphe non orientée G2:

d(1)=……. d(6)=…….
d(5)= …… d(3)=…….
d(4)=…….

- Dans le graphe orientée G3:

$d^+(1)$=…….. $d^-(1)$= …….. d(1)=…….
$d^+(4)$=…….. $d^-(4)$= …….. d(4)=…….

- **Chaînes, chemins, cycles, circuits**

Une chaîne (un chemin) d'un sommet x vers un sommet y est une séquence <S0, S1, S2,… Sk > de sommets tels que x = S0, y = Sk, et tel que $\{S_i , S_{i+1}\} \in A, \forall i \in [0..k]$ ($(S_i , S_{i+1}) \in A, \forall i \in [0..k]$).

Une chaîne (un chemin) ne rencontrant pas deux fois le même sommet est dit(e) **élémentaire**.

Une chaîne (un chemin) ne rencontrant pas deux fois la même arête est dit(e) **simple**.

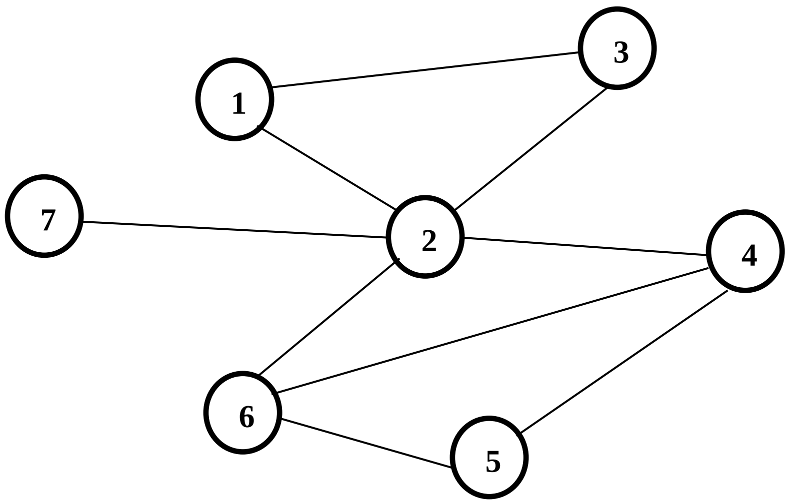
La longueur d'une chaîne (d'un chemin) C est le nombre d'arêtes de la chaîne C (le nombre d'arcs du chemin C).

Un cycle (circuit) est une chaîne (un chemin) simple C = <S0, S1, S2,… Sk > tel que S0 = Sk.

Un cycle (circuit) ne rencontrant pas deux fois le même sommet est dit **élémentaire**.

Un graphe sans cycle (sans circuit) est un graphe acyclique.

Exemple : soit le graphe suivant:



La séquence <……………………….> est une chaine simple et élémentaire de longueur ……. reliant le sommet ……. au sommet …….
La chaîne < …………………….. > n'est pas une chaîne simple.
La chaîne <………………………..> n'est pas une chaîne élémentaire.
La séquence <……………….. > est un cycle élémentaire de longueur ……. reliant le sommet …… à lui-même.
La séquence <…………………….. > n'est pas un cycle.

2. Représentation en mémoire des graphes

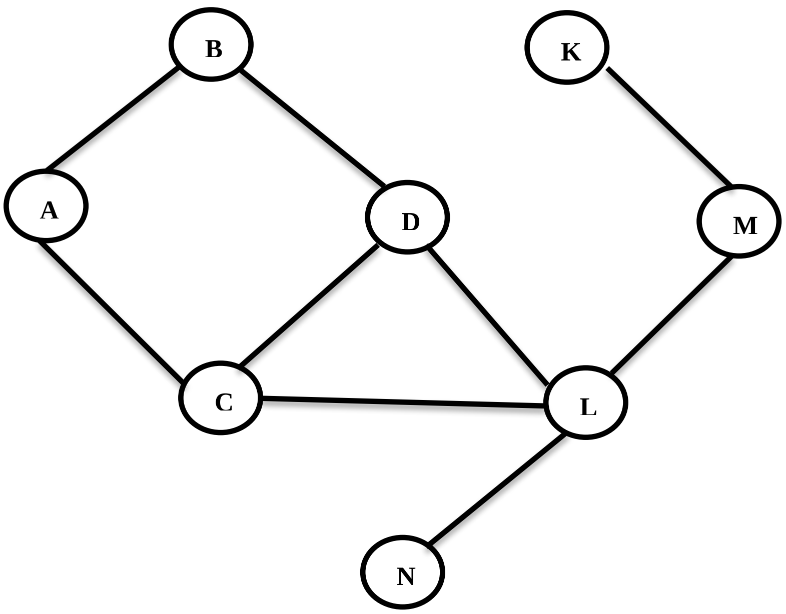
Soit G = (S, A) un graphe simple, non valué d'ordre n et de taille m.

1. Représentation par une matrice d'adjacence

La matrice d'adjacence de G est une matrice M d'ordre n×n. chaque élément $M[i, j]$ de la matrice désigne la présence ou l'absence d'une arête {i, j} (d'un arc (i,j)).

Exemple:

- Soit le graphe G suivant:

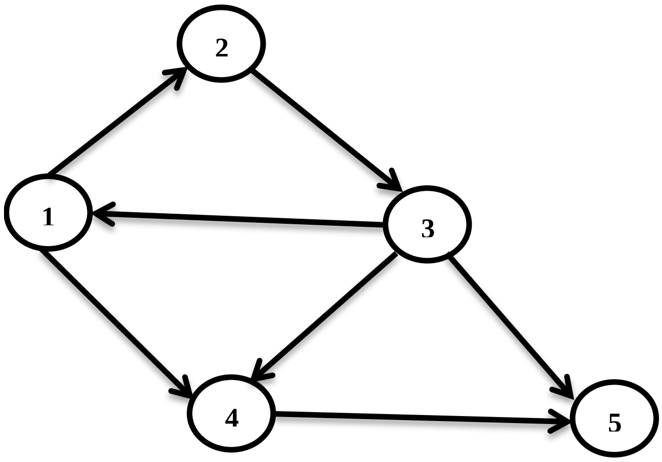


Le graphe G est représenté par la matrice d'adjacence M suivante:

M =

	A	B	C	D	K	L	M	N
A	0	1	1	0	0	0	0	0
B	1	0	0	1	0	0	0	0
C	1	0	0	1	0	1	0	0
D	0	1	1	0	0	1	0	0
K	0	0	0	0	0	0	1	0
L	0	0	1	1	0	0	1	1
M	0	0	0	0	1	1	0	0
N	0	0	0	0	0	1	0	0

- Soit le graphe H suivant:



Le graphe H est représenté par la matrice d'adjacence M suivante:

M =

	1	2	3	4	5
1	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
2					
3					
4					
5					

2. Représentation par une matrice d'incidence

La matrice d'incidence de G est une matrice M d'ordre n×m.

- ***Graphe non orienté***

$$\forall\ i \in S, \forall j \in A: M[i,j] = \begin{cases} 1 & Si\ le\ sommet\ i\ est\ incident\ \text{à arête}\ j \\ 0 & sinon \end{cases}$$

- ***Graphe orienté***

$$\forall\ i \in S, \forall j \in A: M[i,j] =$$

$$\begin{cases} -1 & si\ i\ est\ une\ extrim\text{été}\ finale\ de\ l'arc\ j\ (j\ est\ un\ arc\ entrant\ pour\ i) \\ 1 & si\ i\ est\ une\ extrimit\text{é}\ initiale\ de\ l'arc\ j\ (j\ est\ un\ arc\ sortant\ de\ i) \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Exemple:

- Le graphe G est représenté par la matrice d'incidence M suivante:

	{A,B}	{A,C}	{B,D}	{C,D}	{C,L}	{D,L}	{K,M}	{L,M}	{L,N}
A	1	1	0	0	0	0	0	0	0
B									
C									
D									
K									
L									
M									
N									

- Le graphe H est représenté par la matrice d'incidence M suivante:

	(1,2)	(1,4)	(2,3)	(3,1)	(3,4)	(3,5)	(4,5)
1	1	1	0	-1	0	0	0
2							
3							
4							
5							

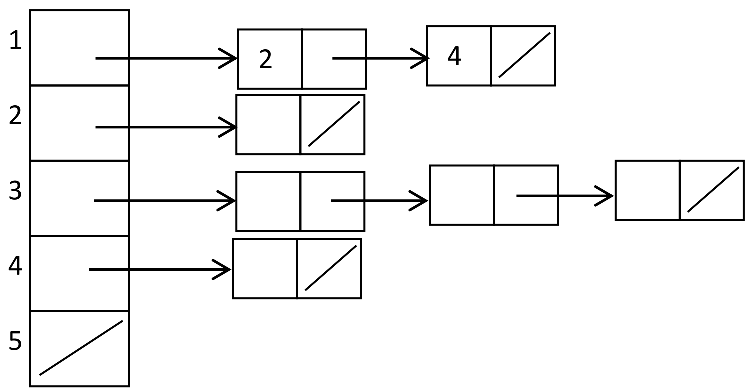
3. Représentation par des listes d'adjacence

La représentation par listes d'adjacence de G consiste en un tableau T de n listes, une pour chaque sommet de S. Pour chaque sommet x ∈ S, la liste d'adjacence T[x] est une liste chainée de tous les sommets voisins (successeurs et/ou prédécesseurs) de x.

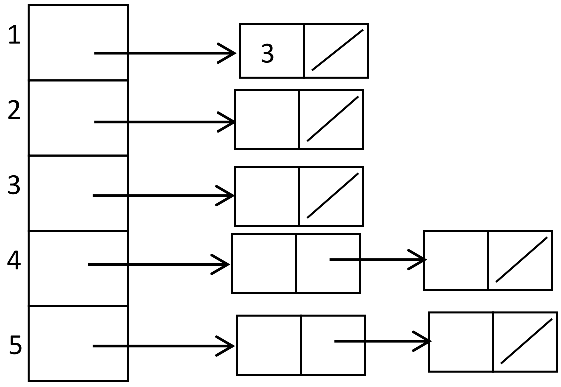
Remarque: Si le graphe est orienté en utilise soit la représentation par les listes des successeurs et/ou la représentation par les listes des prédécesseurs.

Exemple:

- Le graphe H est représenté par les listes des successeurs et les listes des prédécesseurs suivantes:

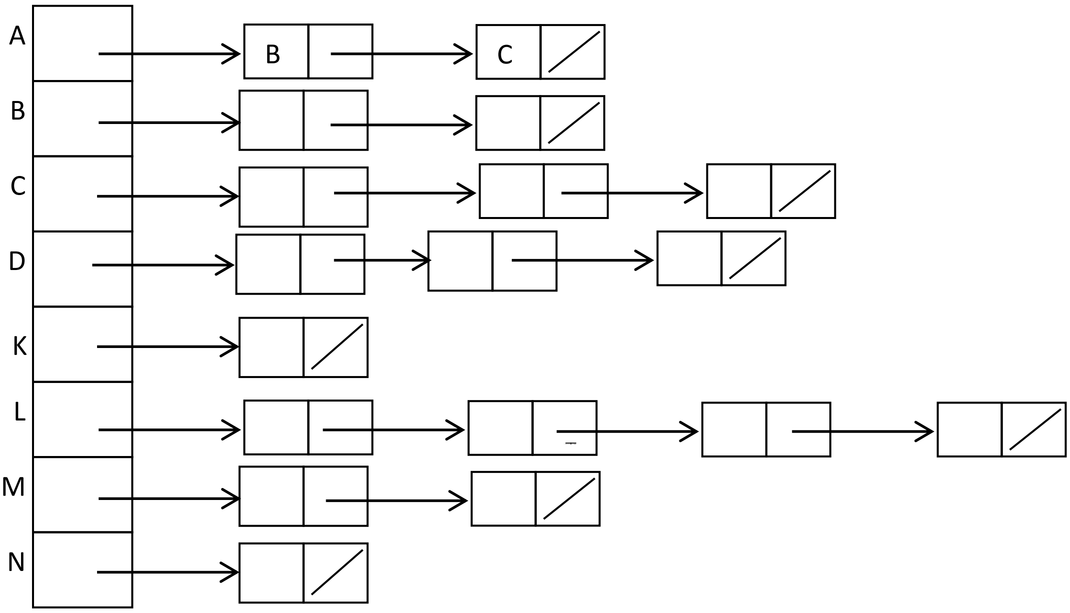


Représentation du graphe G par Listes des successeurs



Représentation du graphe G par Listes des prédécesseurs

- Le graphe G est représenté par les listes d'adjacence suivante:



4. Parcours des graphes

4.1. Parcours en largeur

```
Procédure ParcoursLargeur (val G : Graphe)
  Variables
    Sd : sommet
  Début
     Initialiser tous les sommets à non marqué
     Tant qu'il existe un sommet non marqué Faire
         Choisir un sommet non marqué Sd
         Largeur (G,Sd)
     Ftantque
  Fin
FinProcédure
```

```
Procédure Largeur (val G : Graphe,  val Sd : sommet)
Variables
  F : File
  x,y : sommet
Début
     CreerFileVide(F)
     Enfiler (Sd,F)
     Marquer le sommet  Sd
     Tant que ((Non FileVide(F)) Faire
          x ← TeteFile(F)
          Defiler(F)
          Afficher le sommet x
          Pour chaque sommet y adjacent (successeur) à x Faire
                 Si y est non marqué Alors
                   Enfiler (y,F)
                   Marquer le sommet y
                Fsi
           Finpour
         FinTantque
   Fin
FinProcédure
```

Exemple:

- Parcours en largeur du graphe G à partir du sommet L : ………………………
- Parcours en largeur du graphe H à partir du sommet 1 : ………………………

4.2. Parcours en profondeur

```
Procédure ParcoursProfondeur (Val G : Graphe)
  Variables
    Sd : sommet
  Début
     Initialiser tous les sommets à non marqué
     Tant qu'il existe un sommet non marqué Faire
           Choisir un sommet non marqué Sd
           Profondeur (G,Sd)
      Ftantque
  Fin
FinProcédure
```

```
Procédure Profondeur (Val G : Graphe,  Val Sd : sommet)
  Variables
      x : sommet
   Début
          Marquer le sommet  Sd
          Afficher le sommet Sd
          Pour chaque sommet x adjacent (successeur) à Sd Faire
                Si x est non marqué Alors
                  Profondeur (G,x)
               Fsi
           Finpour
      Fin
 FinProcédure
```

Exemple:

- Parcours en profondeur du graphe G à partir du sommet L : ………………….
- Parcours en profondeur du graphe H à partir du sommet 1 : …………………..