Chapitre 3 : Problème de coloration et problème de flot

1. Problème de coloration d'un graphe

Définition 2.1. (coloriage d'un graphe)

Soit G = (S,A) un graphe simple non-orienté, colorier le graphe G consiste à assigner une couleur (ou un nombre) à chaque sommet du graphe de telle sorte que deux sommets reliées par un arc/arête aient des couleurs différentes en utilisant le moins de couleurs possibles. Le nombre minimal de couleur est appelé γ(G) =nombre chromatique du graphe G.

De même **colorier les arêtes du graphe G** consiste à assigner une couleur (ou un nombre) à chaque arête du graphe de telle sorte que deux arêtes reliées à un même sommet aient des couleurs différentes en utilisant le moins de couleurs possibles. Le nombre minimal de couleur est appelé γ′(G) =indice chromatique du graphe G.

Il existe un algorithme intéressant pour colorier un graphe : l'algorithme de Welsh-Powell. Cet algorithme est plus compliqué mais souvent moins long à mettre en œuvre.

```
fonction G = Welsh(G)
  L = liste des sommets classés dans l'ordre décroissant de leur degré
  couleur courante = 0
  tant que L ≠ ∅ faire
           incrémenter la couleur courante
           Colorier s le premier sommet de L avec la couleur courante
           éliminer s de L
           V = liste des voisins de s
           pour tout x dans L faire
                    si x ∉ V alors colorier x avec la couleur courante
                                   ajouter les voisins de x à V
                    fin
             fin faire
             éliminer les sommets coloriés de L
           fin faire
```

Enfin notons que la structure du graphe impose certaines contraintes sur le nombre chromatique :

• les sommets d'une même clique doivent être coloriés d'une couleur différente

• les sommets d'un même stable peuvent tous être coloriés de la même couleur cela permet d'encadrer le nombre Chromatique de G :

• obtenir un coloriage à k couleurs permet d'affirmer que $\gamma(G) \leq k$

• trouver une clique à k sommets permet d'affirmer que $\gamma(G) \geq k$

Le coloriage d'un graphe permet de résoudre de nombreux problèmes d'incompatibilité. Les notions de graphe complet, de stable et de clique jouent un rôle très important dans le coloriage d'un graphe. Mais ce problème est aussi relié à un autre problème d'apparence plus complexe : le problème des graphes planaires.

Définition 2.1 (graphe planaire) Un graphe G = (S,A) est dit planaire s'il existe un diagramme isomorphe de ce graphe où aucun arc/arêtes n'en coupe d'autre.
Le théorème suivant fait le lien entre graphe planaire et coloriage d'un graphe.

Théorème 2.1. (des quatre couleurs) Tout graphe planaire peut être colorié avec au plus quatre couleurs

☐ Un graphe ayant pour nombre chromatique $\gamma(G) = 5$ ne peut donc pas être planaire. Mais attention, la réciproque de ce théorème est fausse : un graphe avec $\gamma(G) = 4$ n'est pas forcément planaire!

2. Problème de flots dans les réseaux

L'une des applications les plus importantes de la théorie des graphes est l'optimisation des flots dans les réseaux. Pour étudier ce problème il faut d'abord définir ce qu'est un réseau de transport.

Définition 3.16 (réseau de transport) Un réseau de transport est un quadruplet (G,s,t,C) où

• G = (S,A) est un graphe orienté simple

• s est un sommet sans prédécesseur appelé ≪ source ≫

• t est un sommet sans successeur appelé ≪ puits ≫

• C : A −→ R+ est une valuation positive de G appelée ≪ capacité ≫ pour un ensemble de sommets $W \subset S$ on notera arcs entrants en W : l'ensemble d'arcs $W- = \{(x,y) \in A | x \notin W \text{ et } y \in W\}$ arcs sortants de W : l'ensemble d'arcs $W+ = \{(x,y) \in A | x \in W \text{ et } y \notin W\}$ si W = {z} est un singleton on notera ces ensembles simplement z+ et z−.

Le réseau de transport va donc servir de support à ≪ un flot ≫. Ce flot est en fait une seconde valuation attachée au graphe représentant le réseau.

Définition 3.17 (flot) Soit (G,s,t,C) un réseau de transport, alors un flot sur ce graphe G = (S,A) est une valuation positive f : A −→ R+ qui vérifie :

• le flot ne dépasse pas la capacité

∀(x,y) ∈ A, 0 ≤ f(x,y) ≤ C(x,y)

• la loi des nœuds ∀z ∈ S \ {s;t}, X (x,z)∈z+

f(x,z) = X (z,y)∈z−

f(z,y)

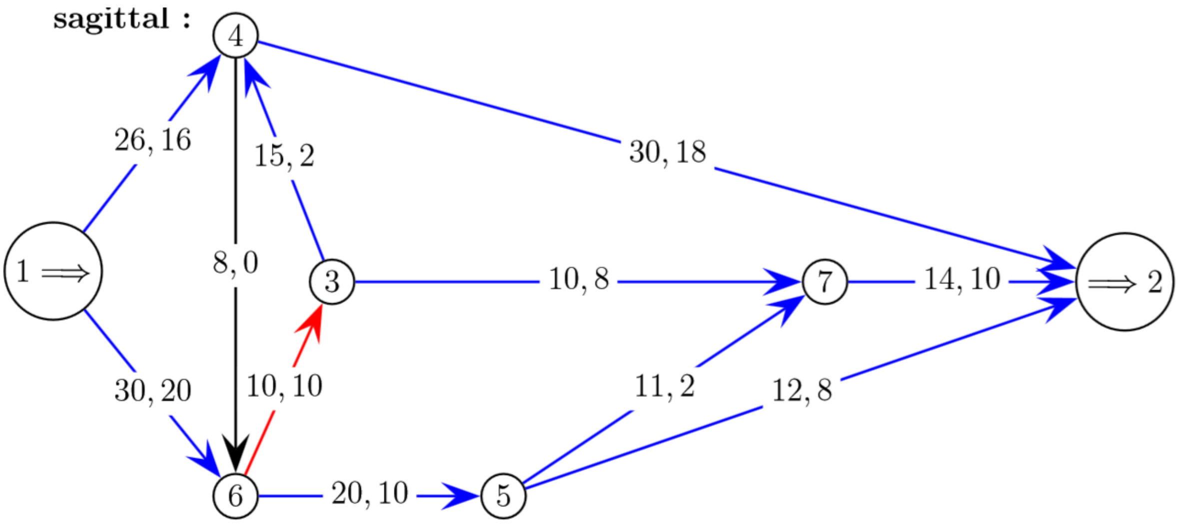
Pour tout sommet z on appelle : flot entrant en z : la quantité f−(z) = X (x,z)∈z−f(x,z)

flot sortant de z : la quantité f+(z) = X (z,y)∈z+f(z,y)

Et on dira que le flot f sur l'arc (x,y) est : saturé : si f(x,y) = C(x,y) nul : si f(x,y) = 0

La contrainte la plus importante pour un flot est la loi des nœuds. Elle a été posée par le physicien allemand Gustav Kirchhoff en 1845, lorsqu'il a établi les règles de calcul des intensités des courants dans un circuit électrique. Elle exprime simplement la conservation du flux :≪ le flux entrant= le flux sortant ≫.

Représenter un réseau de transport et un flot sur un diagramme sagittal :



la source est le sommet 1 et le puits est le sommet 2

• sur chaque arc

— le premier nombre indique la capacité

— le second nombre indique le flot par exemple l'arc (3,7) à une capacité C(3,7) = 10 et un flot f(3,7) = 8

• le flot de l'arc (6,3) est saturé et le flot de l'arc (4,6) est nul

• pour $W = \{5;6\}$

— $W- = \{(1,6);(4,6)\}$ mais ne contient pas $(6,5)$!

— $W+ = \{(6,3);(5,7);(5,2)\}$

• la loi des nœuds se vérifie en chaque sommet, par exemple pour 3

— $f-(3) = 10$ car $3- = \{(6,3)\}$

— $f+(3) = 8 + 2 = 10$ car $3+ = \{(3,4);(3,7)\}$

Définition 3.18 (coupe) Soit (G,s,t,C) un réseau de transport, une coupe est un ensemble de sommets contenant la source :

$W \subset S, s \in W$

On appelle capacité de la coupe W la quantité : $CW = X\ (x,y) \in W + C(x,y)$

Une coupe est donc un ensemble qui ≪ coupe ≫ en deux le graphe avec d'un coté la source et de l'autre le puits. La coupe permet de définir la valeur du flot, c'est à dire la quantité qui a été transporté de la source jusqu'au puits. La capacité des différentes coupes impose une limite maximale au flot dans un réseau de transport.

Dans certains ouvrages sur les flots, on ajoute au graphe un arc fictif, partant du puits t pour rejoindre la source s, avec la valuation $f(s,t) = V(f)$, de telle sorte que s et t vérifient aussi la loi des nœuds.