Module Algebre1 – Première année informatique

مقياس الجبر 1 – السنة الأولى إعلام آلي

Chapitre 1 : **Notions de logique** • Table de vérité, quantificateurs, types de raisonnements.

Chapitre 2 : Ensembles et applications • Définitions et exemples • Applications : injection, surjection, bijection, image directe, image réciproque, restriction et prolongement.

Chapitre 3 : Relations binaires sur un ensemble • Définitions de base : relation réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive • Relation d'ordre- Définition. Ordre total et partiel • Relation d'équivalence : classe d'équivalence.

Chapitre 4 : **Structures algébriques** • Loi de composition interne. Partie stable. Propriétés d'une loi de composition interne • Groupes-Définitions. Sous-groupe-Exemples-Homomorphisme de groupes- isomorphisme de groupes. Donner des exemples de groupes finis Z/nZ (n= 1, 2 , 3,…) et le groupe de permutations S3 • Anneaux-Définition- Sous anneaux. Règles de calculs dans un anneau. Eléments inversibles, diviseurs de zéro-Homomorphisme d'anneaux-Idéaux • Corps-Définitions-Traiter le cas d'un corps fini à travers l'exemple Z/pZ ou p est premier, IR et C

Chapitre 5 : **Anneaux des polynômes** • Polynôme. Degré • Construction de l'anneau des polynômes • Arithmétique des polynômes-Divisibilité-Division euclidienne-Pgcd et ppcm de deux polynômes-Polynômes premiers entre eux-Décomposition en produit de facteurs irréductibles • Racines d'un polynôme-Racines et degré -Multiplicité des racines.

Mode d'évaluation :

Examen (60%**)**,

Contrôle conti nu – interrogations, devoirs, participations et présences- (40%)

Références

• M. Mignotte et J. Nervi, Algèbre : licences sciences 1ère année, Ellipses, Paris, 2004.

• J. Franchini et J. C. Jacquens, Algèbre : cours, exercices corrigés, travaux dirigés, Ellipes, Paris, 1996.

• C. Degrave et D. Degrave, Algèbre 1ère année : cours, méthodes, exercices résolus, Bréal, 2003.

• S. Balac et F. Sturm, Algèbre et analyse : cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés, Presses Polytechniques et Universitaires, 2003.

الفصل الأول: مدخل للمنطق الرياضي

المنطق الرياضي او المنطق الرمزي هو أحد حقول الرياضيات المتصل بأساسيات الرياضيات، علوم الحاسوب النظرية والذكاء الاصطناعي .
ويمتد علم المنطق الحديث ليشمل آفاقًا أرحب بكثير مما شمله المنطق التقليدي لأرسطو الذي يعتمد على الاستقراء المطلق. ومن علماء المنطق الحديث البارزين عالما الرياضيات البريطانيان **جورج بُول** و**أَلْفرد نُورْث وايتهد**، و البريطاني **راسل**. وعلى عكس المناطقة التقليديين، فقد استخدم هؤلاء المناطقة مناهج حسابية وأساليب تستخدم الرموز .
ويستخدم علم المنطق اليوم بصفة أساسية لاختبار مدى سلامة القضايا .كما أن له استخدامات مهمة أيضًا في مجال العمل مع أجهزة مثل الحواسيب، والدوائر الكهربائية .

1- القضية

تعريف1:

القضية: (Proposition) نسمي قضية كل جملة خبرية لها معنى قد تكون صحيحة و قد تكون خاطئة نرمز للصحيحة بـ1 او V و للخاطئة بـ 0 او F نرمز للقضايا بالأحرف ...,P, Q, R.

امثلة :
- جيجل مدينة ساحلية قضية صحيحة.
- 3 عدد زوجي قضية خاطئة.
- السماء صافية ليست قضية لأننا لا يمكن الحكم عليها.

نفي قضية :**(Négation d'une proposition)** نفي قضية P هي قضية يرمز لها $\overline{\mathrm{P}}$ أو $\mathrm{P}^{\sim}$ أو $\neg$P و نقرا نفي P او ليس P .
اذا كانت P صحيحة كان نفيها خاطئة و العكس بالعكس
نفي القضية الخاطئة : $10 < 25$ هي القضية الصحيحة: $10 \geq 25$.
جدول الحقيقة:(Tableau de vérité) جدول الحقيقة للقضية P و نفيها يعطى بـ:

P	$\bar{P}$
1	0
0	1

2- الروابط المنطقية : (Connecteurs logiques)
- **الوصل: (Conjonction)** وصل قضيتين P، Q (او اكثر) هو القضية التي يرمز لها P∧Q والتي تكون خاطئة اذا كانت احداهما على الاقل خاطئة .
  القضية 3<2 و 5 عدد موجب، قضية خاطئة.
- **الفصل: (Disjonction)** فصل قضيتين P، Q (او اكثر) هو القضية التي يرمز لها P∨Q والتي تكون صحيحة اذا كانت احداهما على الاقل صحيحة.
  القضية 1<2 أو 3- عدد موجب، قضية صحيحة.
- **الاستلزام(Implication)** الاستلزام المنطقي للقضيتين P و Q و يرمز له P⇒ Q هو القضية $\overline{\mathrm{P}}$∨Q و تسمى القضية Q⇒P بـ**الاستلزام العكسي** (**Implication inverse**) للاستلزام P⇒ Q.
  القضية 1<2 ⇒ 2 عدد فردي، قضية صحيحة.
- **تكافؤ: (Equivalence)** نسمي تكافؤ القضيتين P و Q و يرمز له P⇔ Q القضية (Q⇒P) ∧(P⇒Q)
  القضية $3^2 \leq (-2)^2$ ⇔ 3≤2- قضية خاطئة.

ملاحظة: اذا كانت القضيتانQ,P متكافئتين فإنهما صحيحتين او خاطئتين في أن واحد.
ويعطى جدول الحقيقة لهذه القضايا بـ:

P	Q	$\overline{\mathrm{P}}$	$\overline{\mathrm{Q}}$	P∧Q	P∨Q	P⇒Q	Q⇒P	P⇔Q
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1

نظرية 1: اذا كانت R,Q,P ثلاث قضايا فان

1- $\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P$ ، $P\wedge P \Leftrightarrow P$ و $P\vee P \Leftrightarrow P$.

2- $P\wedge Q \Leftrightarrow Q\wedge P$ و $P \vee Q \Leftrightarrow Q\vee P$

3- $P\wedge(Q\wedge R) \Leftrightarrow (P\wedge Q)\wedge R$ و $P\vee(Q\vee R) \Leftrightarrow (P\vee Q)\vee R$

4- $P\wedge(Q\vee R) \Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$ و $P\vee(Q\wedge R) \Leftrightarrow (P\vee Q)\wedge(P\vee R)$ الوصل توزيعي على الفصل و الفصل توزيعي على الوصل

5- $\overline{(P\wedge Q)} \Leftrightarrow \overline{P}\vee\overline{Q}$ و $\overline{(P\vee Q)} \Leftrightarrow \overline{P}\wedge\overline{Q}$ نفي الوصل هو فصل النفي و نفي الفصل هو وصل النفي .

البرهان : نستخدم جدول الحقيقة و نكتفي بإثبات 4 و 5

اثبات أن $P\wedge(Q\wedge R) \Leftrightarrow (P\wedge Q)\wedge R$:

P	Q	R	$P\wedge Q$	$P\wedge R$	$Q\vee R$	$P\wedge(Q\vee R)$	$(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

اثبات أن $\overline{(P\wedge Q)} \Leftrightarrow \overline{P}\vee\overline{Q}$ و $\overline{(P\vee Q)} \Leftrightarrow \overline{P}\wedge\overline{Q}$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P\wedge Q$	$\neg(P\wedge Q)$	$\neg P\vee\neg Q$	$P\vee Q$	$\neg(P\vee Q)$	$\neg P\wedge\neg Q$
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1	0	1	1

- **عكس نقيض الاستلزام** (Implication contraposé): عكس نقيض الاستلزام $P\Rightarrow Q$ هو الاستلزام $\overline{Q}\Rightarrow\overline{P}$ و هو مكافئ للاستلزام $P\Rightarrow Q$

يكفي ملاحظة $$(\overline{Q}\Rightarrow\overline{P}) \Leftrightarrow (\overline{\overline{Q}}\vee\overline{P}) \Leftrightarrow (Q\vee\overline{P}) \Leftrightarrow (P\Rightarrow Q)$$

عكس نقيض الاستلزام $2>1 \Rightarrow 2$ عدد فردي، هو الاستلزام: 2عدد زوجي $\Rightarrow 2\le 1$

3- الدالة العبارية (او لجملة المفتوحة) و المكممات (Prédicat et quantificateurs) :

الجملة المفتوحة (او **الدالة العبارية**) (Prédicat)

تعريف2: الجملة المفتوحة هي كل عبارة رياضياتية تتوقف صحتها على متغير او عدة متغيرات تنتمي لمجموعة معلومة E

مثال: n زوجي: $n\in\mathbb{N}$ ، $x+y=10$: $x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}$.

المكمم الكلي quantificateur universel : يرمز له بـ $\forall$ و العبارة " $\forall x\in E;P(x)$ " تقرا مهما يكن x من E لدينا P(x).

مثال: 2n زوجي: $\forall\, n\in\mathbb{N}$ و $x+y=10$: $\forall x\in\mathbb{R}, \forall y\in\mathbb{R}$

المكمم الوجودي quantificateur existentiel : يرمزله بـ $\exists$ و العبارة " $\exists x\in E;P(x)$ " تقرا يوجد على الاال x من E يحقق P(x).

n زوجي: $\exists n\in\mathbb{N}$ و $x+y=10$: $\forall x\in\mathbb{R}, \exists y\in\mathbb{R}$ و $x+y=10$: $\exists x\in\mathbb{R}, \forall y\in\mathbb{R}$

طالب من جامعة جيجل حصل على المرتبة الاولى نكتب " x حصل على المرتبة الاولى: $\exists x\in E$" حيث E مجموعة طلبة جامعة جيجل.

ملاحظة:

نفي القضية $\forall x\in E : P(x)$ هي القضية $\exists x\in E : \overline{P(x)}$

نفي القضية $\exists x\in E : P(x)$ هي القضية $\forall x\in E : \overline{P(x)}$

نفي القضية $\exists x\in E, \forall y\in E : P(x,y)$ هي القضية $\forall x\in E, \exists y\in E : \overline{P(x,y)}$

نفي القضية $\forall x\in E, \exists y\in E : P(x,y)$ هي القضية $\exists x\in E, \forall y\in E : \overline{P(x,y)}$

نفي القضية $\forall x\in\mathbb{R}, \exists y\in\mathbb{R}$:x+y=10 هي القضية $\exists x\in\mathbb{R}, \forall y\in\mathbb{R}$:x+y≠10

المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ متقاربة نحو l نكتب

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n \in N, n > n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

نفيها

المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ غير متقاربة نحو l نكتب: $\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists n_0 \in \mathbb{N}: n_0 > n \wedge |u_{n_0} - l| \geq \varepsilon$

4. طرق الإستدلال :توجد ستة طرق للاستدلال هي:

1.4 الإستدلال المباشر : لإثبات أن Q صحيحة نفرض أن P صحيحة ونثبت صحة الاستلزام $P \Rightarrow Q$.

مثال : برهن المتراجحة $\forall x \in \Re; x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$

لدينا $(x+\frac{1}{2})^2 \geq 0$ صحيحة

$(x+\frac{1}{2})^2 \geq 0 \Rightarrow (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ استلزام صحيح و بالتالي: $x^2 + x + 1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ صحيحة

الإستدلال بالخلف: اذا اردنا اثبات صحة قضية نفرض انها خاطئة و نحاول ان نجد تناقض او عبارة خاطئة.

مثال : اذا كان aعدد طبيعي بحيث $(a^3 + a^2 + a)$ عدد فردي بين كذلك أن a عدد فردي. نفرض جدلا أن a زوجي اذن a^2 زوجي و a^3 زوجي و منه $(a^3 + a^2 + a)$ زوجي و هذا يتناقض مع الفرض.

الإستدلال بفصل الحالات اذا كانت لدينا: $P \to R$ و $Q \to R$ صحيحتان فانه بإمكاننا اثبات ان $[P \vee Q]\to R$ صحيحة.

مثال : برهن المتراجحة $\forall x > 0; x + \frac{1}{\sqrt{x}} > 1$

بما ان $x > 0$ لدينا حالتين:

الحالة الأولى: $x > 1$: فان $\frac{1}{\sqrt{x}} > 0$ و بالتالي $x + \frac{1}{\sqrt{x}} > 1$.

الحالة الثانية: $0 < x \leq 1$: فان $\frac{1}{\sqrt{x}} \geq 1$ و بالتالي $x + \frac{1}{\sqrt{x}} > 1$

الإستدلال بعكس النقيض : نعلم ان الإستلزام المنطقي $P\Rightarrow Q$ يكافئ عكس نقيضه $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ فلاثبات صحة $P\Rightarrow Q$ نكتفي باثبات صحة $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

مثال : برهن أن $\forall x \in \Re; x^2 > 4 \to [x > 2 \vee x < -2]$

نبين عوض ذلك $\forall x \in \Re; -2 \leq x \leq 2 \to x^2 \leq 4$

$$-2 \leq x \leq 2 \to |x| \leq 2 \to |x|^2 \leq 4 \to x^2 \leq 4$$

الإستدلال بالمثال المضاد

لإثبات أن القضية : $\forall x \in E, P(x)$ خاطئة يكفي اثبات صحة $\exists x \in E: \overline{P(x)}$

مثال : لاثبات ان القضية " كل عدد صحيح موجب هو مجموع ثلاث مربعات " خاطئة

من اجل العدد 7 فأن الاعداد الوحيدة التي بامكانها تشكل العدد 7 هي 0، 2، 1 لكن مجموع مربعاتها لا تساوي 7

الإستدلال بالتراجع: لاثبات صحة القضية $[\forall n \geq n_0 ; P(n)]$ حيث n , n_0 اعداد طبيعية نتبع ما يلي:

1- اثبات صحة $[P(n_0)]$.
2- نفرض أنه من اجل $n \geq n_0$: $[P(n)]$ صحيحة و نثبت صحة $[P(n+1)]$

مثال: لنثبت صحة الخاصية التالية: من أجل كل عدد طبيعي n : $1+3+5+.....+(2n+1) = (n+1)^2$

1. من أجل $n=0$ لدينا: $1=(0+1)^2$ محققة من أجل $n=0$.

2. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل $n \geq 0$ أي: $1+3+5+.....+(2n+1) = (n+1)^2$.

ولنبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي: $1+3+5+.....+(2n+3) \stackrel{?}{=} (n+2)^2$

لدينا

$$1+3+5+.....+(2n+3) = [1+3+5+....+(2n+1)] + (2n+3)$$
$$= (n+1)^2 + (2n+3) = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$$

سلسلة التمارين

التمرين 01:

1) أكتب جدول الحقيقة للقضايا التالية :

$$(1)\quad \left(P\vee\overline{P}\right)\ ,(2)\quad \left(P\wedge\overline{P}\right)\ ,(3)\quad \left[P\wedge(P\vee Q)\right]\ ,(4)\quad \left[P\vee(P\wedge Q)\right]$$

ماذا تستنتج؟

2)برهن مستخدما جدول الحقيقة أن الإستلزام المنطقي غير تجميعي أي $[(p\Rightarrow q)\Rightarrow r]\Leftrightarrow[p\Rightarrow(q\Rightarrow r)]$

التمرين 02:

اكتب بدلالة المكممات القضايا التالية:

1) جميع الطلبة ملزمون بإجراء الفحص الطبي

2) طالب من جامعة جيجل تفوق في المسابقة الدولية

التمرين 03:

1) وضح حسب قيم x الحقيقة إن كانت العبارات التالية قضايا مبينا الصحيحة منها من الخاطئة:

$$(1)\quad \sin^2(tgx)\geq 0 \qquad (2)\quad \frac{1}{1-x^2}\geq 1$$

2) هل القضايا التالية صحيحة ؟

$$(3)\quad 5-1=0\vee\frac{1}{2}\in Q \qquad (4)\quad x\in\phi\Rightarrow x\in E$$

3) أكتب نفي القضيتين(3)و (4) ، عكس النقيض القضية(4)و القضية (3)على شكل استلزام منطقي

التمرين 04:

برهن دون استعمال جدول الحقيقة العلاقات التالية:

$$(1)\quad (P\vee Q)\Leftrightarrow\left(\overline{P}\Rightarrow Q\right)\quad (2)\quad P\Leftrightarrow\left[(Q\Rightarrow P)\wedge\left(\overline{Q}\Rightarrow P\right)\right]$$

التمرين 05:

برهن مستخدما مختلف طرق البراهين العلاقات التالية:

1) إذا كان x عدد حقيقي موجب فإن $\frac{x+1}{x+2}<\frac{x+3}{x+4}$

2) مجموع عدد ناطق مع عدد صم هو عدد صم.

3) من أجل كل $n\in N$: $n^2\ paire\Leftrightarrow n\ paire$

4) $\forall x\in\Re: x^2-9>0\Rightarrow x^2-x-2>0$

5) ليكن x عدد حقيقي موجب.برهن الاستلزام التالي: $\left[\forall\varepsilon>0: x<\varepsilon\Rightarrow x=0\right]$

6) برهن متراجحة برنولي: $h>-1\Rightarrow\forall n\in N:(1+h)^n\geq 1+nh$

التمرين 06:

برهن مستخدما مختلف طرق البراهين العلاقات التالية:

1) المستقيمان $y=x+1$ و $y=x-1$ متوازيان في المستوى.

2) إذا كانت المتتالية $(u_n)_{n\in N}$متقاربة فإن المتتالية $(v_n)_{n\in N}$ متباعدة حيث $v_n=u_n+(-1)^n$

3) $\forall n\in N,\exists k\in N; n^2=4k\ ou\ n^2=4k+1$

التمرين 07:

لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ برهن أن $(2)\Rightarrow(1)$ حيث:

$$(1)\quad \forall\varepsilon>0,\exists n_0\in N,\forall n\in N,n>n_0\Rightarrow|u_n-1|\le\varepsilon$$

$$(2)\quad \forall\varepsilon>0,\exists n_0\in N,\forall n\in N,n\ge n_0\Rightarrow|u_n-1|<\varepsilon$$

التمرين 08: (يترك للطالب)

أعط نفي القضايا التالية:

$$(1)\quad \forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall x:|x-x_0|<\alpha\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

$$(2)\quad \exists\varepsilon>0,\forall n\in N,\exists(p,q)\in N^2:p\ge q\ge n\wedge|u_p-u_q|\ge\varepsilon$$

التمرين 09:

لدينا ثلاثة طلبة أحمد ، علي ، سالم و ثلاثة علامات 06،10 و 16.

لتكن القضايا الأربع التالية :

علامة أحمد 06 $\Leftarrow$ علامة علي 10 (P_1)

علامة علي 6 $\Leftarrow$ علامة أحمد سالم 10 (P_2)

علامة أحمد ليست 10 $\Leftarrow$ علامة علي 16 (P_3)

علامة سالم 16 $\Leftarrow$ علامة علي 06 (P_4)

املأ الجدول التالي باعتبار صحة القضية من خطئها:

(P_4)	(P_3)	(P_2)	(P_1)	الاحتمال المقترح
				علامة احمد 6،علامة علي 10 و علامة سالم 16
				علامة احمد 6،علامة علي 16 و علامة سالم 10
				علامة احمد 10،علامة علي 6 و علامة سالم 16
				علامة احمد 10،علامة علي 16 و علامة سالم 6
				علامة احمد 16،علامة علي 10 و علامة سالم 6
				علامة احمد 16،علامة علي 6 و علامة سالم 10

اذا كانت القضايا الاربعة صحيحة عين علامة كل طالب.