TD N°3

Exercice 1: Etudier la monotonie des suites définie par le terme générale suivant :

1) $u_n = (n+1)(n+2)\dots(2n)$ 2) $v_n = n^2 - 2n$ $(\boldsymbol{L.E})$

3) $w_n = n^n - n!$ $(\boldsymbol{L.E})$ 4) $s_n = \lambda n + (-1)^n$, (étudier selon $\lambda \in \mathbb{R}_+$)

Exercice 2: Montrer que les suites suivantes, sont bornées :

1) $a_n = \frac{n \cos n}{2n+2+\cos n}$ 2) $b_n = \sum_{k=0}^{n} \cos k$

Exercice 3:

a) En appliquant la définition de la limite, démontrer la convergence vers la limite ℓ :

1) $u_n = \sqrt[n]{a}$, $a > 1$, $\ell = 1$; 2) $u_n = \ln \ln n$, $\ell = +\infty$

3) $u_n = \frac{4n-1}{2n+1}$, $\ell = 2$ $(\boldsymbol{L.E})$; 4) $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $\ell = 0$ $(\boldsymbol{L.E})$

b) Montrer qu'une suite dans $\mathbb{Z}$ est convergente si et seulement si elle est stationnaire.

Exercice 4: Calculer la limite des suites définies par le terme général:

$a_n = \frac{\ln(n+\ln n)}{\ln(2n+\ln n)}$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}-n}$ $(\boldsymbol{L.E})$, $c_n = \frac{1+3+9+\cdots+3^n}{3^{n+1}}$

$d_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$ $(\boldsymbol{L.E})$, $e_n = \frac{3\sqrt{n}+2\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[4]{n^2+3}+2\sqrt{n+1}}$ $(\boldsymbol{L.E})$

Exercice 5: Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^n + \beta^n}$$

1) **Cas particulier :** Pour $\alpha = 2$, $\beta = 2$ montrer le convergence de la suite et calculer sa limite.
2) **Cas général :** Discuter suivant les valeurs de α et β la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6: $(\boldsymbol{L.E})$ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Fibonacci est définie comme suit :

$$F_1 = F_2 = 1 \ , \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \ , \ n \geq 1$$

1) Trouver les solutions de l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$.
2) Montrer par récurrence que la $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, où α et β sont les solutions dans la question1.
3) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{F_n}$.

Exercice 7: **(Examen 2022/2023)**

Pour $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, Soient les suites de termes généraux :

$$u_n = \sqrt[2^n]{a} \quad , \quad v_n = 2^n(u_n - 1) \quad , \quad w_n = 2^n\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right)$$

1) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est bornée.
2) Montrer que $(u_n)_n$ est strictement croissante pour $a < 1$ et strictement décroissante pour $a > 1$.
3) Trouver la limite de $(u_n)_n$ pour les deux cas de a .
4) Etudier la monotonie et la convergence de $(u_n)_n$ pour $a = 1$.
5) Vérifier que $u_{n+1}^2 = u_n$, puis montrer que $v_n = \left(\frac{1+u_{n+1}}{2}\right) v_{n+1}$.

6) Déduire que $(v_n)_n$ est décroissante.
7) Trouver une relation entre les trois suites, puis déduire que $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ ont la même limite. Calculer cette limite pour $a = 1$.

Exercice 8: (Rattrapage 2022/2023)

Soient la fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(-1) = -1$, $f(0) = -0.7$, $f(1) = 0$.

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad , \quad \text{pour } n \geq 1$$

1) Montrer par récurrence que : $\forall n \geq 0 \quad , \quad u_n \geq -1$
2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
3) La suite est-elle convergente ?

Exercice 9: $(\boldsymbol{L.E})$

Soit la suite récurrente définie par :

$$u_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = u_n^2 + \frac{3}{16} \quad , \quad \text{pour } n \geq 1$$

1) Montrer que : $\forall n \geq 1 \quad , \quad \frac{1}{4} < u_n < \frac{3}{4}$.
2) Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
3) Déduire la convergence de la suite, et calculer sa limite.
4) Soit l'ensemble $E = \{u_n \ , \ n \in \mathbb{N}^*\}$. Trouver $\sup E$ et $\inf E$.

Exercice 10: (Complexité d'un algorithme) $(\boldsymbol{L.E})$

On considère l'algorithme suivant :

```
Variables : i, j, k, n, S (entiers)
Début
   S ← 0
   Saisir n
   Pour i de 1 à n Faire
      Pour j de 1 à i Faire
         Pour k de 1 à i Faire
            S ← S + 3
         FinPour
      FinPour
   FinPour
   Afficher S
Fin
```

1) Calculer, en fonction de l'entier n saisi par l'utilisateur, le nombre d'additions effectuées pendant l'exécution de l'algorithme.
2) Quelle valeur de S sera affichée, après exécution ?
3) En déduire la valeur affichée lorsque l'utilisateur saisit 20.

Indication : $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

A suivre…