Université Mohamed Seddik Ben Yahia -Jijel-
Département D'Informatique
2eme année Licence

Série de TD N° 04

Exercice 1 : Traduire les énoncés suivants en logique des prédicats :

1) Tous les hommes sont méchants.
2) Seulement les hommes sont méchants.
3) Il existe des hommes méchants.
4) Il existe un homme qui n'est pas méchant.
5) Il n'existe pas d'homme méchant.
6) Il existe un homme qui aime toutes les hommes.
7) Chaque chat connait un chien qui le déteste.
8) Tous les poissons, sauf les requins, sont gentils avec les enfants.
9) Tous les oiseaux ne peuvent pas voler.
10) Chaque personne aime quelqu'un et personne n'aime tout le monde, ou bien quelqu'un aime tout le monde et quelqu'un n'aime personne.
11) N'importe qui peut apprendre la logique s'il travaille assez.

Exercice 2 : Traduire en français les formules suivantes :

1) $\forall x\ (E(x) \rightarrow (\exists y\ (C(y) \wedge \exists z\ (M(z) \wedge T\ (x, y, z))))$,

avec E(x): x est étudiant, C(y): y est un cours, M(z): z est un enseignant, T (x, y, z): x suit le cours y enseigné par z.

2) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (T\ (x) \wedge C(y, x) \wedge C(w, x) \wedge D(y, z) \wedge D(y, w)) \rightarrow G(f(g(y), g(z)), g(w))$,

avec T (x) : x est un triangle, C(x, y) : y est le coté de x, D(x, y) : x est différent de y, G(x, y) : x est plus grand que y, f(x, y) : somme de x et de y, g(x) : longueur de x.

Exercice 3 *Modélisation.*

On se place dans un langage du premier ordre modélisant les entiers qui utilise les symboles suivants :

– les constantes 0, 1 ;

– les symboles de fonction binaires + et $*$ qui représentent l'addition et la multiplication et seront notés de manière usuelle $x + y$ et $x * y$;

– les symboles de prédicats unaires Pair(x) et Prem(x) représentant respectivement le fait que x est un nombre pair et x est un nombre premier (on rappelle qu'un nombre est premier s'il est strictement plus grand que 1 et n'est divisible que par 1 et par lui-même).

– les symboles de prédicats binaires Div(y, x) qui représente le fait que y divise x, $x = y$ qui représente que x est égal à y et $x \leq y$ qui représente que x est inférieur ou égal à y.

1. Formaliser les énoncés suivants :

(a) Il existe un entier plus petit ou égal à tous les autres.

(b) Il n'existe pas d'entier plus grand ou égal à tous les autres, mais pour tout entier il en existe un qui est strictement plus grand.

(c) Tout nombre entier pair est égal à la somme de deux nombres entiers premiers.

(d) L'ensemble des entiers premiers est non borné.

2. Expliquer par des phrases le sens de chacune des formules suivantes et dire si elles sont vérifiées dans le modèle des entiers :

(a) $\forall xy,\ (\text{Pair}(x) \wedge \text{Pair}(y) \Rightarrow \text{Pair}(x + y))$

(b) $\forall xy,\ \exists z,\ (\text{Div}(x, z) \wedge \text{Div}(z, y))$

3. Pour chacun des prédicats suivants, donner une formule équivalente qui n'utilise que les symboles de constantes 0 et 1, les fonctions + et $*$ et la relation d'égalité.

(a) Pair(x)

(b) Div(y, x)

(c) Prem(x) (on pourra utiliser le prédicat Div).

Exercice 4 Soit le vocabulaire composé des symboles :

Constantes : a,b,c,d,k1,k2,k3,k4 prédicats : P (unaire), E (unaire), C (unaire), I (binaire) variables : x,y,z,u,v,w

On interprète ce langage dans le domaine composé des étudiants, des cours, des personnes et des inscriptions d'une (micro) université. Le domaine est l'ensemble

D = Personne ∪Etudiant ∪ Cours, où

– Personne = {Ahmed, Salim, Madjid, Darine}

– Etudiant = {Ahmed, Salim, Madjid }

– Cours = {C1122, C1101, M2001, M2002 }

L'interprétation des constantes est donnée par :

– I(a) = Ahmed, I(b) = Salim, I(c) = Madjid, I(d) = Diane, I(k1) = C1122, I(k2) =C1101, I(k3) =M2001, I(k4) = M2002

et l'interprétation des prédicats par : I(P) = Personne, I(E) = Etudiant, I(C) = Cours, I(I) = Inscription = {(Ahmed, Histoire), (Salim, Chimie), (Madjid, Histoire) }.

**Interprétons quelques formules selon I :

1. I(a) 2. I(C(k 3)) 3. I(C(a)) 4. I(I(c,k 1)) 5. I(∃x I(x, C1101)) 6. I(∀x∃y I(x,y)) 7. I(∀x(E(x) ⇒ ∃y I(x,y)))

Lorsqu'on évalue une formule il faut faire attention aux fait que deux variables qui portent des noms différents peuvent représenter la même valeur du domaine.

Exercice 5 : Soit l'interprétation : L : { a, b : constantes, f : symbole fonctionnel, P : symbole de prédicats }

• D : {1, 2} • Ic(a) = 1, Ic(b) = 2, Ic(f(1)) = 2, Ic(f(2)) = 1, Ic(P (2, 1)) = F, Ic(P (2, 2)) =F, Ic(P (1, 2)) = V, Ic(P (1, 1)) = V.

Etablir la valeur de vérité des formules suivantes :

1) I(P (a, f(a))) 2) I(P (b, f(b))) 3) I(∀x, ∀y P (y, x)) 4) I(∀x, ∀y P (y, x) → P (f(x), f(y)))

Exercice 6 Indiquer les occurrences libres et liées de la variable x dans les formules suivantes et calculer leur FNC:

1. $\exists x\, Q(x) \wedge P(x,x) \rightarrow \neg Q(x) \wedge P(x,y)$
2. $\forall x\, P(x,y) \rightarrow \exists x Q(x) \vee P(x,z) \wedge Q(y)$
3. $\exists x\, \forall y\, p(x,y) \rightarrow \neg Q(y) \wedge P\,(x,y)$
4. $\forall x\, P(x,y) \rightarrow ((\exists y\, Q(x) \wedge P(x,z)) \rightarrow Q(y))$

Exercice 7 On considère la signature *R* = *{r(_,_)}* et les formules :

$\phi_1 = \forall x : r(x,x)$,

$\phi_2 = \forall x,y : (r(x,y) \Rightarrow r(y,x))$,

$\phi_3 = \forall x,y,z : (r(x,y) \wedge r(y,z)) \Rightarrow r(x,z)$.

On pose $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3$.

1. Donner un modèle de ϕ.

2. Peut-on trouver un modèle de ϕ dont le domaine ne contient qu'un seul élément ?

3. La formule ϕ est-elle une tautologie ?

On pose $\psi = (\neg\phi_1) \wedge \phi_2 \wedge \phi_3$.

4. Mettre ψ sous forme prénexe puis en calculer une skolémisée ψ_s.

5. ψ_s peut-elle avoir un modèle qui n'est pas modèle de ψ (justifier votre réponse) ?

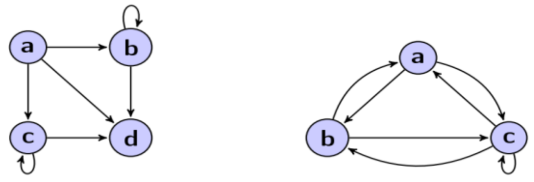
6. Même question pour ϕ et une skolémisée ϕ_s de ϕ.

Exercice 8 Déterminer une formule FNC équivalente à

1. $(\exists x P(x) \wedge \forall x(\exists y Q(y) \rightarrow R(x)))$.
2. $(\forall x \exists y R(x,y) \rightarrow \forall\, x \exists y(R(x,y) \wedge \forall z(R(x,z) \rightarrow (R(y,z) \vee E(\, y, z))))$
3. $\forall y((R(x,y) \wedge \neg E(x, y)) \rightarrow \exists z(E(y, g(x,h(z,z))))$
4. $\forall x\, \forall y(E(x, y) \Rightarrow \exists z\, A(x, z))$
5. $\forall x((\exists y(A(x, y)) \Rightarrow B(x))$

Exercice 9 On veut montrer que les trois formules
$f1 = \forall x\,((S(x) \vee T(x)) \Rightarrow P(x))$, $f2 = \forall x\,(S(x) \vee R(x))$, $f3 = \neg R(a)$ ont pour conséquence la formule $P(a)$.

Exercice 10 On se place dans un langage avec un symbole de prédicat binaire R. Soient les quatre formules de la logique du premier ordre suivantes :



modèle (A) modèle (B)

$F1$: $\forall x,((\exists y, \neg R(x, y)) \Rightarrow \exists y,(R(x, y) \wedge R(y, x)))$

$F2$: $\forall x, \exists y,(R(x, y) \vee R(y, x))$

$F3$: $\forall x\, y\, z,((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$

$F4$: $\exists x, R(x, x)$

1. On se donne des interprétations de la relation R sous forme de graphes. Le domaine est l'ensemble des sommets du graphe et on a une arête du sommet x au sommet y exactement lorsque la relation $R(x, y)$ est vérifiée dans l'interprétation. Dans chacune des deux interprétations suivantes :
(a) donner la liste des couples (x, y) tels que $R(x, y)$ est vraie dans l'interprétation ;
(b) dire lesquelles des formules $F1$, $F2$, $F3$, $F4$ précédentes sont vraies et lesquelles sont fausses. Justifier votre réponse.
2. Montrez que
(a) la formule $F2$ est conséquence logique de la formule $F1$;
(b) la formule $F4$ est conséquence des deux formules $F1$ et $F3$.
3. A l'aide d'une variante du modèle A, montrer que $F4$ n'est pas conséquence logique de $F2$ et $F3$.

Exercice 11 :
1) Représenter en logique des prédicats les énoncées H1, H2, H3, H4, H5, C.
H1 : Pour tout crime, il y a quelqu’un qui l’a commis.
H2 : Seuls les gens malhonnêtes commettent des crimes.
H3 : Ne sont arrêtés que des gens malhonnêtes.
H4 : Les gens malhonnêtes arrêtés ne commettent pas de crimes.
H5 : Il y a des crimes.
C : Il y a des gens malhonnêtes non arrêtés.
2) Donner les formes de Skolem correspondant aux énoncés H1, H2, H3, H4,H5
3) A-t-on {H1, H2, H3, H4, H5} |= C ? Utiliser la résolution.
en rappelant que {H1, H2, H3, H4, H5} |= C ssi {H1, H2, H3, H4, H5} ∪ {¬C} incohérent
Exercice 12 : Soit l’ensemble de formules F = {$\forall x(p(x) \rightarrow q(x))$, $\forall x(q(x) \rightarrow r(x))$} et la formule F = $\forall x(p(x) \rightarrow r(x))$. Est-ce que {F} |= F? Utiliser la résolution.

Exercice 13 : Soit les énoncés suivants :
F1 : $\forall x \forall y \forall z(F(x, y) \wedge F(y, z)) \rightarrow G(x, z))$
F2 : $\forall x \exists y F(y, x)$
F3 : $\neg \forall x \exists y G(y, x)$
L’ensemble {F 1, F 2, F 3} est-il cohérent ? Utiliser la méthode de résolution.