قسم الإعلام الآلي **السنة الجامعية 2024/2023**

سلسلة الأعمال الموجهة رقم 2 – الجبر 1 **المجموعات، العلاقات و التطبيقات**

التـمـرين 1:

1) لتكن $A=\{0,1\}$ عين: $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(\phi)$, $\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(A)\big)$ حيث $\mathcal{P}(A)$ هي مجموعة أجزاء A.

2) لتكن B, A أجزاء من E. برهن أن : - $A\subset B \Leftrightarrow C_EB\subset C_EA$,

- $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

3) لتكن المجموعة $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$.

أ) هل العناصر $(1,0)$ ، $(0,1)$ و $(1,1)$ تنتمي للمجموعة D
ب) استخدم البرهان بالنفي في إثبات أن المجموعة D لا يمكن كتابتها على شكل جذاء ديكارتي لمجموعتين جزئيتين من $\mathbb{R}$.

التـمـرين 2:

لتكن B, A اجزاء من E. نعرف الفرق بـ: $A-B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}$ و للفرق التناظري بـ:

$$A\Delta B=(A\cup B)-(B\cap A)$$

1) عين المجموعات التالية : $A\Delta A,\ A\Delta C_EA,\ A\Delta E, A-A,\ A-C_EA$.

2) برهن الخاصية: $A\Delta B=B\Leftrightarrow A=\emptyset$.

التـمـرين 3:

لتكن $\mathcal{M}=\big\{A=\{1,3\},B=\{2,3,4\},C=\{3,5,7\},D=\{5,7\},E=\{0,8,9\}\big\}$.نعرف العلاقة $\mathcal{R}$ على $\mathcal{M}$بـ:

$$\forall(X,Y)\in\mathcal{M}^2 : X\mathcal{R}Y\Leftrightarrow X\cap Y\neq\phi\ .$$

-1 عين بيان العلاقة $\Gamma=\{(X,Y)\in\mathcal{M}^2 : X\mathcal{R}Y\}$.

-2 هل العلاقة انعكاسيه ؟ تناظرية ؟ضد تناظرية ؟متعدية ؟

التـمـرين 4 :

نعرف العلاقة الثنائية $\mathcal{R}$ على $\mathbb{Z}$ بـ:

$$\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2 : x\mathcal{R}\,y\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z};\ x-y=3.k.$$

1) برهن أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}$.

احسب $\dot{0}$, $\dot{1}$, $\dot{2}$ و $\dot{3}$و $\dot{4}$ ثم استنتج $\mathbb{Z}/\mathcal{R}=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

التـمـرين 5 :

لتكن $E=\mathbb{N}^*$, نعرف العلاقة الثنائية $\mathcal{R}$ على E كما يلي :

$$\forall x,y\in\mathbb{N}^* : x\mathcal{R}y\Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{N}^*;\ y=x^n\ .$$

1- برهن أن $\mathcal{R}$ علاقة ترتيب على E.
2- هل $\mathcal{R}$ علاقة ترتيب كلي ؟

التـمـرين 6 :

لدينا ثلاثة مجموعات $E = \{a, b, c, d\}$ ، $F = \{1,2,3,4,5,6\}$ و $\Gamma = \{(a, 3), (b, 4), (c, 4), (d, 1)\}$

1- برهن أن $f = (E, F, \Gamma)$ هو تطبيق من E فيF مبينا صورة كل عنصر.

2- عين المجموعات $f^{-1}(\{4\}), f^{-1}(\{1,2,3\}), f^{-1}(\{4,5,6\}), f^{-1}(\{2,6\})$.

3- عين المجموعات $f(E), f(\{a, b, c\}), f(d)$.

التمرين 7 :

لتكن التطبيقات التالية :

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad h: \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\longrightarrow [-1, +\infty[$$

$$n \longmapsto f(n) = 2n \quad , \quad n \longmapsto g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & si\ n\ pair \\ \frac{n-1}{2} & si\ n\ impair \end{cases} \quad , \quad x \longmapsto h(x) = \sqrt{2x - 1} - 1$$

1- عين التطبيقات gof و fogثم قارن بينهما.

2- برهن أن التطبيق f متباين و غير غامر و أن g غامر و غير متباين.

3- برهن أن التطبيق h تقابلي و عين التطبيق العكسي h^{-1}

التمرين 8 :

ليكن التطبيق
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = x^2 - 2x + 2$$

1- أحسب $f(\{0,1,2\})$ ، هل f متباين؟
2- عين $f^{-1}(\{0\})$، هل f غامر؟
3- عين قيم y من$\mathbb{R}$ التي لها سوابق. و استنتج $f^{-1}(\mathbb{R})$.
4- احسب $f([1, +\infty[)$.(يمكن استخدام تغيرات f أو الشكل النموذجي لـ $^2 - 2x + 2$)
5- نعتبر التطبيق $\boldsymbol{g} : [\mathbf{1}, +\infty[\longrightarrow [\mathbf{1}, +\infty[$ المعرف بــ:
$\forall x \in [1, +\infty[: g(x) = f(x)$.
- برهن أن التطبيق g تقابلي وعين تطبيقه العكسي g^{-1}.

التمرين 9 : واجب

ليكن التطبيق $f: E \longrightarrow F$ برهن الخواص التالية :

1- $\forall A, A' \in \mathcal{P}(E): f(A) - f(A') \subset f(A - A')$

2- f متباين $\Leftrightarrow \forall A, A' \in \mathcal{P}(E): f(A) - f(A') = f(A - A')$.**(يترك للطالب كواجب)**