جـامـعـــــــــة عبد الحق بن حمودة جـيـجـــــــــل

كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

قسم التعليم الأساسي للرياضيات و الإعلام الآلي

السنة الجامعية **2022/2021**

امتحــان "الجـــبر 1"

__التمــرين الأول:__ **(5.5 ن)**

اعط التعريفات التالية :

(1) المجموعة B زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$

(2) الثلاثية $(A,*,\cdot)$ حلقة.متى تكون الحلقة $(A,*,\cdot)$ تامة؟ و متى تكون حقل؟

(3) اعط مثال لحلقة تامة ليست حقل.

(4) لتكن $(G,*)$ زمرة.برهن أن :

$$\forall(x,y,z) \in G^3 : [x * y = x * z \Rightarrow y = z]$$

__التمــرين الثاني:__ (7.5 ن)

ليكن $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تطبيق معرف بـ $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

1- برهن أن f متباين (ادرس حالة بحالة)

2- أحسب الصورة العكسية ل$\{1\}$ ب f أي $[f^{-1}(\{1\})]$. هل التطبيق غامر؟

3- برهن أن : $\forall x \in \mathbb{R}: |f(x)| < 1$ و استنتج المجموعة $f(\mathbb{R})$

ليكن التطبيقان : $g: \mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[$ و $h:]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ معرفين بـ

$$g(x) = f(x) \, , h(x) = \frac{x}{1-|x|}$$

(1) برهن أن g تقابلي.

(2) برهن أن h هو التطبيق العكسي لـ g أي $h = g^{-1}$

__التمــرين الثالث:__ (7 ن)

لتكن المجموعة $G =]-1,1[$ مزودة بالقانون $\perp$ المعرف بـ $\forall(x,y) \in G^2 : x \perp y = \frac{x+y}{1+xy}$

1- برهن أن : $\forall(x,y) \in G^2 : x \perp y + 1 > 0$ و $x \perp y - 1 < 0$ و استنتج أن $\perp$ قانون تركيب داخلي على G

2- برهن أن $(G,\perp)$ لها بنية الزمرة التبديليه.

3- نعتبر التطبيق: $f: (G,\perp) \longrightarrow (\mathbb{R},+)$ معرف بـ :

$$f(x) = ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

برهن أن التطبيق f تماثل زمري .

بـــــــالـــــــتـــــــوفـــــــيـــــــق

الحل النموذجي

التمرين الأول:

(1) لتكن $(G,*)$ زمرة عنصرها الحيادي e و نظير x هو x'

B زمرة جزئية من $(G,*)$ $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} B \text{ جزء غير خال من } A & (1) \\ \forall (x,y) \in B^2 : x * y \in B & (2) \\ \forall x \in B : x' \in B & (3) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} e \in B \subset A & (1) \\ \forall (x,y) \in B^2 : x * y \in B & (2) \\ \forall x \in B : x' \in B & (3) \end{array}\right\}$ 1.00

(2) تكون الثلاثية $(A,*,\cdot)$ حلقة اذا كانت:

أ) لتكن $(A,*)$ زمرة تبديلية أي أن $*$ قانون تركيب داخلي،تجميعي،تبديلي،يقبل عنصر حيادي و لكل عنصر نظير

ب) القانون $\cdot$ داخلي،تجميعي و توزيعي على $*$ 1.00

-- حتى تكون الحلقة $(A,*,\cdot)$ تامة يجب أن لا تملك قواسم الصفر اي :

$$\forall (x,y) \in A^2 : x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ او } y = 0$$ 0.75

--- تكون الحلقة $(A,*,\cdot)$ حقل اذا كانت واحدية (تملك عنصر حيادي) و مجموعة العناصر القابلة للقلب هي

$$A^* = A - \{0\}$$ 0.75

(3) الحلقة $(\mathbb{Z},+,.)$ تامة لكنها ليست حقل لأن $\mathbb{Z}^* = \{-1,1\} \neq \mathbb{Z} - \{0\}$ 1.00

(4) ليكن x' نظير لـ x و بما أن القانون تجميعي اذن :

$$x * y = x * z \Rightarrow x' * (x * y) = x' * (x * z) \Rightarrow (x' * x) * y = (x' * x) * z \Rightarrow y = z$$ 1.00

التمرين الثاني:

أ) - (f متباين) $\Leftrightarrow$ $\left(\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}') \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' \right)$ 0.25

نلاحظ أن اشارة $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ **هي اشارة** x و بما أن $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')$ **اذن نميز حالتين :**

$$(1)\ f(x) = f(x') \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \text{ و } x' \geq 0 \Rightarrow \frac{x}{1+x} = \frac{x'}{1+x'} \Rightarrow x + xx' = x' + x.x' \Rightarrow x = x'$$

$$(2)\ f(x) = f(x') < 0 \Rightarrow x < 0 \text{ و } x' < 0 \Rightarrow \frac{x}{1-x} = \frac{x'}{1-x'} \Rightarrow x - xx' = x' - x.x' \Rightarrow x = x'$$

و منه $\boldsymbol{f}$ متباين 1.0

2- حساب الصورة العكسية لـ$\{1\}$ ب f أي $[f^{-1}(\{1\})]$

$$f^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \{1\}\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 1\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{1+|x|} = 1\right\} =$$

$$\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{1+x} = 1\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x = x + 1\} = \emptyset$$ 1.00

لدينا ($\boldsymbol{f}$ غامر) $\Leftrightarrow \left(\forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}, \exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R} : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right)$ و هذا غير محقق من اجل $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{1}$ اذن $\boldsymbol{f}$ ليس غامر 0.50

3- اثبات المتراجحة : $\forall x \in \mathbb{R} : |f(x)| < 1$

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} si\ x = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \\ si\ x \neq 0 \Rightarrow |f(x)| = \frac{|x|}{1+|x|} < \frac{|x|}{|x|} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x)| < 1$$ 0.75

واضح أن: 0.50 $|f(x)| < 1 \Rightarrow f(\mathbb{R}) \subset]-1,1[$ بقي اثبات الاحتواء في الجهة العكسية:

$$\forall \boldsymbol{y} \in]-1,1[\Rightarrow |f(x)| = |y| \Rightarrow \frac{|x|}{1+|x|} = |y| \Rightarrow |x| = \frac{|y|}{1-|y|} \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow x \in \mathbb{R} \Rightarrow]-1,1[\subset f(\mathbb{R})$$

اذن $f(\mathbb{R}) =]-1,1[$ 1.00

(1) بما أن f متباين اذن g متباين.من جهة أخرى لدينا $g(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}) =]-1,1[$ اذن g غامر فهو تقابلي 1.00

(2) لدينا h هو التطبيق العكسي لـ g $\Leftrightarrow h \circ g = id_{\mathbb{R}} \wedge g \circ h = id_{]-1,1[}$ 0.50

لدينا $\forall x \in \mathbb{R}: (h \circ g)(x) = h(g(x)) = \frac{g(x)}{1-|g(x)|} = \frac{\frac{|x|}{1+|x|}}{1-\frac{|x|}{1+|x|}} = x = id_{\mathbb{R}}(x)$ 0.50

و $\forall x \in]-1,1[: (g \circ h)(x) = g(h(x)) = \frac{h(x)}{1+|h(x)|} = \frac{\frac{|x|}{1-|x|}}{1+\frac{|x|}{1-|x|}} = x = id_{]-1,1[}(x)$ 0.50

و منه $\forall x \in \mathbb{R}: h(x) = g^{-1}(x)$

التمرين الثالث :

لدينا : $\forall (x,y) \in G^2: -1 < x < 1$ و $-1 < y < 1 \Rightarrow 1 + x > 0, x - 1 < 0$ و $-1 < xy < 1$

1- لدينا $\forall (x,y) \in G^2: x \perp y + 1 = \frac{x+y}{1+xy} + 1 = \frac{x+y+xy+1}{1+xy} = \frac{(1+x).(1+y)}{1+xy} > 0$ 0.50

و كذلك $\forall (x,y) \in G^2: x \perp y - 1 = \frac{x+y}{1+xy} - 1 = \frac{x+y-xy-1}{1+xy} = \frac{(x-1).(1-y)}{1+xy} < 0$ 0.50

$\perp$ قانون تركيب داخلي $\Leftrightarrow [\forall (x,y) \in G^2: x \perp y \in G]$ و هو محقق من السؤال الاول لأن:

$\forall (x,y) \in G^2: x \perp y + 1 > 0 \wedge : x \perp y - 1 > 0 \Rightarrow -1 < x \perp y < 1 \Rightarrow x \perp y \in G$ 0.50

2- تكون $(G, \perp)$ زمرة تبديليه اذا كان $\perp$ قانون تركيب داخلي ،تجميعي ،تبديلي ، يقبل عنصر حيادي و لكل عنصر نظير في G 0.50

(1) يكون $\perp$ تبديلي اذا كان $\forall (x,y) \in G^2: x \perp y = y \perp x$ 0.25

$x \perp y = \frac{x+y}{1+xy} = \frac{y+x}{1+yx} = y \perp x$. 0.25

(2) يكون $\perp$ تجميعي اذا كان $\forall (x,y,z) \in G^3: (x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$ 0.25

(i) . $(x \perp y) \perp z = \frac{(x\perp y)+z}{1+(x\perp y)z} = \frac{\frac{x+y}{1+xy}+z}{1+\frac{x+y}{1+xy}z} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$

(ii) . $x \perp (y \perp z) = \frac{x+(y\perp z)}{1+x.(y\perp z)} = \frac{x+\frac{y+z}{1+yz}}{1+x\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)} = \frac{x+xyz+y+z}{1+yz+xy+xz}$

بالمقارنة نجد $\perp$ تجميعي 1.00

(3) $\perp$ يقبل عنصر حيادي $\Leftrightarrow [\exists e \in, \forall x \in \mathrm{G}: x \perp e = e \perp x = x]$ 0.25

بما أن$\perp$ تبديلي نكتفي بحل معادلة واحدة

$x \perp e = x \Leftrightarrow \frac{x+e}{1+xe} = x \Leftrightarrow e(1-x^2) = 0$ و $x \neq \pm 1 \Rightarrow e = 0$. 0.75

(4) لكل عنصر نظير$\Leftrightarrow [\forall x \in \mathrm{G}, \exists x' \in \mathrm{G}: x \perp x' = x' \perp x = 0]$ 0.25

بما أن $\perp$ تبديلي نكتفي بحل معادلة واحدة

$x \perp x' = 0 \Leftrightarrow \frac{x+x'}{1+xx'} = 0 \Leftrightarrow x + x' = 0 \Rightarrow x' = -x \in \mathrm{G}$. 0.75

و منه $(G, \perp)$ زمرة تبديليه

3- حتى يكون f تماثل زمري من $(G, \perp)$ في $(\mathbb{R}, +)$ يجب $\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \in \mathbb{R}^2: \boldsymbol{f}(x \perp x') = \boldsymbol{f}(x) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')$ 0.25

$$\boldsymbol{f}(x \perp x') = ln\frac{1+(x\perp x')}{1-(x\perp x')} = ln\frac{1+\frac{x+x'}{1+xx'}}{1-\frac{x+x'}{1+xx'}} = ln\frac{1+xx'+x+x'}{1+xx'-x-x'} = ln\frac{(1+x)(1+x')}{(1-x)(1-x')} = ln\frac{1+x}{1-x} + ln\frac{1+x'}{1-x'} = \boldsymbol{f}(x) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')$$ 1.00

و منه f تماثل زمري من $(G, \perp)$ في $(\mathbb{R}, +)$