Chapitre 5 :

Fonctions dérivables_Partie 2

5.4. Théorèmes des accroissements finis (T.A.F).

Théorème 1. **(Théorème de Rolle)**

Si f est une fonction **continue** sur un intervalle $[a,b]$ et **dérivable** sur $]a,b[$, telle que : $\boldsymbol{f(a)=f(b)}$. Alors :

$$\exists c\in\,]a,b[\qquad \text{tel que}\quad f'(c)=0$$

Théorème 2. **(Théorème des accroissements finis)**

Si f est une fonction **continue** sur un intervalle $[a,b]$ et **dérivable** sur $]a,b[$. Alors :

$$\exists c\in\,]a,b[\qquad \text{tel que}\qquad f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$

Exemple. On va utiliser le T.A.F Pour montrer l'inégalité :

$$\sqrt{x+1}<1+\frac{x}{2}\quad,\qquad \forall x>0$$

En effet, On pose $f(x)=\sqrt{x+1}$. On a : $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ et $f(0)=1$. Donc d'après le T.A.F , appliqué à l'intervalle $[0,x]$:

$$\exists c\in\,]a,b[\qquad \text{tel que}\qquad \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=f'(c)=\frac{1}{2\sqrt{c+1}}<\frac{1}{2}$$

D'où le résultat.

Théorème 3. **(Théorème des accroissements finis généralisés)**

Si f,g sont deux fonctions **continues** sur un intervalle $[a,b]$ et **dérivables** sur $]a,b[$, telles que $g'(x)\neq 0$ pour $x\in[a,b]$ et $g(a)\neq g(b)$. Alors :

$$\exists c\in\,]a,b[\quad \text{tel que}\qquad (f(b)-f(a))g'(c)=(g(b)-g(a))f'(c)$$

Théorème 4. **(Inégalité des accroissements finis)**

Si f est une fonction **continue** sur un intervalle $[a,b]$ et **dérivable** sur $]a,b[$, telle $m\leq f'(x)\leq M$. Alors :

$$m(b-a)\leq f(b)-f(a)\leq M(b-a)$$

En particulier si $|f'(x)|\leq M$, on a : $|f(b)-f(a)|\leq M(b-a)$

Proposition8. **(Règle de L'Hôpital)**

Soient f,g sont deux fonctions **dérivables** sur $]a,b[$, telle que $g'(x)\neq 0$ pour $x\in\,]a,b[$ et il y a une indétermination de la forme $\frac{0}{0}$ où $\frac{\infty}{\infty}$. Si on a $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to a}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$ Alors : $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to a}}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$.

- On obtient le même résultat quand $x\overset{<}{\to} b$ et $x\to a$ et $\to b$.

Exemple. Pour $f(x)=\sin x$, $g(x)=x$ on a : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$

5.5. Formules de Taylor.

Théorème 5. **(Formule de Taylor-Lagrange)**

Soit f une fonction de classe C^n sur un intervalle I et dérivable à l'ordre $(n+1)$ sur I.

Alors pour tous $a \in I$ et $x \in I$ avec $\neq a$, il existe $c \in I$ (entre x et a) tel que :

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \dots\dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Remarque.

1) La partie polynômiale s'appelle **« Polynôme de Taylor »**, noté $P_T(x)$:

$$P_T(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \dots\dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

2) La dernière expression s'appelle **« Reste de Lagrange »**, notée $R_n(x)$:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

3) Pour $x = a + h$ et $c = a + \theta h$ avec $\theta \in]0,1[$, on a la deuxième version:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \dots\dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

Corollaire. **(Formule de Maclaurin-Lagrange)**

Si on prend $a = 0$ dans le théorème précédent, alors pour tous $x \neq 0$ il existe c entre x et 0 tel que :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \dots\dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Exemples.

1) La Formule de Taylor-Lagrange de la fonction $f(x) = e^x$ au voisinage de $a = 1$ est donnée pour c entre x et 1 par :

$$e^x = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \dots\dots + \frac{e}{n!}(x-a)^n + \frac{e^c}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}$$

2) La Formule de Maclaurin -Lagrange de la fonction $f(x) = e^x$ au voisinage de $a = 0$ est donnée pour c entre x et 1 par :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots\dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c\, x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Où bien pour $0 < \theta < 1$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots\dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}\, x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Théorème 6. **(Formule de Taylor-Young)**

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I et $a \in I$.

Alors pour tous $x \in I$ avec $x \neq a$, on a :

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \dots\dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + (x-a)^n\varepsilon(x)$$

Avec $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

Corollaire. **(Formule de Mac Laurin-Young)**

Si $a = 0$ dans le théorème précédent, alors pour tous $x \neq 0$ on a :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \dots\dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\varepsilon(x)$$

Avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Exemple.

La Formule de Mac Laurin-Young de la fonction $f(x) = \ln(x+1)$ au voisinage de $a = 0$ est donnée par :

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots\dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

Avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Définition. **(Développement limité DL)**

On appel **développement limité** à l'ordre n de f au voisinage a l'expression :

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \dots\dots + \alpha_n(x-a)^n + \varepsilon(x)$$

Avec $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

Exemples.

- La formule de Taylor-Young est un développement limité à l'ordre n de f au voisinage de a.
- La formule de Mac Laurin-Young est un développement limité à l'ordre n de f au voisinage de 0.