Chapitre 2 :

Nombres Complexes (Complex Numbers)

Motivation.

Plusieurs équations n'admettent pas de solutions dans $\mathbb{R}$. Par exemple, la solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$ est égale à $\sqrt{-1}$, qui n'appartient pas à $\mathbb{R}$. Donc, on doit construire un autre ensemble qui contient les nombres réels, ainsi que les solutions des équations algébriques en question.

« *Les nombres complexes trouvent son intérêt dans l'analyse de Fourier qui est très utilisée dans de nombreux domaines, comme le traitement du signal. Un autre exemple en électromagnétisme est le courant alternatif : puisque le voltage d'un tel circuit oscille, il peut être représenté comme un nombre complexe via la formule d'Euler :* $V = V_0(\cos \omega t + i \sin \omega t)$. » **(Wikipedia)**

++

2.1. Définitions et propriétés

Définition 1.

- **L'ensemble des nombres complexes**, notée $\mathbb{C}$, est une extension de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. C'est un corps commutatif muni des opérations $+$, $\times$.
- Un nombre complexe est un couple de nombres réels (a, b).
- On note par i le couple $(0,1)$, on a : $i^2 = -1$ d'où $i = \sqrt{-1}$.
- En identifiant un réel x par le couple $(x, 0)$.
- **L'écriture algébrique** d'un nombre complexe $\mathfrak{z}$ est donnée par : $\mathfrak{z} = a + ib$

Exemple. $\mathfrak{z} = (2{,}2\sqrt{3}) = 2 + 2\sqrt{3}\,i$, $\mathfrak{z} = \left(0,\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\,i$, $\mathfrak{z} = (12{,}0) = 12$, $\mathfrak{z} = (1{,}5) = 1 + 5i$

Définition 2.

- On appelle forme algébrique d'un nombre complexe $\mathfrak{z}$ l'écriture : $\mathfrak{z} = a + ib$.
- Le nombre "a" s'appelle la partie réelle, on la note $\mathcal{R}e(\mathfrak{z})$.
- Le nombre "b" s'appelle la partie imaginaire, on le note $\mathcal{I}m(\mathfrak{z})$.
- Le module de $\mathfrak{z}$, noté $|\mathfrak{z}|$, est un nombre réel positif définie par : $|\mathfrak{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- L'argument de $\mathfrak{z}$, noté $\arg \mathfrak{z}$, est l'angle $\theta \in [0{,}2\pi[$ définie par : $\cos\theta = \frac{a}{|\mathfrak{z}|}$, $\sin\theta = \frac{b}{|\mathfrak{z}|}$.

Définition 3.

- On appelle forme trigonométrique d'un nombre complexe $\mathfrak{z}$ l'écriture :

$$\mathfrak{z} = |\mathfrak{z}|(\cos\theta + i\sin\theta).$$

- Le conjugué de $\mathfrak{z}$, noté $\bar{\mathfrak{z}}$, est donné par : $\bar{\mathfrak{z}} = a - ib$.

Exemple. Soient $\mathfrak{z} = 2 + 2\sqrt{3}i$, on a :

$$|\mathfrak{z}| = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4 \quad , \quad \cos\theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \ \text{ et } \ \sin\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ , \ \text{ donc } \ \arg\mathfrak{z} = \theta = \frac{\pi}{3} \ .$$

L'écriture trigonométrique est donnée par : $\mathfrak{z} = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

- ✓ $\bar{\mathfrak{z}} = 2 - 2\sqrt{3}i$, $|\bar{\mathfrak{z}}| = 4$, $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ et $\sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\arg\bar{\mathfrak{z}} = \varphi = -\frac{\pi}{3}$.

Propriétés. Pour $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}' \in \mathbb{C}$, nous avons les formules suivantes :

1) $|\bar{\mathfrak{z}}| = |\mathfrak{z}|$, $|\mathfrak{z}.\mathfrak{z}'| = |\mathfrak{z}|.|\mathfrak{z}'|$.
2) $\bar{\mathfrak{z}} + \overline{\mathfrak{z}'} = \overline{\mathfrak{z} + \mathfrak{z}'}$, $\bar{\mathfrak{z}}.\overline{\mathfrak{z}'} = \overline{\mathfrak{z}.\mathfrak{z}'}$.
3) $\frac{1}{\mathfrak{z}} = \frac{\bar{\mathfrak{z}}}{|\mathfrak{z}|^2}$, $\frac{1}{\bar{\mathfrak{z}}} = \overline{1/\mathfrak{z}}$.
4) $\mathcal{Re}(\mathfrak{z}) = \frac{\mathfrak{z}+\bar{\mathfrak{z}}}{2}$, $\mathcal{Im}(\mathfrak{z}) = \frac{\mathfrak{z}-\bar{\mathfrak{z}}}{2i}$.
5) Pour $\mathfrak{z} = a + ib$, on a : $\mathfrak{z}.\bar{\mathfrak{z}} = |\mathfrak{z}|^2 = a^2 + b^2$.

Exemple. Soient $\mathfrak{z} = 5 + 6i$ et $\mathfrak{z}' = 1 - 2i$, on a :

- ✓ $\mathfrak{z} + \mathfrak{z}' = (5 + 4i) + (1 - 2i) = 6 + 4i$.
- ✓ $\mathfrak{z} \times \mathfrak{z}' = (5 + 4i) \times (1 - 2i) = 13 - 6i$.

Exemple. Dans un exemple précédent, pour $\mathfrak{z} = 2 + 2\sqrt{3}i$, on a $\bar{\mathfrak{z}} = 2 - 2\sqrt{3}i$, donc:

$$\mathcal{Re}(\mathfrak{z}) = \frac{\mathfrak{z}+\bar{\mathfrak{z}}}{2} = \frac{1}{2}\left(2 + 2\sqrt{3}i + 2 - 2\sqrt{3}i\right) = 2 \quad , \quad \mathcal{Im}(\mathfrak{z}) = \frac{\mathfrak{z}-\bar{\mathfrak{z}}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(2 + 2\sqrt{3}i - 2 + 2\sqrt{3}i\right) = 2\sqrt{3} \ .$$

Définition 4.

- On appelle exponentielle complexe, on le note $e^{i\theta}$, le nombre complexe de module 1 est d'argument θ , i.e : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
- On appelle forme exponentielle d'un nombre complexe $\mathfrak{z}$ d'argument θ, l'écriture : $\mathfrak{z} = |\mathfrak{z}|e^{i\theta}$.
- Pour $\mathfrak{z} = a + ib$, on a : $e^{\mathfrak{z}} = e^{a+ib} = e^a.e^{ib} = e^a(\cos b + i\sin b)$

Exemples.

1) Pour $\mathfrak{z} = 2 + 2\sqrt{3}i$, on a : $\mathfrak{z} = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ donc $\mathfrak{z} = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$.
2) $e^{i0} = 1$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

Propriétés. Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, on a :

- $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.
- $e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$, $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.
- $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.
- **Formule de Moivre** : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.
- $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$.

Proposition 1. (Racines carrées d'un complexe)

Chaque nombre complexe admet deux racines carrées.

Preuve. Soit $z = a + ib$. On va chercher $r = x + iy$ tel que $r^2 = z$, on aura le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ 2xy = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a} \\ y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a} \\ \text{signe}(xy) = \text{signe}(b) \end{cases}$$

Nous avons les cas suivants :

- ✓ Si $b > 0$, alors x, y sont de même signe. Donc :

$$r = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a} + i\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}\right)$$

- ✓ Si $b < 0$, alors x, y sont de signe différent. Donc :

$$r = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a} - i\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}\right)$$

- ✓ Si $b = 0$ et $a \geq 0$, donc : $r = \pm\sqrt{a}$.
- ✓ Si $b = 0$ et $a \leq 0$, donc : $r = \pm i\sqrt{-a}$.

Exemples.

Pour $z = i$ (i.e. $a = 0$, $b = 1$), on pose $r = x + iy$ tel que $r^2 = z$, on aura:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 1 \\ 2y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ xy \geq 0 \end{cases}$$

On a $b > 0$ d'où x, y sont de même signe. Donc les racines carrée de i sont :

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) \quad , \quad r_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$$

Proposition 2. (Equation du second degré)

Soit l'équation de degré 2 : $az^2 + bz + c = 0$, avec $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Cette équation admet deux solutions complexes z_1, z_2 données par :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad , \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$

Avec δ est l'une des racines carrées du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Remarque. Si $\Delta = 0$, alors $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$ (la solution est dite **double**) .

Exemple. Soit l'équation : $(1+i)z^2 - (5+i)z + 6 + 4i = 0$.

Le discriminant $\Delta = 16 - 30i = \delta^2$, d'où $\delta = 5 - 3i$.

Donc les solutions de l'équation sont :

$$z_1 = \frac{(5+i)+(5-3i)}{2(1+i)} = 2 - 3i \quad , \quad z_2 = \frac{(5+i)-(5-3i)}{2(1+i)} = 1 + i$$

Corollaire. (Equation à coefficients réels)

Si les coefficients a, b, c de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ sont réels. Alors $\Delta \in \mathbb{R}$ et nous avons trois cas :

- $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- $\Delta = 0$, l'équation admet une solution double réelle $z_0 = -\frac{b}{2a}$.
- $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes z_1 , z_2 (non réelles) :

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad , \quad z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Exemple. Soit l'équation : $z^2 + z + 1 = 0$.

Le discriminant $\Delta = -3 = 3i^2$, d'où $\sqrt{\Delta} = i\sqrt{-\Delta} = i\sqrt{3}$.

Donc les solutions de l'équation sont :

$$z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad , \quad z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

++

Références.

1) J. Kaczor et T. Nowak. *Problèmes d'Analyse I*. EDP Sciences, France, 2008.
2) G. Laffaille et C. Pauly. Cours d'*Analyse1*. Université Cote d'Azur, Canada, 2006.