الفصل الأول

مفاهيم أساسية – المتجهات

د.أنمار

ميكانيك تحليلي

الوحدات The Units

الفيزياء علم مستند على المقاييس المضبوطة للكميات الفيزياوية , ولإن المقياس وحده غيركافي لوصف هذه الكميات الفيزياوية فهو يحتاج الى وحدة تعرف مقدار هذا المقياس . فعلى سبيل المثال من غير الواضح القول " أن طول إنبوب المياه هو 4" فـ(4) هو مقياس يحتاج الى وحدة تعرف مقدار هذا الطول .

يمكن تعريف جميع الكميات الفيزيائية بدلالة ثلاث وحدات تمثل المقاييس الأساسية في الفيزياء وهي :

الطول – المسافة بين نقطتين .
الكتلة – كمية المادة في الجسم .
الزمن – المدّة بين لحظتين .

نظم وحدات القياس Unit systems

هنالك نظامين لوحدات القياس قيد الإستخدام في الوقت الحاظر هما نظام الوحدات الإنكليزي FPS والنظام الدولي للوحدات SI والذي يشمل MKS أو CGS . كل نظام يحوي على وحدات متعددة خاصة بكل مقياس .

TABLE 1
English Units of Measurement

Length	Mass	Time
Inch	Ounce	* Second
* Foot	* Pound	Minute
Yard	Ton	Hour
Mile		Day
		Month
		Year

TABLE 2
MKS Units of Measurement

Length	Mass	Time
Millimeter	Milligram	* Second
* Meter	Gram	Minute
Kilometer	* Kilogram	Hour
		Day
		Month
		Year

TABLE 3
CGS Units of Measurement

Length	Mass	Time
* Centimeter	Milligram	* Second
Meter	* Gram	Minute
Kilometer	Kilogram	Hour
		Day
		Month
		Year

الجدول التالي يبين التحويلات بين نظم الوحدات القياسية

TABLE 4
Conversion Table

Length	1 yd	=	0.9144 m
	12 in.	=	1 ft
	5280 ft	=	1 mile
	1 m	=	3.281 ft
	1 in.	=	0.0254 m
Time	60 sec	=	1 min
	3600 sec	=	1 hr
Mass	1 lbm	=	0.4535 kg
	2.205 lbm	=	1 kg
	1 kg	=	1000 g
Area	1 ft^2	=	144 $in.^2$
	10.764 ft^2	=	1 m^2
	1 yd^2	=	9 ft^2
	1 $mile^2$	=	3.098×10^6 yd^2
Volume	7.48 gal	=	1 ft^3
	1 gal	=	3.785 l (liter)
	1 l	=	1000 cm^3

قارن بين الكميات العددية والكميات المتجهة ؟

الكميات العددية Scalar Quantities

هي الكميات الفيزياوية التي تعين تعييناً كاملاً بمعرفة مقدارها , مثل الكثافة والحجم ودرجة الحرارة . وتعامل الكميات العددية رياضياً كأعداد حقيقية وتخضع عند جمعها وطرحها وضربها وقسمتها لجميع القوانين المألوفة في الجبر .

الكميات المتجهة Vector Quantities

هي الكميات الفيزياوية التي تعين تعييناً كاملاً بمعرفة مقدارها وإتجاهها , مثل الإزاحة والسرعة والتعجيل والقوة . وتخضع عند جمعها وطرحها وضربها وقسمتها لقوانين خاصة ستتم دراستها تباعاً في هذا الفصل .

وتمثل الكميات المتجهة

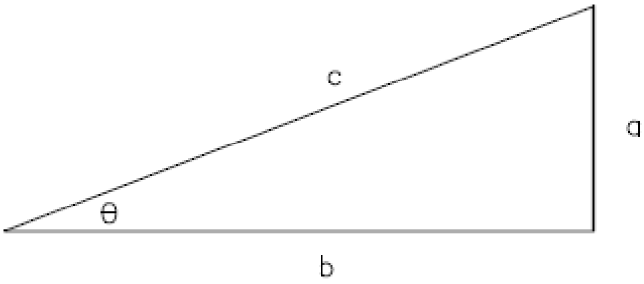
- كتابتاً
  - حروف كبيرة غامقة (**A , F , R**)
  - أو حروف كبيرة يعلوها سهم افقي ($\vec{A}$, $\vec{F}$, $\vec{R}$)
- رسماً
  - بنقاط (X , Y) على المحاور الإحداثية
  - بمستقيم على المحاور الإحداثية
  - بالدرجات (°)

يمكن تحليل أي متجه الى مركبتين أو أكثر إعتمادا على شكل الفضاء الذي يحويه . وتستعمل في ذلك الدوال المثلثية التالية.

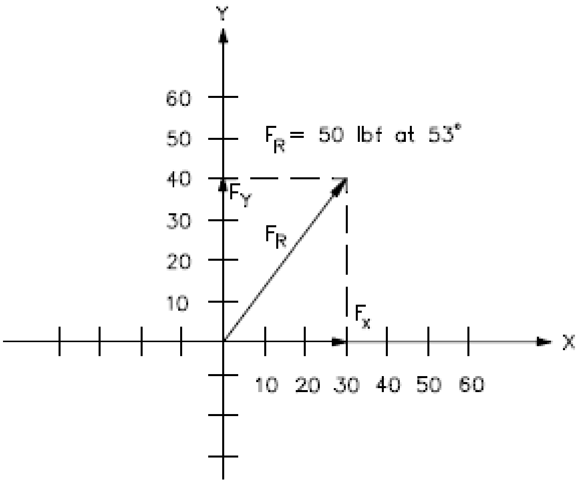
$$\sin\theta = \frac{\text{opposite}}{\text{hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{opposite}}{\text{adjacent}} = \frac{a}{b}$$



كما هو موضح في المثال التالي :



F_x is calculated as follows:

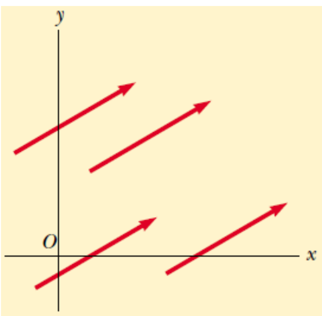
$\cos\theta = \text{adjacent/hypotenuse}$
$\cos\theta = F_x/F_R$ or $F_x = F_R \cos\theta$
$F_x = (50)(\cos 53°)$
$F_x = (50)(0.6018)$
$F_x = 30$ lbf on x-axis

F_y is calculated as follows:

$\sin\theta = \text{opposite/hypotenuse}$
$\sin\theta = F_y/F_R$ or $F_y = F_R \sin\theta$
$F_y = (F_R)(\sin\theta)$
$F_y = (50)(\sin 53°)$
$F_y = (50)(0.7986)$
$F_y = 40$ lbf on y-axis

<u>بعض خواص المتجهات Some properties of vectors</u>

- تساوي المتجهات **Equality of Two Vectors** : لأغراض عديدة فإن متجهين مثل **A** و **B** قد يعرفان بأنهما متساويان إذا كانا متوازيان ولهما نفس المقدار .

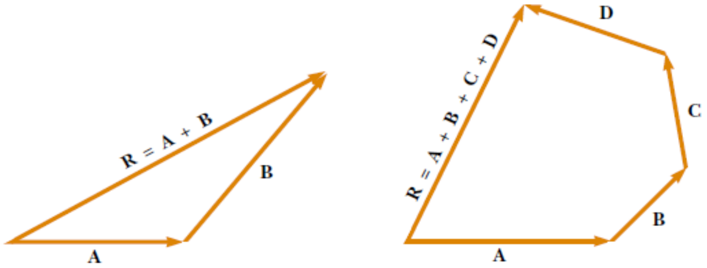


إن جميع المتجهات المرسومة في الشكل المجاور متساوية مع بعضها البعض لأن لهم نفس المقدار والإتجاه بالرغم من إن لهم نقاط بداية مختلفة .

هذه الخاصية تتيح لنا تحريك المتجه لأي موقع في المخطط المرسوم شريطة المحافظة على مقداره وإتجاهه .

○ جمع المتجهات **Adding Vectors**

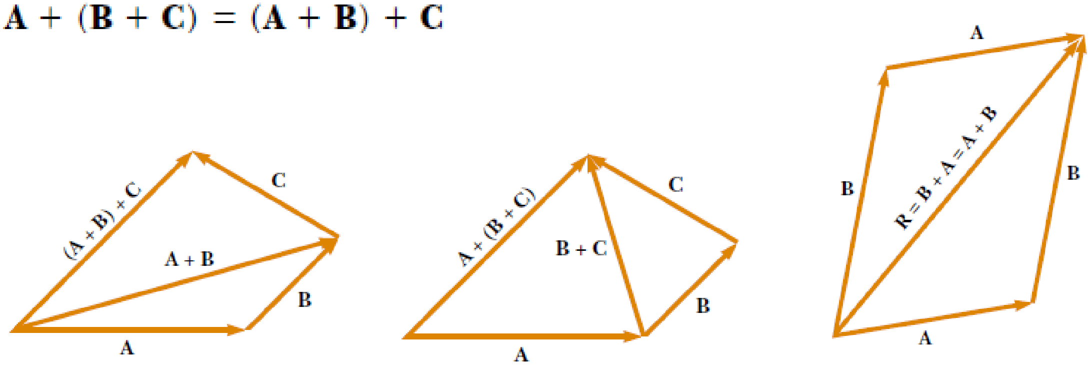
يمكن جمع متجهين أو أكثر مع بعضهم البعض لينتج متجه ثالث يمثل محصلة مجموع هذه المتجهات . وعند تمثيل هذه العملية بالرسم علينا أولاً أن نرسم المتجه الأول ثم نستفيد من عملية خاصية تساوي المتجهات لنقل المتجه الثاني محافظين على مقداره وإتجاهه ووضعه عند نهاية المتجه الأول ثم الثاني و الثالث كذلك , بعدها نقوم بالحساب الرياضي لمحصلة الشكل المضلع الناتج كما مبين في الأمثلة التالية .



وبالإمكان تبادل أو ترتيب المتجهات أثناء عملية جمعها وكالآتي .

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$



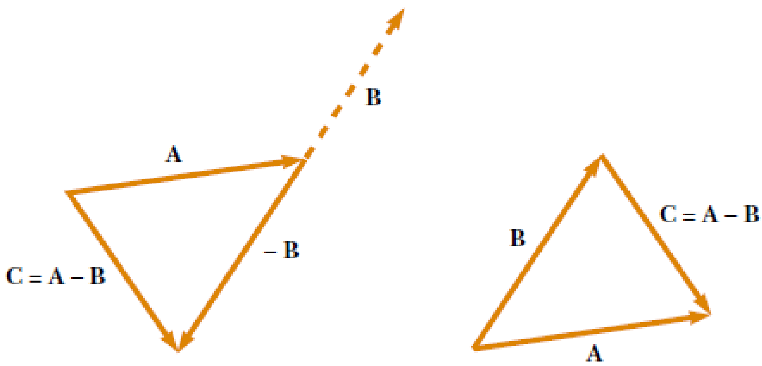
○ طرح المتجهات **Subtracting Vectors**

تماثل عملية طرح المتجهات عملية جمعها إذ إنها عبارة عن عملية جمع لمتجه سالب .

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

أما إذا كان ناتج عملية طرح متجهين صفراً فهذا يعني أن العملية تمت بين المتجه ومعكوسه وأن المتجه الناتج يسمى بالمتجه الصفري **Vector (Null)Zero**.

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = 0.$$



- ضرب المتجه بكمية عددية **Multiplying a Vector by a Scalar**

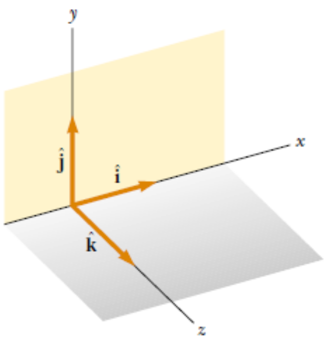
إذا ضرب المتجه A بكمية عددية موجبة مثل m فإن المتجه الناتج يكون بنفس إتجاه المتجه A وبمقدار mA . أما إذا ضرب بكمية عددية سالبة مثل m- فإن المتجه الناتج يكون بعكس إتجاه المتجه A وبمقدار mA.

أما إذا ضربت حدود عملية جمع المتجهات بكمية عددية موجبة أو سالبة فبالإمكان توزيع هذه الكمية على حدود , والعكس صحيح .

$$nA + mA = A(n + m)$$
$$mB + mA = (B + A)m$$

وحدة المتجهات Unit Vectors

يعبر عن الكميات المتجهة بدلالة وحدة تسمى بوحدة المتجهات . وهي عبارة عن متجه بلا أبعاد ذو مقدار يساوي 1 . وتستعمل وحدة المتجهات للدلالة على إتجاه مركبات المتجه في الفضاء وليس لها أي أهمية فيزياوية اخرى . ويرمز لها بالرموز $\hat{\imath}$ و $\hat{\jmath}$ و $\hat{k}$ المتجهة بالإتجاه الموجب للمحاور x و y و z على الترتيب .



$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$$
$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}$$

وبنائا على ذلك , فإن خواص المتجه التي ذكرت سابقا تخضع لها مركباتها . أي إنه " تتساوى المتجهات إذا تساوت مركباتها المتعاقبة " و " مجموع أي متجهين ينتج متجه آخر مركباته مساوية لمجموع مركبات المتجهين" و " حاصل ضرب كمية عددية m في متجه ينتج متجه مركباته أكبر m مرّة من مركبات المتجه الأول " و الخ ....

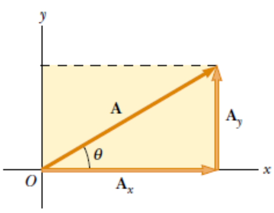
مقدار المتجه وإتجاهه The magnitude and direction of vector

يمكن حساب مقدار أي متجه بإستخدام قوانين الرياضيات الإعتيادية , وكالآتي :

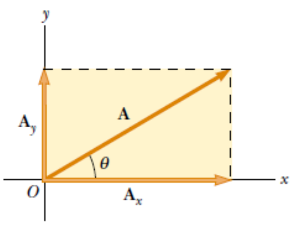
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

وبالإمكان أيضاً تحديد إتجاه أي متجه بحساب الزاوي المحصورة بين مركبتين من مركباته , وكالآتي :

$$A_x = A\cos\theta$$
$$A_y = A\sin\theta$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$



(b)



(a)

Vectors scalar product الضرب العددي للمتجهات

القوة والإزاحة كميتين فيزياويتين متجهتين , حاصل ضرب مقداريهما إذا كانا في الإتجاه نفسه ينتج الشغل وهو كمية فيزياوية عددية غير متجهة . أما إذا كانت القوة في إتجاه غير إتجاه الإزاحة فإن الشغل ينتج عن ضرب الإزاحة في مسقط القوة على الإزاحة (مركبة القوة بإتجاه الإزاحة) , أو بالعكس . ويمكن أيضا حساب الشغل بضرب مركبات متجهي القوة والإزاحة المتماثلة .

هذه العملية تسمى " الضرب العددي للمتجهات " والمثال أعلاه هو تطبيق فيزياوي لها . ويرمز لحاصل الضرب العددي للمتجهين A و B ب (B.A) وتقرأ (A dot B) , وتحسب كالآتي :

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$\vec{A}.\vec{B} = |A||B|\cos\theta$$

والعلاقة الاولى يمكن الحصول عليها بعملية ضرب مباشرة بين المركبات المتماثلة للمتجهات . علماً إن :

$$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 1$$
$$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 0$$

وفي الجدول التالي بعض أهم الأمثلة التطبيقية لعملية الضرب العددي !

المتجهان $\vec{A}$ و $\vec{B}$	مقدار $\vec{A}.\vec{B}$	الزاوية بين متجهين θ	$\vec{A}.\vec{B} = \|A\|\|B\|\cos\theta$
متوازيان	أكبر ما يمكن	0	$\vec{A}.\vec{B} = \|A\|\|B\|$
متعاكسان	أصغر ما يمكن	π	$\vec{A}.\vec{B} = -\|A\|\|B\|$
متعامدان	مساويا للصفر	$\pi/_2$	$\vec{A}.\vec{B} = 0$

وبالإمكان أيضا إثبات القواعد الحسابية التالية :

$$\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$$
$$\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$$
$$m(\vec{A}.\vec{B}) = m\vec{A}.\vec{B}$$

أما قانون الجيب تمام Low of cosines $(C^2 = A^2 + 2\text{AB}\cos\theta + B^2)$ فبالإمكان إثباته أيضا , وكالآتي:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$
$$\vec{C}.\vec{C} = (\vec{A} + \vec{B}) + (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{A}.\vec{A} + 2\vec{A}.\vec{B} + \vec{B}.\vec{B}$$
$$C^2 = A^2 + 2AB\cos\theta + B^2$$

مثال 1: إذا علمت أن المتجهان $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ و $\vec{B} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ فجد :

a) حاصل الضرب العددي للمتجهين $(\vec{A}.\vec{B})$ ؟

b) الزاوية المحصورة بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ؟

الجواب

a

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})\cdot(-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}})\\ &= -2\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{i}}\cdot 2\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}\cdot 2\hat{\mathbf{j}}\\ &= -2(1) + 4(0) - 3(0) + 6(1)\\ &= -2 + 6 = \boxed{4}\end{aligned}$$

b لحساب الزاوية المحصورة بين متجهين علينا إيجاد مقدار كل من المتجهين .

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$$
$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB} = \frac{4}{\sqrt{13}\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$$
$$\theta = \cos^{-1}\frac{4}{8.06} = \boxed{60.2^\circ}$$

مثال 2 : يتحرك جسم في المستوي xy قاطعاً إزاحة $\Delta r = (2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath})\ m$ تحت تأثير قوة $F = (5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})\ N$. فما مقدار الإزاحة والقوة ؟ وما مقدار الشغل المنجز ؟

الجواب

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(2.0)^2 + (3.0)^2} = \boxed{3.6\ \text{m}}$$

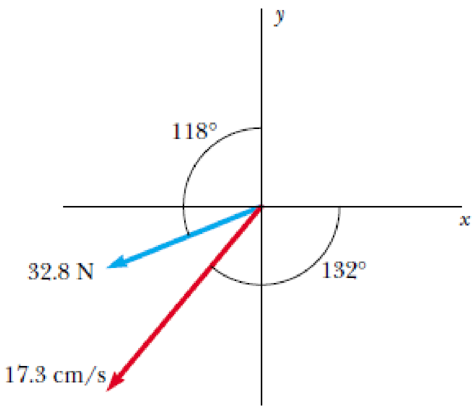
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(5.0)^2 + (2.0)^2} = \boxed{5.4\ \text{N}}$$

$$W = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r} = [(5.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})\,\mathrm{N}]\cdot[(2.0\hat{\mathbf{i}} + 3.0\hat{\mathbf{j}})\,\mathrm{m}]$$
$$= (5.0\hat{\mathbf{i}}\cdot 2.0\hat{\mathbf{i}} + 5.0\hat{\mathbf{i}}\cdot 3.0\hat{\mathbf{j}} + 2.0\hat{\mathbf{j}}\cdot 2.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}}\cdot 3.0\hat{\mathbf{j}})\,\mathrm{N\cdot m}$$
$$= [10 + 0 + 0 + 6]\,\mathrm{N\cdot m} = \boxed{16\,\mathrm{J}}$$

تمارين

1. القوة $F = (6\hat{\imath} - 2\hat{\jmath})\ N$ تؤثر على جسم , فيتحرك قاطعاً إزاحة $\Delta r = (3\hat{\imath} + \hat{\jmath})\ m$. جد : (a) الشغل المنجز من قبل القوة على الجسم ؟ (b) الزاوية المحصورة بين متجهي القوة والإزاحة ؟

2. جد حاصل الضرب العددي للمتجهين المرسومين في الشكل أدناه ؟



3. بإستخدام قانون الضرب العددي للمتجهات جد الزاوية المحصورة بين المتجهين:

a) $\vec{A} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$ و $\vec{B} = 4\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$

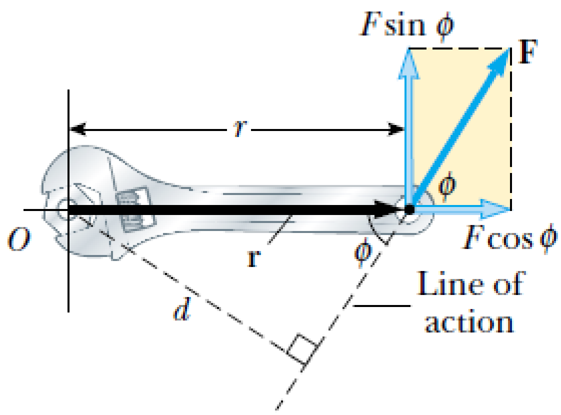
b) $\vec{A} = -2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$ و $\vec{B} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}$

c) $\vec{A} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ و $\vec{B} = 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}$

4. جد $\vec{C}.(\vec{A} + \vec{C})$ ؟ إذا علمت إنَ : $\vec{A} = 3\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$ و $\vec{B} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 5\hat{k}$ و $\vec{C} = 2\hat{\jmath} - 3\hat{k}$.

الضرب الإتجاهي The Vector product

من الصعب جداً فتح صامولة برغي باليد إذا كانت محكمة الغلق . لكن يمكن فتحها بسهولة إذا إستخدمنا لذلك مِفَك خاص بها يسلط قوة عمودية على إتجاه البرغي , وتزداد هذه السهولة كلما كبرت عتلة المِفَك . وبصياغة فيزياوية يمكن القول (يزداد العزم المدور كلما بعدت القوة المدورة عن محور الدوران) وإن (إتجاه العزم المدور يكون عموديا على محور الدوران) . كما موضح في الشكل التالي :



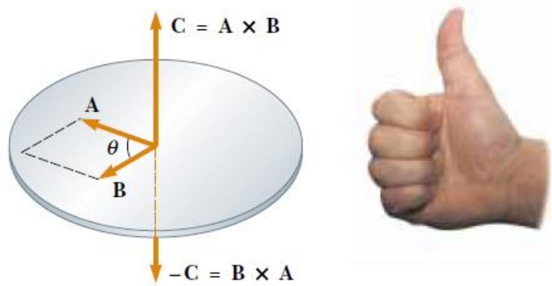
إن حاصل ضرب القوة المدورة في ذراع عتلة التدوير وكلاهما كميتان متجهتان ينتج عنه متجه ثالث عمودي عليهما يسمى العزم . عملية الضرب هذه تختلف عن عملية الضرب العددي للمتجهات إذ ينتج عنها كمية متجهة وليست عددية . هذا النوع من الضرب يسمى " الضرب الإتجاهي " .

يُمَثل الضرب الإتجاهي للمتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بالرمز $\vec{A} \times \vec{B}$ ويقرأ $\vec{A}\ cross\ \vec{B}$ ويمكن حساب مقداره بإستخدام العلاقة التالية :

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = |A||B| \sin \emptyset}$$

حيث إن $\emptyset$ تمثل الزاوية المحصورة بين $\vec{A}$ و $\vec{B}$.

أما إتجاهه فإن أفضل طريقة لتحديده هي " قاعدة اليد اليمنى " إذ نشير بأصابع اليد الأربعة الى إتجاه المتجه $\vec{A}$ ونحركها بإتجاه المتجه $\vec{B}$ عبر الزاوية $\emptyset$, عند ذلك فإن إتجاه الإبهام سيمثل إتجاه $\vec{A} \times \vec{B}$.



ويمكن أيضا التعبير عن الضرب الإتجاهي لمتجهين مثل $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بدلالة مركباتهما . وكلآتي :

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \hat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\mathbf{i}} - (A_xB_z - A_zB_x)\hat{\mathbf{j}} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{\mathbf{k}}$$

إذا علمنا إن الضرب الإتجاهي لوحدات المتجه هو :

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0$$
$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{k}}$$
$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}}$$
$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}}$$

ويمكن إيراد بعض خواص عملية الضرب الإتجاهي وكالآتي :

1. خلافاً لعملية الضرب العددي , فإن عملية الضرب الإتجاهي **غير** إبدالية : $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$.
2. إذا كان المتجه $\vec{A}$ موازيا للمتجه $\vec{B}$ ($\emptyset = 0°$ أو $180°$) فإن : $\vec{A} \times \vec{B} = 0$. وعلى هذا فإن : $\vec{A} \times \vec{A} = 0$.
3. إذا كان المتجه $\vec{A}$ عموديا على المتجه $\vec{B}$ ($\emptyset = 90°$) فإن : $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB$.
4. يمكن التوزيع في عملية الضرب الإتجاهي : $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$.

مثال3: إذا كان $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ و $\vec{B} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$. جد $\vec{A} \times \vec{B}$ وإثبت إن $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ ؟

الجواب :

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}) \times (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}})$$
$$= 2\hat{\mathbf{i}} \times 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{j}} \times (-\hat{\mathbf{i}}) = 4\hat{\mathbf{k}} + 3\hat{\mathbf{k}} = 7\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}) \times (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})$$
$$= -\hat{\mathbf{i}} \times 3\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{j}} \times 2\hat{\mathbf{i}} = -3\hat{\mathbf{k}} - 4\hat{\mathbf{k}} = \boxed{-7\hat{\mathbf{k}}}$$

$$\therefore \quad \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

مثال4: إذا أثرت قوة $\vec{F} = (2.00\hat{\imath} + 3.00\hat{\jmath})\ N$ على بُعد $\vec{r} = (4.00\hat{\imath} + 5.00\hat{\jmath})\ m$ من محور دوران جسم . فما هو العزم الناتج ؟

الجواب :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} &= [(4.00\hat{\mathbf{i}} + 5.00\hat{\mathbf{j}})\ \mathrm{m}] \\
&\quad \times [(2.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{j}})\ \mathrm{N}] \\
&= [(4.00)(2.00)\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} + (4.00)(3.00)\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} \\
&\quad + (5.00)(2.00)\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} \\
&\quad + (5.00)(3.00)\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}}]\ \mathrm{N \cdot m} \\
&= [12.0\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} + 10.0\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}}]\ \mathrm{N \cdot m} \\
&= [12.0\hat{\mathbf{k}} - 10.0\hat{\mathbf{k}})\ \mathrm{N \cdot m} \\
&= \boxed{2.0\hat{\mathbf{k}}\ \mathrm{N \cdot m}}
\end{aligned}$$

إن إتجاه العزم يكون بإتجاه المحور z إذا كان كل من المتجهين F و r يقعان في المستوى xy .

Quick Quiz 2

أي الخيارات التالية يُعد مكافئاً لناتج حاصل ضرب $(\vec{A} \times \vec{B}) . (\vec{B} \times \vec{A})$ ؟

a) $(\vec{A}.\vec{B}) + (\vec{B}.\vec{A})$
b) $(\vec{A} \times \vec{A}) . (\vec{B} \times \vec{B})$
c) $(\vec{A} \times \vec{B}) . (\vec{A} \times \vec{B})$
d) $-(\vec{A} \times \vec{B}) . (\vec{A} \times \vec{B})$

تمارين

1. هل يكون ناتج حاصل ضرب $\vec{A}.\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$ كمية عددية أم متجهة ؟

2. إذا كان إتجاه المتجه $\vec{A}$ نحو الجزء السالب من المحور y , والمتجه $\vec{B}$ نحو الجزء السالب من المحور x . فما هو إتجاه كل من : $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$ و $\left(\vec{B}\times\vec{A}\right)$ ؟

3. إذا كان $\vec{M}=6\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-\hat{k}$ و $\vec{N}=2\hat{\imath}-\hat{\jmath}-3\hat{k}$. إحسب $\left(\vec{M}\times\vec{N}\right)$ ؟

4. إذا كان $\vec{A}=-3\hat{\imath}+4\hat{\jmath}$ و $\vec{B}=2\hat{\imath}+3\hat{\jmath}$ فما هو : $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$ وما هي الزاوية المحصورة بين المتجهين ؟

5. إذا كان $\vec{A}=-3\hat{\imath}+7\hat{\jmath}-4\hat{k}$ و $\vec{B}=6\hat{\imath}-10\hat{\jmath}+9\hat{k}$. أي من العلاقتين التاليتين يمكن إستخدامها لإيجاد الزاوية بين المتجهين ؟

   a) $\cos^{-1}\left(\frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}\right)$
   b) $\sin^{-1}\left(\frac{\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|}{AB}\right)$

6. إذا كان $\vec{A}.\vec{B}=\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|$ فما هي الزاوية المحصورة بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ؟

تمثيل متجه معلوم كحاصل ضرب كمية عددية ووحدة متجه منفردة

افرض المعادلة $\vec{A} = \hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y + \hat{k}A_z$. عند قسمة طرفي هذه المعادلة على A (مقدار المتجه) نحصل على :

$$\frac{\vec{A}}{A} = A\left(\hat{\imath}\frac{A_x}{A} + \frac{\hat{\jmath}A_y}{A} + \hat{k}\frac{A_z}{A}\right)$$

$$\vec{A} = A\left(\hat{\imath}\frac{A_x}{A} + \frac{\hat{\jmath}A_y}{A} + \hat{k}\frac{A_z}{A}\right)$$

وبإستخدام قوانين قوانين المثلثات يمكن إعتبار أنّ :

$$\frac{A_x}{A} = \cos\alpha \quad , \quad \frac{A_y}{A} = \cos\beta \quad , \quad \frac{A_z}{A} = \cos\gamma$$

حيث إنّ α , β , γ تمثل زوايا مركبات المتجه A .

$$\therefore \quad \vec{A} = A\left(\hat{\imath}\cos\alpha + \hat{\jmath}\cos\beta + \hat{k}\cos\gamma\right)$$

أو

$$\boxed{\vec{A} = A\vec{n}}$$

حيث إنّ $\vec{n}$ تمثل وحدة متجه مركباتها هي $\cos\alpha , \cos\beta , \cos\gamma$.

مثال5: عبّر بمعادلة عن مسقط المتجه $\vec{A}$ على المتجه $\vec{B}$ بدلالة وحدة متجه عمودية على المستوي الذي يحوي المتجهين ؟

<u>الجواب</u> :

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$$

$$\frac{\vec{A}.\vec{B}}{A} = \frac{AB\cos\theta}{A}$$

$$\therefore B\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{A} = \vec{B}.\vec{n}$$

حيث إنّ θ تمثل الزاوية المحصورة بين المتجهين $\vec{B}$ و $\vec{A}$.

مثال6: إذا علمت إن $\vec{A} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$ و $\vec{B} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$, جد وحدة متجه عمودية على المستوى الذي يحوي المتجهين ؟

<u>الجواب</u> :

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = (2-1)\hat{\imath} - (4+1)\hat{\jmath} + (-2-1)\hat{k} = \hat{\imath} - 5\hat{\jmath} - 3\hat{k}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \frac{\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} - 3\hat{k}}{(1^2 + 5^2 + 3^2)^{1/2}} = \frac{\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} - 3\hat{k}}{\sqrt{35}} = \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{35}} - \frac{5\hat{\jmath}}{\sqrt{35}} - \frac{3\hat{k}}{\sqrt{35}}$$

<u>الضرب الثلاثي Triple product</u>

يسمى التعبير $\vec{A}.\left(\vec{B} \times \vec{C}\right)$ **بالضرب العددي الثلاثي** للمتجهات $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و$\vec{C}$ وهو كمية عددية لأنه ضربٌ عددي لكميتين متجهتين . وفيه $\vec{A}.\left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{C}.\left(\vec{B} \times \vec{A}\right)$. أي يمكن تبادل علامتي الضرب العددي والضرب الإتجاهي في الضرب الإتجاهي الثلاثي .(يمكن إثبات ذلك بسهولة وسأترك لك بقية الورقة فارغاً وعليك ملئه بلإثبات) .

ويسمى التعبير $\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right)$ **بالضرب الإتجاهي الثلاثي** .