Chapitre 4 :

Fonctions d'une variable réelle

Motivation.

Une **fonction** permet de définir un résultat (le plus souvent numérique) pour chaque valeur d'un ensemble appelé *domaine*. Ce résultat peut être obtenu par une suite de calculs arithmétiques ou par une liste de valeurs, notamment dans le cas de relevé de mesures physiques, ou encore par d'autres procédés comme les résolutions d'équations ou les passages à la limite. Le calcul effectif du résultat ou son approximation repose éventuellement sur l'élaboration de fonction **informatique**. « Wikipédia »

++

4.1. Définitions et propriétés

Définitions 1.

- Une fonction est une relation$f$ d'un ensemble E vers un ensemble , telle que tout élément x de E admet au plus une image dans F, on écrit :

$$f: \quad \begin{array}{c} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$$

- Si $\subseteq \mathbb{R}$, on dit que f est une fonction réelle. Si de plus $\subseteq \mathbb{R}$, on dit que f est une fonction réelle d'une variable réelle.
- L'ensemble de définition de la fonction f noté D_f est le sous ensemble de E des valeurs prise par x pour lesquelles $f(x)$ est calculable, i.e. Les éléments de E qui ont une image par f.
- On appelle graphe, ou courbe représentative, d'une fonction f l'ensemble :

$$\Gamma = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \in D_f\}$$

C'est l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x,\ y)$ $t.q$: $y = f(x)$.

Exemple.

1) La relation « inverse d'un nombre » est une fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{x}$.
2) Le polynôme $f(x) = x^2 + x - 3$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
3) La fonction **affine** est sous la forme : $f(x) = ax + b$ (c'est une droite).
4) La fonction **puissance entière** est donnée par : $f(x) = x^n \quad , \quad n \in \mathbb{N}$.
5) La fonction **racine n-ième** est donnée par : $f(x) = x^{\frac{1}{n}} \quad , \quad n \in \mathbb{N}^*$.
6) La fonction **homographique** est une fraction : $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.
7) La fonction **partie entière** est donnée par : $f(x) = E(x)$.
8) La fonction **valeur absolue** est donnée par : $f(x) = |x|$.

Définitions 2.

Soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que :

- f est **croissante** sur D si : $\forall x_1, x_2 \in D \ , \ x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- f est **strictement croissante** sur D si : $\forall x_1, x_2 \in D \ , \ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- f est **décroissante** sur D si : $\forall x_1, x_2 \in D \ , \ x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
- f est **strictement décroissante** sur D si : $\forall x_1, x_2 \in D \ , \ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- f est **monotone** si elle croissante ou décroissante.
- f est **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Exemples.

1) La fonction $f(x) = x + 2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2) La fonction $f(x) = |x|$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Mais, elle n'est ni croissante ni décroissante sur $\mathbb{R}$.
3) La fonction $f(x) = \ln x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. La fonction $f(x) = -\ln x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Définitions 3.

- La fonction f est **constante** si : $\exists \alpha \in \mathbb{R} \ , \forall x \in D \ : \ f(x) = \alpha$.
- La fonction f est **périodique** si : $\exists T \in \mathbb{R}, \forall x \in D \ : \ f(x + T) = f(x)$.

Définitions 4.

Soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, avec D est symétrique par rapport à 0. On dit que :

- La fonction f est **paire** si : $\forall x \in D \ , \ f(-x) = f(x)$.
- La fonction f est **impaire** si : $\forall x \in D \ , \ f(-x) = -f(x)$.

Remarques : (Interprétation géométrique)

- Une fonction est paire ssi son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Une fonction est impaire ssi son graphe est symétrique par rapport à l'origine.

Exemples.

1) La fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ est paire sur le domaine de définition $=]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.
2) Le domaine de définition de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas symétrique par rapport 0.
3) Les fonctions $f(x) = x^2 \ , \ f(x) = x^4 , \dots , f(x) = x^{2n}$ sont paires sur $\mathbb{R}$.
4) Les fonctions $f(x) = x \ , \ f(x) = x^3 , \dots , f(x) = x^{2n+1}$ sont impairessur $\mathbb{R}$.

Définitions 5. Soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que :

- f est **majorée** sur D si : $\exists M \in \mathbb{R}, \ \forall x \in D \ : \ f(x) \leq M$.
- f est **minorée** sur D si : $\exists m \in \mathbb{R}, \ \forall x \in D \ : \ f(x) \geq m$.

- On dit que la fonction f est **bornée** si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D \ : \ |f(x)| \leq M$

  C'est-à-dire que f est **majorée** et **minorée**.

Exemples.

1) La fonction $f(x) = e^x$ est minorée sur $D = \mathbb{R}$ par $m = 0$, elle n'est pas majorée.
2) La fonction $f(x) = -e^x$ est majorée sur $D = \mathbb{R}$ par $M = 0$, elle n'est pas minorée.
3) La fonction $f(x) = \cos x$ est bornée sur $D = \mathbb{R}$ par 1 et -1. On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\cos x| \leq 1$.

Définitions 6. Soient $f: D_f \longrightarrow F_f$ et $g: D_g \longrightarrow F_g$ deux fonction telle que $D_f \subset D_g$. On définit la fonction composée gof par :

$$gof \ : \ \begin{array}{l} D_f \longrightarrow F_g \\ x \longrightarrow g(f(x)) \end{array}$$

Remarques :

1) La condition $D_f \subset D_g$ est essentielle pour que l'image par la fonction g de $f(x)$ ait un sens.
2) Il faut faire attention à l'ordre des fonctions, car en général gof et fog ne sont pas égales.

++

4.2. Limites

Définition 7. Soient $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle, $\ell \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in D$ où une extrémité de D.

On dit que la fonction f admet une limite ℓ en x_0 , si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D \ : \ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit : $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Explication : Si x est au voisinage de x_0 i.e. $x \in]x_0 - \delta , x_0 + \delta[$ alors $f(x)$ est au voisinage de ℓ, i.e. $f(x) \in]\ell - \varepsilon , \ell + \varepsilon[$.

Exemple. Soit la fonction $f(x) = 7x + 1$, définie sur $D = \mathbb{R}$.

Pour $x_0 = 1$, on a $\lim_{x \to 1} f(x) = 8$. En effet, on a :

$$|f(x) - 8| < \varepsilon \Leftrightarrow 7|x - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{7}$$

Donc il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, pour que la définition de la limite soit vérifiée:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{7} > 0, \forall x \in D \ : \ |x - 1| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 8| < \varepsilon$$

Proposition 1. Si f admet une limite en un point, alors cette limite est unique.

Définitions 8. Soient $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle, $x_0 \in D$ où une extrémité de D.

- On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ en x_0 , si :

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D : \quad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow \quad f(x) > A$$

On écrit : $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

- On dit que la fonction f tend vers $-\infty$ en x_0 , si :

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D \ : \quad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow \quad f(x) < -A$$

On écrit : $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

Définitions 9. Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle et $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que la fonction f tend vers ℓ en $+\infty$ (on écrit $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$), si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in D \ : \quad x > B \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

- On dit que la fonction f tend vers ℓ en $-\infty$ (on écrit $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$), si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in D \ : \quad x < -B \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

- On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ (on écrit $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$), si :

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in D \ : \quad x > B \Longrightarrow \quad f(x) > A$$

- On dit que la fonction f tend vers $-\infty$ en $+\infty$ (on écrit $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$), si :

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in D \ : \quad x > B \Longrightarrow \quad f(x) > -A$$

- On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ en $-\infty$ (on écrit $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$), si :

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in D \ : \quad x < -B \Longrightarrow \quad f(x) < A$$

- On dit que la fonction f tend vers $-\infty$en $-\infty$ (on écrit $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$), si :

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in D \ : \quad x < -B \Longrightarrow \quad f(x) > -A$$

Exemples.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \qquad et \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si} \quad n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

2) Pour $n, m \in \mathbb{N}$ soit $f(x) = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$, avec $a_n, b_m \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad n > m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si} \quad n = m \\ -\infty & \text{si} \quad n < m \end{cases}$$

Définitions 10.

- On dit que la fonction f admet une limite à droite en x_0 , si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D \ : \quad 0 < x - x_0 < \delta \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit : $\lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} f(x) = \ell$ où $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$

- On dit que la fonction f admet une limite à gauche en x_0 , si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D \;:\; \delta < x - x_0 < 0 \Longrightarrow \;|f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit : $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to x_0}} f(x) = \ell$ où $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$

Proposition 2. On a l'équivalence suivante :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{\substack{> \\ x\to x_0}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to x_0}} f(x) = \ell$$

Remarque :

- Pour démontrer que $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq \ell$ il suffit de démontrer que l'une des deux limites (à droite ou à gauche) est différente de ℓ .
- Pour démontrer que f n'admet pas de limite au point x_0 , il suffit de démontrer que les deux limites (à droite et à gauche) sont différentes.

Exemple : Soit la fonction :

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

On a $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x) = -1 \neq \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x) = 1$. Alors f n'admet pas de limite au point $x_0 = 0$.

Proposition 3.

Soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle, $x_0 \in D$ où une extrémité de D. Alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ ssi pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0 , on a $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ . i.e.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D \text{ tel que } \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \text{ on a } \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$$

Exemple. La fonction définie par $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ n'admet de limite ou point $x_0 = 0$.

En effet, les deux suites suivantes :

$$x_n = \frac{1}{2n\pi} \quad , \quad t_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$$

Convergent vers $x_0 = 0$. Par contre, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \cos(2n\pi) = 1 \neq -1 = \lim_{n\to+\infty} \cos\big((2n+1)\pi\big) = \lim_{n\to+\infty} f(t_n)$$

Proposition 4.

Soient f, g deux fonctions telles que $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, alors :

1) $\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = A + B.$
2) $\lim_{x\to x_0}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x) = A - B.$
3) $\lim_{x\to x_0}(f(x) \times g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \times \lim_{x\to x_0} g(x) = A \times B.$
4) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, $B \neq 0.$

Théorème 1. (Règle de comparaison)

- Soient f, g deux fonctions telles que : $\forall x \in D, f(x) \leq g(x)$. Alors :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x).$$

- De plus on a :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \implies \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty\,.$$

Théorème 2. (Théorème des gendarmes)

Soient f, g et h trois fonctions, telles que :

$$\forall x \in D,\ \ g \leq f \leq h \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell.$$

Alors on a : $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Proposition 5. (Limite d'un produit)

Soient f et g deux fonctions, telles que g est bornée et $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$. Alors :

$$\boldsymbol{\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = 0}$$

Proposition 6. (Limite d'une composition)

Soient f et g deux fonctions, telles que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{t \to \ell} g(t) = \mathrm{L}$. Alors :

$$\boldsymbol{\lim_{x \to x_0} gof(x) = L}$$

Limites particulières :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad , \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \mathrm{e} \qquad , \qquad \lim_{x \to 0+} (1 + x)^{1/x} = \mathrm{e}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad , \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1$$