logique mathématique

Université Mohamed Seddik Ben Yahia -Jijel-
2ième année Licence informatique

F. BOUDJERIDA

chapitre 3

Raisonnement en logique propositionnelle

L’aspect syntaxique

- L’approche sémantique(la méthode de table de vérité) ne convient pas pour faire des raisonnement sur des formules propositionnelles.
- L’approche syntaxique déductive a pour but de calculer les conséquences logiques par l’application de règles d’inférences.

Approche syntaxique

La grammaire

définie par les deux règles suivantes :

a) Les variables propositionnelles sont des formules.

b) T et $\perp$ sont des formules.

c) Si A et B sont des formules alors
$(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $\neg A$ et $(A \leftrightarrow B)$

d) une expression n'est une formule FBF que si elle écrite conformément aux règles (a) et (b) et (c)

Approche syntaxique

La grammaire

Remarque

L'appartenance à l'ensemble des formules est décidable

(ie il existe un algorithme permettant de décider si un mot quelconque est une formule)

Exemple :

$(P \vee Q)$

$(P1 \rightarrow (P2 \vee P3))$

ce sont des formules bien formés selon les règles

$(P1 \rightarrow (P2 \neg P3))$

$(PQ \vee)$

ce ne sont pas des FBF selon les règles : $\neg$ est uni et $P \vee Q$

Approche syntaxique
Ambiguïtés

L'utilisation de la *notation infixe* s'accompagne de problèmes de lecture :
Comment lire $\varphi 1 \wedge \varphi 2 \vee \varphi 3$? $\varphi 1 \rightarrow \varphi 2 \rightarrow \varphi 3$?

Pour lever les ambiguïtés, on utilise les parenthèses ou des règles de priorité entre opérateurs :

- si *op*1 a une plus grande précédence (priorité) que *op*2 alors *e*1 *op*1 *e2* *op2* *e*3 est équivalent à ((*e*1 *op1* *e2*) *op*2 *e*3)

Par ex :$2 \times 3 + 5 = (2 \times 3) + 5 = 11 \neq 2 \times (3 + 5) = 16$

Approche syntaxique
Ambiguïtés

- si *op2* a une plus grande précédence (priorité) que *op*1 alors *e*1 *op*1 *e*2 *op2* *e*3 est équivalent à (*e*1 *op1* (*e*2 *op*2 *e*3))

Par ex :2 + 3 × 5 = 2 + (3 × 5) = 17.

- si *op* est associatif à gauche alors *e*1 *op* *e*2 *op* *e*3 est équivalent à ((*e*1*op* *e*2) *op* *e*3)

Par ex : 10/2/5 = (10/2)/5 = 1 ≠ 10/(2/5) .

Une fois ces règles fixées, à chaque formule correspond un et un seul arbre de lecture.

Approche syntaxique
Règles de précédence

- Ordre de précédence $\prec$ sur les opérateurs :
  $\leftrightarrow \prec \rightarrow \prec \vee \prec \wedge \prec \neg$
  et associativité à gauche pour $\leftrightarrow$, $\vee$, $\wedge$ et à droite pour $\rightarrow$.

Exemples

$p \vee q \wedge r$ se lit $p \vee (q \wedge r)$
$p \rightarrow q \rightarrow p$ se lit $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
$p \vee q \rightarrow r$ se lit $(p \vee q) \rightarrow r$
$\neg p \wedge q$ se lit $(\neg p) \wedge q$
$p \rightarrow q \wedge r \rightarrow s$ se lit $p \rightarrow ((q \wedge r) \rightarrow s)$

Les parenthèses permettent de contrecarrer ces règles, si elles ne conviennent pas. Elles permettent aussi de rendre une formule plus lisible, ou de ne pas devoir retenir les règles de précédence

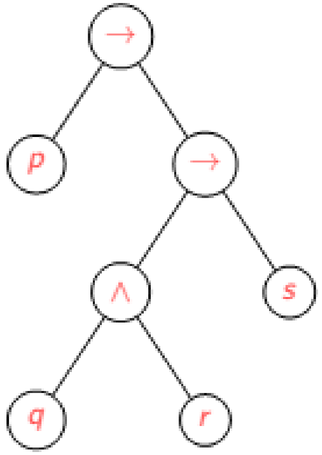
Approche syntaxique

Arbre correspondant à une formule

La formule $p \rightarrow q \wedge r \rightarrow s$ est donc équivalente à

$$p \rightarrow ((q \wedge r) \rightarrow s)$$

et donc son arbre de lecture est :



Approche syntaxique
Profondeur d’une formule

La *profondeur d’une formule* φ est la profondeur de son arbre de lecture associée , notée $A\ \varphi$.

Elle se définit de manière inductive comme suit :

- cas de base : si $\varphi = p\ ,T,\ \perp$ où p est une proposition alors
  $Prof(\varphi) = 0$;
- cas inductif : si $\varphi = \varphi\ 1 op\ \varphi\ 2$ alors
  $Prof(\varphi) = 1 + \mathbf{max}(Prof(\varphi\ 1), Prof(\varphi\ 2))$;
  si $\varphi = (\varphi\ 1)$ alors $Prof(\varphi) = Prof(\varphi\ 1)$.

L'aspect syntaxique

- Pour établir la validité des formules, on introduit un système de déduction qui permet de déduire qu'une formule est une conséquence logique d'un ensemble de formules, et on écrit :

$$T \vdash P$$

Ensemble des formules   Une formule

- L'interprétation de cette relation est que si on a dériver $T \vdash P$ et que les formules dans T sont vrais alors la formule p est vraie.

T : un ensemble de formules que l'on pourra écrire $H_{1,}$ H_2, …, H_n et sont appelés les hypothèses(les prémisses)

P : la conclusion

L’aspect syntaxique

- Les preuves en mathématique on utilise des règles qui nous permettent étape par étape de déduire la conclusion à partir de prémisses, ces règles sont appelées les règles d’inférences qui sont de la forme suivante :

$$\frac{h1,h2,\ldots.hn}{C} \qquad \begin{array}{l}\text{les prémisses}\\ \text{la conclusion}\end{array}$$

- On peut se lire sous les hypothèses h1,h2,….hn on peut déduire C.

L'aspect syntaxique
La déduction naturelle

- La déduction naturelle a été développé par Gentzen (1934)
- Dans cette méthode il y a des hypothèses et les règles d'inférences on notera

$$\frac{h1,h2,\ldots.hn}{C}$$

- Le fait qu'on peut produire c à partir de h1,h2,….hn (inférence directe)

L'aspect syntaxique
La déduction naturelle

Règles d'inférences

1) **Modus ponens(MP) :**

$A \rightarrow B, A \vdash B$ ou $\dfrac{A \rightarrow B,\ A}{B}$

2) **Modus tollens(MT) :**

$A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$ ou $\dfrac{A \rightarrow B,\ \neg B}{\neg A}$

3) **Introduction de la conjonction($i\wedge$) :**

$A, B \vdash A \wedge B$ $\dfrac{A, B}{A \wedge B}$

L'aspect syntaxique
La déduction naturelle

4) Introduction de la disjonction :

(i1∨) $\dfrac{A}{A \vee B}$ **(i2∨)** $\dfrac{B}{A \vee B}$

5) Elimination de la conjonction

(e1∧) $\dfrac{A \wedge B}{A}$ **(e2∧)** $\dfrac{A \wedge B}{B}$

6) Elimination de la disjonction

(e∨) $\dfrac{T \vdash A \vee B \qquad T, A \vdash C \qquad T, B \vdash C}{C}$

L'aspect syntaxique
La déduction naturelle

Exemple : $A \vee B \vdash B \vee A$?

$$(e\vee)\;\dfrac{A\vee B\ (hyp) \qquad \mathbf{(i2\vee)}\ \dfrac{A}{B \vee A} \qquad \mathbf{(i1\vee)}\ \dfrac{B}{B \vee A}}{B \vee A}$$

Donc $A \vee B \vdash B \vee A$

7) Introduction de l'implication

$$\dfrac{T, A \vdash B}{T, \vdash A \rightarrow B}$$

L’aspect syntaxique
La déduction naturelle

Remarques

- Si on a une déduction naturelle de B sous un ensemble d’hypothèse dont éventuellement l’hypothèse A, on peut contenir une déduction naturelle de $(A \rightarrow B)$
- Dans la pratique, on appliquera la règle, on filtrera le n° de A que l’on souhaite retirer des hypothèses et on indiquera leur n° à droite de la barre on dit alors que l’hypothèse a déchargé.
- on tire alors que la formule $A \rightarrow B$ est correcte et elle est un loi logique ou une théorème.

L'aspect syntaxique
La déduction naturelle

Théorème(formule démontrable) :Qui est le dernier élément d'une démonstration sans hypothèses.

8) Elimination de l'implication

$$\frac{T\vdash A\rightarrow B \quad T\vdash A}{T\vdash B}$$

9) Négation Soit $\perp$ la formule appelé l'absorbe (c'est une formule qui dans toutes ses interprétations prend faux)

- **Introduction de négation**

$$\frac{T, A \vdash \perp}{\neg A}$$

- **Elimination de la négation**

$$\frac{\textbf{(i}\neg\textbf{)}\ A \qquad \neg A \qquad \textbf{(e}\neg\textbf{)}}{\perp}$$

- **Le principe efalso**

$$\frac{\perp}{A}$$

- **Le principe de double négation**

$$\frac{\neg A\vdash \perp}{A}$$

L'aspect syntaxique
Théorie formelle

- Une théorie formelle T est définie par :
- Un alphabet
- Un ensemble des FBF
- Un ensemble d'axiomes
- Un ou plusieurs règles d'inférences

Théorie formelle

- Une preuve dans T est une séquence de formules $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ telles que tout α_i est soit un axiome soit obtenue à partir de certaines des formules qui précédent dans la séquence par application des règles d'inférences.
- Axiome : une formule que l'on admet qu'elle est vraie(on ne la démontre pas).
- Une formule α admet une preuve dans T(α est la dernière ligne d'une preuve) on dit de α qu'elle est démontrable ou que α est un théorème de T est on note $\vdash \alpha$

Exemple de théorie pour le logique propositionnelle

Système de Łukasiewicz

On définit une théorie comme suit :

1) L'alphabet :

- ensemble de variables propositionnelles notées P,Q, …
- les connecteurs logiques $\neg$ et $\rightarrow$
- les parenthèses

exemples : démontrer que $\{\neg , \rightarrow\}$ forme un système complet.

Définition Un ensemble T de connecteurs est complet si, étant donnée une formule F du calcul propositionnel, on peut trouver une formule F' dans laquelle n'interviennent que les connecteurs de T et telle que $F \equiv F'$

Exemple de théorie pour le logique propositionnelle

Système de Łukasiewicz

2) Les formules bien formées

- Les vp sont FBF
- Si α et β sont FBF alors

$$\left.\begin{array}{r}(\neg\alpha)\\(\alpha\rightarrow\beta)\end{array}\right\}\text{ sont des FBF}$$

- **Les axiomes**

A1 : $(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha))$

A2 : $(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma))\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma)$

A3 : $(\neg\alpha\rightarrow\neg\beta)\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha)$

- **Règles d'inférences**

Comme règle d'inférence unique le Modus Ponens

Exemple de théorie pour le logique propositionnelle

Système de Łukasiewicz

Exep1 : démontrer $\vdash \alpha \to \alpha$

b0 : $(\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)) \to ((\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha))$ (A2)

b1 : $\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)$ (A1)

b2 : $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$, (MP b0, b1)

b3 : $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$, (A1)

b4 : $\alpha \to \alpha$ (MP b2, b3)

Exep2 : démontrer $F \to H, F \to (H \to G) \vdash F \to G$

Exemple de théorie pour le logique propositionnelle

Système de Łukasiewicz

Théorème de déduction :

Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \vdash \beta$ alors $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1} \vdash \alpha_n \rightarrow \beta$