Théorie des graphes

Exercices corrigés

Pr. Fattehallah Ghadi

QCM *(la bonne solution est repérée par une étoile)*

1) **Qu’est ce qu’un parcours Eulérien**

☐ C’est un parcours passant une et une seule fois par chaque un des sommets du graphe.

☐ C’est un cycle Hamiltonien fermé

☐ C’est un parcours passant par toutes les arêtes une et une seule fois *

2) **Qu’est ce qu’un parcours Hamiltonien**

☐ un parcours passant par toutes les arêtes une et une seule fois

☐ C'est un graphe qu'on peut parcourir en partant et en revenant au même point

☐ C’est un parcours passant une et une seule fois par chaque un des sommets du graphe.*

3) **Le nombre chromatique d'un graphe est :**

☐ Le nombre de sommets d'un graphe

☐ Le nombre d'arêtes d'un graphe

☐ La moyenne du nombre de sommets voisins

☐ Le nombre de couleurs nécessaires pour colorier les sommets sans que deux sommets voisins aient la même couleur *

4) **Qu'est qu'un graphe complet ?**

☐ Un graphe ayant un parcours eulérien fermé

☐ Un graphe dont tous ses sommets sont adjacents deux à deux *

☐ Un graphe ayant un parcours eulérien et un cycle hamiltonien

5. **Qu'est qu'un sous graphe ?**

☐ Le graphe initial privé de quelques arêtes

☐ Le graphe initial privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacentes *

☐ C’est un graphe privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacentes que l’on prive en suite de quelques arêtes.

6. **Qu'est qu'un graphe partiel ?**

☐ Le graphe initial privé de quelques arêtes *

☐ Le graphe initial privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacentes

☐ C’est un graphe privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacentes que l’on prive en suite de quelques arêtes.

7. **Qu'est qu'un sous graphe partiel ?**

☐ Le graphe initial privé de quelques arêtes

☐ Le graphe initial privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacentes

☐ C’est un graphe privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacentes que l’on prive en suite de quelques arêtes.*

8. **Qu’est ce qu’un arbre couvrant ?**

☐ Un graphe partiel qui est un arbre *

☐ Un sous graphe qui est un arbre

☐ Un sous graphe partiel qui est un arbre.

9. Qu'est ce qu'un graphe planaire

☐ Un graphe situé dans un plan et dont aucune des arêtes ne se coupe, ni se superpose *

☐ Un graphe situé sur un plan et dont on peut dessiner d'un coup les contours sans lever une seule fois le crayon

☐ Un graphe formé par la projection sur un plan d'un graphe en 3D

10. Une composante fortement connexe d'un graphe est :

☐ Un graphe partiel fortement connexe

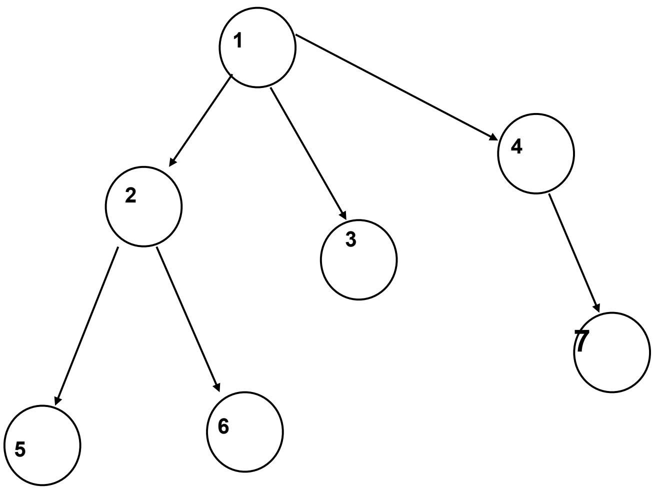
☐ Un sous graphe fortement connexe maximal *

☐ Un sous graphe fortement connexe minimal

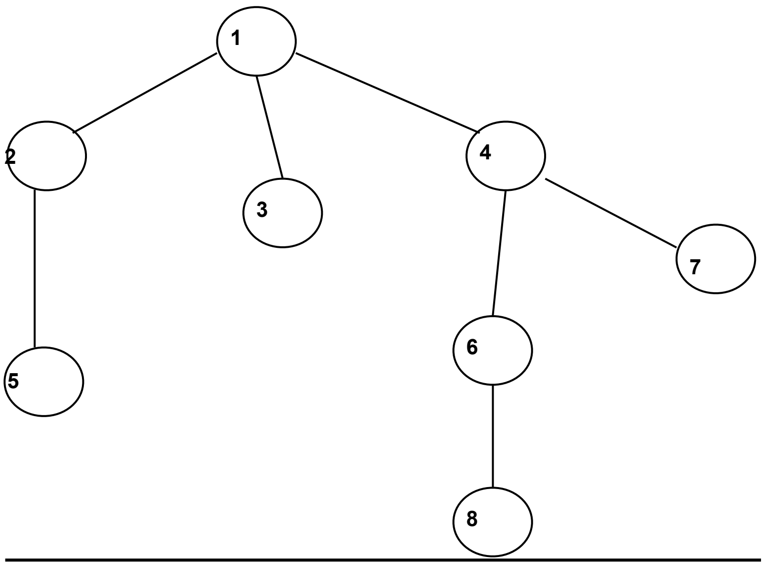
EXERCICES

Exercice 01 :

1) Indiquer l'ordre de parcours des sommets du graphe orienté ci-dessous dans un parcours en largeur



2) Indiquer l'ordre de visite et de post-visite des sommets du graphe non orienté ci-dessous dans un parcours en profondeur



<u>Solution :</u>
<u>1)</u> Ordre de parcours en largeur : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
2) Ordre de visite : 1, 2, 5, 3, 4, 6, 8, 7 ; de post-visite : 5, 2, 3, 8, 6, 7, 4, 1.

<u>Exercice 02 :</u>

Existe-t-il un graphe **G** de huit sommets, numérotés de 1 à 8, de façon que, dans un parcours en profondeur de **G**, l'ordre de visite des sommets soit **1**,**2**,**3**,**4**,**5**,**6**,**7**,**8** et l'ordre de post-visite soit

i) ***5, 3, 2, 4, 7, 6, 8, 1*** ?
ii) ***4, 3, 5, 2, 7, 6, 8, 1*** ?

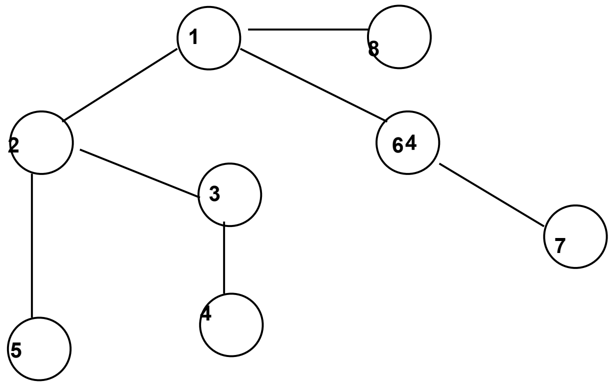
S'il y a une solution, est-elle unique ?

Solution :

<u>Exercice 02 :</u>

i) Pas de solution
ii) Il existe au moins une solution :

a)



b) Elle est unique.

Exercice 03 :

Soit $G=(V,E)$ un graphe orienté. On désigne par M sa matrice d'adjacence donnée par

$$M_{ij}=\begin{cases}1 & si \quad (x_i,x_j)\in E\\ 0 & si \quad (x_i,x_j)\notin E\end{cases}$$

avec $V=\{x_1,\ldots x_n\}$

On note par M^p la puissance p-ième de la matrice M .

1) Montrer que le coefficient $M_{ij}{}^p$ est égal au nombre de chemins de longueur p de G dont l'origine est le sommet x_i et dont l'extrémité est le sommet x_j.

2) *Conclure*

Solution :

On procède par récurrence sur p .

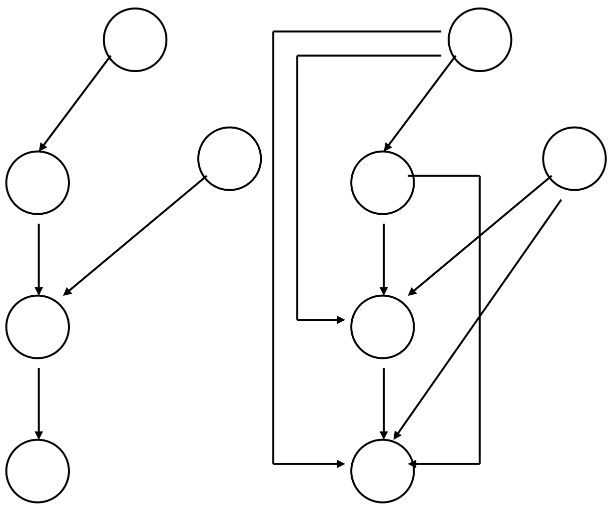
Pour $p=1$, le résultat est évident. En effet $M_{ij}=1$ traduit simplement qu'il existe un Arc entre le sommet x_i et le sommet x_j et par conséquent il existe un seul chemin composé d'un seul Arc entre le sommet x_i et le sommet x_j (seul du fait que le graphe est simple).

On suppose que $M_{nm}{}^p$ est égal au nombre de chemins de longueur p de G dont l'origine est le sommet x_n et dont l'extrémité est le sommet x_m. Montrons $M_{ij}{}^{p+1}$ est égal au nombre de chemins de longueur $p+1$ de G dont l'origine est le sommet x_i et dont l'extrémité est le sommet x_j .

D'après la définition du produit matriciel, on a :

$$M_{ij}{}^{p+1}=\sum_{l=1}^{n} M_{il}{}^p \times M_{lj}$$

Or tout chemin de longueur $p+1$ entre le sommet x_i et le sommet x_j est composé d'un chemin de longueur p entre le sommet x_i et un sommet x_l suivi d'un arc d'origine x_l et d'extrémité x_j.
D'après l'hypothèse de récurrence, le nombre de chemin de longueur p reliant le sommet x_i à un sommet x_l est $M_{il}{}^{p}$, donc le nombre de chemin de longueur $p+1$ entre le sommet x_i et le sommet x_j est égal $M_{il}{}^{p+1}$.
Définition : Clôture transitive d'un graphe :
La clôture transitive (ou la fermeture transitive) d'un graphe simple (orienté ou non) $G=(V,E)$ est le graphe dont les sommets sont ceux du graphe G et les arcs (ou arêtes) sont les (s,t) tels qu'il existe dans le graphe initial G un chemin du sommet s au sommet t.
Exemple d'un graphe et sa clôture transitive :



Si on désigne par M *la matrice d'adjacence du graphe* G *, montrer que la matrice d'adjacence de sa clôture transitive est* $T = M + M^2 + \ldots M^{n-1}$, *avec* $|V| = n$.

Exercice 04 : Poignées de mains
Soit G=(V,E) un graphe simple, alors $\sum_{x\in V} d(x) = 2|V|$

Preuve : Chaque arête es comptée deux fois, puisqu'elle à deux extrémités.
Exercice 05 :
On dit qu'un sommet $x \in V$ est pair si $d(x)$ est en entier pair, il est dit impair si son degré est un entier impair.
Montrer que dans un graphe simple quelconque, le nombre de sommets impairs est toujours pair.
Preuve :
Soit P et I l'ensemble des sommets pair et impair respectivement. On a
$P \cup I = V \quad et \quad P \cap I = \phi$

Or on a $\sum_{x\in V} d(x) = 2|V| = \sum_{x\in P} d(x) + \sum_{x\in I} d(x)$

Or si x est dans P, alors $d(x)$ est pair et par la suite $\sum_{x\in P} d(x)$ est pair. Donc

$\sum_{x\in I} d(x) = 2|V| - \sum_{x\in P} d(x)$ est pair, On en déduit que $|I|$ est pair, puisqu'une somme d'entiers impairs est pair si et seulement si il y a un nombre pair.

Exercice 06 :

Montrer que si G est un graphe régulier de degré r, alors $|E| = 2r.|V|$

Preuve : conséquence directe de l'exo précédent.

Exercice 07 :

Soit G=(V,E) un graphe simple, alors il existe $x, y \in V$ tels que $x \neq y \quad et \quad d(x) = d(y)$

Preuve :

Si tous les sommets sont de degrés différents, alors il existe dans G un seul sommet x_i tel que $d(x_i) = i$, pour $0 \leq i \leq n-1$ (du fait que $\forall x, 0 \leq d(x) \leq n-1$, avec $|V| = n$).

Pour $i = n-1$, on aura $d(x_{n-1}) = n-1$ et par la suite x_{n-1} est adjacent à tous les autres sommets, en particulier au sommet x_0, absurde car $d(x_0) = 0$.

Exercice 08 :

Soit G=(V,E) un graphe simple, d'ordre n. Le complémentaire du graphe G est le graphe simple

$\overline{G} = (V, P_2(V) - E)$

Montrer que si G est régulier de degré r, alors son complémentaire est régulier de degré n-r-1.

Preuve : Montrer d'abord le résultat intermédiaire : $\forall x \in V \; d_G(x) + d_{\overline{G}}(x) = n-1$

En effet les ensembles :

$E_1 = \{y \;\; x \neq y \; et \; (x,y) \in E\}, \; E_2 = \{y \;\; x \neq y \; et \; (x,y) \notin E\}$

Sont disjoints et leur réunion est égale :

$E_3 = \{y \;\; x \neq y \;\}$

Or $card(E_1) = d_G(x) = r$, $card(E_2) = d_{\overline{G}}(x)$ et $card(E_3) = n-1$, on en déduit le résultat demandé.

Exercice 09 :

On désigne par K_{n+1} le graphe simple et complet d'ordre n+1. En comptant de deux façons différentes les arêtes de K_{n+1}, établir la formule

$$1 + 2 + \ldots n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Preuve :

D'une part K_{n+1} est régulier de degré n, donc il a $\frac{n(n+1)}{2}$ arêtes (exo 3), d'autre part,

On a n arêtes sont incidents au sommet 1, (n-1) nouvelles arêtes sont incidentes au sommet 2, …, Une nouvelles arête incidente au sommet (n+1) . Au total on $n + (n-1) + \ldots 1$ arêtes. En faisant l'égalité, on obtient la formule souhaitée.

Exercice 10

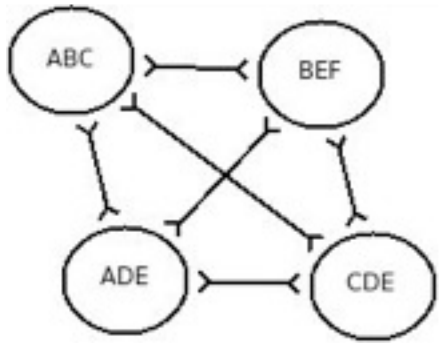
Un groupe de personnes est tel que

i. chaque personne est membre d'exactement deux associations ;
ii. chaque association comprend exactement trois membres ;
iii. deux associations quelconques ont toujours exactement un membre en commun.

Combien y a-t-il de personnes ? d'associations ?

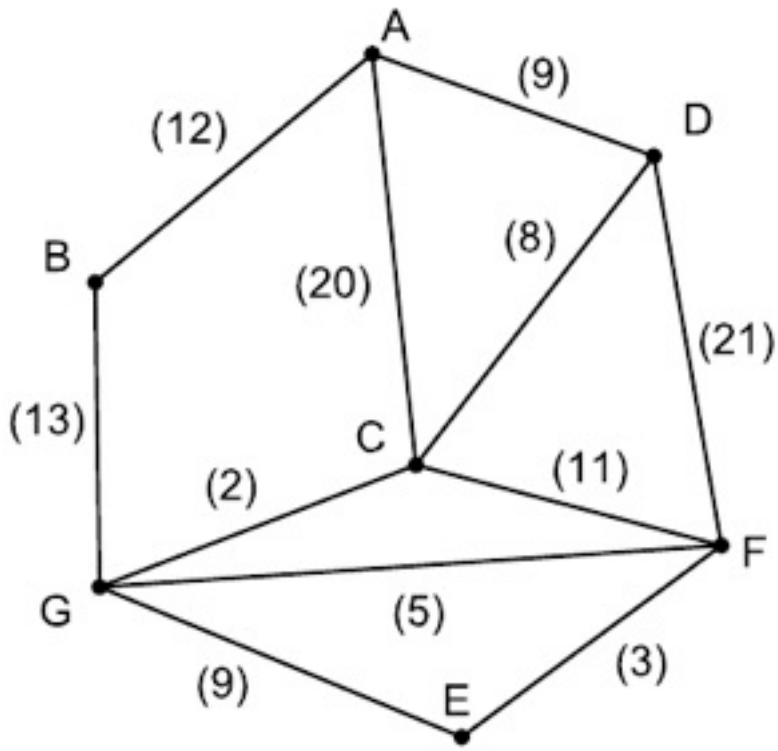
Solution :

4 associations et 6 personnes



Exercice 11

Des touristes sont logés dans un hôtel nommé A. Un guide fait visiter six sites touristiques nommés B, C, D, E, F et G. Les tronçons de route qu'il peut emprunter sont représentés sur le graphe ci-dessous. Le long de chaque arête figure la longueur en kilomètres des différents tronçons.



1) A partir de l'hôtel, le guide peut-il emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux?
2) Même question s'il doit obligatoirement terminer son circuit à l'hôtel.

3) Déterminer le plus court chemin menant de l'hôtel au site E.

Solution :

I. Corrigé de l'exercice

1. La réponse à la question posée est oui :

   Le parcours $A \to C \to D \to A \to B \to G \to C \to F \to G \to E \to F \to D$ passe en effet une fois (et une seule) sur chaque tronçon de route (sur chaque arête du graphe).

   On vient de définir ce qu'on appelle un *parcours eulérien* du graphe.

   Un théorème d'Euler dit qu'un tel parcours existe si :

   - Le graphe est *connexe* : deux sommets quelconques du graphe peuvent être reliés par un chemin. C'est le cas du graphe étudié ici.
   - Ou bien le degré de chaque sommet (c'est-à-dire le nombre des autres sommets avec lesquels il est directement relié) est pair : ce n'est pas le cas ici car A (qui est relié à B, C, D) et D (relié à A, C, F) sont de degré impair.
   - Ou bien deux seulement des sommets sont de degré impair (c'est le cas avec A et D) et alors le parcours eulérien doit nécessairement partir de l'un et aboutir à l'autre de ces deux sommets. C'est vérifié avec l'exemple ci-dessus.

2. La question est de savoir si notre graphe est *eulérien*, c'est-à-dire s'il possède un *cycle eulérien*, autrement dit un parcours eulérien qui parte d'un sommet pour y revenir.

   La réponse est encore donnée par Euler, qui énonce qu'un graphe est eulérien s'il est connexe (ok) et si *tous* ses sommets sont de degré pair (pas ok à cause de A et D).

   Conclusion : le guide ne peut pas emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux et en terminant son circuit à l'hôtel.

Exercice 12

Une entreprise décide de commercialiser un nouveau produit. La planification de ce lancement fait apparaître les tâches reprises au tableau ci-dessous avec leur durée (en semaines) et leurs préalables.

i) Tracer le graphe correspondant à la méthode PERT.

ii) Calculez les dates de début au plus tôt, au plus tard, les marges et le chemin critique.

iii) L'entreprise voudrait réduire la durée totale d'exécution des travaux. Pour cela, il est possible de réduire la durée des tâches 5 et 11 d'une ou deux semaines au prix d'un coût supplémentaire de 100 000,00 DH par semaine de réduction pour la tâche 5 et de 200 000 DH par semaine pour la tâche 11. De combien peut-on réduire la durée totale des travaux et à quel coût ?

No	tâche	durée	préalables
1	Sélection des équipements	1	-
2	Choix de la méthode de production	2	1
3	Procédures de contrôle de qualité	2	2
4	Choix des matières premières	2	1
5	Réception des équipements	7	1
6	Commande des matières premières	1	4
7	Réception des matières premières	3	6
8	Essais de production	2	5,3 et 7
9	Première fourniture aux magasins	6	8 et 11
10	Conception du conditionnement	4	1
11	Production du conditionnement	5	10
12	Réunion des vendeurs	1	11
13	Formation des vendeurs	1	12

Solution :

i) Réseau de PERT : il est nécessaire d'ajouter une tâche fictive entre les tâches 11 et 9.

ii) Dates au plus tôt, au plus tard et marges :

Tâche	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Date + tôt	0	1	3	1	1	3	4	8	10	1	5	10	11
Marge	0	3	3	1	0	1	1	0	0	0	0	4	4
Date + tard	0	4	6	2	1	4	5	8	10	1	5	14	15

iii) Réduction de la durée : Il faut réduire les tâches 5 et 11 pour réduire la durée totale (les deux sont critiques). Mais une réduction au delà de 1 unité est inutile. Le surcoût total est donc de 300 000 DH.

Exercice 13

Dans un pays, il n'y a que 15 villes. On peut aller de chaque ville à au moins 7 autres villes du pays par une autoroute.

1) Peut-on se rendre, par autoroute, de la capitale du pays à chacune des autres villes
2) Le graphe est-il connexe.

Solution :

Soit A une ville quelconque. L'autoroute nous conduit de la capitale vers au moins 7 villes différentes ; on a donc un « réseau » de 8 villes reliées par autoroute. De la ville A on peut également relier par autoroute au moins 7 autres villes différentes ; on a donc un nouveau « réseau » de 8 villes reliées par autoroute. Il doit y avoir une ville commune à ces deux réseaux, car sinon le pays aurait au moins 16 villes. La capitale est donc reliée à A en au plus deux coups, en passant par cette ville commune ; elle est donc reliée à toutes les autres villes du pays. On en déduit que le graphe qui représente la situation précédente est connexe.

Exercice 14

Le conseil municipal d'une ville comprend 7 commissions, qui obéissent aux règles Suivantes :

Règle 1 : tout conseiller municipal fait partie de 2 commissions exactement.

Règle 2 : deux commissions quelconques ont exactement un conseiller en commun

1) Modéliser le problème à l’aide d’un graphe (préciser les sommets et les liaisons)
2) Combien y a-t-il de membres dans le conseil municipal ?
3) En déduire le nombre de membre de chaque commission.

Solution :

La règle 1 nous permet d'obtenir la représentation graphique suivante :
Les commissions sont les sommets et un conseiller faisant partie d'exactement 2 commissions est représenté par une arête reliant les 2 sommets qui les représentent (remarquons que sans cette règle la représentation obtenue ne serait pas un graphe, mais un objet plus compliqué, un hypergraphe"). La règle 1 nous dit aussi que le graphe obtenu est sans boucle. La règle 2 implique qu'il n'y a pas d'arête multiple, et que deux sommets quelconques sont adjacents ; c'est à dire que le graphe est complet, c'est K7, soit 21 conseillers municipaux. On peut même en déduire le nombre de membres de chaque commission, c'est-à-dire 6.

Exercice 15

On considère le graphe simple dont les sommets sont les entiers naturels compris entre 1 et 20, et tel que deux sommets i et j sont reliés si et seulement si i + j <= 21.

1) Prouver que ce graphe est connexe. Déterminer son diamètre.
2) Déterminer le nombre chromatique de ce graphe.

Solution :

a) Si n est un entier inférieur ou égal à 20, on a n+1 <= 21, donc 1 est adjacent à tous les entiers inférieurs ou égaux à 20. Ceci prouve que le graphe est connexe, et que son diamètre est au plus 2 (on peut toujours trouver une chaîne de longueur au plus 2 de i à j en passant par 1). Comme 19 et 20 ne sont pas adjacents, le diamètre est exactement de 2.

b) le degré du sommet i est 21- i si i > 10, et 20-i si i <= 10 (la différence vient du fait que, si i > 10, i est relié à tous les entiers de 1 à 21- i, tandis que, si i <= 10, i est relié à tous les entiers de 1 à 21- i, sauf i car on ne compte pas la boucle de i à i). On peut appliquer l'algorithme de Welch et Powell aux entiers rangés dans l'ordre des degrés décroissants, qui est l'ordre naturel, et on trouve que l'on peut colorer le graphe avec 11 couleurs, correspondants aux ensembles stables {1}, {2; 20}, {3; 19}, {4; 18}, {5; 17}, {6; 16}, {7; 15}, {8; 14}, {9; 13}, {10; 12}, {11}. Donc le nombre chromatique est au plus de 11. D'autre part, si i; j sont deux entiers distincts inférieurs ou égaux à 11, on a i+j <= 21, donc i et j sont adjacents. Le graphe contient donc un graphe complet d'ordre 11 : son nombre chromatique est au moins 11.

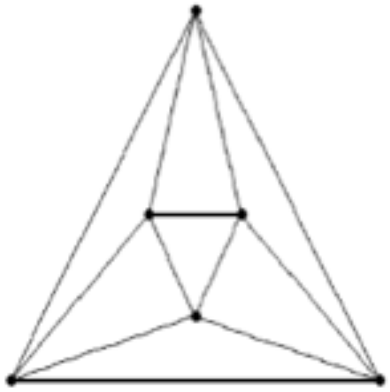
Exercice 16

Dessiner les graphes suivants :

1) Les sommets sont les faces d'un cube, deux sommets sont reliés si les faces correspondantes ont une arête du cube en commun.
2) Les sommets du graphe sont tous les sous ensembles à deux éléments de {1, 2, 3, 4 } deux sommets sont reliés si leur intersection est non vide.

Solution :

Les deux situations correspondent toutes au graphe de l'octaèdre



Exercice 17 :

1) Dessiner les graphes d'ordre 3, 4, 5, 6 dont tous les sommets sont de degré 2.
2) Dans un groupe de vingt enfants, est-il possible que sept d'entre eux aient chacun exactement trois amis, neuf d'entre eux en aient exactement quatre, et quatre d'entre eux exactement cinq ?

Solution :

2) Chaque sommet est représente par un enfant.
Deux sommets sont adjacents si les deux enfants correspondants sont amis.
Le nombre d'amis d'un enfant est le degré du sommet correspondant.
Associer un graphe à une situation
7 sommets de degré 3, 9 sommets de degré 4 et 4 sommets de degré 5.
Σ degrés = 7x3 + 9x4 + 4x5 =77 impair !!!
Un tel graphe n'existe pas.

Exercice 18:

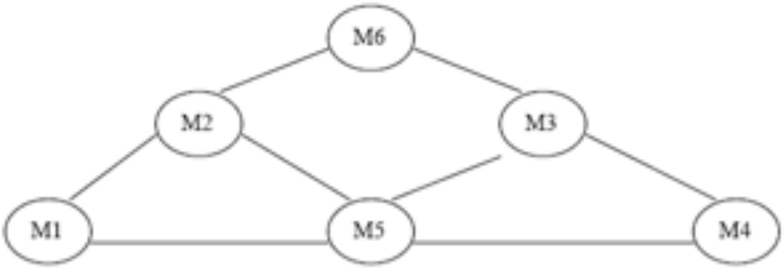
Cinq étudiants : A, B, C, D, et E doivent passer certains examens parmi les suivants : M1, M2, M3, M4, M5 et M6. Les examens ne se tiennent qu'une seule fois. Chaque étudiant ne peut passer qu'un examen par jour. La liste des inscriptions aux examens est la suivante :

A	M1, M2, M5
B	M3, M4
C	M2, M6
D	M3, M4, M5
E	M3, M6

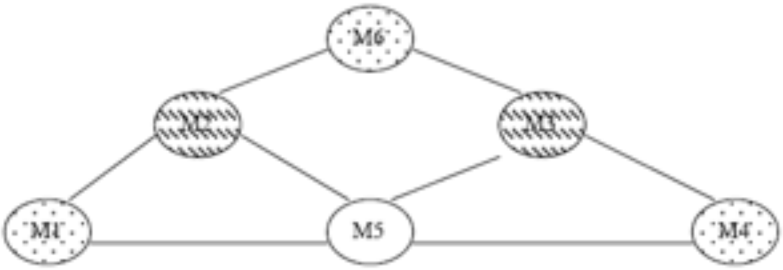
1) Combien d'examens peut-on effectuer par jour ?
2) Quel est le nombre minimal de jours nécessaires pour faire passer tous les examens ?

Solution :

Il y a incompatibilité entre deux déroulements simultanés si un étudiant doit passer les deux matières. On va donc chercher un stable qui fait que deux matières ne sont pas connectées directement (elles peuvent donc se dérouler en même temps puisque aucun étudiant ne doit les passer toutes les deux).
On construit un graphe où les noeuds sont les examens et une arête (pas besoin d'orientation ici) si un étudiant doit subir ces deux examens.



A partir de ce graphe, on cherche un ensemble stable : (M1, M6, M4). Le nombre maximal d'examen que l'on peut organiser par jour est donc la cardinalité du stable (ici $\alpha = 3$).
Le nombre de jour correspond au nombre de couleur à utiliser pour colorier les noeuds de telle manière que deux noeuds adjacents ne soient pas de la même couleur (le nombre de couleur va déterminer le nombre de « composant » regroupant les matières qui peuvent avoir lieu en même temps (ici $\gamma = 3$).



Exercice 19

On désire installer au moindre coût un réseau de communication entre divers sites. Le coût des connections inter-sites sont les suivants (symétrique):

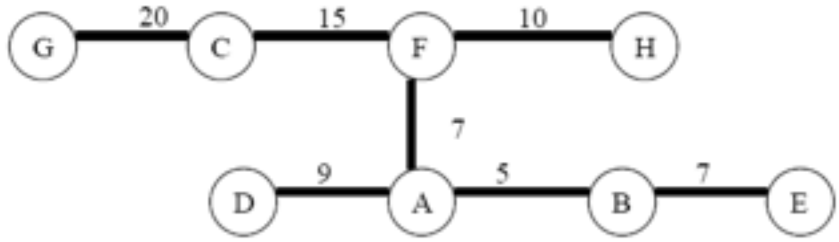
	A	B	C	D	E	F	G	H
A	-							
B	5	-						
C	18	17	-					
D	9	11	27	-				
E	13	7	23	20	-			
F	7	10	15	15	15	-		
G	38	38	20	40	40	35	-	
H	22	15	25	25	30	10	45	-

1) Quel est le problème formel associé ?
2) Déterminer la solution optimale

Solution :

Le problème se ramène au calcul d'un arbre de recouvrement de valeur minimale (les étiquettes des arcs sont des coûts).

L'application de l'algorithme de Sollin donne la valeur : 73



Alternative à l'algorithme de Sollin, l'algorithme de Kruskal (de type glouton) :

```
U ← Ø;
pour i ← 1 à m faire
        si    G (X, U ∪ {ui }) ne contient pas de cycle
        alors U ← U ∪ {ui }
        fsi
fpour
```

Exercice 20

On considère le problème suivant :

$$Max(x_{12}+x_{13})$$

sous les contraintes suivantes :

$x_{12}+x_{32}=x_{24}$

$x_{13}+x_{43}=x_{32}+x_{35}$

$x_{24}+x_{54}=x_{43}+x_{46}$

$x_{35}=x_{54}+x_{56}$

$0\le x_{12}\le 10$, $0\le x_{13}\le 10$, $0\le x_{24}\le 10$, $0\le x_{32}\le 15$, $0\le x_{35}\le 10$, $0\le x_{43}\le 5$, $0\le x_{46}\le 5$, $0\le x_{54}\le 15$,

$0\le x_{56}\le 10$

1) Traduire le problème ci-dessus en un problème de flot maximum dans un graphe
2) Résoudre le problème par l'algorithme de Ford & Fulkerson.

Solution :

Problème de Flot Max.

Xij : traduit le flux circulant du nœud i vers le nœud j

Les contraintes d'égalités traduisent la loi de kirchoff au niveau de chaque nœud

Les contraintes d'inégalités traduisent les contraintes de capacité au niveau de chaque liaison

La fonction à maximiser traduit le folt entrant dans le réseau.

Reste à traduire le problème en un problème de flot dans un réseau et faire dérouler l'algorithme de Ford-Fulkerson pour avoir une solution maximal.

Exercice 21 : *(sans solution)*

Soit B la matrice d'incidence Nœud – Arc associée au graphe orienté $G = (V, E)$ définie par :

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad le\ sommet\ i\ est\ le\ but\ de\ l'arc\ j \\ -1 & si \quad le\ sommet\ i\ est\ l'origine\ de\ l'arc\ j \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

On note par B^T la matrice transposée.

Que représente la matrice produit BB^T ?

Exercice 22 : *(sans solution)*

On considère le système des contraintes

$$AX \leq b,$$

avec $X \in R^n$ et $b \in R^m$

La matrice A est définie ainsi :

Chaque ligne de la matrice A contient une seule valeur 1, une seule valeur -1 et les autres éléments de la ligne contiennent la valeur 0.

On note que $AX \leq b$ est un ensemble de m contraintes d'inégalités linéaires avec n inconnues.

Chaque contrainte prend la forme

$$x_j - x_i \leq b_k \quad 1 \leq i, j \leq n \text{ et } 1 \leq k \leq m$$

Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une solution du système ci-dessus et d une constante réelle.

1) Montrer que $x + d := (x_1 + d, x_2 + d, \ldots, x_n + d)$ est aussi solution de $AX \leq b$.

L'objectif de l'exercice est la résolution du problème en utilisant la théorie du graphe.

La matrice d'incidence Nœud Arc associé au graphe en question est la matrice transposée de la matrice A.

Chaque sommet v_i du graphe correspond à une inconnue x_i pour $1 \leq i \leq n$ et chaque arc du graphe correspond à l'une des m contraintes. Plus précisément, le graphe orienté $G = (V, E)$ associé au problème est donnée par :

$$V = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$$

$$E = \{(v_i, v_j) \ : \ x_j - x_i \leq b_k\} \cup \{(v_0, v_1), \ldots, (v_0, v_n)\}$$

Le sommet v_0 est ajouté de telle sorte que tous les autres sommets soient joignables à partir de v_0 .

On définit la fonction poids comme suit :

$$p(v_i, v_j) = b_k \text{ si } x_j - x_i \leq b_k$$

et

$$p(v_0, v_l) = 0 \text{ pour } 1 \leq l \leq n$$

2) Montrer que si G ne contient pas de circuit absorbant, alors $x = (\delta(v_0, v_1), \ldots, \delta(v_0, v_n))$ est une solution de $AX \leq b$

3) Montrer que si G contient un circuit absorbant, alors le problème $AX \leq b$ n'admet pas de solution.

4) Application

Est-ce que le problème suivant admet une solution

$x_1 - x_2 \le 0$

$x_1 - x_5 \le -1$

$x_2 - x_5 \le 1$

$x_3 - x_1 \le 5$

$x_4 - x_1 \le 4$

$x_4 - x_3 \le -1$

$x_5 - x_3 \le -3$

$x_5 - x_4 \le -3$

Exercice 23 *(sans solution)*

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté ou non orienté et soit s un sommet de V quelconque. On désigne par $\delta(s,v)$ la distance du plus court chemin joignant s à v. On suppose que la procédure BFS est exécutée à partir du sommet s : $BFS(G,s)$

1) Montrer que quelque soit (u,v) appartenant à E on a :

$$\delta(s,v) \le \delta(s,u) + 1$$

2) Montrer qu'une fois la procédure BFS est exécutée, on a alors :

$$d(v) \ge \delta(s,v) \quad \forall v \in V$$

3) Durant l'exécution de la procédure BFS, on considère l'instant ou l'ensemble Q contient les sommets $v_1, v_2, \ldots, v_r$ où v_1 et v_r sont respectivement le premier sommet et le dernier sommet enfiler dans Q.

Montrer que :

$$d[v_r] \le d[v_1] + 1 \text{ et } d[v_i] \le d[v_{i+1}],\ i = 1, \ldots\ r-1$$

4) On suppose que le sommet v_i est enfilé avant le sommet v_j dans Q durant l'exécution de la procédure BFS. Montrer que $d[v_i] \le d[v_j]$ à l'instant ou le sommet v_j est enfilé.

5) Une fois la procédure exécutée, montrer qu'on a

$$d[v] = \delta(s,v) \quad \forall v \in V$$

Exercice 24 *(Théorème de parenthèsage) (sans solution)*

Soit $G = (V, E)$ un GO ou GNO, u et v deux sommets quelconques de V .

Dans tout parcours en profondeur de G , on a l'une des trois conditions suivantes :

$[d(u), f(u)] \subset [d(v), f(v)]$,

$[d(v), f(v)] \subset [d(u), f(u)]$,

$[d(u), f(u)]$ et $[d(v), f(v)]$ sont disjoints.

Exercice 25 *(sans solution)*

Un sommet v et un propre descendant (successeur) du sommet u dans la forêt générée par la procédure DFS appliquée à un graphe orienté ou non orienté si, et seulement si

$$d(u) < d(v) < f(v) < f(u)$$

Exercice 26 *(Théorème du chemin blanc) (sans solution)*

Un sommet v et un descendant du sommet u dans la forêt générée par la procédure DFS appliquée à un graphe orienté ou non orienté si, et seulement si à l'instant $d(u)$ ou le sommet u est découvert le sommet v peut être joignable à partir du sommet u via un chemin (chaîne) composé (e) uniquement de sommets colorés en blanc.

Exercice 27*(sans solution)*

Soit $G=(V,E)$ un GNO connexe.

Montrer que G est Eulérien si, et seulement si, il a 0 ou 2 sommets de degré impair.

Soit $G=(V,E)$ un GO connexe (c à d le GNO obtenu en enlevant l'orientation des arcs est connexe).

Montrer que G est Eulérien si, et seulement si, $d^+(v)=d^-(v)$ pour tous les sommets v sauf peut-être 2 sommets u_1 et u_2 tels que $d^+(u_1)-d^-(u_1)=1$, $d^+(u_2)-d^-(u_2)=-1$

Exercice 28 *(sans solution)*

Soit $G=(V,E)$ un GO. Montrer que G est fortement connexe si G est connexe et $d^+(v)=d^-(v)$ pour tous sommet v de V .

Exercice 29 *(sans solution)*

Soit $G=(V,E)$ un GO possédant n sommets, m arcs et p composantes connexes. Montrer que $Rang(A)=n-p$ où A est la matrice d'incidence sommets- Arcs de G .

Exercice 30 *(sans solution)*

Donner une preuve constructive de la propriété suivante :

1) Dans tout arbre fini sur $n \geq 2$ sommets, on peut choisir arbitrairement un sommet v_1 et trouver une numérotation $v_2, \ldots v_n$ de sommets restants ainsi qu'une numérotation $e_1, e_2, \ldots e_n$ des arêtes telles que, pour tout $i \geq 2$, l'arête e_i a pour extrémités le sommet v_i et un sommet v_j avec $j \prec i$
2) En déduire une preuve du résultat suivant :

Le rang de la matrice d'incidences sommets- Arêtes d'un arbre de n est égal à $n-1$

3) *Si on oriente les arêtes d'un arbre, quel impact cala a-t-il sur le rang de sa matrice d'incidences sommets- Arcs ?*