1.3 العمليات الداخلية Operations Internes

1.1.3 العملية الداخلية

تعريف 1

لتكن E مجموعة غير خالية. نسمي عملية داخلية (Operation interne) او قانون تركيب داخلي (Loi de composition interne)

كل تطبيق $f : ExE \to E$
$(a,b) \to f(a,b) \in E$

ترميز: العنصر $f(a,b)$ يسمى مركب العنصرين (a,b)
ونرمز له عادة ب $a*b$; aTb ; $a \perp b$

أمثلة:

1− الجمع و الضرب قانونا تركيب داخلي في $\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{N}$

2− $\otimes$ الضرب قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R}^+$ لكنه ليس كذلك في $\mathbb{R}^-$. لأن إذا كان $(a,b)\in\mathbb{R}_-^2$ فإن: $(a\times b)\in\mathbb{R}^+$ أي $(a\times b)\notin\mathbb{R}_-$.

3 – لتكن E=IR نعتبر العملية (∗) معرفة على ExE بـ: $a, b \in E : a*b=ab+a+b$
(∗) عملية داخلية في IR.

4- نعتبر E=IRxIR ونعرف عملية جمع الثنائيات (⊕) بـ
$(a,b), (a',b') \in E: (a,b)\oplus(a',b') = (a+a',b+b')$

5- ليكن X جزء من $\mathbb{R}$. ليكن $F(X,\mathbb{R})$ مجموعة الدوال المعرفة من X نحو $\mathbb{R}$. الجمع و الضرب المعرفين على $F(X,\mathbb{R})$ كما يلي:

$$(\forall x\in X) \qquad (f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(f.g)(x)=f(x).g(x)$$

قوانين تركيب داخلية في $F(X,\mathbb{R})$.

2.1.3 الجزء المستقر بعملية داخلية (Partie stable par une loi interne)

تعريف 2

لتكن E مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي $*$. وليكن S جزءا من $E(S\subset E)$.
نقول إن S جزء مستقر من $(E,*)$ إذا وفقط إذا كان:
$$(\forall(x,y)\in S^2) \quad x*y\in S$$

أمثلة:

1− $\mathbb{R}^+$ جزء مستقر من $(\mathbb{R},\times)$

2− $\mathbb{R}_-$ ليس جزءا مستقرا من $(\mathbb{R},\times)$

3− نعتبر المجموعة: $U=\{z\in\mathbb{C}/|z|=1\}$

$$(\forall(z,z')\in U^2):|z.z'|=|z|.|z'|=1.1=1$$

إذن: $(\forall(z,z')\in U^2): zz'\in U$

إذن U جزء مستقر من $(\mathbb{C},\times)$

3.1.3 خواص العمليات الداخلية

1- القانون التبديلي او التبادلي Loi commutative

نقول إن القانون $*$ تبادلي في E إذا وفقط إذا كان
$$\left(\forall (a,b)\in E^2\right) \quad a*b=b*a$$

2- القانون التجميعي Loi associative

نقول إن القانون $*$تجميعي في E إذا وفقط إذا كان
$$\left(\forall (a,b,c)\in E^3\right)\ a*(b*c)=(a*b)*c$$

أمثلة:

مثال 1: العمليات المعرفة في الأمثلة من (1) الى (4) هي عمليات تبديلية وتجميعية.

مثال 2: المثال (3) العملية($*$) معرفة بـحيث: $\forall\ a, b \in E : a*b=ab+a+b$

- ($*$) عملية **تبدلية:** $\forall\ a,b\in E: a*b=b*a$

$a, b\in E : a*b=ab+a+b=ba+b+a=b*a$

- ($*$) عملية **تجميعية:** $\forall\ a, b , c \in E : (a*b) *c = a*(b *c)$

$a, b , c \in E$:

$(a*b) *c=(a*b)c+(a*b)+c= (ab+a+b)c+ ab+a+b+c =abc+ab+ac+bc+a+b+c$………(1)

$a*(b *c)=a(b*c)+a+(b*c) = a(bc+b+c) +a+(bc+b+c)=abc+ab+ac+bc+a+b+c$……(2)

إذا اعتبرنا العملية ($*$) **معرفة بالشكل** $a, b\in E : a*b=ab+a+b+1$
أثبت ان العملية تبديلية لكنها غير تجميعية

مثال 3: نعتبر $E=IRxIR$ و عملية جمع الثنائيات ($\oplus$) المعرفة في المثال (4) اعلاه

$(a,b), (a',b') \in E: (a, b) \oplus (a', b') = (a+a', b+b')$

- ($\oplus$) عملية **تبدلية:** $\forall\ (a, b), (a', b') \in E: (a, b) \oplus (a', b')= (a', b') \oplus (a, b)$

$\forall\ (a,b), (a',b') \in E: (a, b) \oplus (a', b') = (a+a', b+b')$ ……………………....(1)

$(a', b') \oplus (a, b) = (a'+a, b'+b) = (a+a', b+b')$……….(2)

من (1) و (2) العملية ($\oplus$) تبديلية.

- ($\oplus$) عملية **تجميعية**: $(a, b), (a', b'), (a'',b'') \in E : [(a,b) \oplus (a',b')] \oplus (a'',b'')= (a,b) \oplus [(a',b') (a'',b'')]$

$[(a, b) \oplus (a', b')] \oplus (a'', b'')= (a+a', b+b') \oplus (a'', b'')= (a+a'+a'', b+b'+b'')$……………….(1)

$(a, b) \oplus [(a', b') \oplus (a'', b'')]= (a, b) \oplus (a'+a'', b'+b'') = (a+a'+a'', b+b'+b'')$……………….(2)

من (1) و (2) فان ($\oplus$) **تجميعية.**

4.1.3 العنصر الحيادي او المحايد (Element neutre)

تعريف3

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E. و $e\in E$.
نقول إن e عنصر محايد في E بالنسبة للقانون$*$ أو عنصر محايد في $(E,*)$ إذا وفقط إذاكان:
$$(\forall x\in E)\ e*x=x \ \ et \ \ x*e=x$$

ملاحظة:
إذا كان القانون $*$ تبادلي فإن e عنصر محايد إذا وفقط إذا كان:
$$(\forall x\in E)\ \ x*e=x$$

المثال 1:
العدد 0 هو العنصر المحايد في كل من $(\mathbb{C},+),(\mathbb{R},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{Z},+),(\mathbb{N},+)$
العدد 1 هو العنصر المحايد في كل من $(\mathbb{C},\times),(\mathbb{R},\times),(\mathbb{Q},\times),(\mathbb{Z},\times),(\mathbb{N},\times)$

المثال 2:
$\varnothing$ هو العنصر المحايد في $(P(E),\cup)$
E هو العنصر المحايد في $(P(E),\cap)$

المثال 3:
نعتبر القانون $*$ المعرف على $\mathbb{N}^*$ بما يلي: $(\forall(a,b)\in\mathbb{N}^{*2})\ \ a*b=a^b$
لدينا: $(\forall a\in\mathbb{N}^*)a*1=a^1=a\ \ (1)$ ولدينا: $1*a=1^a=1$
إذن 1 ليس عنصر محايدا.

المثال 4
نعتبر $*$ القانون المعرف على $\mathbb{R}$ بما يلي:
$$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)x*y=xy-4x-4y+20$$
– هل للقانون $*$عنصر محايد؟
. لنبحث عن e من $\mathbb{R}$ بحيث: $(\forall x\in\mathbb{R})e*x=x*e=x$
ونلاحظ أن $*$تبادلي. إذن يكفي أن نبحث عن e بحيث:
$$(\forall x\in\mathbb{R})e*x=x$$
لدينا:
$$\begin{aligned}(\forall x\in\mathbb{R})e*x=x &\Leftrightarrow (\forall x\in\mathbb{R})ex-4e-4x+20-x=0\\ &\Leftrightarrow(\forall x\in\mathbb{R})x(e-5)-4e+20=0\\ &\Leftrightarrow\begin{cases}e-5=0\\20-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e=5\\e=5\end{cases}\end{aligned}$$
إذن $e=5$ هو العنصر المحايد للقانون $*$.

ملاحظة: العنصر الحيادي إن وجد في مجموعة **وحيـــــــــــد**.

بالفعل : نفرض وجود عنصرين حياديين e و 'e. بما ان eعنصرا حياديا فان
e ∗ e’= e’……………..(1)
و بما ان 'e عنصرا حياديا فان
e ∗ é = e ………………(2)
من (1) و (2) ينتج ان e=e'.

تمرين: للطلبة

نعتبر القانون $*$ المعرف على $\mathbb{R}$ ب:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) x * y = x + 4y - 1$$

هل للقانون $*$ عنصر محايد؟

5.1.3 العناصر المتناظر او المتماثلة (Element Symetrique)

تعريف4

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E. نفترض أن $*$ يقبل عنصرا محايدا e.

نقول إن عنصرا x من E يقبل مماثلا بالنسبة ل $*$ إذا وفقط إذا وجد عنصر x' من E بحيث:

$$x * x' = x' * x = e$$

نقول كذلك ان x'هو نظير x بالنسبة للعملية $(*)$ و يرمز له كذلك بـ x^{-1} بدلا من x' .

ملاحظة:

إذا كان القانون $*$ تبادلي نكتفي بإحدى المتساويتين.

المثال 1: في كل من $(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{R},+),(\mathbb{C},+)$ كل عنصر x يقبل مماثلا هو $-x$.

يسمى (x-) معكوس x (Oposé)

المثال 2:

في $(\mathbb{Q}^*,\times);(\mathbb{R}^*,\times);(\mathbb{C}^*,\times)$ كل عنصر x يقبل مماثلا هو $\frac{1}{x}$

يسمى $\frac{1}{x}$ بمقلوب x (Inverse)

ملاحظة:

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E.

نفترض أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا e وتجميعي. إذا كان لعنصر x مماثل x' فإن هذا المماثل وحيد.

المثال3: نعتبر E=IRxIR وعملية جمع الثنائيات $(\oplus)$ المعرفة في المثال (4) اعلاه

$$(a,b), (a',b') \in E: (a, b) \oplus (a', b') = (a+a', b+b')$$

- لنبحث عن العنصر الحيادي (e, f)؟ بما ان العملية $(\oplus)$ تبديلية نكتفي بالبحث عن (e, f) الذي يحقق المساواة

$$\forall(a,b) \in E: (a, b) \oplus (e, f) = (a, b)$$

$$\forall a,b \in E: (a+e, b+f)= (a, b) \Leftrightarrow \forall a,b \in E: a+e=a \text{ et } b+f=b \Leftrightarrow e=0 \text{ et } f=0$$

أي العنصر الحيادي هو$(e, f)=(0, 0)$.

- لنبحث عن نظير (او مماثل) عنصر(a, b) بالعملية $(\oplus)$. ليكن$(a',b') \in E$ مماثل (a, b).

بما ان العملية تبديلية نكتفي بإحدى المساواتين $(a, b) \oplus (a', b') =(e, f)$ او $(a', b') \oplus (a, b) =(e, f)$.

$$(a, b) \oplus (a', b') =(e, f) \Leftrightarrow (a+a', b+b')=(0, 0) \Leftrightarrow \{a+a'=0 \text{ et } b+b'=0\}$$

$$\Leftrightarrow \{a'=-a \text{ et } b'=-b\}.$$

أي ان نظير العنصر (a, b) هو العنصر $(-a, -b)$.

2.3 الزمرة Le Groupe

تعريف

لتكن G مجموعة غير خالية مزودة بعملية داخلية (∗). نقول عن (G, ∗) انها زمرة (Groupe) اذا تحقق:

1- العملية (∗) تجميعية أي $\forall a, b, c \in G : (a*b)*c=a*(b*c)$.

2- (∗) تقبل عنصرا حياديا $e\in G$. أي $\exists e \in G : \forall a\in G : a*e = e*a = a$

3- لكل عنصر $a\in G$ نظيرا $a'\in G$ أي $\forall a\in G, \exists a'\in G : a'*a = a*a' = e$

ملاحظة: اذا كانت العملية (∗) تبديلية نقول عن الزمرة (G, ∗) زمرة تبديلية.

مثال1:

كل من $(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{R},+),(\mathbb{C},+)$ زمرة تبادلية.

لان الجمع (+) تبديلي و تجميعي و يقبل عنصر حيادي هو $e=0$ و كل عدد a يقبل نظيرا هو $a'=-a$

مثال2:

كل من $(\mathbb{Q}^*,\times),(\mathbb{R}^*,\times),(\mathbb{C}^*,\times)$ زمر تبادلية.

لان الضرب (x) تبديلي و تجميعي و يقبل عنصرا حياديا هو $e=1$ و كل عدد a غير معدوم يقبل نظيرا هو $a'=\frac{1}{a}$.

مثال3: المجموعة IRxIR المزودة بالعملية (⊕) المعرفة في المثال (4) اعلاه

$$(a,b), (a',b') \in E: (a, b) \oplus (a', b') = (a+a', b+b')$$

زمرة تبديلية لان العملية (⊕) تبديلية و تجميعية و تقبل عنصرا حياديا هو $(e, f)=(0, 0)$ و لكل عنصر (a, b) نظيرا هو $(a', b')=(-a, -b)$.

مثال4: العملية(∗) المعرفة على $G=IR$ بـ: $a, b\in G : a*b=ab+a+b$

هل (G, ∗) زمرة تبديلية؟

- (∗) تبديلية و تجميعية.
- ليكن $e\in G$ العنصر الحيادي بهذه العملية.

$$\forall a\in G: a*e = a \Leftrightarrow \forall a\in G: ae+a+e = a \Leftrightarrow \forall a\in G: ae+e = 0$$

بالمطابقة فان: $e=0$. اذن العنصر الحيادي هو $e=0$.

- نظير عنصر $a\in G$. ليكن $a'\in G$ نظير a . أي $a' *a = e$

$$a'*a = e \Leftrightarrow a'a+a'+a = 0 \Leftrightarrow a'(a+1) =-a$$

من اجل $a=-1$ فان a' غير موجود (أي العدد 1- ليس له نظيرا بهذه العملية)

اما من اجل $a\in IR-\{-1\}$ فانه يقبل نظيرا هو: $a'=\frac{-a}{a+1}$.

اذن $(IR, *)$ ليست زمرة بينما $(IR-\{-1\}, *)$ زمرة تبديلية.

Morphisme de groupes 3.3 تماثل الزمر

تعريف (التماثل)

لتكن (G',T) و $(G,*)$ زمرتان و $f : G \to G'$ تطبيق.

نقول عن f انه **تماثل** زمر اذا تحقق: $\forall\, a, b \in G : f(a*b) = f(a)\, T\, f(b)$

مثال1: $f : (Q, +) \to (IR-\{0\}, \times),\ f(a)=2^a$

$$\forall\, a, b \in Q: f(a+b)=2^{a+b}=2^a \times 2^b=f(a)\times f(b).$$

مثال2: $f : (IR_+^*, \times) \to (IR, +),\ f(a)=\ln(a)$

$$\forall\, a, b \in IR_+^*: f(a\times b)=\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)=f(a)+f(b).$$

مثال3:

نعتبر التطبيق: $f : (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R},+)$
$x \to ax$

f تماثل لان $\left(\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2\right) f(x+y)=f(x)+f(y)$

لدينا:
$$\begin{aligned} f(x+y) &= a(x+y)=ax+ay \\ &= f(x)+f(y) \end{aligned}$$

تعريف (التشاكل Isomorphisme)

لتكن $(G,*)$ (G',T) زمرتان و $f : G \to G'$ تطبيق.

نقول عن f انه **تشاكل** زمر اذا كان f تماثل و تقابل.

مثال1 نعتبر التماثل في المثال2 السابق $(f(x)=\ln(x))$ المعرف من IR_+^* نحو IR. يكفي اثبات f تقابل؟

f متباين لان:

$$\forall\, a, b \in IR_+^*: f(a)= f(a) \Leftrightarrow \ln(a)= \ln(b) \Leftrightarrow a=b.$$

f غامر لان:

$$\forall\, y \in IR: \exists ?a\in IR_+^*: y= f(a).$$
$$y= f(a) \Leftrightarrow y= \ln(a) \Leftrightarrow a=e^y \Rightarrow f \text{ غامر} \Rightarrow f \text{ تشاكل}$$

مثال2 نعتبر المثال3 السابق. $f(x)=ax$ حيث a عدد حقيقي غير معدوم. راينا ان f تماثل. يكفي اثبات f تقابل؟

يمكن اثبات بسهولة ان f متباين.

f غامر لان: $\forall\, y \in IR: \exists ?x\in IR: y= f(x).$

$$y= f(x) \Leftrightarrow y= ax \Leftrightarrow x=\frac{1}{a}y \Rightarrow f \text{ غامر} \Rightarrow f \text{ تشاكل}$$

مثال3 نعتبر $(G, .)$ زمرة و $a\in G$ و $f : G \to G$ تطبيق معرف بـ: $f(x)=a.x.a^{-1}$ حيث a^{-1} نظير a.

بين ان f تشاكل أي تماثل و تقابل.

f متباين لان:

$$\forall\ x, x' \in G: f(x)= f(x') \Leftrightarrow a.x.a^{-1}= a.x'.a^{-1} \Leftrightarrow a.x.a^{-1}.a= a.x'.a^{-1}.a.$$
$$\Leftrightarrow a.x.e= a.x'.e \Leftrightarrow a.x = a.x' \Leftrightarrow a^{-1}.a.x = a^{-1}.a.x' \Leftrightarrow e.x = e.x' \Leftrightarrow x = x'$$

f غامر لان:

$$\forall\ y \in G: \exists ?a\in G: y= f(a).$$

$$y= f(a) \Leftrightarrow y= a.x.a^{-1} \Leftrightarrow y.a= a.x.a^{-1}.a \Leftrightarrow y.a= a.x.e \Leftrightarrow y.a= a.x \Leftrightarrow a^{-1}.y.a= a^{-1}.a.x$$

$\Leftrightarrow a^{-1}.y.a= e.x \Leftrightarrow x=a^{-1}.y.a \Rightarrow$ f غامر $\Rightarrow$ f تشاكل

4.3 الزمرة الجزئية Le Sous groupe

تعريف

لتكن $(G, *)$ زمرة و H جزء من G نقول عن H انها زمرة جزئية من G اذا تحقق:

-1 $H \neq \varnothing$ $(e\in H)$.

-2 $\forall\ a, b \in H : a*b \in H$

-3 $\forall\ a \in H :\ a' \in H$ حيث a' هو نظير a بالعملية $(*)$.

مثال1: نعتبر الزمرة $(Z, +)$ حيث Z هي مجموعة الاعداد الصحيحة.

نعتبر المجموعة: $H=\{x\in Z : x=2k / k\in Z\}$ أي H هي مجموعة الاعداد الصحيحة الزوجية يرمز لها 2Z.

أي $x\in H \Leftrightarrow \exists k\in Z : x=2k$. لنثبت ان H زمرة جزئية من G=Z.

- $e=0\in H$ لان 0 عدد زوجي.
- $\forall\ x, y\in H \Rightarrow x+y\in H$ بالفعل لدينا:

$$x \in H \Leftrightarrow x=2k / k\in Z$$

$$\text{et } y \in H \Leftrightarrow y=2k' / k'\in Z$$

بالجمع طرف لطرف

$$x+y=2k+2k'=2(k+k')=2k'' / k''=k+k' \Rightarrow x+y\in H$$

- $\forall\ x \in H \Rightarrow x' =-x\in H$

$$x \in H \Leftrightarrow x=2k / k\in Z \Rightarrow -x=-2k = 2(-k)=2k' / k'=-k \Rightarrow -x \in H$$

ملاحظة:

-1 بنفس الطريقة يمكن اثبات ان المجموعة: $H=\{x\in Z : x=nk / k\in Z\}$ زمرة جزئية من الزمرة $(Z,+)$ يرمز لها nZ.

-2 اذا كانت $(G, *)$ زمرة و H جزء من G حيث $(H, *)$ زمرة فان H زمرة جزئية من G.

مثال2: IR_+^* زمرة جزئية من (IR^*, x).

مثال3: **Z** زمرة جزئية من $(IR, +)$.

5.3 الزمرة Z/nZ

-1 نعتبر العلاقة R المعرفة على Z بـ: $x,y \in Z : xRy \Leftrightarrow \exists k\in Z : x\text{-}y=2k$

يمكن اثبات بسهولة ان R علاقة تكافؤ. تعيين أصناف تكافؤ كل من 0، 1، 2، 3،....

$\bar{0}=\{x\in Z : xR0\}=\{x\in Z : x\text{-}0=2k / k\in Z \}=\{x\in Z : x=2k / k\in Z \}=\{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$

$\bar{1}=\{x\in Z : xR1\}=\{x\in Z : x\text{-}1=2k / k\in Z \}=\{x\in Z : x=2k+1 / k\in Z \}=\{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$

$\bar{2}=\{x\in Z : xR2\}=\{x\in Z : x\text{-}2=2k / k\in Z \}=\{x\in Z : x=2k+2 / k\in Z \}=\{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$

$\bar{3}=\{x\in Z : xR3\}=\{x\in Z : x\text{-}3=2k / k\in Z \}=\{x\in Z : x=2k+3 / k\in Z \}=\{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$

نجد ان:

$\bar{0}=\bar{2}=\bar{4}=\bar{6}= \dots\overline{-2}=\overline{-4}=\overline{-6}=\dots= \overline{2k} = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$

$\bar{1}=\bar{3}= \bar{5}=\bar{7}=\dots= \overline{-1}=\overline{-3}=\overline{-5}=\dots = \overline{2k+1} = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$

أي يوجد صنفي تكافؤ بالعلاقة R هما $\bar{1}$ و $\bar{0}$. نرمز لمجموعة أصناف التكافؤ بالرمز Z/R او Z/2Z أي ان:

$Z/2Z = \{\{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}, \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}\}= \{\bar{0},\bar{1}\}$

الزمرة Z/2Z

نعتبر المجموعة $Z/2Z=\{\bar{0},\bar{1}\}$. نعرف على هذه المجموعة العملية $(\overline{+})$ بـ:

$$\bar{x}, \bar{y} \in Z/2Z : \bar{x} \overline{+} \bar{y} = \overline{x+y}$$

$$\bar{0} \overline{+} \bar{0} = \bar{0},\ \bar{1} \overline{+} \bar{0} = \bar{1},\ \bar{0} \overline{+} \bar{1} = \bar{1} \text{ et } \bar{1} \overline{+} \bar{1} = \bar{2} = \bar{0}.$$

العملية $(\overline{+})$ تبديلية و تقبل$\bar{e}=\bar{0}$ كعنصر حيادي. نظير $\bar{0}$ هو $\bar{0}$ و نظير $\bar{1}$ هو $\bar{1}$.
بالتالي $(Z/2Z, \overline{+})$ **زمرة تبديلية**.

-2 نعتبر العلاقة R المعرفة على Z بـ: **$x,y \in Z : xRy \Leftrightarrow \exists k \in Z : x-y=3k$**
يمكن اثبات بسهولة ان R علاقة تكافؤ. تعيين أصناف تكافؤ كل من 0، 1، 2، 3....

$\bar{0}=\{x\in Z : xR0\}=\{x\in Z : x-0=3k / k\in Z \}=\{x\in Z : x=3k / k\in Z \}=\{\ldots,-6, -3, 0, 3, 6, \ldots.\}$

$\bar{1}=\{x\in Z : xR1\}=\{x\in Z : x-1=2k / k\in Z \}=\{x\in Z : x=3k+1 / k\in Z \}=\{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots.\}$

$\bar{2}=\{x\in Z : xR2\}=\{x\in Z : x-2=2k / k\in Z \}=\{x\in Z : x=3k+2 / k\in Z \}=\{\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots.\}$

$\bar{3}=\{x\in Z : xR3\}=\{x\in Z : x-3=2k / k\in Z \}=\{x\in Z : x=3k+3 / k\in Z \}=\{\ldots,-6, -3, 0, 3, 6, \ldots.\}$

$\bar{4}=\{x\in Z : xR1\}=\{x\in Z : x-4=2k / k\in Z \}=\{x\in Z : x=3k+4 / k\in Z \}=\{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots.\}$

نجد ان:

$\bar{0}=\bar{3}=\bar{6}=\bar{9} =\ldots\overline{-3}=\overline{-6}=\overline{-9}=\ldots\overline{3k} = \{\ldots,-6, -3, 0, 3, 6, \ldots.\}$

$\bar{1}=\bar{4}=\bar{7}=\overline{10}=\ldots\overline{-2}=\overline{-5}=\overline{-8}=\ldots= \overline{3k+1} = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots.\}$

$\bar{2}=\bar{5}=\bar{8}=\overline{11}=\ldots=\overline{-1}=\overline{-4}=\overline{-7}=\ldots= \overline{3k+2} = \{\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots.\}$

أي يوجد 3 أصناف تكافؤ بالعلاقة R هما $\bar{2}$ و $\bar{1}$ و $\bar{0}$. نرمز لمجموعة أصناف التكافؤ بالرمز Z/3Z أي ان

$$Z/3Z = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$$

الزمرة Z/3Z

نعتبر المجموعة $Z/3Z=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$. نعرف على هذه المجموعة العملية $(\overline{+})$ بـ:

$$\bar{x}, \bar{y} \in Z/2Z : \bar{x} \overline{+} \bar{y} = \overline{x+y}$$

$$\bar{0} \overline{+} \bar{0} = \bar{0},\ \bar{1} \overline{+} \bar{0} = \bar{1},\ \bar{0} \overline{+} \bar{1} = \bar{1} \text{ et } \bar{2} \overline{+} \bar{0} = \bar{2},\ \bar{0} \overline{+} \bar{2} = \bar{2},\ \bar{1} \overline{+} \bar{1} = \bar{2}$$

$$\bar{2} \overline{+} \bar{1}=\bar{1} \overline{+} \bar{2} = \bar{3} = \bar{0},\ \bar{2} \overline{+} \bar{2}=\bar{4}=\bar{1}.$$

العملية $(\overline{+})$ تبديلية و تقبل$\bar{e}=\bar{0}$ كعنصر حيادي. نظير $\bar{0}$ هو $\bar{0}$ و نظير $\bar{1}$ هو $\bar{2}$ و نظير $\bar{2}$ هو $\bar{1}$.
بالتالي $(Z/3Z, \overline{+})$ زمرة تبديلية.

بشكل عام من اجل عدد طبيعي n غير معدوم
العلاقة R المعرفة على Z بـ: **$x,y \in Z : xRy \Leftrightarrow \exists k \in Z : x-y=nk$** علاقة تكافؤ و مجموعة أصناف التكافؤ هي:

$$Z/nZ = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\ldots,\overline{n-2},\overline{n-1}\}$$

نعرف على هذه المجموعة العملية $(\overline{+})$ بـ:

$$\bar{x}, \bar{y} \in Z/2Z : \bar{x} \overline{+} \bar{y} = \overline{x+y}$$

$(Z/nZ, \overline{+})$زمرة تبديلية عنصرها الحيادي $\bar{e}=\bar{0}$ و نظير $\bar{a}$ هو $\overline{n-a}$.

4 الحلقة L'anneau

1.4 تعريف ليكن T قانون تركيب داخلي في مجموعة A:

نقول إن T توزيعي بالنسبة ل * إذا وفقط إذا كان:

$$\left(\forall (x,y,z)\in E^3\right) x\mathrm{T}(y*z)=(x\mathrm{T}y)*(x\mathrm{T}z)\ (1)$$

$$(x*y)\mathrm{T}z=(x\mathrm{T}z)*(y\mathrm{T}z)\ (2)$$

إذا كان القانون T تبادلي فإن إحدى الخاصيتين (1) أو (2) كافية.

أمثلة:

1- الضرب توزيعي بالنسبة للجمع في كل من $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}$.

2- الجمع ليس توزيعيا بالنسبة للضرب:

$$x+(y \times z) \neq (x+y)\times(x+z)$$

3- الاتحاد توزيعي بالنسبة للتقاطع. و التقاطع توزيعي بالنسبة للاتحاد في $P(E)$.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

2.4 تعريف الحلقة

لتكن A مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين * و T نقول إن $(A,*,\mathrm{T})$ حلقة إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

*) $(A,*)$ زمرة تبادلية.

*) T تجميعي.

*) T توزيعي بالنسبة ل *

ملاحظات:

*) إذا كان القانون T تبادلي. نقول إن الحلقة A تبادلية.

*) إذا كان للقانون T عنصر محايد، نقول إن الحلقة A واحدية.

*) نرمز عادة للقانون * ب " + " وللقانون T ب "$\times$" ونرمز في هذه الحالة للعنصر المحايد ل * ب 0 أو 0_A ويسمى صفر حلقة. ونرمز للعنصر المحايد ل T ب 1 أو 1_A.

أمثلة

1- كل من $(\mathbb{Z},+,\times),(\mathbb{Q},+,\times),(\mathbb{R},+,\times),(\mathbb{C},+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية.

2- $(F(X,\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية.

3- نعتبر المجموعة $A=IR^2$ مزودة بالعمليتين $\oplus$ و $\otimes$ المعرفتين بـ:

$(a,b), (a',b') \in A$: $(a, b) \oplus (a', b') = (a+a', b+b')$

$(a,b), (a',b') \in A$: $(a, b) \otimes (a', b') = (a.a', b.b')$

يمكن اثبات ان $(IR^2,\oplus, \otimes)$ حلقة تبديلية واحدية حيث: عنصرها الحيادي بالجمع : $0_{IR^2}=(0, 0)$ و عنصرها الحيادي بالضرب : $1_{IR^2}=(1, 1)$.

خاصية: اذا كانت $(A, +, x)$ حلقة فان:

$$(\forall a \in A) : a \times 0 = 0 \times a = 0$$

3.4 قواعد الحساب في حلقة

اذا كانت $(A, +, .)$ حلقة واحدية فان:

1- $\forall a\in A : a.(-1)=(-1).a=-a$

2- $\forall a\in A : a.(-b)=(-b).a=-(ab)$

3- $a^0=1$ (اصطلاحا) و $a^n=a.a\ldots a$ (n مرة) : $\forall a \in A$.

4- $\forall a, b, c\in A : a.(b-c)= a.b-a.c$ et $(a-b).c= a.c-b.c$

5- $\forall a, b \in A : (a+b)^2= a^2+a.b+b.a+b^2$ اذا كانت (.) تبديلية او $a.b=b.a$ نتحصل على $(a+b)^2= a^2+2a.b+b^2$

6- اذا كانت (.) تبديلية او $a.b=b.a$ فان دستور ثنائي الحد ينص على ان:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} \quad ou \quad C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!.k!}$$

4.4 قواسم الصفر Les diviseurs de zero

تعريف

لتكن $(A, +, .)$ حلقة واحدية و $a\in A$. نقول عن a انه **قاسما للصفر** اذا كان $a\neq 0$ و يوجد $b\in A$ حيث $b\neq 0$ و يحقق: $a.b=0$ و $b.a=0$.

تعريف

لتكن $(A, +, .)$ حلقة واحدية . نقول عن A انها **حلقة تامة** اذا كانت لا تملك قواسما للصفر.

ملاحظة: a, b قاسمان للصفر اذا كانا غير معدومان و جداؤهما معدوما.

مثال1: الحلقات التالية:

$$(\mathbb{C},+,\times);(\mathbb{R},+,\times);(\mathbb{Q},+,\times);(\mathbb{Z},+,\times)$$

لا تملك قواسم للصفر وبالتالي هي حلقات تامة. لانه لا يوجد قواسم للصفر أي لا يوجد عددان غير معدومين و جداؤهما معدوما في كل محموعة من هذه المجموعات.

مثال2: نعتبر الحلقة $(IR^2,\oplus, \otimes)$ في المثال 3 السابق. العنصران مثلا : $(0, 1)$ و $(1, 0)$ قاسمان للصفر لانهما غير معدومين ولكن دينا $(0, 1)\otimes(1, 0)=(0, 0)$. اذن $(IR^2,\oplus, \otimes)$ حلقة غير تامة.

5.4 العناصر القابلة للقلب Les éléments inversibles

تعريف

لتكن $(A, +, .)$ حلقة واحدية و $a\in A$. نقول عن a انه **قا بل للقلب** اذا كان $a\neq 0$ و يوجد $b\in A$ حيث $b\neq 0$ و يحقق: $a.b=b.a=1$ و يرمز لمجموعة العناصر القابلة للقلب بـ $U(A)$ او A^*

مثال1: في الحلقة $(Z, +, .)$ العناصر القابلة للقلب هي 1 و -1. أي $U(Z)=\{1, -1\}$

مثال2: في الحلقة $(IR^2,\oplus, \otimes)$ اذا كان $(a,b) \in A$ حيث $a=0$ او $b=0$ فان (a, b) غير قابل للقلب أي الخناصر القابلة للقلب هي الثنائيات (a,b) حيث $a\neq 0$ و $b\neq 0$.

مثال3: في الحلقات $(\mathbb{C},+,\times);(\mathbb{R},+,\times);(\mathbb{Q},+,\times)$ كل الاعداد غير المعدومة قابلة للقلب $R^*=R-\{0\}$

5. الحقل Le Corps

تعريف

لتكن K مجموعة مزودة بعمليتين داخليتين (+) و (.) نقول عن (K, +, .) انها **حقلا** او جسما اذا تحقق:

1- (K, +, .) حلقة واحدية.

2- لكل عنصر غير معدوم من K نظيرا (مقلوبا) بالعملية (.).

مثال1:

كل من $(\mathbb{Q},+,\times),(\mathbb{R},+,\times),(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي.

خاصية:

إذا كان p أولي فإن $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\times)$ جسم تبادلي.

حيث العمليتين (+) و (x) معرفتين بـ:

$\bar{x}, \bar{y} \in Z/pZ : \bar{x}+\bar{y}=\overline{x+y}, \bar{x}\times\bar{y}=\overline{x\times y}$.

البرهان: نبرهن الخاصية من اجل p=3 ويكون البرهان بنفس الطريقة في الحالة العامة.

تكون (Z/3Z, +, ×) حقلا اذا حققت الشرطين (1) و (2) التاليين:

1 - (Z/3Z, +, ×) حلقة واحدية تبديلية. أي (Z/3Z, +) زمرة تبديلية و العملية (×) تبديلية و تجميعية و توزيعية على العملية (+) و تملك عنصرا حياديا بالضرب (×).

2 - لكل عنصر $\bar{x}$ يختلف عن $\bar{0}$ نظيرا (مقلوبا) بالعملية (×).

1- رأينا سابقا ان (Z/3Z, +) زمرة تبديلية عنصرها الحيادي بالجمع $\bar{0}$.

العملية (×) تبديلية :

$\forall \bar{x}, \bar{y} \in Z/3Z : \bar{x}\times\bar{y}=\bar{y}\times\bar{x}$?

$\bar{x}\times\bar{y}=\overline{x\times y}=\overline{y\times x}=\bar{y}\times\bar{x}$.

العملية (×) تجميعيّة؟

$\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in Z/3Z : \bar{x}\times(\bar{y}\times\bar{z})=(\bar{x}\times\bar{y})\times\bar{z}$?

$\bar{x}\times(\bar{y}\times\bar{z})=\bar{x}\times(\overline{y\times z})=\overline{x\times(y\times z)}=\overline{(x\times y)\times z}=\overline{(x\times y)}\times\bar{z}=(\bar{x}\times\bar{y})\times\bar{z}$.

العملية (×) توزيعية على (+)؟

$\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in Z/3Z : \bar{x}\times(\bar{y}+\bar{z})=(\bar{x}\times\bar{y})+(\bar{x}\times\bar{z})$?

$\bar{x}\times(\bar{y}+\bar{z})=\bar{x}\times(\overline{y+z})=\overline{x\times(y+z)}=\overline{x\times y+x\times z}=\overline{x\times y}+\overline{x\times z}=(\bar{x}\times\bar{y})+(\bar{x}\times\bar{z})$.

العنصر الحيادي بالعملية (×) هو $\bar{1}$ لان:

$\forall \bar{x} \in Z/3Z : \bar{x}\times\bar{1}=\overline{x\times 1}=\bar{x}$ et $\bar{1}\times\bar{x}=\overline{1\times x}=\bar{x}$.

2- ليكن $\bar{x}$ عنصرا يختلف عن $\bar{0}$، أي ان $x\neq 3k$ أي ان x *لا يقبل القسمة على 3 و بما ان 3 عدد اولي فان* ***x اولي مع 3*** *حسب نظرية في مجموعة الاعداد الصحيحة تسمى نظرية بيزوت Bizout فانه يوجد عددان صحيحان x' و x''* حيث $\boldsymbol{x\times x'+3\times x''=1}$ و بالتالي :

$$\overline{x\times x'+3\times x''}=\bar{1} \Leftrightarrow \bar{x}\times\overline{x'}+\bar{3}\times\overline{x''}=\bar{1} \Leftrightarrow \bar{x}\times\overline{x'}+\bar{0}\times\overline{x''}=\bar{1}$$
$$\Leftrightarrow \bar{x}\times\overline{x'}=\bar{1}$$

و منه $\overline{x'}$ نظير $\bar{x}$ بالعملية (×) .

و منه Z/3Z حقل تبديلي.