Université Mohamed Seddik Ben Yahia -Jijel-
Département D'Informatique
2eme année Licence

Série de TD N° 02

Exercice 1

Un juge interroge trois personnes *A*, *B* et *C*. Certaines disent toujours la vérité, d'autres mentent systématiquement. Le but est de trouver qui dit la vérité.

• *A* dit : "Aucun de nous ne dit la vérité." (*PA*)

• *B* déclare : "Je dis la vérité." (*PB*)

• *C* dit : "Au moins deux d'entre nous mentent." (*PC*)

On introduit des variables propositionnelles *VA*, *VB* et *VC*. Pour $X \in \{A, B, C\}$, la variable *VX* est vraie si *X* dit la vérité et fausse si *X* est un menteur.

1. Traduire les phrases *PA*, *PB* et *PC* en des formules logiques propositionnelles qui pourront utiliser les variables *VA*, *VB*, et *VC*.
2. Donner la table de vérité de ces formules en fonction des valeurs de *VA*, *VB*, et *VC*.
3. Sur chaque ligne du tableau précédent, et pour chaque phrase, indiquer si elle a pu ˆetre dite.

On rappelle qu'un menteur ne peut pas dire une phrase vraie et que quelqu'un qui dit la vérité ne peut pas dire une phrase fausse.

4. En déduire qui dit la vérité parmi *A*, *B* et *C* ? Justifier votre réponse.

Exercice 2 :tilisez les simplifications pour démontrer les équivalences suivantes (où ≡ note l'équivalence logique).

1. $A \leftrightarrow B \equiv B \leftrightarrow A$
2. $A \rightarrow \neg A \equiv \neg A$
3. $A \wedge (B \wedge C) \equiv C \wedge (A \wedge B)$
4. $A \rightarrow (A \rightarrow B) \equiv A \rightarrow B$
5. $(A \vee B) \rightarrow C \equiv (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$
6. $A \rightarrow (B \wedge C) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$
7. $A \rightarrow (B \rightarrow C) \equiv (A \wedge B) \rightarrow C$

Exercice 3U Soit la formule suivante $(((A \rightarrow \neg B) \leftrightarrow \neg C) \wedge (C \vee D)) \wedge (A \leftrightarrow D)$

1) Donner la forme normale conjonctive de A (détaillée).
2) Donner la forme normale disjonctive de A (détaillée).
3) A est-elle une tautologie ? (justifier) A est-elle une contradiction ? (justifier)

Exercice 4 : Pour chaque formule donnée ci-après, donner sa forme normale disjonctive et prouver si elle est ou non satisfiable (en donnant si besoin un modèle de la formule). Cette formule est-elle valide ?

1. $(\neg (A \leftrightarrow B) \vee (B \wedge C) \rightarrow C)$
2. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow \neg A) \wedge (\neg A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
3. $P \vee (Q \wedge R) \leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

Exercice 5 (Mise en forme clausale (F.N.C))

1. Donner une forme normale conjonctive (clausale) de la formule ϕ définie par $(R \wedge \neg((Q \vee R) \Rightarrow P \vee S))$.

Que proposez-vous pour obtenir une forme normale disjonctive de $\neg\phi$?

2. Même question pour $\neg(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (R \Rightarrow S)$.

Exercice 6 Pour chaque formule Fi, i = 1, 2, 3, énumérez ses modèles :

1. $F1 \equiv (P \vee (Q \rightarrow P)) \wedge Q \wedge (P \rightarrow \neg Q)$;

2. F2 ≡ (P ↔(Q →P)) ∨ Q ;
3. F3 ≡ (P ^ ¬Q) ∨ ((Q → P) → P).

1) Pour chaque formule Fi, i = 1, 2, 3, proposez une formule Gi en forme normale conjonctive équivalente à Fi.

Exercice 7 Les conséquences logiques suivantes sont-elles vérifiées ?

a) (P ∨ Q), (P → R) |= (R ∧ Q)
b) (P ∨ Q ∨ S), (S → P), (P → Q) |= Q
c) {P ∨ Q, P ⇒ R, Q ⇒ R} |= R
d) P ⇒ Q |= ¬Q ⇒ ¬P
e) {P ∨ Q, ¬P} |= Q
f) P ⇒ Q |= Q ⇒ P

Exercice 8 : Soit le raisonnement suivant : « - Quand il fait soleil, je mets mes lunettes ou je ne sors pas.
- Je ne reste à la maison que sans lunettes et par temps gris.
Donc si je ne mets pas mes lunettes, c'est qu'il fait gris. »

1°) Formaliser ce raisonnement en utilisant les variables suivantes : s : il fait soleil, l : je mets mes lunettes, m : je reste à la maison.

2°) Montrer que le raisonnement ci-dessus est correct (valide) :
a. en utilisant la table de vérité ;
b. en utilisant une mise en forme normale par le calcul (algébriquement).

Exercice 9:

a) À l'aide d'une table de vérité, énumérer toutes les fonctions logiques (totales) à deux variables.

b) Soit ↓ le connecteur binaire défini par : p ↓ q = ¬(p ∨ q) (= NOR(p,q)).

1) Dresser la table de vérité de ce connecteur.
2) Montrer que {↓} constitue à lui seul un ensemble complet de connecteurs.

Exercice 10 :: On rappelle que ⊥ désigne une constante propositionnelle toujours fausse, et ⊤ une constante propositionnelle toujours vraie. On désigne par **If** le connecteur ternaire « Si …alors …sinon » dont voici la table de vérité :

X	A	B	If (X, A, B)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

On appelle littéraux les propositions X, A, B et leurs négations. Donner un équivalent de If(X, A, B) qui est :

ne forme normale disjonctive, puis une forme normale disjonctive n'utilisant que deux conjonctions de deux littéraux chacune ;

b. une forme normale conjonctive, puis une forme normale conjonctive n'utilisant que deux disjonctions de deux littéraux chacune ;

c. une conjonction de deux implications entre littéraux. Chacun des équivalents doit être justifié.

2. Donner pour chacune des formules ¬α, (α∧ β), (α ∨β), (α → β), un équivalent utilisant une seule occurrence de chacun des connecteurs If, ⊥, ⊤ (justifier).

3. En déduire que { **If**, ⊥, ⊤ } est un système complet de connecteurs.

Exercice 11

1. Montrer que les ensembles {¬, ∧, ∨}, {¬, ∧} et {¬, ∨} sont des systèmes complets.
2. Montrer que l'ensemble {∧, ∨} ne l'est pas.