**Examen en Méthodes Numériques**

**Nom   : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .**

**Prénom : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .**

**Groupe : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .**

(*Uniquement les calculatrices sont autorisées*)

(*Pas de document ni de téléphone portable*)

**Exercice 1 (5pts) :** (Temps estimé 20mn)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Question** | **Réponse** | |
| 1. Soient a, b et c trois mesures prises avec un certain taux d’erreur. Donner le nombre de chiffres significatifs pour chaque mesure :   a = 05,0310 ; b = 31,5690 ; c = 00.7010 | a : . . . . . . .  b : . . . . . . .  c : . . . . . . . |
| 1. En se basant sur les valeurs des mesures précédentes, calculer les expressions X et Y avec le nombre adéquat de chiffres significatifs :  * X = (a + b)/(ac) ; * Y = 2(a2 – bc) | X = . . . . . . .  Y = . . . . . . . | |
| 1. Les erreurs issues de mesures physiques soumises à des contraintes expérimentales sont des ‘**Erreurs d’arrondi**’ ? | VRAI / FAUX | |
| 1. Les méthodes itératives se basent sur l’idée des problèmes de point fixe pour résoudre un système linéaire ? | VRAI / FAUX | |
| 1. Soit l’équation . En transformant cette équation sous forme de problème de point fixe, calculer la solution dans la 3ème itération en se basant sur = 2 comme solution de départ. | = . . . . . . . | |

**Examen en Méthodes Numériques**

**Prénom : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .**

**Nom   : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .**

**Groupe : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .**

(*Uniquement les calculatrices sont autorisées*)

(*Pas de document ni de téléphone portable*)

**Exercice 1 (5pts) :** (Temps estimé 20mn)

|  |  |
| --- | --- |
| **Question** | **Réponse** |
| 1. Soient a, b et c trois mesures prises avec un certain taux d’erreur. Donner le nombre de chiffres significatifs pour chaque mesure :   a = 1, 310 ; b = 031,05069 ; c = 05.7010 | a : . . . . . . .  b : . . . . . . .  c : . . . . . . . |
| 1. En se basant sur les valeurs des mesures précédentes, calculer les expressions X et Y avec le nombre adéquat de chiffres significatifs :  * X = (a + b)/(ac) ; * Y = 2(c2 – ab) | X = . . . . . . .  Y= . . . . . . . |
| 1. Les erreurs dues au fait que la machine ne peut représenter les nombres réels qu'avec un nombre fini de chiffres sont des ‘**Erreurs d’arrondi** ‘? | VRAI / FAUX |
| 1. Les méthodes directes se basent sur l’idée des problèmes de point fixe pour résoudre un système linéaire ? | VRAI / FAUX |
| 1. Soit l’équation . En résolvant cette équation sous forme de problème de point fixe, calculer la solution dans la 3ème itération en se basant sur = 2 comme solution de départ. | = . . . . . . . |

**Exercice n° 2 *(8pts)* :** (Temps estimé 30mn)

Soit le système linéaire (S) suivant :

(S)

1. En écrivant ce système sous la forme, donner l’ensemble des matrices caractérisant celui-ci *:* ***(0.5pt)***

* La matrice associée A.
* Le vecteur résultat b.
* La matrice augmentée M.

La factorisation LU effectuée par un programme MATLAB est donnée dans l’annexe.

1. Donner les relations qui existent entre la matrice initiale A et les différentes matrices dans le tableau. ***(1 pt)***
2. Donner les deux matrices L et U. ***(1pt)***
3. Résoudre ce système. ***(1.5pt)***

Supposons que le vecteur résultat b a subit un taux d’erreur  t.

1. Résoudre ainsi le problème  avec ***(1.5pts)***
2. Qu’est-ce qu’on peut déduire à propos de la matrice A. ***(0.5pt)***
3. Calculer *Cond(A)p* le conditionnement de A pour le paramètre p = 1 et pour p = 2 : ***(1pt)***
4. Vérifier la propriété : ***(1pt)***

**Exercice n° 3 (7pts) :** (Temps estimé 40mn)

On considère les matrices *A* et *B* et les vecteurs *b1* et *b2* suivants :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A | B | b1 | b2 |

1. Résoudre le système linéaire *AX = b1* par la méthode de Gauss. ***(2pts)***
2. Résoudre le système linéaire *BX = b2* par la méthode de Gauss-Jordan. ***(2pts)***
3. Montrer que pour le système *AX = b* la méthode de Jacobi converge mais que la méthode de Gauss-Seidel ne converge pas (quel que soit le vecteur *b*). ***(1.5pts)***
4. Montrer que pour le système *BX = b* la méthode de Gauss-Seidel converge mais que la méthode de Jacobi ne converge pas (quel que soit le vecteur *b*). ***(1.5pts)***

**Annexe :**

* Le rayon spectral d’une matrice M est donné par *ρ(M) = Maxi(|𝜆i|),* ***λi*** sont les valeurs propres de la matrice M.
* L’inverse de la matrice identité I est elle-même (I-1 = I).

***Le tableau suivant donne les résultats de la commande MATLAB inv pour la matrice M :***

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Matrice M =** |  |  |  |
| **inv(M) =** |  |  |  |

***Le tableau suivant donne les résultats de la commande MATLAB eig pour la matrice M :***

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Matrice M =** |  |  |  |  |
| **eig(M) =** |  |  |  |  |

***Factorisation LU de la matrice associée au système linéaire de l’exercice 2 :***

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Itération 1 :** | | | |
| L(1) = |  | A(1) = |  |
| **Itération 2 :** | | | |
| L(2) = |  | A(2) = |  |
| **Itération 3 :** | | | |
| L(3) = |  | A(3) = |  |

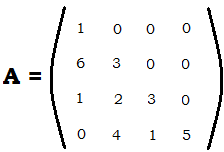
**Contrôle Ecrit (TP3)**

**Soit la matrice A suivante :**

**Nom   : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .**

**Prénom  : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .**

**Groupe  : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .**



|  |  |
| --- | --- |
| **Question** | **Réponse** |
| 1. Quel est le rôle des commandes MATLAB suivantes :  * **who ?** * **tril ?** | **who :** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  **tril :** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . |
| 1. Donner la déclaration de la matrice A en MATLAB. | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . |
| 1. Donner le résultat des deux commandes suivantes :   *B = repmat(A,1,2)*  *C = triu(A,1)* | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . |
| 1. Donner le résultat des deux commandes suivantes :   *a = fix(-3.15)*  *b = abs(floor(-3.15))* | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . |
| 1. Le code suivant calcule la solution d’un système linéaire par la méthode de remontée (dont la matrice associée est triangulaire supérieure).   *N=size(M,1);*  *X=zeros(N,1);*  *for i=N:-1:1*  *a=0;*  *for j=i+1:N*  *a=a + M(i,j)\*X(j,1);*  *end*  *X(i)=(M(i,end)-a)/M(i,i);*  *end*  Modifier ce code pour appliquer la méthode de résolution par descente (dont la matrice associée est triangulaire inférieure). | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . |

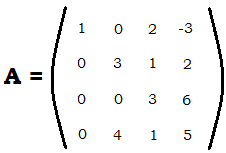
**Contrôle Ecrit (TP3)**

**Soit la matrice A suivante :**

***Prénom  : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .***

***Nom   : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .***

***Groupe  : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .***



|  |  |
| --- | --- |
| **Question** | **Réponse** |
| 1. Quel est le rôle des commandes MATLAB suivantes :  * **whos ?** * **triu ?** | **whos :** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  **triu :** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . |
| 1. Donner la déclaration de la matrice A en MATLAB. | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . |
| 1. Donner le résultat des deux commandes suivantes :   *X = A([1,3,4],[1,4])*  *M = repmat(10,3,3)* | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . |
| 1. Donner le résultat des deux commandes suivantes :   *a = ceil(-3.15)*  *b = floor(abs(-3.15))* | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . |
| 1. Le code MATLAB suivant transforme une matrice associée à un système linéaire ***Ax = b*** quelconque en une matrice triangulaire supérieure équivalente :   *for k=1:size(M,1)-1*  *for i=k+1:size(M,1)*  *a=M(i,k)/M(k,k);*  *for j=k:size(M,1)*  *M(i,j)=M(i,j)-a\*M(k,j);*  *end*  *end*  *end*  Modifier ce code pour obtenir une matrice triangulaire inférieure au lieu d’une matrice triangulaire supérieure. | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . |

**Corrigé-Type (MN)**

**Exercice 1 (5pts) :**

a = 05,0310 ; b = 31,5690 ; c = 00.7010, X = (a + b)/(ac) , Y = 2(a2 – bc).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **a** | **b** | **c** | **d** | **e** |
| *a : 5 chiffres*  *b : 6 chiffres*  *c : 4 chiffres* | *X = 10.38*  *Y = 6.36* | *Faux* | *Vrai* | *= 941/290 =3.245* |

**Exercice 1 (5pts) :**

a = 1, 310 ; b = 031,05069 ; c = 05.7010 ; X = (a + b)/(ac) ; Y = 2(c2 – ab).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **a** | **b** | **c** | **d** | **e** |
| *a : 4 chiffres*  *b : 7 chiffres*  *c : 5 chiffres* | *X = 4.333*  *Y = -16.36* | *Vrai* | *Faux* | *= -11/30 = -0.367* |

**Exercice n° 2 *(8pts)* :**

1. **Les matrices caractérisant le système : (0.5pt)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **La matrice A** | **Le vecteur b** | **La matrice augmentée M** |
|  |  |  |

1. **Les relations entre la matrice initiale A et les différentes matrices dans le tableau :**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A(1)=L(1)\*A | A(2) =L(2)\*A(1) | A(3) =L(3)\*A(2) | A=L(1)-1\*L(2)-1\*L(3)-1\*A(3) |

1. **Les matrices L et U :**

|  |  |
| --- | --- |
| **L = L(1)-1\*L(2)-1\*L(3)-1** (on peut la déduire directement à partir de L(1), l(2) et L(3) sans faire de calculs) | **U = A(3)** |
|  |  |

1. **Résolution du système  :**

Le système devient

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Système (Ly = b)** |  | Résolution par descente :  **= = = >** |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Système (Ux = y)** |  | Résolution par remontée :  **= = = >** |  |

1. **Résolution du système  :**

|  |  |
| --- | --- |
| **Taux d’erreur *δb*** | **Vecteur résultat *b’ = b + δb*** |
|  |  |

Le système   devient

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Système (Ly’ = b’)** |  | Résolution par descente :  = = = > |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Système (Ux’ = y’)** |  | Résolution par remontée :  = = = > |  |

1. **Conclusion à propos de la matrice A :**

Erreur relative dans le vecteur résultat :

=( , , )t =(0.0003125, 0.0004348, 0.000303, 0.0003226 )t

Erreur relative dans la solution :

=( , , )t =(0.82, 1.36, 0.35, 0.82 )t

Taux de propagation d’erreur :

(2624, 3128, 1155, 2542)t.

L’erreur s’est considérablement multipliée 🡪 Le conditionnement de la matrice n’est pas bon.

1. **Conditionnement de A :**

P =1 : Cond(A)1 =||A||1 \*||A-1||1 = 119\*274 =32606

P =2 : Cond(A)2 =||A||2 \*||A-1||2 = 30.545 \* 98.529 = 3009.568

1. **Vérification de la propriété : (1pt)**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| **P=1** | =0.685 | =0.000336 | *32606* | *10.955* | *Ѵ* |
| **P=2** | =0.82 | =0.00033 | *3009.568* | *0.993* | *Ѵ* |

**Exercice n° 3 (7pts) :**

On considère les matrices *A* et *B* et les vecteurs *b1* et *b2* suivants :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A | B | b1 | b2 |

1. **Résolution du système linéaire AX = b1 par la méthode de Gauss : (2pts)**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Matrice augmentée** | **Itération 1** | **Itération 2** | **Solution** |
|  |  |  |  |

1. **Résolution du système linéaire BX = b2 par la méthode de Gauss-Jordan. (2pts)**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Matrice augmentée** | **1-Triangulation** | | **2-Mise à 1 de la diagonale** |
| **Itération 1** | **Itération 2** |
|  |  |  |  |
| **3-Diagonalisation de la matrice** | | **4-Solution** |
| **Itération 1** | **Itération 2** |
|  |  |  |

1. **Convergence des deux méthodes pour le système AX = b :**
2. **Vérification si la matrice A est à diagonale strictement dominante :**

Une matrice A est à diagonale strictement dominante si :

|1|<|-2|+|-2|, donc la matrice A n’est pas à diagonale strictement dominante, on peut rien dire sur la convergence pour les deux méthodes.

On doit passer à la décomposition de la matrice (relaxation) .

1. **Décomposition de la matrice A en A = D-E-F :**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Matrice A** | **Matrice D** | **Matrice E** | **Matrice F** |
|  |  |  |  |

* **Décomposition théorique :**

A = M-N (avec M matrice inversible).

* **Matrice d’itération :**

B=M-1\*N

* **Méthode de Jacobi :**

M = D ==> N = E + F

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Matrice M** | **Matrice M-1 = M** | **Matrice N = E + F** | **Matrice Bj** |
|  |  |  |  |

A partir de l’annexe les valeurs propres de Bj sont (𝜆1 = 0, 𝜆2 = 0, 𝜆3 =0)

Le rayon spectral de Bj :

Ρ(Bj) = Max(|𝜆i|) = Max(|0|, |0|, |0|) = 0 <1 donc Bj converge.

* **Méthode de Gauss-Seidel :**

M = D - E ==> N = F

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Matrice M** | **Matrice M-1** | **Matrice N = F** | **Matrice Bgs** |
|  |  |  |  |

A partir de l’annexe les valeurs propres de Bgs sont (𝜆1 = 0, 𝜆2 = 2, 𝜆3 =2)

Le rayon spectral de Bgs :

Ρ(Bgs) = Max(|𝜆i|) = Max(|0|, |2|, |2|) = 2 >1 donc Bgs ne converge pas.

1. **Convergence des deux méthodes pour le système BX = b :**
2. **Vérification si la matrice B est à diagonale strictement dominante :**

|1|<|-1|+|-2|, donc la matrice B n’est pas à diagonale strictement dominante, on peut rien dire sur la convergence pour les deux méthodes.

On doit passer à la décomposition de la matrice (relaxation).

1. **Décomposition de la matrice B en B = D-E-F :**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Matrice B** | **Matrice D** | **Matrice E** | **Matrice F** |
|  |  |  |  |

* **Décomposition théorique :**

A = M-N (avec M matrice inversible).

* **Matrice d’itération :**

B=M-1\*N

* **Méthode de Jacobi :**

M = D ==> N = E + F

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Matrice M** | **Matrice M-1 = M** | **Matrice N = E + F** | **Matrice Bj** |
|  |  |  |  |

A partir de l’annexe les valeurs propres de Bj sont (𝜆1 = -3.2361, 𝜆2 = 1.2361, 𝜆3 =2)

Le rayon spectral de Bj :

Ρ(Bj) = Max(|𝜆i|) = Max(|-3.2361|, |1.2361|, |2|) = 3.2361 >1 donc Bj ne converge pas.

* **Méthode de Gauss-Seidel :**

M = D - E ==> N = F

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Matrice M** | **Matrice M-1** | **Matrice N = F** | **Matrice Bgs** |
|  |  |  |  |

A partir de l’annexe les valeurs propres de Bgs sont (𝜆1 = 0, 𝜆2 = 0, 𝜆3 =0)

Le rayon spectral de Bgs :

Ρ(Bgs) = Max(|𝜆i|) = Max(|0|, |0|, |0|) = 0 <1 donc Bgs converge.

**Corrigé-Type (TP3)**

|  |  |
| --- | --- |
| **Question** | **Réponse** |
| 1. Rôle des commandes who et tril : | **who :** afficher l’ensemble des variables actives.  **tril :** crée une matrice triangulaire inférieure à partir d’une matrice. |
| 1. Déclaration de la matrice A : | A=[1 0 0 0 ;6 3 0 0 ;1 2 3 0 ;0 4 1 5] |
| 1. Résultat des commandes : |  |
| 1. Résultat des commandes :   *a = fix(-3.15)*  *b = abs(floor(-3.15))* | a=-3 . . . . . . . . . . . . . . . . .  b=4. . . . . . . . . . . . . . . . . . |
| 1. Méthode de résolution par descente : | N=size(A,1);  X=zeros(N,1);  for i=1:N  a=0;  for j=1:i-1  a=a + A(i,j)\*X(j,1);  end  X(i)=(A(i,end)-a)/A(i,i);  end |

**Corrigé-Type (TP3)**

|  |  |
| --- | --- |
| **Question** | **Réponse** |
| 1. Rôle des commandes MATLAB **whos** et **triu :** | **whos :** afficher l’ensemble des variables actives en détail.  **triu :** crée une matrice triangulaire supérieure à partir d’une matrice. |
| 1. Déclaration de la matrice A : | A=[1 0 2 -3;0 3 1 2; 0 0 3 6;0 4 1 5] |
| 1. Résultats de X et M :   *X = A([1,3,4],[1,4])*  *M = repmat(10,3,3)* |  |
| 1. Résultat des deux commandes :   *a = ceil(-3.15)*  *b = floor(abs(-3.15))* | a=-3  b=3 |
| 1. Le code pour obtenir une matrice triangulaire inférieure | for k=size(A,1):-1:2  for i=k-1:-1:1  a=A(i,k)/A(k,k);  for j= size(A,1):-1:1  A(i,j)=A(i,j)-a\*A(k,j);  end  end  end |