

אלגוריתמים II

עבודת בית 1

הוראות הgesha: (אי קיומם הוראות אלו עלול לגרום להורדת ציון!)

1. יש להגיש עד תאריך **22:00 10/12/25** למתלה הקשורה במודול בלבד.
2. יש להגיש בקובץ PDF אחד, מרכז, ברור ונקי.
3. אין להגיש בשום פנים ואופן למייל של מרצה או מתרגל – אך ורק למודול.
4. ניתן להגיש בזוגות אך לא בקבוצות גדולות יותר. **(במידה ומוגש עבודה דוגית, יש לרשום את שמות המתgisחים ואת מספרי הזחות שלהם.)**
5. לא יתקבלו עבודות שהוגשו באיתור.
6. במקורה של העתקה מלאה או חיליקת של העבודה (מסטודנטים אחרים, מהאינטרנט או מכל מקום אחר), ניתן ציון 0 על העבודה של כלל הסטודנטים המעורבים והם יועלו לועדת משמעת.

שאלה 1

יהי (V, E) עץ (לא מכון). הקוטר של T מוגדר ע"י $d(T) = \max_{u, v \in V} \delta(u, v)$. הקוטר של T מוגדר ע"י $d(T) = \max_{u, v \in V} \delta(u, v)$. בהינתן עץ T , הציעו אלגוריתם יעיל ככל האפשר המחשב את $d(T)$.

הסבירו את נכונות האלגוריתם ונתחו זמן ריצתו.

שאלה 2

- יהי $G = (V, E)$ גרף מכון שבו כל קודקוד צבוע בצבע אדום או כחול ויהי $V \subseteq s$ קודקוד מקור הצבע באדום.
- א. תארו אלגוריתם ייעיל ככל האפשר המחשב לכל $V \subseteq s$, מבין כל המסלולים הקצרים ביותר מ- s ל- v את המסלול שਮכל מס' מינימלי של קודקודיים אדומים. הסבירו את נכונות האלגוריתם ונתחו זמן ריצתו.
 - ב. תארו אלגוריתם ייעיל ככל האפשר שМОצא לכל קודקוד $V \subseteq s$ את המסלול הקצר ביותר מ- s ל- v שמכיל בדיקוק שני קודקודיים אדומים. הסבירו את נכונות האלגוריתם ונתחו זמן ריצתו.
 - ג. בהינתן קודקוד $V \subseteq t$, תארו אלגוריתם ייעיל ככל האפשר שМОצא מסלול קצר ביותר מ- s ל- t שמכיל לפחות קודקוד אחד אדום ולא מכיל רצף של שלושה קודקודיים אדומים עוקבים. הסבירו את נכונות האלגוריתם ונתחו זמן ריצתו.

שאלה 3

- בהינתן גרף מכון $G = (V, E)$ וחת-קובוצה של קודקודיים $V \subseteq X$.
 הציעו אלגוריתם ייעיל ככל האפשר שבודק האם כל מעגל ב- G עבר דרך לפחות קודקוד אחד מ- X .
 הסבירו את נכונות האלגוריתם ונתחו זמן ריצתו.

שאלה 4

יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון. G נקרא **חד-מסילתי** אם לכל זוג קודקודים שונים $V \in u, v \in n$ קיים ב- G לכל היותר מסלול פשוט אחד מ- u ל- v .

א. הוכחו כי גраф מכוון וחסר מעגלים הינו חד-מסילתי אם ורק אם מתקיים התנאי הבא: לכל קודקוד $V \in u$, בקריאה ל- (u) DFS-visit לא מתקבלות צלעות קדימה או צלעות חוץות. (שיימו לב לכך שמתיחסים לפונקציה DFS-visit ולא לכל האלגוריתם).

ב. על סמך סעיף א', הצעו אלגוריתם הרץ בזמן $(|V|^2) O$ ובודק האם גраф מכוון וחסר מעגלים נתון הוא חד-מסילתי.

שאלה 5

נתונות a משימות a_1, a_2, \dots, a_n כאשר חלק מהמשימות תלויות אחת בשניתה, כלומר אם משימה a_j תלולה במשימה a_i , אז ניתן לבצע את a_j אך ורק אחרי ש- a_i מסתימה. נניח כי נתונה רשימה של m תלויות בין המשימות. נגידר סידור חוקי של המשימות בו ניתן לבצע משימה a_j אך ורק אחרי שסיימנו לבצע את כל המשימות בהן תלואה a_j . רוצים לבצע את המשימות לפי סידור חוקי.

א. הצעו אלגוריתם הרץ בזמן $(m+n) O(n+m)$ ובודק האם קיים סידור חוקי של המשימות, ואם כן, מהזיר סידור חוקי. הסבירו את נכונות האלגוריתם ונתחו זמן ריצתו.

ב. נניח שהכל משימה a_i נתון זמן ביצוע t_i ייחדות זמן ונניח שקיים סידור חוקי של המשימות. עבור משימה a_i , הזמן המינימלי הנדרש כדי לסיים את a_i שווה לזמן הביצוע של a_i בתוסוף לזמן הנדרש כדי לסיים את המשימות בהן תלואה a_i . הצעו אלגוריתם הרץ בזמן $O(n+m) O(n+m)$ ומהשכ, לכל משימה a_i , את הזמן המינימלי הנדרש כדי לסיים את a_i . הסבירו את נכונות האלגוריתם ונתחו זמן ריצתו.