# <u>שאלה 1</u>

בהינתן מערכת המשוואות הבאה:

$$3x_1 - 1x_2 + 1x_3 = 6$$
$$-2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -22$$
$$3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 20$$

**<u>חלק 1 - שיטות ישירות</u>**

1. פתרו באמצעות פירוק $LU$ ללא $partial\ pivoting$.

1.1. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \leftarrow R_2 + \frac{2}{3} R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \end{matrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} R_3 \leftarrow R_3 + \frac{6}{13} R_2$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & \frac{74}{13} \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{6}{13} & 1 \end{pmatrix}$

$Ly=b \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 & -22 \\ 1 & -\frac{6}{13} & 1 & 20 \end{array}\right)$ $\qquad y = \begin{pmatrix} 6 \\ -18 \\ \frac{74}{13} \end{pmatrix}$

$Ux=y \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{11}{3} & -18 \\ 0 & 0 & \frac{74}{13} & \frac{74}{13} \end{array}\right)$ $\qquad x = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

# שאלה 1

בהינתן מערכת המשוואות הבאה:

$$3x_1 - 1x_2 + 1x_3 = 6$$
$$-2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -22$$
$$3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 20$$

**חלק 1 - שיטות ישירות**

2. הריצו 3 איטרציות באמצעות שיטת גאוס זיידל ויעקובי החל מוקטור $x_0 = (1, 2, 3)^T$.
3. חשבו את השגיאה המוחלטת והיחסית של $x_3$ ביחס לפתרון האמיתי $x = (0, -5, 1)^T$ בשימוש בנורמה האוקלידית עבור 2 השיטות.

$$X_1^{t+1} = \frac{1}{3}(6 + X_2^t - X_3^t)$$
$$X_2^{t+1} = \frac{1}{5}(-22 + 2X_1^t - 3X_3^t)$$
$$X_3^{t+1} = \frac{1}{5}(20 - 3X_1^t + 3X_2^t)$$

$$X^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad X^1 = \begin{pmatrix} 1.666 \\ -5.8 \\ 4.6 \end{pmatrix} \quad X^2 = \begin{pmatrix} -1.466 \\ -6.4936 \\ -0.48 \end{pmatrix} \quad X^3 = \begin{pmatrix} -0.0044 \\ -4.6987 \\ 0.984 \end{pmatrix}$$

$$\Delta\tilde{X} = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.0044 \\ -4.6987 \\ 0.984 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0.0044 \\ -0.3013 \\ 0.016 \end{pmatrix} \right\|_2 = 0.3017$$

$$\delta\tilde{X} = \frac{\Delta\tilde{X}}{\|X\|_2} = \frac{0.3017}{5.099} = 0.059 \approx 5.9\%$$

$$X_1^{t+1} = \frac{1}{3}(6 + X_2^t - X_3^t)$$
$$X_2^{t+1} = \frac{1}{5}(-22 + 2X_1^{t+1} - 3X_3^t)$$
$$X_3^{t+1} = \frac{1}{5}(20 - 3X_1^{t+1} + 3X_2^{t+1})$$

$$X^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad X^1 = \begin{pmatrix} 1.666 \\ -5.533 \\ -0.32 \end{pmatrix} \quad X^2 = \begin{pmatrix} 0.2622 \\ -4.1031 \\ 1.3808 \end{pmatrix} \quad X^3 = \begin{pmatrix} 0.172 \\ -5.1597 \\ 0.801 \end{pmatrix}$$

$$\Delta\tilde{X} = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.172 \\ -5.1597 \\ 0.801 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -0.172 \\ 0.1597 \\ 0.199 \end{pmatrix} \right\|_2 = 0.3077$$

$$\delta\tilde{X} = \frac{\Delta\tilde{X}}{\|X\|_2} = \frac{0.3077}{5.099} = 0.06 \approx 6\%$$

# שאלה 1

בהינתן מערכת המשוואות הבאה:

$$3x_1 - 1x_2 + 1x_3 = 6$$
$$-2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -22$$
$$3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 20$$

**חלק 2 - נורמות, רדיוס ספקטרלי**

4. חשבו את $||A||_\infty$ , $||A||_1$.
5. מצאו זוג וקטורים $v_1, v_\infty$ כך ש $||v_1||_1 \neq 1,\ ||v_\infty||_\infty \neq 1$ אשר עבורם $A$ מקבלת את הערך המקסימלי לפי הגדרת הנורמה.

2.4. $||A||_1 = 1+3+5 = 9$ , $||A||_\infty = 3+3+5 = 11$

2.5. for $v_1$ we can use any vector of the forms $(0,0,\alpha)^T$ or $(0,\alpha,0)^T$

$$\frac{\left\|\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}\right\|_1}{\left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}\right\|_1} = \frac{||(\alpha, 3\alpha, 5\alpha)||_1}{\alpha} = \frac{9\alpha}{\alpha} = 9 = ||A||_1$$

for $v_\infty$ we can use a vector of the form $(\alpha,-\alpha,\alpha)^T$ or $(-\alpha,\alpha,-\alpha)^T$

$$\frac{\left\|\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}\right\|_\infty}{\left\|\begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}\right\|_\infty} = \frac{||(-5\alpha, 4\alpha, -11\alpha)||_\infty}{\alpha} = \frac{11\alpha}{\alpha} = 11 = ||A||_\infty$$

## שאלה 2

תהא $A_{4\times4}$ מטריצה ריבועית הפיכה כך שמתקיים:

$$A\cdot(0,3,0,1)^T=(2,7,0,9)^T$$
$$A\cdot(3,-5,1,10)^T=(5,-3,-1,5)^T$$

חשבו מהו ערכו של $cond(A)$ לכל הפחות עבור נורמת אינסוף.

Two ways to look at this:

$$\|A\|=\max_{x\in R^n}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=\max_{x\in R^n}\frac{\|b\|}{\|x\|}\geq\max\left\{\frac{\|b_i\|}{\|x_i\|}\right\}$$

$$\|A^{-1}\|=\max_{x\in R^n}\frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|}=\max_{x\in R^n}\frac{\|A\|\cdot\|A^{-1}x\|}{\|A\|\cdot\|x\|}\geq\max\frac{\|x\|}{\|Ax\|}=\max\frac{\|\overset{x}{\cancel{b}}\|}{\|b\|}\geq\max\left\{\frac{\|x_i\|}{\|b_i\|}\right\}$$

$$\|b\|=\|Ax\|\geq\|\lambda_{min}\cdot x\|=|\lambda_{min}|\cdot\|x\|\xrightarrow{\lambda_{min}\geq\|A^{-1}\|}\|A^{-1}\|\leq\frac{\|b\|}{\|x\|}\quad\xrightarrow{\|A^{-1}\|\geq\frac{1}{\lambda_{min}}}\quad\|A^{-1}\|\geq\frac{\|x\|}{\|b\|}$$

$$\|b\|=\|Ax\|\leq\|\lambda_{max}\cdot x\|=|\lambda_{max}|\cdot\|x\|\xrightarrow{\lambda_{max}\leq\|A\|}\|A\|\geq\frac{\|b\|}{\|x\|}$$

$$\|A^{-1}\|\geq\max\left\{\frac{\|(0,3,0,1)\|_\infty}{\|(2,7,0,9)\|_\infty},\frac{\|(3,-5,1,10)\|_\infty}{\|(5,-3,-1,5)\|_\infty}\right\}=\max\left\{\frac{3}{9},\frac{10}{5}\right\}=2$$

$$\|A\|\geq\max\left\{\frac{9}{3},\frac{5}{10}\right\}=3$$

$$cond(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|\geq3\cdot2=6$$

# שאלה 3

עבור המטריצה הבאה:

$$A = \begin{matrix} 1\,2\,3 \\ 3\,4\,6 \\ 9\,8\,7 \end{matrix}$$

1. חשבו את הערכים והוקטורים העצמיים של מטריצה A.
2. הריצו 3 איטרציות של שיטת Power method החל מוקטור $x_0 = (1,1,1)$ בנורמת אינסוף.
3. חשבו והראו שהשגיאה היחסית של $x_3$ ביחס לוקטור העצמי של הערך העצמי הגבוה ביותר בערך מוחלט היא הנמוכה ביותר לפי נורמת אינסוף.

1.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 3 & 4-\lambda & 6 \\ 9 & 8 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 \\ 8 & 7-\lambda \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 7-\lambda \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4-\lambda & 6 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\cdot[(4-\lambda)(7-\lambda)-48] - 3[2\cdot(7-\lambda)-24] + 9[12-3(4-\lambda)]$$

$$= (1-\lambda)\cdot(28-11\lambda+\lambda^2-48) - 3(14-2\lambda-24) + 9(12-12+3\lambda)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2-11\lambda-20) + 3(2\lambda+10) + 27\lambda$$

$$= -\lambda^3+12\lambda^2+9\lambda-20+6\lambda+30+27\lambda$$

$$= -\lambda^3+12\lambda^2+42\lambda+10$$

$$= (\lambda+2.612)(\lambda+0.257)(\lambda-14.87)$$

$\lambda_1 = -2.612 \quad V_1 = \begin{pmatrix} -0.438 \\ -0.709 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = -0.257 \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1.195 \\ -2.251 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_3 = 14.87 \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0.308 \\ 0.637 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.
$$AX_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \\ 24 \end{pmatrix} \qquad X_1 = \frac{(6,13,24)^T}{\|(6,13,24)\|_\infty} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.542 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.542 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.334 \\ 8.918 \\ 13.586 \end{pmatrix} \qquad X_2 = \frac{(4.334,\ 8.918,\ 13.586)^T}{\|(4.334, 8.918, 13.586)\|_\infty} = \begin{pmatrix} 0.319 \\ 0.6564 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$AX_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0.319 \\ 0.6564 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.632 \\ 9.583 \\ 15.122 \end{pmatrix} \qquad X_3 = \frac{(4.632,\ 9.583,\ 15.122)^T}{\|(4.632, 9.583, 15.122)\|_\infty} = \begin{pmatrix} 0.3063 \\ 0.6337 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\delta\tilde{V}_2 = \frac{\|X_3-V_2\|}{\|V_2\|} = \frac{-2.8847}{1} \geq \delta\tilde{V}_1 = \frac{\|X_3-V_1\|}{\|V_1\|} = \frac{-1.3427}{1} \geq \delta\tilde{V}_3 = \frac{\|X_3-V_3\|}{\|V_3\|} = \frac{0.0033}{1}$$

## שאלה 4

מצאו נוסחת קירוב לנגזרת שנייה של $f(x_0)$ ע"פ שיטת Undetermined Coefficients בעזרת ארבעת

הנקודות הבאות: $x_8, x_4, x_2, x_1$

$$f(x_1) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 f''(x_0) + \frac{1}{6}h^3 f'''(x_0) + O(h^4)$$
$$f(x_2) = f(x_0) + 2hf'(x_0) + 2h^2 f''(x_0) + \frac{8}{6}h^3 f'''(x_0) + O(h^4)$$
$$f(x_4) = f(x_0) + 4hf'(x_0) + 8h^2 f''(x_0) + \frac{64}{6}h^3 f'''(x_0) + O(h^4)$$
$$f(x_8) = f(x_0) + 8hf'(x_0) + 32h^2 f''(x_0) + \frac{512}{6}h^3 f'''(x_0) + O(h^4)$$

$$\begin{aligned} &\alpha+\beta+\gamma+\delta=0 \\ &\alpha+2\beta+4\gamma+8\delta=0 \\ &\frac{\alpha}{2}+2\beta+8\gamma+32\delta=1 \\ &\frac{\alpha}{6}+\frac{8\beta}{6}+\frac{64\gamma}{6}+\frac{512\delta}{6}=0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 2 \\ 1 & 8 & 64 & 512 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} \alpha &= 1.333 \\ \beta &= -2.167 \\ \gamma &= 0.917 \\ \delta &= -0.083 \end{aligned}$$

$$f''(x_0) = \frac{1.333 f(x_1) - 2.167 f(x_2) + 0.917 f(x_4) - 0.083 f(x_8)}{h^2} + O(h^2)$$

## שאלה 5

בהינתן האינטגרל הבא:

$$I = \int_{5}^{10} e^{\frac{1}{x^2}} dx$$

נרצה לחשב קירוב לאינטגרל בעזרת שיטת הטרפזים בחלוקה ל 1000 מקטעים, נסמנו ב$I^{T}_{1000}$, האם קירוב זה יהיה גדול, קטן או שווה ל$I$? נמקו.

7. $f(x)=e^{\frac{1}{x^2}}$ is descending rapidly as x grows giving it a positive curvature, meaning any estimation by the trapezoid method would over-estimate, meaning $I^{T}_{1000} > I$.