שאלה 1

נרצה לאמן מודל למידת מכונה, עבורו נרצה למצוא את הפתרון הטוב ביותר לפונקציית ההפסד הבאה, ז"א ה x עבורו $f(x)$ מקבלת את הערך המינימלי:

$$f(x) = x \cdot ln(x) + (1 - x) \cdot ln(1 - x) + 1$$

ידוע כי לפונקציית ההפסד קיים פתרון אופטימלי בטווח $(0, 1)$.

3. $f(x) = x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x) + 1$

$f'(x) = \ln(x) + 1 - \ln(1-x) - 1 = \ln(x) - \ln(1-x)$

1. חשבו את הפתרון האופטימלי של $f(x)$ בשיטת המיתר עבור $\delta = 0.01$ החל מ- $x_0 = 0.2,\ x_1 = 0.9$.

1. $x_0 = 0.2 \quad x_1 = 0.9$

$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = 0.9 - 2.19\frac{0.7}{2.19 + 1.386} = 0.471$

$|f(x_2)| = 0.11 > 0.01 = \delta$

$x_3 = 0.471 + 0.11\frac{-0.429}{-0.11 - 2.19} = 0.492$

$|f(x_3)| = 0.034 > 0.01 = \delta$

$x_4 = 0.492 + 0.034\frac{0.021}{-0.034 + 0.11} = 0.5014$

$|f(x_4)| = 5 \cdot 10^{-3} < 0.01 = \delta$

2. חשבו כמה איטרציות ידרשו בשיטת החצייה על מנת לקרב לפתרון האופטימלי לדיוק שהתבקשתם בסעיף 1.

2. $n \geq \log_2\left(\frac{0.7}{0.01}\right) = 6.129 \qquad n_0 = 7$

3. הסבירו האם ניתן למצוא פתרון אופטימלי בעזרת שיטת ניוטון ראפסון.

3. No, since $f'(\frac{1}{2}) = 0$, which is in use in Newton-Rhapson.

4. האם איטרציית נקודת השבת $g(x) = \frac{x^2+2}{3}$ תקרב לשורש $x = 1$ מהר או לאט יותר מאשר שיטת החצייה בתחום ההתכנסות סביב נקודת השבת?

4. $g'(x) = \frac{2x}{3}$

$g'(1) = \frac{2}{3} \neq 0 \rightarrow R = 1$

$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^q} = \frac{1}{q!}|g^{(q)}(p)| = \frac{1}{1!}|g'(1)| = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

Bisection method is also of linear convergence order but has $A = \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$, so our method will converge slower.

שאלה 2

בהינתן שיטת איטרציית נקודת שבת המוגדרת על ידי פונקציה $g(x)$. נניח שהנקודה $\alpha = 4$ הינה נקודת שבת של $g(x)$. בנוסף, מתקיים:

$$g'(4) = g''(4) = 0,\ \forall x \in [4 - 10^{-5}, 4 + 10^{-5}]:\ g'''(x) = -3$$

התחלנו את האיטרציה בנקודה x_0 קרובה מספיק לנקודת השבת, לאחר 4 צעדים הגענו לנקודה $x_4 = 4 - 10^{-6}$. מצאו את הנקודה x_5.

Since $g'(4) = g''(4) = 0 \wedge g'''(x) \neq 0$ ($g'''(4) \neq 0$ in particular), where $\alpha = 4$ is the fixed point of g, meaning the convergence order of g is $R=3$ and rate of convergence is $A = \left|\frac{g'''(4)}{3!}\right| = \frac{3}{3!} = \frac{1}{2}$

By the definition of convergence order:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^R} = A$$

in particular:

$$\frac{e_5}{e_4^3} = -\frac{1}{2} \rightarrow e_5 = -\frac{e_4^3}{2} = \alpha - x_5 = -\frac{(\alpha - x_4)^3}{2}$$

$$x_5 = \alpha + \frac{(\alpha - x_4)^3}{2} = 4 + \frac{(10^{-6})^3}{2} = 4 + 5\cdot 10^{-19}$$

Or with Taylor expansion:

$$x_{n+1} = g(x_n) = g(\alpha) + \frac{g'''(\alpha)}{3!} e_n^3$$

$$= 4 + \frac{(-3)}{3!}\cdot(-10^{-6})^3 = 4 + \frac{10^{-18}}{2} = 4 + 5\cdot 10^{-19}$$

שאלה 3

עבור איטרציית נקודת השבת הבאה לחישוב נקודת השבת $\alpha = 2$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{8}x_n\left(3 - \frac{x_n^2}{4}\right) + \frac{3}{8}x_n\left(1 + \frac{4}{x_n^2}\right)$$

מצאו את סדר ההתכנסות ואת קבוע ההתכנסות.

$$g(x) = \frac{x}{8}\left(3 - \frac{x^2}{4}\right) + \frac{3x}{8}\left(1 + \frac{4}{x^2}\right) = \frac{3x}{8} - \frac{x^3}{32} + \frac{3x}{8} + \frac{12}{8x} = -\frac{x^3}{32} + \frac{3x}{4} + \frac{3}{2x}$$

$$g'(x) = -\frac{3x^2}{32} + \frac{3}{4} - \frac{3}{2x^2}$$

$$g'(2) = -\frac{12}{32} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} = 0$$

$$g''(x) = -\frac{6x}{32} + \frac{6}{2x^3} = -\frac{3x}{16} + \frac{3}{x^3}$$

$$g''(2) = -\frac{6}{16} + \frac{3}{8} = 0$$

$$g'''(x) = -\frac{3}{16} - \frac{9}{x^4}$$

$$g'''(2) = -\frac{3}{16} - \frac{9}{16} = -\frac{3}{4} \neq 0 \rightarrow R = 3$$

$$A = \left|\frac{g'''(2)}{3!}\right| = \left|\frac{-\frac{3}{4}}{6}\right| = \frac{1}{8}$$

שאלה 4

בהינתן פונקציה $f(x)$ כלשהי, אשר קיימת לה פונקציה הופכית בשם $g(y)$, ידוע גם כי $g(y)$ הינו פולינום מדרגה כלשהי, נתון אוסף הדגימות הבא מ$f(x)$:

x	-5	-95	-55	35
$f(x)$	3	0	-2	-5

חשבו את $f'(-5)$, כאשר ידוע כי מתקיים $f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$.

4. $$g(y) = -5\frac{(x-0)(x+2)(x+5)}{(3-0)(3+2)(3+5)} - 95\frac{(x-3)(x+2)(x+5)}{(0-3)(0+2)(0+5)} - 55\frac{(x-3)(x-0)(x+5)}{(-2-3)(-2-0)(-2+5)} + 35\frac{(x-3)(x-0)(x+2)}{(-5-3)(-5-0)(-5+2)}$$

$$= -\frac{5}{120}(x^3+7x^2+10x) + \frac{95}{30}(x^3+4x^2-11x-30) - \frac{55}{30}(x^3+2x^2-15x) - \frac{35}{120}(x^3-x^2-6x)$$

$$= \frac{1}{120}(-5x^3-35x^2-50x+380x^3+1520x^2-4180x-11400-220x^3-440x^2+3300x-35x^3+35x^2+210x)$$

$$= \frac{1}{120}(120x^3+1080x^2-720x-11400) = x^3+9x^2-6x-95$$

$$g'(y) = 3x^2+18x-6$$

$$g'(3) = 75$$

$$f'(-5) = \frac{1}{g'(3)} = \frac{1}{75}$$

שאלה 5

בהינתן פונקציה $f(x) = e^{2x}$, עבורה נרצה לחשב את פולינום האינטרפולציה:

1. באינטרוול $[-1, 1]$, מצאו מהי דרגת הפולינום n אשר תבטיח כי שגיאת הקירוב תהיה קטנה מ-1 ללא ידיעת נקודות הדגימה.

$$E_n(x) \le \frac{f^{n+1}(\xi) \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2^{n+1} \cdot e^2 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$E_{10}(x) = 0.77 < 1 \rightarrow n = 10$$

2. עבור אותו אינטרוול, חשבו מהו חסם השגיאה כאשר דוגמים 4 נקודות במרווחים שווים.

$$E_3(x) \le \frac{f^4(\xi) \cdot h^4}{24} = \frac{2^4 e^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4}{24} = 0.973$$

3. עבור פולינום מדרגה 5, מצאו מהו גודל האינטרוול אשר יבטיח כי שגיאת הקירוב תהיה קטנה מ-1 ללא ידיעת נקודות הדגימה.

$$E_5(x) \le \frac{2^6 \cdot e^2 \cdot I^6}{6!} \le 1 \rightarrow I^6 \le 1.523 \rightarrow I \le 1.073$$