

אלגוריתמים II

עבודת בית 1

הוראות הגשה: (אי קיום הוראות אלו עלול לגרום להורדת ציון!)

1. יש להגיש עד תאריך **10/12/25 בשעה 22:00** למטלה הקשורה במודל בלבד.
2. יש להגיש בקובץ PDF אחד, מרוכז, ברור ונקי.
3. אין להגיש בשום פנים ואופן למייל של מרצה או מתרגל – אך ורק למודל.
4. ניתן להגיש בזוגות אך לא בקבוצות גדולות יותר. **(במידה ומוגש כעבודה זוגית, יש לרשום את שמות המגישים ואת מספרי הזהות שלהם).**
5. לא יתקבלו עבודות שהוגשו באיחור.
6. במקרה של העתקה מלאה או חלקית של העבודה (מסטודנטים אחרים, מהאינטרנט או מכל מקום אחר), יינתן ציון 0 על העבודה של כלל הסטודנטים המעורבים והם יועלו לוועדת משמעת.

שאלה 1

יהי $T = (V, E)$ עץ (לא מכוון). הקוטר של T מוגדר ע"י $d(T) = \max_{u,v \in V} \delta(u, v)$. בהינתן עץ T , הציעו אלגוריתם יעיל ככל האפשר המחשב את $d(T)$. הסבירו את נכונות האלגוריתם ונתחו זמן ריצתו.

שאלה 2

- יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון שבו כל קודקוד צבוע בצבע אדום או כחול ויהי $s \in V$ קודקוד מקור הצבוע באדום.
- א. תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר המחשב לכל $v \in V$, מבין כל המסלולים הקצרים ביותר מ- s ל- v את המסלול שמכיל מספר מינימלי של קודקודים אדומים. הסבירו את נכונות האלגוריתם ונתחו זמן ריצתו.
 - ב. תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שמוצא לכל קודקוד $v \in V$ את המסלול הקצר ביותר מ- s ל- v שמכיל בדיוק שני קודקודים אדומים. הסבירו את נכונות האלגוריתם ונתחו זמן ריצתו.
 - ג. בהינתן קודקוד $t \in V$, תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שמוצא מסלול קצר ביותר מ- s ל- t שמכיל לפחות קודקוד אחד אדום ולא מכיל רצף של שלושה קודקודים אדומים עוקבים. הסבירו את נכונות האלגוריתם ונתחו זמן ריצתו.

שאלה 3

- בהינתן גרף מכוון $G = (V, E)$ ותת-קבוצה של קודקודים $X \subseteq V$.
- הציעו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שבודק האם כל מעגל ב- G עובר דרך לפחות קודקוד אחד מ- X . הסבירו את נכונות האלגוריתם ונתחו זמן ריצתו.

שאלה 4

יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון. G נקרא חד-מסילתי אם לכל זוג קודקודים שונים $u, v \in V$ קיים ב- G לכל היותר מסלול פשוט אחד מ- u ל- v .

א. הוכיחו כי גרף מכוון וחסר מעגלים G הינו חד-מסילתי אם ורק אם מתקיים התנאי הבא: לכל קודקוד $u \in V$, בקריאה ל- $DFS\text{-}visit(u)$ לא מתקבלות צלעות קדימה או צלעות חוזות. (שימו לב כאן שמתייחסים לפונקציה $DFS\text{-}visit$ ולא לכל האלגוריתם).

ב. על סמך סעיף א', הציעו אלגוריתם הרץ בזמן $O(|V|^2)$ ובודק האם גרף מכוון וחסר מעגלים נתון הוא חד-מסילתי.

שאלה 5

נתונות n משימות a_1, a_2, \dots, a_n כאשר חלק מהמשימות תלויות אחת בשנייה, כלומר אם משימה a_j תלויה במשימה a_i , אזי ניתן לבצע את a_j אך ורק אחרי ש- a_i מסתיימת. נניח כי נתונה רשימה של m תלויות בין המשימות. נגדיר סידור חוקי של המשימות להיות סידור של המשימות בו ניתן לבצע משימה a_j אך ורק אחרי שסיימנו לבצע את כל המשימות בהן תלויה a_j . רוצים לבצע את המשימות לפי סידור חוקי.

א. הציעו אלגוריתם הרץ בזמן $O(n + m)$ ובודק האם קיים סידור חוקי של המשימות, ואם כן, מחזיר סידור חוקי. הסבירו את נכונות האלגוריתם ונתחו זמן ריצתו.

ב. נניח שלכל משימה a_i נתון זמן ביצוע t_i יחידות זמן ונניח שקיים סידור חוקי של המשימות. עבור משימה a_i , הזמן המינימלי הנדרש כדי לסיים את a_i שווה לזמן הביצוע של a_i בנוסף לזמן הנדרש כדי לסיים את המשימות בהן תלויה a_i . הציעו אלגוריתם הרץ בזמן $O(n + m)$ ומחשב, לכל משימה a_i , את הזמן המינימלי הנדרש כדי לסיים את a_i . הסבירו את נכונות האלגוריתם ונתחו זמן ריצתו.