Generalización de operadores de Kraus en sistemas de N partículas

En sistema de N partículas en el que se realiza una medición de un observable de la forma $A_1 \otimes A_2 \otimes \ldots \otimes A_N$, sin embargo por ruido del entorno se produce un error en el aparato de medición y confunde los resultados. Ahora, existe una probabilidad de una identificación errónea. Por ejemplo puede realizarse la medición de $A_2 \otimes A_1 \otimes \ldots \otimes A_N$ con cierta probabilidad p_2. Sin embargo, es posible que la partículas experimenten un intercambio de cierta forma tal que la medición que se produzca sea una de las $N!$ permutaciones en las que se puede configurar el operador original. En este caso el valor esperado de la medición será el promedio de los valores esperados ponderado por probabilidad de que se produzca alguna medición del observable erróneo.

La operación difusa se pude redefinir para un sistema de N partículas de forma más general como

$$\mathcal{F}(\rho) = \sum_{\Pi_i \in S} p_i \Pi_i \rho \Pi_i^\dagger \tag{1}$$

donde $\mathcal{S}$ es un subconjunto del grupo simétrico de n partículas y $\sum_{i=1}^{N!} p_i = 1$.

Ahora que se generaliza el operador difuso, puede utilizarse para obtener el valor esperado de esta medición para el sistema de N partículas

$$\begin{aligned} \left\langle \bigotimes_{i=1}^{N} A_i \right\rangle_{\mathcal{F}(\rho)} &= \mathrm{Tr}\left(\mathcal{F}(\rho) \bigotimes_{i=1}^{N} A_i \right) \\ &= \sum_{\Pi_j \in S} p_j \mathrm{Tr}\left(\Pi_j \rho \Pi_j^\dagger \bigotimes_{i=1}^{N} A_i \right). \end{aligned} \tag{2}$$

Medidas POVM en sistemas de varias partículas

RR: *¿Cómo deberían ser las medidas POVM? Ahora el operador de permutación no es hermítico, POVM y los operadores de Kraus cambian ligeramente.*

Antes se describió el mapeo que puede realizarse con las medidas POVM, el cual será conveniente para proporcionar la probabilidad de cada posible salida de la medición. En un sistema de dos partículas se propuso intuitivamente un conjunto de efectos, en los cuales a los operadores proyección se les aplicaba el operador difuso para dos partículas.

La generalización más partículas es distinta puesto que los operadores de permutación no hermíticos para $N > 3$, por lo que no pueden ser la aplicación del operador difuso como se definió en la ecuación (1). Sin embargo, se hace uso del valor esperado de una medición difusa. Usando la propiedad cíclica de la traza, el valor esperado de la medición difusa puede escribirse también como

$$\left\langle \bigotimes_{i=1}^{N} A_i \right\rangle_{\mathcal{F}(\rho)} = \sum_{\Pi_j \in S} \mathrm{Tr}\left(\Pi_j^\dagger \bigotimes_{i=1}^{N} A_i \Pi_j \rho \right). \tag{3}$$

Notemos que aunque los operadores de permutación no son hermíticos, pero el operador difuso sí lo es

$$\mathcal{F}^\dagger(\rho) = \left(\sum_{\Pi_j \in S} p_j \Pi_j \rho \Pi_j^\dagger\right)^\dagger = \sum_{\Pi_j \in S} p_j \left(\Pi_j \rho \Pi_j^\dagger\right)^\dagger = \sum_{\Pi_j \in S} p_j (\Pi_j^\dagger)^\dagger \rho \Pi_j^\dagger = \mathcal{F}\left(\rho\right).$$

Por lo tanto los efectos ya no pueden ser la aplicación del operador difuso a los operadores de proyección, si no que pueden escribirse como

$$\{E_{\lambda_i}\}_{\lambda_i \in \Lambda} = \left\{ \sum_{\Pi_j \in S} p_j \Pi_j^\dagger P_{\lambda_i} \Pi_j \right\}_{\lambda_i \in \Lambda}, \tag{4}$$

donde P_{λ_i} es el operador de proyección correspondiente a cada vector propio que tiene asociado el valor propio $\lambda_i \in \Lambda$. El valor propio λ_i es el producto de los a_{jk}, donde es el k-ésimo valor propio correspondiente al observable A_j. Es fácilmente comprobable que estos operadores E_{λ_i} son hermíticos, cumplen con la propiedad de completitud y son positivos.

Para obtener el estado posterior a la medición se requiere utilizar la descomposición de los efectos en operadores de Kraus $\{K_{\lambda_i}\}$. Para mediciones difusas en sistema de N partículas, de nuevo se propone inicialmente utilizar la raíz cuadrada de los efectos

$$K_{\lambda_i} = \sqrt{\sum_{\Pi_j \in S} p_j \Pi_j^\dagger P_{\lambda_i} \Pi_j}, \tag{5}$$

esto se puede realizar debido a la positividad de los efectos. De nuevo, esta descomposición no es única y el estado posterior de la medición dependerá de como se implementen las medidas POVM en el laboratorio.

RR: En esta sección me gustaría pensar en otas implementaciones de los operadores de Kraus

Instrumentos cuánticos en sistemas de N partículas

En esta parte también se consideran las dos alternativas de instrumentos cuánticos.

La primera alternativa es el instrumento en el que las partículas se intercambian y luego se aplica una medición proyectiva

$$\mathcal{I}_1(\rho) = \sum_{\lambda_i \in \Lambda} P_{\lambda_i} \otimes P_{\lambda_i} \mathcal{F}\left(\rho\right) P_{\lambda_i}, \tag{6}$$

donde P_{λ_i} son los operadores de proyección y $\lambda_i \in \Lambda$ son los valores propios del observable.

El valor esperado del resultado de la medición modelado con este instrumento puede calcularse de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\left\langle \bigotimes_{i=1}^{N} A_i \right\rangle_{\mathcal{I}_1} &= \operatorname{Tr}\left(\left[\left(\bigotimes_{i=1}^{N} A_i\right) \otimes \mathbb{1}\right] \mathcal{I}_1\right) \\
&= \operatorname{Tr}\left(\left[\left(\bigotimes_{i=1}^{N} A_i\right) \otimes \mathbb{1}\right] \sum_{\lambda_j \in \Lambda} P_{\lambda_j} \otimes P_{\lambda_j} \mathcal{F}(\rho) P_{\lambda_j}\right) \\
&= \sum_{\lambda_j \in \Lambda} \operatorname{Tr}\left(\left(\bigotimes_{i=1}^{N} A_i\right) P_{\lambda_j}\right) \operatorname{Tr}\left(P_{\lambda_j} \mathcal{F}(\rho) P_{\lambda_j}\right) \\
&= \sum_{\lambda_j \in \Lambda} \operatorname{Tr}\left(\sum_{\lambda_j, \lambda_k \in \Lambda} \lambda_k P_{\lambda_k} P_{\lambda_j}\right) \operatorname{Tr}\left(P_{\lambda_j} \mathcal{F}(\rho) P_{\lambda_j}\right) \\
&= \sum_{\lambda_j \in \Lambda} \operatorname{Tr}\left(\lambda_j P_{\lambda_j}\right) \operatorname{Tr}\left(P_{\lambda_j} \mathcal{F}(\rho) P_{\lambda_j}\right) \\
&= \sum_{\lambda_j \in \Lambda} \lambda_j \operatorname{Tr}\left(P_{\lambda_j} \mathcal{F}(\rho)\right)
\end{aligned}$$

con lo que se puede concluir que el valor esperado correspondiente a este instrumento es

$$\left\langle \bigotimes_{i=1}^{N} A_i \right\rangle_{\mathcal{I}_1} = \operatorname{Tr}\left(\bigotimes_{i=1}^{N} A_i \mathcal{F}(\rho)\right), \tag{7}$$

el mismo que el valor esperado correcto (2).

La segunda alternativa es igualmente generalizable para un sistema de N partículas como

$$\mathcal{I}_2(\rho) = \sum_{\lambda_i \in \Lambda} \mathcal{F}(P_{\lambda_i}) \otimes P_{\lambda_i} \rho P_{\lambda_i}, \tag{8}$$

en esta alternativa se interpreta una confusión en la lectura de los resultados.

Con esta alternativa el valor esperado se calcula como

$$\begin{aligned}
\left\langle \bigotimes_{i=1}^{N} A_i \right\rangle_{\mathcal{I}_2} &= \operatorname{Tr}\left(\left[\left(\bigotimes_{i=1}^{N} A_i\right) \otimes \mathbb{1}\right] \mathcal{I}_2\right) \\
&= \operatorname{Tr}\left(\left[\left(\bigotimes_{i=1}^{N} A_i\right) \otimes \mathbb{1}\right] \sum_{\lambda_j \in \Lambda} \mathcal{F}\left(P_{\lambda_j}\right) \otimes P_{\lambda_j} \rho P_{\lambda_j}\right) \\
&= \sum_{\lambda_j \in \Lambda} \operatorname{Tr}\left(\bigotimes_{i=1}^{N} A_i \mathcal{F}\left(P_{\lambda_j}\right)\right) \operatorname{Tr}\left(P_{\lambda_j} \rho\right).
\end{aligned}$$

finalmente el valor esperado es

$$\left\langle \bigotimes_{i=1}^{N} A_i \right\rangle_{\mathcal{I}_2} = \sum_{\lambda_j \in \Lambda} \operatorname{Tr}\left(\bigotimes_{i=1}^{N} A_i \mathcal{F}\left(P_{\lambda_j}\right)\right) \operatorname{Tr}\left(P_{\lambda_j} \rho\right). \tag{9}$$

Este valor esperado no corresponde a (2) por lo que análogamente se tiene una proposición más general para la equivalencia de estos instrumentos en sistema de N partículas.

Proposición 0.1. *Para todo estado inicial ρ, los instrumentos cuánticos 6 y 8 son equivalentes si y solo si*

$$\left\langle \lambda_j \middle| \Pi_l^\dagger \bigotimes_{i=1}^{N} A_i \Pi_l \middle| \lambda_k \right\rangle = 0, \forall j \neq k \ y \ \forall \Pi_l \in \mathcal{S}$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Suponiendo que para todo estado inicial ρ los valores esperados de los instrumentos son iguales

$$\mathrm{Tr}\left(\bigotimes_{i=1}^{N} A_i \mathcal{F}\left(\rho\right)\right) = \sum_{\lambda_j \in \Lambda} \mathrm{Tr}\left(\bigotimes_{i=1}^{N} A_i \mathcal{F}\left(P_{\lambda_j}\right)\right) \mathrm{Tr}\left(P_{\lambda_j}\rho\right)$$

o bien,

$$\mathrm{Tr}\left(\sum_{k\in\mathcal{S}} p_k \Pi_k^\dagger \bigotimes_{i=1}^{N} A_i \Pi_k \rho\right) = \sum_{\lambda_j \in \Lambda} \mathrm{Tr}\left(\sum_{k\in\mathcal{S}} p_k \Pi_k^\dagger \bigotimes_{i=1}^{N} A_i \Pi_k P_{\lambda_j}\right) \mathrm{Tr}\left(P_{\lambda_j}\rho\right).$$

Aplicando la linealidad de la traza,

$$\mathrm{Tr}\left(\sum_{k\in\mathcal{S}} p_k \Pi_k^\dagger \bigotimes_{i=1}^{N} A_i \Pi_k \rho\right) = \mathrm{Tr}\left(\sum_{\lambda_j \in \Lambda} \mathrm{Tr}\left(\sum_{k\in\mathcal{S}} p_k \Pi_k^\dagger \bigotimes_{i=1}^{N} A_i \Pi_k P_{\lambda_j}\right) P_{\lambda_j}\rho\right),$$

de ello

$$\mathrm{Tr}\left(\left(\sum_{k\in\mathcal{S}} p_k \Pi_k^\dagger \bigotimes_{i=1}^{N} A_i \Pi_k - \sum_{\lambda_j \in \Lambda} \mathrm{Tr}\left(\sum_{k\in\mathcal{S}} p_k \Pi_k^\dagger \bigotimes_{i=1}^{N} A_i \Pi_k P_{\lambda_j}\right) P_{\lambda_j}\right)\rho\right) = 0$$

,

para todo estado inicial ρ entonces

$$\sum_{\Pi_k\in\mathcal{S}} p_k \Pi_l^\dagger \bigotimes_{i=1}^{N} A_i \Pi_l - \sum_{\lambda_j \in \Lambda} \mathrm{Tr}\left(\sum_{\Pi_k\in\mathcal{S}} p_k \Pi_k^\dagger \bigotimes_{i=1}^{N} A_i \Pi_k P_{\lambda_j}\right) P_{\lambda_j} = 0,$$

de esta última ecuación se deduce que para cada j se puede ver que

$$\Pi_k^\dagger \bigotimes_{i=1}^{N} A_i \Pi_k - \sum_{\lambda_l \in \Lambda} \mathrm{Tr}\left(\Pi_k^\dagger \bigotimes_{i=1}^{N} A_i \Pi_k P_{\lambda_j}\right) P_{\lambda_j} = 0.$$

Si el primer término se escribe en la base de los vectores propios del observable que se desea medir

$$\sum_{\lambda_j,\lambda_k \in \Lambda} \mathrm{Tr}\left(\Pi_l^\dagger \bigotimes_{i=1}^{N} A_i \Pi_l |\lambda_j\rangle\langle\lambda_k|\right) |\lambda_j\rangle\langle\lambda_k| - \sum_{\lambda_j \in \Lambda} \mathrm{Tr}\left(\Pi_l^\dagger \bigotimes_{i=1}^{N} A_i \Pi_l P_{\lambda_j}\right) P_{\lambda_j} = 0,$$

$$\sum_{\lambda_j \neq \lambda_k \in \Lambda} \mathrm{Tr}\left(\Pi_l^\dagger \bigotimes_{i=1}^{N} A_i \Pi_l |\lambda_j\rangle\langle\lambda_k|\right) |\lambda_j\rangle\langle\lambda_k| = 0,$$

finalmente por la independencia lineal de los operadores

$$\mathrm{Tr}\left(\Pi_l^\dagger \bigotimes_{i=1}^{N} A_i \Pi_l |\lambda_j\rangle\langle\lambda_k|\right) = \left\langle \lambda_j \left| \Pi_l^\dagger \bigotimes_{i=1}^{N} A_i \Pi_l \right| \lambda_k \right\rangle = 0, \forall j \neq k, \forall \Pi_l \in \mathcal{S}.$$

($\Leftarrow$) Suponiendo que se cumple que

$$\left\langle \lambda_j \left| \Pi_l^\dagger \bigotimes_{i=1}^{N} A_i \Pi_l \right| \lambda_k \right\rangle = 0, \forall j \neq k, \forall \Pi_l \in \mathcal{S},$$

se puede escribir a la permutación l como una combinación lineal de los operadores de proyección

$$\Pi_l^\dagger \bigotimes_{i=1}^{N} A_i \Pi_l = \sum_{\lambda_k \in \Lambda} d_{lk} P_k.$$

Entonces en el valor esperado (9)

$$\begin{aligned}
\left\langle \bigotimes_{i=1}^{N} A_i \right\rangle_{\mathcal{I}_2} &= \sum_{\lambda_j \in \Lambda} \mathrm{Tr}\left(\sum_l p_l \sum_{\lambda_k \in \Lambda} d_{lk} P_{\lambda_k} P_{\lambda_j}\right) \mathrm{Tr}\left(P_{\lambda_j}\rho\right) \\
&= \sum_{\lambda_j \in \Lambda} \sum_l p_l d_{lj} \mathrm{Tr}\left(P_{\lambda_j}\right) \\
&= \sum_l p_l \mathrm{Tr}\left(\sum_{\lambda_j \in \Lambda} d_{lj} P_{\lambda_j} \rho\right) \\
&= \sum_l p_l \mathrm{Tr}\left(\Pi_l^\dagger \bigotimes_{i=1}^{N} A_i \Pi_l \rho\right) \\
&= \mathrm{Tr}\left(\bigotimes_{i=1}^{N} A_i \mathcal{F}(\rho)\right) = \left\langle \bigotimes_{i=1}^{N} A_i \right\rangle_{\mathcal{I}_1}
\end{aligned}$$

■

Observables degenerados en mediciones difusas

Cuando se tienen observables A_j que tienen degeneración, RR: *¿Cambia la descripción de los mediciones difusas?* Los operadores POVM se obtienen con la misma idea del valor esperado. Sin embargo lo operadores de proyección de los observable serán distintos por la degeneración. En el caso en el que el observable A_j sea degenerado y el valor propio a_j tenga un grado g de degeneración, el operador de proyección correspondiente será la suma de los operadores de los g vectores propios asociados

$$P_{a_j} = \sum_{i=1}^{g} P_i^{(a_j)}.$$

Los operadores del Observable conjunto ahora será para el caso simple $N = 2$

$$P_{a_j,b_k} = \sum_{i=1}^{g_{a_j}} P_i^{(a_j)} \otimes \sum_{l=1}^{g_{b_k}} P_l^{(b_k)} = \sum_{i,l} P_i^{(a_j)} \otimes P_l^{(b_k)}.$$

Los efectos son simplemente

$$\{E_{j,k}\} = \left\{ \mathcal{F}_{2\mathrm{p}} \left(\sum_{i,l} P_i^{(a_j)} \otimes P_l^{(b_k)} \right) \right\}$$

y la implementación de los operadores de Kraus es análoga.

Para el caso de $N > 3$, la notación es más complicada sin embargo la idea es la misma. La clave debe estar en el valor esperado y los operadores de proyección. Supongamos que se desea medir el observable $\bigotimes_{i=1}^{N} A_i$ y se obtiene la salida λ_j, de las d^N salidas posibles, entonces denotamos a λ_j^i como el autovalor correspondiente al observable A_i en la salida j. Entonces es posible escribir los operadores de proyección del observable usando esta notación

$$P_{\lambda_j} = \bigotimes_{i=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{g_j^{(i)}} P_k^{(\lambda_j^i)} \right),$$

en este caso $g_j^{(i)}$ es el grado de degeneración de λ_j^i. Los efectos son análogos a la ecuación (4).

Observables no factorizables en mediciones difusas

RR: *¿Cómo se puede describir completamente una medición de un observable que no es factorizable? ¿ ¿Cómo son las salidas en el sistema clásico? ¿La descripción de las mediciones difusas es muy diferente a la de Observables factorizables, en qúe se diferencia? ¿Cómo se aplica el operador difuso?*

Para observables, de dimensión d^N los cuales no pueden escribirse como un producto tensorial de N observables, es decir que si $\mathcal{O}$ es un observable no factorizable no puede escribirse como $\bigotimes_{i=1}^{N} A_i$. Sin embargo siempre es posible escribirlo como una combinación lineal de los operadores de la base.

Casos particulares de mediciones difusas

RR: En esta sección se desea ilustrar ejemplos de sistemas de N partículas en los que se realicen mediciones difusas y poderlos describir completamente. Un caso particular podría ser el de una cadena de iones en una recta o en una fila donde solo puedan intercambiarse con sus vecinos. O una cadena en una circunferencia.

RR: *¿Cómo cambia cuando tenemos una circunferencia o una fila de iones? ¿Cómo es el valor esperado? ¿Cuál es el operador difuso? ¿Cómo se describe estas mediciones?*