Condiciones para que los instrumentos cuánticos sean equivalentes

El valor esperado dado por la primera ecuación del paper original es

$$p\mathrm{Tr}(\rho A \otimes B) + (1-p)\mathrm{Tr}(\rho B \otimes A) = \langle A \otimes B \rangle \tag{1.1}$$

esta ecuación debe ser el punto de partida.

1.1. Aproximaciones utilizando instrumento cuánticos

1.1.1. Primera alternativa

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1(\rho) &= \sum_{j,k} P_{a_j,b_k} \otimes P_{a_j,b_k} \mathcal{F}(\rho) P_{a_j,b_k} \\ &= \sum_{j,k} P_{a_j,b_k} \otimes [p P_{a_j,b_k} \rho P_{a_j,b_k} + (1-p) P_{a_j,b_k} S \rho S^\dagger P_{a_j,b_k}], \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde $j, k = 0, 1$ y $P_{a_j,b_k} = |a_j b_k\rangle\langle a_j b_k|$ con a_j y b_k son los valores propios de los operadores A y B respectivamente.

Notar que si el sistema clásico indica que la salida de le medición es a_j, b_k, el estado de salida estará en el subespacio que indica el sistema clásico.

De este instrumento se calculó el valor esperado de la medición, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \langle A \otimes B \rangle_{\mathcal{I}_1} &= \sum_{jk} a_j b_k [p \langle a_j b_k | \rho | a_j b_k \rangle + (1-p) \langle b_k a_j | \rho | b_k a_j \rangle] \\ &= p\mathrm{Tr}(\rho A \otimes B) + (1-p)\mathrm{Tr}(\rho B \otimes A) \end{aligned}$$

El valor esperado es claramente el mismo que en la ecuación 1.1

1.1.2. Segunda alternativa

$$\mathcal{I}_2(\rho) = \sum_{j,k} p P_{a_j,b_k} \otimes P_{a_j,b_k} \rho P_{a_j,b_k} + (1-p) S P_{a_j,b_k} S^\dagger \otimes P_{a_j,b_k} \rho P_{a_j,b_k}, \tag{1.3}$$

También se calculó el valor esperado del observable:

$$\begin{aligned} \langle A \otimes B \rangle_{\mathcal{I}_2} &= \mathrm{Tr}\{[(A \otimes B) \otimes \mathbb{1}] \mathcal{I}_2\} \\ &= \sum_{j,k} [p a_j b_k + (1-p)\mathrm{Tr}((B \otimes A) P_{a_j,b_k})] \mathrm{Tr}(P_{a_j,b_k} \rho) \\ &= \sum_{j,k} [p a_j b_k + (1-p)\mathrm{Tr}((B \otimes A) P_{a_j,b_k})] \langle a_j b_k | \rho | a_j b_k \rangle \end{aligned}$$

Notemos que el término remarcado en azul difumina la parte de los resultados. Y en general esta ecuación no es igual a la ecuación 1.1. Por ejemplo si $A \otimes B = \sigma_z \otimes \sigma_x$, sin importar cuál sea el estado inicial ρ la parte en azul es siempre 0 lo que difiere con el valor esperado para el instrumento 1.

1.2. Condiciones

Entonces la pregunta que ahora se debe responder es ¿cuándo los dos instrumentos anteriores son equivalentes? Es decir, ¿en qué condiciones los dos instrumentos arrojan los mismo resultados?

Tenemos que al simplificar el valor esperado del segundo instrumento:

$$\begin{aligned}\langle A \otimes B \rangle_{\mathcal{I}_2} &= \sum_{j,k} pTr(a_j b_k P_{a_j b_k} \rho) + (1-p)\mathrm{Tr}((B \otimes A) P_{a_j, b_k}) \mathrm{Tr}(P_{a_j b_k} \rho) \\ &= p\mathrm{Tr}(A \otimes B \rho) + (1-p) \sum_{j,k} \mathrm{Tr}((B \otimes A) P_{a_j b_k}) \mathrm{Tr}(P_{a_j b_k} \rho)\end{aligned}$$

Claim: Para todo estado inicial ρ, los instrumentos son equivalentes, si y solo si los coeficientes "mixtos" del operador $B \otimes A$ en la base de los vectores propios de $A \otimes B$ son cero.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que para todo estado inicial ρ los valores esperados de los instrumentos son iguales. El valor esperado del primer instrumento es

$$\langle A \otimes B \rangle_{\mathcal{I}_1} = p\mathrm{Tr}(\rho A \otimes B) + (1-p)\mathrm{Tr}(\rho B \otimes A). \tag{1.4}$$

Y el valor esperado del segundo instrumento es

$$\langle A \otimes B \rangle_{\mathcal{I}_2} = p\mathrm{Tr}(A \otimes B \rho) + (1-p) \sum_{j,k} \mathrm{Tr}((B \otimes A) P_{a_j b_k}) \mathrm{Tr}(P_{a_j b_k} \rho). \tag{1.5}$$

El primer término del lado derecho de la ecuación 1.4 y el primer término de 1.5 son iguales, por lo tanto se igualan los segundos términos de estas ecuaciones, i.e.

$$\mathrm{Tr}(B \otimes A \rho) = \sum_{j,k} \mathrm{Tr}((B \otimes A) P_{a_j, b_k}) \mathrm{Tr}(P_{a_j b_k} \rho). \tag{1.6}$$

Por la linealidad de la traza se puede reacomodar el lado derecho de esta última ecuación:

$$\begin{aligned}\sum_{jk} \mathrm{Tr}((B \otimes A) P_{a_j, b_k}) \mathrm{Tr}(P_{a_j b_k} \rho) &= \sum_{jk} \mathrm{Tr}[\mathrm{Tr}((B \otimes A) P_{a_j, b_k})(P_{a_j b_k} \rho)] \\ &= \mathrm{Tr}\left[\left(\sum_{j,k} \mathrm{Tr}((B \otimes A) P_{a_j, b_k}) P_{a_j b_k}\right) \rho\right]\end{aligned}.$$

reescribiendo la ecuación 1.6

$$\mathrm{Tr}(B \otimes A \rho) = \mathrm{Tr}\left[\left(\sum_{j,k} \mathrm{Tr}((B \otimes A) P_{a_j, b_k}) P_{a_j b_k}\right) \rho\right]$$

$$\mathrm{Tr}\left[\left(B\otimes A-\left(\sum_{j,k}\mathrm{Tr}((B\otimes A)P_{a_j,b_k})P_{a_jb_k}\right)\right)\rho\right]=0. \tag{1.7}$$

Al expandir $B\otimes A$ en la base de vectores propios de $A\otimes B$ obtenemos que

$$B\otimes A=\sum_{j,k,j',k'}\mathrm{Tr}(B\otimes A|a_jb_k\rangle\langle a_{j'}b_{k'}|)|a_jb_k\rangle\langle a_{j'}b_{k'}|,$$

desarrollando la ecuación 1.7

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left[\left(B\otimes A-\left(\sum_{j,k}\mathrm{Tr}((B\otimes A)P_{a_j,b_k})P_{a_jb_k}\right)\right)\rho\right]&=0\\
\mathrm{Tr}\left[\left(\sum_{j,k,j',k'}\mathrm{Tr}(B\otimes A|a_jb_k\rangle\langle a_{j'}b_{k'}|)|a_jb_k\rangle\langle a_{j'}b_{k'}|-\left(\sum_{j,k}\mathrm{Tr}((B\otimes A)P_{a_j,b_k})P_{a_jb_k}\right)\right)\rho\right]&=0\\
\mathrm{Tr}\left[\left(\sum_{j,k\neq j',k'}\mathrm{Tr}(B\otimes A|a_jb_k\rangle\langle a_{j'}b_{k'}|)|a_jb_k\rangle\langle a_{j'}b_{k'}|\right)\rho\right]&=0\\
\mathrm{Tr}\left[\left(\sum_{j,k\neq j',k'}\langle a_jb_k|B\otimes A|a_{j'}b_{k'}\rangle|a_jb_k\rangle\langle a_{j'}b_{k'}|\right)\rho\right]&=0.
\end{aligned}$$

De la última ecuación, para cualquier estado inicial ρ, se obtiene que[1]

$$\sum_{j,k\neq j',k'}\langle a_jb_k|B\otimes A|a_{j'}b_{k'}\rangle|a_jb_k\rangle\langle a_{j'}b_{k'}|=\mathbf{0},$$

luego por independencia lineal de la base de vectores propios

$$\langle a_jb_k|B\otimes A|a_{j'}b_{k'}\rangle=0\quad\forall j,k\neq j',k'.$$

($\Leftarrow$) Ahora si suponemos que los coeficientes $\langle a_jb_k|B\otimes A|a_{j'}b_{k'}\rangle=0,\forall j,k\neq j',k'$. Entonces el operador $B\otimes A=\sum_{i,l}d_{i,l}P_{a_i,b_l}$ escrito en la base de vectores propios de $A\otimes B$.

Finalmente, se obtiene la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k}\mathrm{Tr}(\sum_{i,l}d_{i,l}P_{a_i,b_l}P_{a_j,b_k})\mathrm{Tr}(P_{a_jb_k}\rho)&=\sum_{j,k}\sum_{i,l}d_{i,l}\delta^{i,l}_{j,k}\mathrm{Tr}(P_{a_jb_k}\rho)\\
&=\sum_{j,k}d_{j,k}\mathrm{Tr}(P_{a_jb_k}\rho)=\mathrm{Tr}(B\otimes A\rho)
\end{aligned}.$$

■

Se puede probar lo siguiente:

Lema 1.1. *Si* $\forall\rho$, $\mathrm{Tr}(A\rho)=0$, *entonces* $A=\mathbf{0}$.

[1] ver lema 1.1.

Demostración. Supongamos por contradicción que $A \neq \mathbf{0}$. Entonces, sea $\rho = |a\rangle\langle a|$, con $|a\rangle$ un vector propio ortonormal, de A. Luego, al calcular $A|a\rangle\langle a|$, tenemos $A|a\rangle\langle a| = a|a\rangle\langle a|$ entonces, la traza de $A\rho$ es exactamente a, que es distinto de cero. Entonces, hemos encontrado una matriz A distinta de cero tal que la traza de $A\rho$ sea distinta de cero. De ello se deduce que $A = \mathbf{0}$ si no existe un ρ distinto de cero. ■

Ahora si se quiere ver que condiciones debería cumplir ρ para que los instrumentos sean equivalentes, se puede proponer algo similar a lo anterior.

Claim 2: Para cualquier operador $B \otimes A$ los instrumentos son equivalentes si y solo si todos los coeficientes «mixtos» de la matriz ρ en la base de los vectores propios del observable $A \otimes B$ son cero.

La demostración es análoga.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que para todo observable $B \otimes A$ los valores esperados de los instrumentos son iguales. De la proposición anterior se tiene

$$\mathrm{Tr}(B \otimes A\rho) = \sum_{j,k} \mathrm{Tr}((B \otimes A)P_{a_j,b_k})\mathrm{Tr}(P_{a_j b_k}\rho). \tag{1.8}$$

Por la linealidad de la traza se puede reacomodar el lado derecho de esta última ecuación:

$$\begin{aligned}\sum_{jk} \mathrm{Tr}((B \otimes A)P_{a_j,b_k})\mathrm{Tr}(P_{a_j b_k}\rho) &= \sum_{jk} \mathrm{Tr}[\mathrm{Tr}(\rho P_{a_j,b_k})P_{a_j b_k} B \otimes A] \\ &= \mathrm{Tr}\left[\left(\sum_{j,k} \mathrm{Tr}(\rho P_{a_j,b_k})P_{a_j b_k}\right) B \otimes A\right].\end{aligned}$$

reescribiendo la ecuación 1.8

$$\mathrm{Tr}(B \otimes A\rho) = \mathrm{Tr}\left[\left(\sum_{j,k} \mathrm{Tr}(\rho P_{a_j,b_k})P_{a_j b_k}\right) B \otimes A\right]$$

$$\mathrm{Tr}\left[\left(\rho - \left(\sum_{j,k} \mathrm{Tr}(\rho P_{a_j,b_k})P_{a_j b_k}\right)\right) B \otimes A\right] = 0. \tag{1.9}$$

Al expandir ρ en la base de vectores propios de $A \otimes B$ obtenemos que

$$\rho = \sum_{j,k,j',k'} \mathrm{Tr}(\rho|a_j b_k\rangle\langle a_{j'} b_{k'}|)|a_j b_k\rangle\langle a_{j'} b_{k'}|,$$

desarrollando la ecuación 1.9

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left[\left(\rho - \left(\sum_{j,k}\mathrm{Tr}(\rho P_{a_j,b_k})P_{a_jb_k}\right)\right)B\otimes A\right] &= 0\\
\mathrm{Tr}\left[\left(\sum_{j,k,j',k'}\mathrm{Tr}(\rho|a_jb_k\rangle\langle a_{j'}b_{k'}|)|a_jb_k\rangle\langle a_{j'}b_{k'}| - \left(\sum_{j,k}\mathrm{Tr}(\rho P_{a_j,b_k})P_{a_jb_k}\right)\right)B\otimes A\right] &= 0\\
\mathrm{Tr}\left[\left(\sum_{j,k\neq j',k'}\mathrm{Tr}(\rho|a_jb_k\rangle\langle a_{j'}b_{k'}|)|a_jb_k\rangle\langle a_{j'}b_{k'}|\right)B\otimes A\right] &= 0\\
\mathrm{Tr}\left[\left(\sum_{j,k\neq j',k'}\langle a_jb_k|\rho|a_{j'}b_{k'}\rangle|a_jb_k\rangle\langle a_{j'}b_{k'}|\right)B\otimes A\right] &= 0.
\end{aligned}$$

De la última ecuación, para cualquier observable $B\otimes A$

$$\langle a_jb_k|\rho|a_{j'}b_{k'}\rangle = 0 \quad \forall j,k\neq j',k'.$$

($\Leftarrow$) Ahora si suponemos que los coeficientes $\langle a_jb_k|\rho|a_{j'}b_{k'}\rangle = 0$, $\forall j,k\neq j',k'$. Entonces el operador $\rho = \sum_{i,l} d_{i,l}P_{a_i,b_l}$ escrito en la base de vectores propios de $A\otimes B$.

Finalmente, se obtiene la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k}\mathrm{Tr}(\sum_{i,l} d_{i,l}P_{a_i,b_l}P_{a_j,b_k})\mathrm{Tr}(P_{a_jb_k}B\otimes A) &= \sum_{j,k}\sum_{i,l} d_{i,l}\delta^{i,l}_{j,k}\mathrm{Tr}(P_{a_jb_k}B\otimes A)\\
&= \sum_{j,k} d_{j,k}\mathrm{Tr}(P_{a_jb_k}B\otimes A) = \mathrm{Tr}(B\otimes A\rho)
\end{aligned}.$$

$\blacksquare$