

Tarea 1

Análisis de variable Compleja 1

Problema 1.

Problema 2.

Demostración:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\alpha + z}{1 + \bar{\alpha}z} \right| &\leq 1 \\ \Leftrightarrow |\alpha + z| &\leq |1 + \bar{\alpha}z| \\ \Leftrightarrow |\alpha + z|^2 &\leq |1 + \bar{\alpha}z|^2 \\ \Leftrightarrow (\alpha + z)(\overline{\alpha + z}) &\leq (1 + \bar{\alpha}z)(\overline{1 + \bar{\alpha}z}) \\ \Leftrightarrow (\alpha + z)(\bar{\alpha} + \bar{z}) &\leq (1 + \bar{\alpha}z)(1 + \bar{z}\alpha) \\ \Leftrightarrow \alpha\bar{\alpha} + \alpha\bar{z} + z\bar{\alpha} + z\bar{z} &\leq 1 + \bar{\alpha}z + \bar{z}\alpha + z\bar{z}\alpha\bar{\alpha} \\ \Leftrightarrow \alpha\bar{\alpha} + z\bar{z} &\leq 1 + z\bar{z}\alpha\bar{\alpha} \\ \Leftrightarrow |\alpha|^2 + |z|^2 &\leq 1 + |z|^2|\alpha|^2 \\ \Leftrightarrow |\alpha|^2 - 1 - |z|^2|\alpha|^2 + |z|^2 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow |\alpha|^2 - 1 - |z|^2(|\alpha|^2 - 1) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (1 - |z|^2)(|\alpha|^2 - 1) &\leq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Como $|z| \leq 1, \Rightarrow |z|^2 \leq 1, 0 \leq 1 - |z|^2$. Además $|\alpha| < 1, \Rightarrow |\alpha|^2 \leq 1, |\alpha|^2 - 1 < 0$. Entonces (1) si se cumple. ■

La igualdad se alcanza cuando el $|z| = 1$

Problema 3.

Solución:

Para resolverlo, se usa congruencias ($n \in \mathbb{Z}$)

$n \equiv 0 \pmod{4}$	$n^2 \equiv 0^2 \equiv 0 \pmod{4}$
$n \equiv 1 \pmod{4}$	$n^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod{4}$
$n \equiv 2 \pmod{4}$	$n^2 \equiv 2^2 \equiv 0 \pmod{4}$
$n \equiv 3 \pmod{4}$	$n^2 \equiv 3^2 \equiv 1 \pmod{4}$

Ahora por De Moivre:

$$\arg(z^{(4n)^2}) = (4n)^2 \frac{\pi}{4} = 4k \frac{\pi}{4} = \arg(z^0)$$

De modo semejante:

$$\arg(z^{(4n+1)^2}) = \arg(z)$$

$$\arg(z^{(4n+2)^2}) = \arg(z^0)$$

$$\arg(z^{(4n+3)^2}) = \arg(z)$$

Y como $|z| = 1$:

$$(z^{1^2} + z^{2^2} + z^{3^2} + z^{4^2} + \dots + z^{12^2}) = 6z + 6 = 6(e^{i\frac{\pi}{4}} + 1)$$

$$\left(\frac{1}{z^{1^2}} + \frac{1}{z^{2^2}} + \frac{1}{z^{3^2}} + \frac{1}{z^{4^2}} + \dots + \frac{1}{z^{12^2}} \right) = 6\bar{z} + 6 = 6(e^{-i\frac{\pi}{4}} + 1)$$

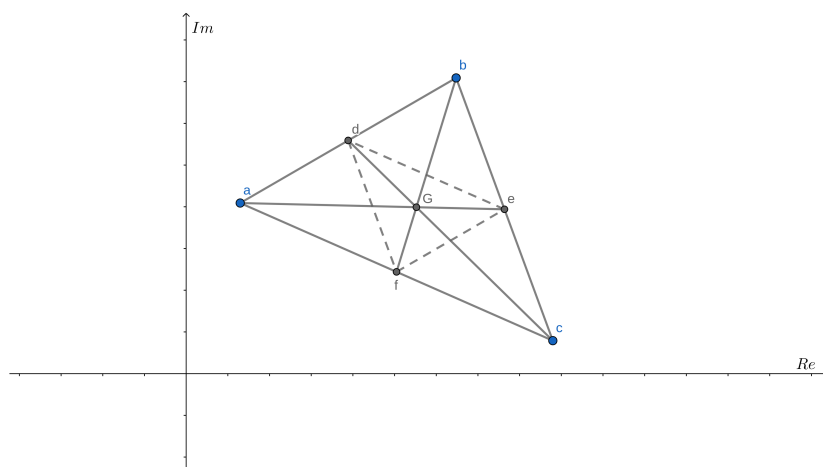
Por tanto:

$$(z^{1^2} + z^{2^2} + z^{3^2} + z^{4^2} + \dots + z^{12^2}) \left(\frac{1}{z^{1^2}} + \frac{1}{z^{2^2}} + \frac{1}{z^{3^2}} + \frac{1}{z^{4^2}} + \dots + \frac{1}{z^{12^2}} \right) = 36(2 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)) = 36(2 + \sqrt{2})$$

□

Problema 4.

Problema 5.



Demostración:

Sean $a, b, c \in \mathbb{C}$, entonces son de la forma:

$$a = \alpha_1 + i\beta_1$$

$$b = \alpha_2 + i\beta_2$$

$$c = \alpha_3 + i\beta_3$$

Sean d, e, f los puntos medios de los lados $\vec{ba}, \vec{cb}, \vec{ca}$. Entonces:

$$d = \gamma_1 + i\omega_1 = \frac{a+b}{2}$$

$$e = \gamma_2 + i\omega_2 = \frac{c+b}{2} \quad (2)$$

$$f = \gamma_3 + i\omega_3 = \frac{a+c}{2}$$

Por lo que $\vec{cd}, \vec{ae}, \vec{bf}$ son las medianas de los lados $\vec{ba}, \vec{cb}, \vec{ca}$ respectivamente y G es el centroide por lo que: $|bG| = 2|fG|, |aG| = 2|eG|, |cG| = 2|dG|$. Por lo que $G = x + iy$ se puede escribir en función de los puntos a, b, c, d, e, f

$$|bG| = 2|fG|$$

$$\begin{aligned} 2(x - \gamma_1) &= \alpha_2 - x & 2(x - \omega_1) &= \beta_2 - y \\ x &= \frac{\alpha_2 - 2\gamma_1}{3} & y &= \frac{\beta_2 - 2\omega_1}{3} \end{aligned}$$

Por lo que $G = \frac{\alpha_2 - 2\gamma_1}{3} + \frac{\beta_2 - 2\omega_1}{3}i = \frac{b + 2f}{3}$. Y análogamente se puede obtener $G = \frac{c + 2d}{3} = \frac{a + 2e}{3}$

Luego por estas igualdades se tiene que:

$$\begin{aligned} G &= \frac{a + 2e}{3} \\ G &= \frac{c + 2d}{3} \\ + \quad G &= \frac{b + 2f}{3} \\ \hline 3G &= \frac{a + b + c + 2(e + d + f)}{3} \end{aligned}$$

Luego sumando las tres ecuaciones de (2): $d + e + f = \frac{2a + 2b + 2c}{2} = a + b + c$. Y sustituyendo en la ecuación obtenida anteriormente:

$$3G = \frac{a + b + c + 2(a + b + c)}{3} = \frac{3(a + b + c)}{3} = a + b + c$$

$$G = \frac{a + b + c}{3}$$

■

Problema 6.

Demostración:

Se tiene que:

$$\frac{\sin(2n\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\operatorname{Im}(e^{2in\theta})}{\operatorname{Im}(e^{i\theta})} = \frac{\frac{1}{2i}(e^{2in\theta} - e^{-2in\theta})}{\frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})} = \frac{a^{2n} - b^{2n}}{a - b}$$

Donde $a = e^{i\theta}$ y $b = e^{-i\theta}$, por lo que:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(2n\theta)}{\sin(\theta)} &= a^{2n-1} + a^{2n-2}b + \dots + ab^{2n-2} + b^{2n-1} \\ &= e^{(i\theta)2n-1} + e^{(i\theta)2n-2}e^{-i\theta} + \dots + e^{(i\theta)n}e^{(-i\theta)^{n-1}} + e^{(i\theta)^{n-1}}e^{(-i\theta)^n} + \dots + e^{i\theta}e^{(-i\theta)^{2n-2}} + e^{(-i\theta)^{2n-1}} \\ &= e^{(i\theta)2n-1} + e^{(i\theta)2n-3} + \dots + e^{i\theta} + e^{-i\theta} + \dots + e^{i\theta}e^{(-i\theta)^{2n-2}} + e^{(-i\theta)^{2n-1}} \\ &= (e^{(2n-1)i\theta} + e^{-(2n-1)i\theta}) + \dots + (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ &= 2(\cos \theta + \cos 3\theta + \dots + \cos(2n-1)\theta) \\ &= 2(\cos \theta + \cos 3\theta + \dots + \cos(2n-1)\theta) \\ \frac{\sin(2n\theta)}{2\sin(\theta)} &= \cos \theta + \cos 3\theta + \dots + \cos(2n-1)\theta \end{aligned}$$

■

Problema 7.

Problema 8.

Solución:

Sea $z^n = 1$, se tiene que $z^n - 1 = 0$ Este polinomio tiene n raíces de la forma ξ_k con lo que se puede escribir:

$$z^n - 1 = (z - 1)(z - \xi)(z - \xi_2) \dots (z - \xi_{n-1}) \quad (3)$$

Pero ξ_k se puede escribir en la forma : $e^{\frac{2\pi i}{n}k} = e^{(\frac{2\pi i}{n})^k}$

Con lo que se puede obtener la relación entre las raíces:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= e^{(\frac{2\pi i}{n})} \\ \xi_2 &= e^{(\frac{2\pi i}{n})^2} = \xi_1^2 \\ &\vdots \\ \xi_{n-1} &= e^{(\frac{2\pi i}{n})^{n-1}} = \xi_1^{n-1} \end{aligned}$$

Por lo que (3) se vuelve de la forma:

$$z^n - 1 = (z - 1)(z - \xi_1)(z - \xi_1^2) \dots (z - \xi_1^{n-1}) \quad (4)$$

Por otro lado:

$$z^n - 1 = (z - 1)(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}) \quad (5)$$

De (4) y (5) se obtiene lo siguiente:

$$f(z) = (z - \xi_1)(z - \xi_1^2) \dots (z - \xi_1^{n-1}) = (1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}) \quad (6)$$

Si se evalúa $f(1)$ en (6) se obtiene la expresión pedida:

$$\begin{aligned} f(1) &= (1 - \xi_1)(1 - \xi_1^2) \dots (1 - \xi_1^{n-1}) = (1 + 1 + 1^2 + \dots + 1^{n-1}) = n \\ (1 - \xi)(1 - \xi^2) \dots (1 - \xi^{n-1}) &= n \end{aligned} \quad (7)$$

□

Problema 9.

Problema 10.

Problema 11.

Demostración:

La función $e^{-x} \sin(x)$ puede escribirse de la forma:

$$\begin{aligned} e^{-x} \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) \\ \frac{e^{x(i-1)} - e^{x(-i-1)}}{2i} \end{aligned}$$

Ahora la n -ésima derivada, de la función exponencial es:

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{e^{x(i-1)} - e^{x(-i-1)}}{2i} \right) = \left(\frac{(i-1)^n e^{x(i-1)} - (-i-1)^n e^{x(-i-1)}}{2i} \right) \quad (8)$$

Por la fórmula de De Moivre:

$$\begin{aligned} (i-1)^n &= \sqrt{2}^n \left(\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) \right) \\ (-i-1)^n &= \sqrt{2}^n \left(\cos\left(\frac{5n\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5n\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2}^n \left(\cos\left(\frac{-3n\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{-3n\pi}{4}\right) \right) \end{aligned}$$

Ahora (8) se escribe como:

$$\sqrt{2}^n e^{-x} \left(\frac{\left(\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) \right) e^{ix} - \left(\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) \right) e^{-ix}}{2i} \right)$$

Además $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$

Luego la expresión anterior queda como

$$\sqrt{2}^n e^{-x} \left(\frac{\left(\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) \right) (\cos x + i \sin x) - \left(\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) \right) (\cos x - i \sin x)}{2i} \right)$$

Expandiendo y cancelando términos:

$$\sqrt{2}^n e^{-x} \left(\frac{2i \left(\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) \cos x + \cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) \sin x \right)}{2i} \right)$$

$$\sqrt{2}^n e^{-x} \left(\sin\left(\frac{3n\pi}{4} + x\right) \right)$$

■

Problema 12.

Problema 13.

Problema 14.

Solución:

Sea $z = a + bi$, entonces $z^2 = a^2 - b^2 - 2abi$, $\bar{z}^2 = a^2 - b^2 + 2abi$. Además $|z|^2 = 2$ por lo que $a^2 + b^2 = 2$.

Ahora operando:

$$|(z^2 - 1)(z - 1)|^2$$

$$|(z^2 - 1)^2(z - 1)|^2$$

$$(z^2 - 1)(\bar{z}^2 - 1)(z - 1)(\bar{z} - 1)$$

$$((z\bar{z})^2 - z^2 - \bar{z}^2 + 1)(z\bar{z} - z - \bar{z} + 1)$$

$$(|z|^4 - z^2 - \bar{z}^2 + 1)(|z|^2 + 2\operatorname{Re}(z) + 1)$$

Luego se sustituyen ciertos valores:

$$(4 - 2a^2 + 2b^2 + 1)(2 + 2a + 1) = (4 - 2a^2 + 2(2 - a^2) + 1)(2 + 2a + 1)$$

y se define $f(a)$ como:

$$f(a) = (4 - 2a^2 + 4 - 2a^2 + 1)(2 + 2a + 1) = (9 - 2a^2)(3 + 2a)$$

$$f(a) = 4a^3 - 6a^2 - 18a + 27$$

Para encontrar el máximo de la función se deriva y se iguala a cero, los a_n para los que $f'(a) = 0$ se valúan en $f''(a)$.

$$f'(a) = 12a^2 - 12a - 18$$

Se tiene $a_1 = \frac{1 - \sqrt{7}}{2}$, $a_2 = \frac{1 + \sqrt{7}}{2}$

$$f''\left(\frac{1 - \sqrt{7}}{2}\right) = -12\sqrt{7} < 0$$

Por lo que $f(a)$ tiene un máximo en $\frac{1 - \sqrt{7}}{2}$

Valuando en $f(a)$:

$$f(a) = 4\left(\frac{1 - \sqrt{7}}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{1 - \sqrt{7}}{2}\right)^2 - 18\left(\frac{1 - \sqrt{7}}{2}\right) + 27 = 17 + 7\sqrt{7}$$

Entonces $f(a)$ tiene una máximo en $17 + 7\sqrt{7}$. Pero el máximo que se desea conocer es el de la raíz de de $f(a)$. Por lo que el valor máximo de $|(z^2 - 1)(z - 1)| = \sqrt{17 + 7\sqrt{7}}$

□

Problema 15.