Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Rubí Esmeralda Ramírez Milián-201804565
Jorge Alejandro Rodríguez Aldana-201804
Jorge Alejandro Ávalos Haidacher- 201805

Tarea 1

Análisis de variable Compleja 1

Problema 1.

Problema 2.

Demostración:

$$\left|\frac{\alpha + z}{1 + \overline{\alpha}z}\right| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow |\alpha + z| \leq |1 + \overline{\alpha}z|$$

$$\Leftrightarrow |\alpha + z|^2 \leq |1 + \overline{\alpha}z|^2$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + z)(\overline{\alpha + z}) \leq (1 + \overline{\alpha}z)\overline{(1 + \overline{\alpha}z)}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + z)(\overline{z} + \overline{\alpha}) \leq (1 + \overline{\alpha}z)(1 + \overline{z}\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \alpha\overline{z} + \alpha\overline{\alpha} + z\overline{z} + z\overline{\alpha} \leq 1 + \overline{\alpha}z + \overline{z}\alpha + z\overline{z}\alpha\overline{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \alpha\overline{\alpha} + z\overline{z} \leq 1 + z\overline{z}\alpha\overline{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow |\alpha|^2 + |z|^2 \leq 1 + |z|^2|\alpha|^2$$

$$\Leftrightarrow |\alpha|^2 - 1 - |z|^2|\alpha|^2 + |z|^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow |\alpha|^2 - 1 - |z|^2(|\alpha|^2 - 1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - |z|^2)(|\alpha|^2 - 1) \leq 0 \tag{1}$$

Como $|z| \leq 1, \Rightarrow |z|^2 \leq 1, 0 \leq 1 - |z|^2$. Además $|\alpha| < 1, \Rightarrow |\alpha|^2 \leq 1, |\alpha|^2 - 1 < 0$. Entonces (1) si se cumple.

■

La igualdad se alcanza cuando el $|z| = 1$

Problema 3.

Solución:

Para resolverlo, se usa congruencias (n$\in \mathbb{Z}$)

$n \equiv 0 \; mod \; 8$	$n^2 \equiv 0^2 \equiv 0 \; mod \; 8$
$n \equiv 1 \; mod \; 8$	$n^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \; mod \; 8$
$n \equiv 2 \; mod \; 8$	$n^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \; mod \; 8$
$n \equiv 3 \; mod \; 8$	$n^2 \equiv 3^2 \equiv 1 \; mod \; 8$
$n \equiv 4 \; mod \; 8$	$n^2 \equiv 4^2 \equiv 0 \; mod \; 8$
$n \equiv 5 \; mod \; 8$	$n^2 \equiv 5^2 \equiv 1 \; mod \; 8$
$n \equiv 6 \; mod \; 8$	$n^2 \equiv 6^2 \equiv 4 \; mod \; 8$
$n \equiv 7 \; mod \; 8$	$n^2 \equiv 7^2 \equiv 1 \; mod \; 8$

Ahora por De Moivre:
$arg(z^{(8n+1)^2}) = (8n+1)^2\frac{\pi}{4} = (8k_1+1)\frac{\pi}{4} = arg(z)$
De modo semejante:

$arg(z^{(8n+2)^2}) = (8n+2)^2\frac{\pi}{4} = (8k_2+4)\frac{\pi}{4} = arg(-z^0)$
$arg(z^{(8n+3)^2}) = (8n+3)^2\frac{\pi}{4} = (8k_3+1)\frac{\pi}{4} = arg(z)$
$arg(z^{(8n+4)^2}) = (8n+4)^2\frac{\pi}{4} = (8k_4)\frac{\pi}{4} = arg(z^0)$
$arg(z^{(8n+5)^2}) = (8n+5)^2\frac{\pi}{4} = (8k_5+1)\frac{\pi}{4} = arg(z)$
$arg(z^{(8n+6)^2}) = (8n+6)^2\frac{\pi}{4} = (8k_6+4)\frac{\pi}{4} = arg(-z^0)$
$arg(z^{(8n+7)^2}) = (8n+7)^2\frac{\pi}{4} = (8k_7+1)\frac{\pi}{4} = arg(z)$
$arg(z^{(8n)^2}) = (8n)^2\frac{\pi}{4} = (8k_8)\frac{\pi}{4} = arg(z^0)$

Y como $|z| = 1$:

$$\left(z^{1^2} + z^{2^2} + z^{3^2} + z^{4^2} + \cdots z^{12^2}\right) = 6z = 6e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\left(\frac{1}{z^{1^2}} + \frac{1}{z^{2^2}} + \frac{1}{z^{3^2}} + \frac{1}{z^{4^2}} + \cdots \frac{1}{z^{12^2}}\right) = 6\bar{z} = 6e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

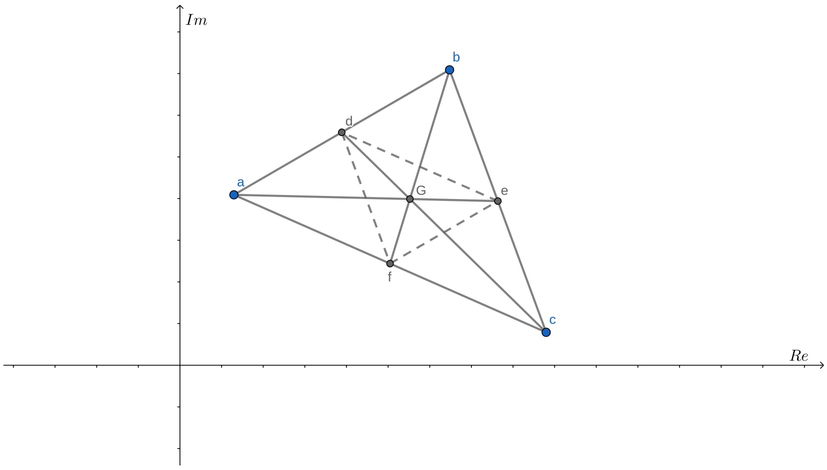
Por tanto:

$$\left(z^{1^2} + z^{2^2} + z^{3^2} + z^{4^2} + \cdots z^{12^2}\right)\left(\frac{1}{z^{1^2}} + \frac{1}{z^{2^2}} + \frac{1}{z^{3^2}} + \frac{1}{z^{4^2}} + \cdots \frac{1}{z^{12^2}}\right) = 36$$

□

Problema 4.

Problema 5.



Demostración:
Sean $a, b, c \in \mathbb{C}$, entonces son de la forma:

$$a = \alpha_1 + i\beta_1$$
$$b = \alpha_2 + i\beta_2$$
$$c = \alpha_3 + i\beta_3$$

Sean d, e, f los puntos medios de los lados $\vec{ba}, \vec{cb}, \vec{ca}$. Entonces:

$$\begin{aligned} d &= \gamma_1 + i\omega_1 = \frac{a+b}{2} \\ e &= \gamma_2 + i\omega_2 = \frac{c+b}{2} \\ f &= \gamma_3 + i\omega_3 = \frac{a+c}{2} \end{aligned} \tag{2}$$

Por lo que $\vec{cd}, \vec{ae}, \vec{bf}$ son las medianas de los lados $\vec{ba}, \vec{cb}, \vec{ca}$ respectivamente y G es el centroide por lo que: $|bG| = 2|fG|, |aG| = 2|eG|, |cG| = 2|dG|$. Por lo que $G = x + iy$ se puede escribir en función de los puntos a, b, c, d, e, f
$|bG| = 2|fG|$

$$\begin{aligned} 2(x - \gamma_1) &= \alpha_2 - x & 2(x - \omega_1) &= \beta_2 - y \\ x &= \frac{\alpha_2 - 2\gamma_1}{3} & y &= \frac{\beta_2 - 2\omega_1}{3} \end{aligned}$$

Por lo que $G = \frac{\alpha_2 - 2\gamma_1}{3} + \frac{\beta_2 - 2\omega_1}{3} i = \frac{b + 2f}{3}$. Y análogamente se puede obtener $G = \frac{c + 2d}{3} = \frac{a + 2e}{3}$

Luego por estas igualdades se tiene que:

$$G = \frac{a + 2e}{3}$$

$$G = \frac{c + 2d}{3}$$

$$+ \qquad G = \frac{b + 2f}{3}$$

$$3G = \frac{a + b + c + 2(e + d + f)}{3}$$

Luego sumando las tres ecuaciones de (2): $d + e + f = \dfrac{2a + 2b + 2c}{2} = a + b + c$. Y sustituyendo en la ecuación obtenida anteriormente:

$$3G = \frac{a + b + c + 2(a + b + c)}{3} = \frac{3(a + b + c)}{3} = a + b + c$$

$$G = \frac{a + b + c}{3}$$

$\blacksquare$

Problema 6.

Demostración:
Se tiene que:

$$\frac{\sin(2n\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{Im(e^{2in\theta})}{Im(e^{i\theta})} = \frac{\frac{1}{2i}(e^{2in\theta} - e^{-2in\theta})}{\frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})} = \frac{a^{2n} - b^{2n}}{a - b}$$

Donde $a = e^{i\theta}$ y $b = e^{-i\theta}$, por lo que:

$$\frac{\sin(2n\theta)}{\sin(\theta)} = a^{2n-1} + a^{2n-2}b + \cdots + ab^{2n-2} + b^{2n-1}$$

$$= e^{(i\theta)^{2n-1}} + e^{(i\theta)^{2n-2}}e^{-i\theta} + \cdots + e^{(i\theta)^{n}}e^{(-i\theta)^{n-1}} + e^{(i\theta)^{n-1}}e^{(-i\theta)^{n}} + \cdots + e^{i\theta}e^{(-i\theta)^{2n-2}} + e^{(-i\theta)^{2n-1}}$$

$$= e^{(i\theta)^{2n-1}} + e^{(i\theta)^{2n-3}} + \cdots + e^{i\theta} + e^{-i\theta} + \cdots + e^{i\theta}e^{(-i\theta)^{2n-2}} + e^{(-i\theta)^{2n-1}}$$

$$= (e^{(2n-1)i\theta} + e^{-(2n-1)i\theta}) + \cdots + (e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

$$= 2(\cos\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos(2n-1)\theta)$$

$$= 2(\cos\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos(2n-1)\theta)$$

$$\frac{\sin(2n\theta)}{2\sin(\theta)} = \cos\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos(2n-1)\theta$$

$\blacksquare$

Problema 7.

Problema 8.

Solución:

Sea $z^n = 1$, se tiene que $z^n - 1 = 0$ Este polinomio tiene n raíces de la forma ξ_k con lo que se puede escribir:

$$z^n - 1 = (z-1)(z-\xi)(z-\xi_2)\dots(z-\xi_{n-1}) \tag{3}$$

Pero ξ_k se puede escribir en la forma : $e^{\frac{2\pi i}{n}k} = e^{\left(\frac{2\pi i}{n}\right)^k}$

Con lo que se puede obtener la relación entre las raices:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= e^{\left(\frac{2\pi i}{n}\right)} \\ \xi_2 &= e^{\left(\frac{2\pi i}{n}\right)^2} = \xi_1^2 \\ &\vdots \\ \xi_{n-1} &= e^{\left(\frac{2\pi i}{n}\right)^{n-1}} = \xi_1^{n-1} \end{aligned}$$

Por lo que (3) se vuelve de la forma:

$$z^n - 1 = (z-1)(z-\xi_1)(z-\xi_1^2)\dots(z-\xi_1^{n-1}) \tag{4}$$

Por otro lado:

$$z^n - 1 = (z-1)(1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}) \tag{5}$$

De (4) y (5) se obtiene lo siguiente:

$$f(z) = (z-\xi_1)(z-\xi_1^2)\dots(z-\xi_1^{n-1}) = (1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}) \tag{6}$$

Si se valua $f(1)$ en (6) se obtiene la expresión pedida:

$$f(1) = (1-\xi_1)(1-\xi_1^2)\dots(1-\xi_1^{n-1}) = (1+1+1^2+\cdots+1^{n-1}) = n$$

$$(1-\xi)(1-\xi^2)\dots(1-\xi^{n-1}) = n \tag{7}$$

□

Problema 9.

Problema 10.

Problema 11.

Demostración:

La función $e^{-x}\sin(x)$ puede escribirse de la forma:

$$e^{-x}\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)$$

$$\frac{e^{x(i-1)} - e^{x(-i-1)}}{2i}$$

Ahora la n-ésima derivada, de la función exponenecial es:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{e^{x(i-1)} - e^{x(-i-1)}}{2i}\right) = \left(\frac{(i-1)^n e^{x(i-1)} - (-i-1)^n e^{x(-i-1)}}{2i}\right) \tag{8}$$

Por la fórmula de De Moivre:

$$(i-1)^n = \sqrt{2}^n\left(\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\right)$$

$$(-i-1)^n = \sqrt{2}^n\left(\cos\left(\frac{5n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5n\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}^n\left(\cos\left(\frac{-3n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-3n\pi}{4}\right)\right)$$

Ahora (8) se escribe como:

$$\sqrt{2}^n e^{-x}\left(\frac{\left(\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\right)e^{ix} - \left(\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\right)e^{-ix}}{2i}\right)$$

Además $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$
Luego la expresión anterior queda como

$$\sqrt{2}^n e^{-x}\left(\frac{\left(\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\right)(\cos x + i\sin x) - \left(\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\right)(\cos x - i\sin x)}{2i}\right)$$

Expandiendo y cancelando términos:

$$\sqrt{2}^n e^{-x}\left(\frac{2i\left(\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\cos x + \cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) sinx\right)}{2i}\right)$$

$$\sqrt{2}^n e^{-x}\left(\sin\left(\frac{3n\pi}{4} + x\right)\right)$$

∎

Problema 12.

Problema 13.

Problema 14.

Solución:

Sea $z = a + bi$, entonces $z^2 = a^2 - b^2 - 2abi$, $\overline{z}^2 = a^2 - b^2 - 2abi$. Además $|z|^2 = 2$ por lo que $a^2 + b^2 = 2$.

Ahora operando:

$$|(z^2 - 1)(z - 1)|^2$$

$$|(z^2-1)^2|(z-1)|^2$$

$$(z^2-1)(\overline{z}^2-z)(z-1)(\overline{z}-1)$$

$$((z\overline{z})^2-z^2-\overline{z}^2+1)(z\overline{z}-z-\overline{z}+1)$$

$$(|z|^4-z^2-\overline{z}^2+1)(|z|^2+2Re(z)+1)$$

Luego se sustituyen ciertos valores:

$$(4-2a^2+2b^2+1)(2+2a+1)=(4-2a^2+2(2-a^2)+1)(2+2a+1)$$

y se define $f(a)$ como:

$$f(a)=(4-2a^2+4-2a^2+1)(2+2a+1)=(9-2a^2)(3+2a)$$

$$f(a)=4a^3-6a^2-18a+27$$

Para encontrar el máximo de la función se deriva y se iguala a cero, los a_n para los que $f'(a)=0$ se valuan en $f''(a)$.

$$f'(a)=12a^2-12a-18$$

Se tiene $a_1=\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}$, $a_2=\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$
$f''\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{2}\right)=-12\sqrt{7}<0$

Por lo que $f(a)$ tiene un máximo en $\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}$
Valuando en $f(a)$:

$$f(a)=4\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)^3-6\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)^2-18\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)+27=17+7\sqrt{7}$$

Entonces $f(a)$ tiene una máximo en $17+7\sqrt{7}$. Pero el máximo que se desea conocer es el de la raíz de de $f(a)$. Por lo que el valor máximo de $|(z^2-1)(z-1)|=\sqrt{17+7\sqrt{7}}$

□

Problema 15.