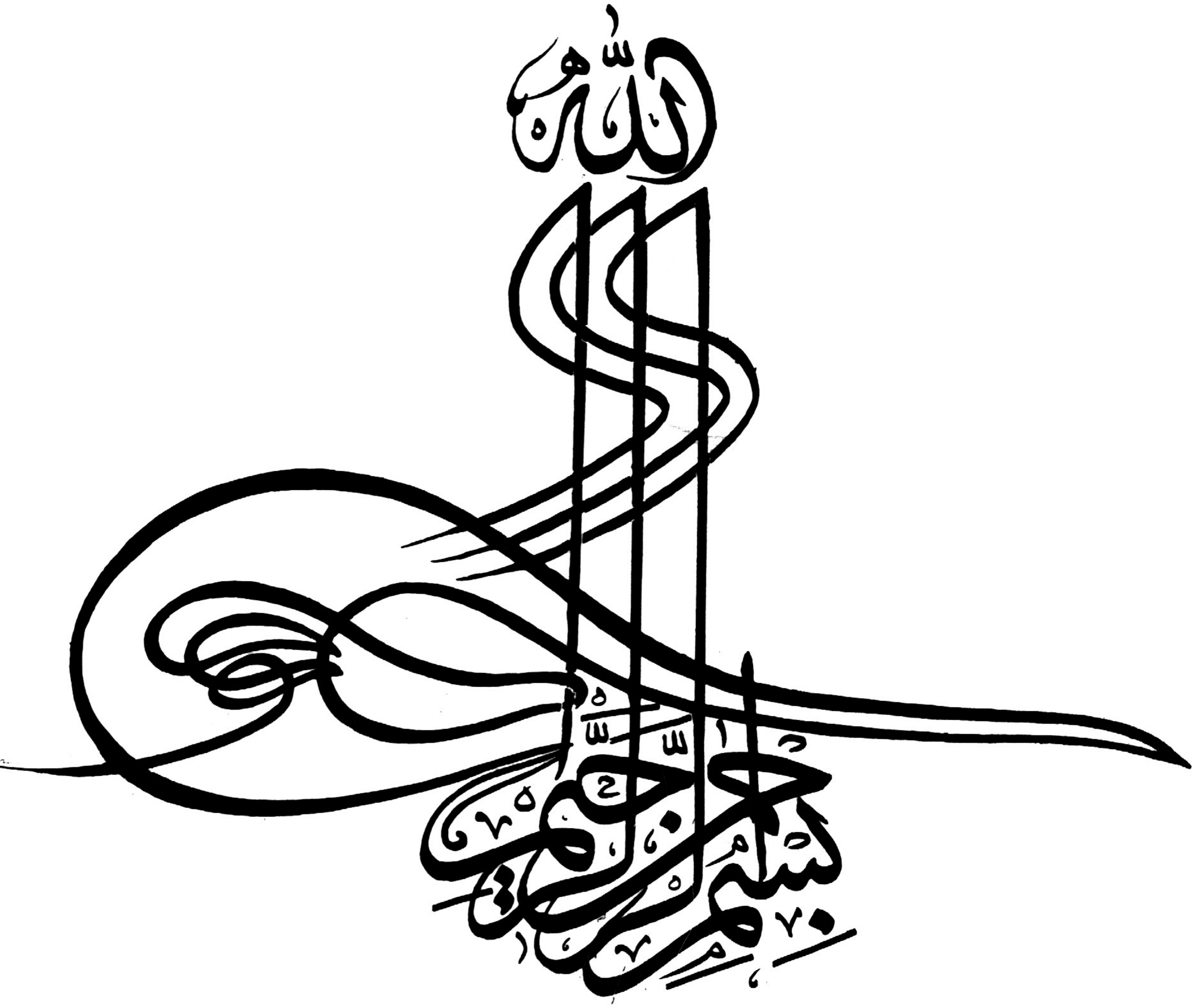
الله
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید بهشتی
دانشکده علوم ریاضی
گروه علوم‌کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان

کنترل همروندی در پایگاه داده های ذاتا XML

نگارش
محسن پچینانی

استاد راهنما
دکتر سید کامیار ایزدی
استاد مشاور
دکتر محمود فضلعلی

۱۳۹۴

تقدیم به پدر و مادر عزیزم که همواره در تمامی مراحل زندگی پشتیبان و حامی من بوده‌اند.

رسیدن، به دانش است و به کردار نیک . . .

و بی دانش به کردار نیک هم نتوان رسید، که نیکی را پیشتر باید شناختن، آنگاه بجای آوردن. پس دانش به همه حال می باید تا به رستگاری توان رسیدن. و چون دانش راه آمد، به بهترین چیزها که آدمی را تواند بودن. و در اوّل آفرینش حاصل نیست و بعضی از آن بی رنج و اندیشه حاصل شود، پس هر آینه مهمتر چیزی باشد که در حاصل کردنش عمر گذرانند، لیکن برخی هست که بی اندیشه حاصل آید و بعضی را ناچار به اندیشه حاجت بود، و آنچه به اندیشه حاصل شود دانسته ای خواهد که در و اندیشه کنند تا این نادانسته بدان اندیشه که در آن دانسته کنند دانسته شود، و از هر دانسته هر نادانسته را نتوان شناخت، بلکه هر نادانسته را به دانسته ای که در خور او بود توان شناخت. و منطق آن علم است که در و راه انداختن نادانسته به دانسته دانسته شود. . .

پس منطق ناگزیر آمد بر جوینده ی رستگاری. [1]

[1] مقدمه‌ی رساله‌ی منطق دانشنامه‌ی علائی، شیخ‌الرئیس ابن‌سینا

سپاس گزاری...

ستایش و سپاس مخصوص خداوندی ست که مرا در مسیر علم و دانش قرار داد.

ارزشمندترین زمان برای نیک‌اندیشان، لحظه‌ای است که در محضر استاد می نشینند و از خرمن فضلش خوشه می‌چینند. بسیار مایلم صمیمانه‌ترین قدردانی و سپاس خویش را تقدیم استاد گرامی، جناب آقای دکتر ایزدی سازم که در طول این دوره توفیق راهم شدند تا در حلقه شاگردیشان قرار گیرم و از مرتبه‌های علم و دانش ایشان بهره‌ها ببرم. همچنین از سرکار خانم دکتر طهماسبی که راهنمایی‌های ایشان در انجام این پروهش همواره چراغ راهم بوده است.

محسن یحینانی

۱۳۹۴

نام خانوادگی دانشجو: لچینانی　　　　　　نام: محسن

عنوان: کنترل همروندی در پایگاه داده های ذاتا XML

استاد راهنما: دکتر سید کامیار ایزدی

استاد مشاور: دکتر محمود فضلعلی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد　　　رشته: علوم‌کامپیوتر　　　گرایش: علوم‌کامپیوتر

دانشگاه: شهید بهشتی　　　　　　علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۴　　　　تعداد صفحات: ۲۳

واژگان کلیدی: کنترل همروندی ، Native XML، Query Processing

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا نمونه‌ای از منطق‌های شناختی احتمالاتی (PEL) را معرفی کرده و تمامیت آن را اثبات می‌کنیم. سپس با در نظر گرفتن مدلی ساده از این منطق، در راستای تعمیم آن به منطق‌های پویا که تغییر اطلاعات در سناریوهای چند عاملی را مدل می‌کنند پیش می‌رویم.

پس از توصیف مختصری از منطق‌های شناختی پویای غیر احتمالاتی، منطق شناختی پویای احتمالاتی (PDEL) را نیز با در نظر گرفتن سه گونه‌ی طبیعی احتمال، یعنی احتمال پیشینی جهان‌ها، احتمال رخداد عمل‌ها بر اساس فرایندی متناظر با دیدگاه عامل‌ها و احتمال خطا در مشاهده‌ی عمل‌ها، معرفی خواهیم کرد. این سه گونه، شیوه‌ی به‌روزرسانی تعمیم‌یافته‌ای در اختیار می‌گذارند که روشی است مناسب و طبیعی برای مدل‌سازی جریان اطلاعات.

سپس برای اینکه تمامیت منطق شناختی پویای احتمالاتی را با استفاده از تمامیت منطق شناختی احتمالاتی اثبات کنیم، اصول موضوعه‌ی صحیحی ارایه می‌کنیم تا فرمول‌های شامل عملگر پویا را به فرمول‌هایی فاقد این عملگر در زبان ایستای متناظر تحویل کنند.

سرانجام گونه‌ای از منطق شناختی پویای احتمالاتی، مورد نیاز برای حل معمای Monty Hall، ارایه کرده و تمامیت آن را اثبات می‌کنیم. سپس راه‌حلی صوری برای این معما در این منطق بدست می‌آوریم.

پیش‌گفتار

منطق شناختی احتمالاتی پویا منطقی نسبتاً جدید است که قبل از مطالعه‌ی آن می‌بایست منطق شناختی، منطق شناختی پویا و منطق شناختی احتمالاتی معرفی شده باشد و به فراخور در فصول سه‌گانه به معرفی و توصیف هریک خواهیم پرداخت.

مقدمه را با بهره‌جستن از مقدمه‌ی مقاله‌ی [؟] نگاشتم و البته هر کجا که لازم بود از مقدمه‌های دیگر مقالات نیز استفاده کردم.

در فصل ۱ ابتدا با کمک [؟] و [؟] به خلاصه‌ای از منطق شناختی می‌پردازیم، سپس بر مبنای [؟] منطق شناختی احتمالاتی را که همان منطق شناختی سنتی است به اضافه‌ی توانایی استدلال درباره‌ی احتمال معرفی کرده و تمامیت آن را اثبات می‌کنیم.

فصل ۲ بر اساس [؟] نوشته شده است و به معرفی منطق‌های پویا اعم از شناختی پویا و شناختی پویای احتمالاتی اختصاص دارد. در این فصل پس از معرفی منطق اعلان عمومی و سپس گونه‌ای تا حدی تعمیم یافته از منطق شناختی پویا با در نظر گرفتن مدلی ساده از منطق شناختی احتمالاتی، منطق شناختی پویای احتمالاتی معرفی شده و تمامیت آن اثبات می‌شود. برای آنکه منطق‌های شناختی پویا را احتمالاتی کنیم ابتدا سه گونه‌ی طبیعی احتمال را تعریف می‌کنیم که عبارتند از: احتمال پیشینی جهان‌ها، احتمال رخداد عمل‌ها بر اساس فرایندی متناظر با دیدگاه عامل‌ها و احتمال خطا در مشاهده‌ی عمل‌ها. برای اثبات تمامیت منطق‌های پویا اصول موضوعه‌ای مطرح می‌شود تا بتوان معادل با هر فرمول در این منطق‌ها، با حذف عملگر پویا، فرمولی در منطق‌های ایستا بدست آورد. این اصول اثرات متقابل عملگر پویا با اتم‌ها و عملگرهای بولی و شناختی را توصیف می‌کنند. پس از اثبات صحت، با کمک آنها تمامیت منطق‌های پویا را از تمامیت منطق‌های ایستا نتیجه می‌گیریم.

هنگامی که به همراه ولی‌زاده به مطالعه و اثبات جزئیات مقاله‌ی [؟] مشغول بودیم با مسائل و مشکلاتی برخورد کردیم که به تناسب در بخش‌های مختلف فصل ۲ با عنوان ملاحظه به آنها اشاره خواهم کرد.

فصل ۳ نیز بر گرفته از [؟] است و به منظور ارائه‌ی مثالی برای نشان دادن کاربرد منطق شناختی پویای احتمالاتی نگاشته شده است. مثالی که ارائه می‌شود معمای معروف Monty Hall است که پیش از این مقاله راه‌حلی صوری برای آن داده نشده بود، ولی ما بر اساس این مقاله به راه‌حلی صوری با کمک گونه‌ای از منطق‌های شناختی پویای احتمالاتی دست می‌یابیم که به زیبایی جوابی معقول در اختیار

می‌گذارد. این راه‌حل زیبا را نمی‌توانستم با جزئیات بیان کنم اگر از [؟] استفاده نمی‌کردم و آن را نیافتم مگر با راهنمایی دکتر کویی.

فهرست مطالب

مقدمه

در سال ۱۹۵۱ فان رایت[۲] کتابی با عنوان «مقاله‌ای در منطق موجهات» [؟] منتشر کرد. هینتیکا[۳] با ایده‌هایی که از این مقاله گرفته بود در سال ۱۹۶۲ کتابی با عنوان «دانش و باور، مقدمه‌ای بر منطق مبتنی بر این دو مفهوم» [؟] به چاپ رساند. وی در این کتاب به کمک مفهوم جهان‌های ممکن مدلی برای دانش و باور ارائه کرد و به همین دلیل بسیاری او را پدر منطق شناختی می‌دانند. هدف اصلی او واکاوی مفهومی دانش و باور بود ولی پس از او عبارت «شناخت» در محدوده‌ای فراتر به کار گرفته شد، اعم از باور و هر روشی که یک عامل می‌تواند دانشی را بدست آورد. در اواخر دهه‌ی ۱۹۷۰ منطق شناختی مورد توجه دانشمندان فعال در شاخه‌هایی مانند هوش مصنوعی، فلسفه و نظریه بازی‌ها قرار گرفت. در دهه ۸۰ محققین علوم کامپیوتر به منطق شناختی روی آوردند، فاگین[۴]، هالپرن[۵]، موزِز[۶] و وَردی[۷] که از این دسته به حساب می‌آمدند مقالاتی را که در طی حدود ۱۰ سال در مورد منطق شناختی به چاپ رسانده بودند در کتابی با نام «استدلال درباره دانش» [؟] جمع آوری کرده و در سال ۱۹۹۵ منتشر کردند.

منطق شناختی، منطقی وجهی است که به استدلال برمبنای دانش[۸] و فرادانش[۹] می‌پردازد، فرادانش دانشی است که عاملی درباره‌ی دانش خود و یا دانش دیگر عامل‌ها دارد. برای روشن شدن موضوع مثالی را با سه بازیکن ۱، ۲ و ۳، و سه کارت قرمز، سفید وآبی در نظر بگیرید. کارت‌ها در میان بازیکنان به این صورت توزیع شده‌اند که قرمز، سفید و آبی به ترتیب در دستان ۱، ۲ و ۳ قرار دارد. فرض کنید بازیکنان تنها کارت خویش را می‌بینند و همه می‌دانند که کارت‌ها به گونه‌ای میانشان توزیع شده است که هریک فقط یک کارت در دست دارند. بوسیله‌ی منطق شناختی می‌توان جملات پیچیده‌ای را مانند «بازیکن ۱ می‌داند که بازیکن ۲ نمی‌داند که چه کارتی در دستان بازیکن ۳ است.» صوری کرد. منطق شناخت با چنین فرادانش‌هایی سر و کار دارد. حتی فرادانش‌های پیچیده‌تری مانند همه‌دانی مشترک وجود دارد. برای نمونه در مثال بالا علم به اینکه دقیقاً سه کارت وجود دارد و علم به رنگ کارت‌ها

[۲] von Wright

[۳] Hintikka

[۴] Fagin

[۵] Halpern

[۶] Moses

[۷] Vardi

[۸] information

[۹] higher order information

همه‌دانی مشترک است. منطق شناختی همچنین واکاوی مفهومی خوبی از همه‌دانی مشترک در اختیار می‌گذارد.

اگرچه منطق شناختی آنالیز مناسبی از فرادانش در اختیار می‌گذارد ولی بررسی تغییر دانش خارج از گستره‌ی این منطق است. منطق‌های شناختی پویا منطق شناختی را به گونه‌ای توسیع می‌دهند که استدلال درباره‌ی تغییرات دانش نیز امکان‌پذیر باشد. این توسیع از طرفی از نوعی معناشناسی زبان طبیعی الهام گرفته شد که در آن معنای جمله بعنوان طریقی برای تغییر داده‌های کسانی که آن را می‌شنوند در نظر گرفته می‌شود، و از طرف دیگر از مطالعه‌ی بازی‌ها که تغییر داده‌ها و فرادانش‌ها نقش بسزایی در آنها ایفا می‌کند. سیستم‌های منطقی مختلفی بر این اساس در طول سال‌ها شکل گرفته است که برجسته‌ترین آنها عبارتند از [؟] (الهام گرفته از [؟])، [؟] و [؟].

در منطق شناختی پویا تغییر وضعیت موجود توسط داده‌های جدید را به‌روزرسانی می‌خوانیم. ساده‌ترین مثال زمانی است که عاملی می‌فهمد که گزاره‌ی φ برقرار است. به‌روزرسانی با یک گزاره در این مثال به این معنی است که گزینه‌هایی که عامل ممکن می‌دانست ولی در آنها گزاره‌ی φ برقرار نیست حذف می‌شوند. در یک سیستم چند عاملی ممکن است عامل‌های مختلف دسترسی مختلفی به داده‌های جدید داشته باشند و همچنین اطلاعات عامل‌ها درباره‌ی دیگر عامل‌ها نقش بازی کند، از این رو می‌توان به‌روزرسانی پیچیده‌تری را در مثال قبل مدل کرد: فرض کنید بازیکن ۱ کارت خود را به بازیکن ۲ نشان دهد و بازیکن ۳ نیز این را ببیند ولی از محتوای کارت خبردار نشود. در نتیجه دانش بازیکنان به این صورت تغییر می‌کند: بازیکن ۲ می‌داند که محتوای کارت بازیکن ۱ چیست، بازیکن ۳ می‌داند که بازیکن ۲ می‌داند محتوای کارت بازیکن ۱ جیست ولی خودش محتوا را نمی‌داند و بازیکن ۱ می‌داند که بازیکن ۳ این را می‌داند.

اگرچه نظریه‌ی احتمال منطق نیست لکن حوزه‌ی مطالعاتی مناسبی برای منطق است، زیرا در بسیاری از حوزه‌های کاربردی به منظور استدلال درباره‌ی دانش، اهمیت توانایی استدلال درباره‌ی احتمال رخدادهای معین به همراه دانش عامل‌ها رخ می‌نماید و اغلب احتمال به عنوان نظریه‌ای برای مدلسازی استدلال مطرح می‌شود. از این رو همه‌ی مقالات منتشر شده در علم اقتصاد که به استدلال درباره‌ی دانش می‌پردازند (که بازگشت می‌کنند به مقاله‌ی اصلی اومان [؟]) با ساختاری احتمالاتی مدل می‌شوند، هرچند آنها زبانی منطقی که بصورتی روشن استدلال درباره‌ی احتمال را جایز کند در نظر نگرفته‌اند. با این اوصاف تلاش‌هایی در جهت بیرون کشیدن منطق بعنوان بهترین راه استدلال از دل نظریه‌ی احتمال صورت گرفته است. که یکی از مناسب‌ترین آنها منطق احتمالاتی است که در [؟] معرفی شده است.

فصل ۱

منطق‌های شناختی ایستا

منطق شناختی چیز خیلی خوبی است خوبی است.

۱.۱ منطق شناختی (EL)

فصل ۲

منطق‌های شناختی پویا

در این فصل سه منطق شناختی پویا را با این رویکرد مطرح می‌کنیم که برای هریک اصولی موسوم به اصول موضوعه‌ی تحویل[1] معرفی کرده و با اثبات صحت آنها گامی به سوی تمامیت بر می‌داریم. در انتهای فصل نیز تمامیت را در یک قضیه برای هر سه منطق اثبات خواهیم کرد.

۱.۲ منطق‌های شناختی پویا به منظور به‌روزرسانی غیر احتمالاتی

منطق‌های شناختی پویا جریان اطلاعات ایجاد شده توسط عمل[2]ها را توصیف می‌کنند. ساده‌ترین عمل آموزنده، و نمونه‌ای رهگشا برای بیشتر این نظریه، اعلان عمومیِ گزاره‌یِ درستی چون A به گروهی از عامل‌هاست، که به‌صورت $A!$ نمایش می‌دهیم. به‌روزرسانی برای عمل‌های پیچیده‌تر می‌تواند برحسب «مدل‌های عمل» توصیف شود، که الگوهای پیچیده‌تری از دسترسی عامل‌ها به عملِ در حال رخداد را مدل می‌کنند. پس ابتدا به‌روزرسانی منطق شناختی توسط اعلان عمومی را بررسی می‌کنیم سپس آن را به حالت کلی‌تر، برای هر نوع عمل، توسیع می‌دهیم.

۱.۱.۲ منطق اعلان عمومی (PAL)

تأثیر پویای اعلان عمومی[3] A این است که مدل (غیر احتمالاتی) جاری $M = (S, \sim, V)$ را به مدل به‌روز شده‌ی $M|A$ تبدیل می‌کند. این مدل به‌روز شده با تحدید جهان‌های M به جهان‌هایی که A در آنها درست است تعریف می‌شود.

اعلان عمومی معمولاً حاوی اطلاعاتی مفید است. از این رو ممکن است که ارزش درستی عبارات شناختی در نتیجه‌ی اعلان تغییر کند. برای مثال قبل از اعلان A عامل a آن را نمی‌دانست ولی اکنون

[1] reduction axioms

[2] event

[3] public announcement

می‌داند.

تعریف ۱.۱.۲. زبان اعلان عمومی. زبان اعلان عمومی توسط فرم Backus-Naur به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\varphi, \psi ::= \top \mid \bot \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid K_i\varphi \mid [!\varphi]\,\psi$$

فرمول $[!\varphi]\psi$ به‌صورت «ψ پس از اعلان φ برقرار است» خوانده می‌شود. زبان بدست آمده در مدل‌های استاندارد برای منطق شناختی نیز قابل تفسیر است. معناشناسی برای این زبان به غیر از اعلان عمومی همانند تعریف ؟؟ می‌باشد. معناشناسی اعلان عمومی نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۱.۲. معناشناسی اعلان عمومی. فرض کنید مدل شناختی $M = (S, \sim, V)$ داده شده باشد و $s \in S$.

$M, s \vDash [!A]\varphi$ اگر و فقط اگر اگر $M, s \vDash A$ آنگاه $M|A, s \vDash \varphi$

که در آن $M|A$ مدل $(S', \sim', V')$ است به طوری که، با فرض $[\![A]\!] = \{t \in S \mid M, t \vDash A\}$:

- $S' = [\![A]\!]$,
- $\sim'_a = \sim_a \cap (S' \times S')$,
- $V'(p) = V(p) \cap S'$.

اصول موضوعه‌ی تحویل در PAL به‌صورت زیر است:

$$[!A]p \leftrightarrow (A \to p) \quad (۱.۲)$$

$$[!A]\neg\varphi \leftrightarrow (A \to \neg[!A]\varphi) \quad (۲.۲)$$

$$[!A](\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow ([!A]\varphi \wedge [!A]\psi) \quad (۳.۲)$$

$$[!A]K_a\varphi \leftrightarrow (A \to K_a[!A]\varphi) \quad (۴.۲)$$

قضیه ۳.۱.۲. (صحت اصول موضوعه‌ی تحویل برای اعلان عمومی)

برهان. با ارجاع به هر اصل اثباتی برای آن می‌آوریم.

(۱.۲)

$$\begin{aligned} M, s \vDash [!A]p \quad &\Leftrightarrow \quad M, s \vDash A \Rightarrow M|A, s \vDash p && (۱)\\ &\Leftrightarrow \quad M, s \vDash A \Rightarrow M, s \vDash p && (۲)\\ &\Leftrightarrow \quad M, s \vDash A \to p \end{aligned}$$

اگر $M, s \vDash A$ آنگاه $s \in S'$ و اگر $s \in S'$ آنگاه $V(p) = V'(p)$. در نتیجه از (۱) به (۲) و برعکس می‌توان رسید.

(۲.۲)

$$\begin{aligned} M, s \vDash [!A]\neg\varphi &\Leftrightarrow M, s \vDash A \Rightarrow M|A, s \vDash \neg\varphi \\ &\Leftrightarrow M, s \vDash A \Rightarrow (M, s \vDash A \text{ و } M|A, s \nvDash \varphi) \\ &\Leftrightarrow M, s \vDash A \Rightarrow M, s \vDash \neg[!A]\varphi \\ &\Leftrightarrow M, s \vDash A \rightarrow \neg[!A]\varphi \end{aligned}$$

$\square$

۲.۱.۲ منطق شناختی پویا - به‌روزرسانی مدل‌ها (DEL)

تعریف ۴.۱.۲. مدل عمل[۴]. فرض کنید مجموعه‌ی $\mathcal{A}$ از عامل‌ها و زبان منطقی $\mathcal{L}$ داده شده باشد، مدل عمل ساختار $A = (E, \sim, pre)$ است بطوری که

- E مجموعه‌ای متناهی و غیر تهی است از عمل‌ها،
- $\sim$ مجموعه‌ای است از روابط هم‌ارزی $\sim_a$ روی E برای هر عامل $a \in \mathcal{A}$،
- pre تابعی است که به هر عمل $e \in E$ فرمولی از $\mathcal{L}$ را نسبت می‌دهد.

تابع پیش‌شرطِ[۵] pre با نسبت دادن فرمول (pre_e) به هر عمل در E معین می‌کند که در کدام جهان‌ها این عمل‌ها ممکن است روی دهند. این مدل‌ها را مدل به‌روزرسانی نیز می‌نامند.

این مدل‌ها بسیار شبیه مدل‌های شناختی هستند، با این تفاوت که به‌جای دانش‌های مربوط به وضعیت‌های ثابت، دانش درباره‌ی عمل‌ها مدل شده است.[۶] روابط تمییز ناپذیری $\sim$ روی عمل‌ها ابهام درباره‌ی اینکه چه عملی واقعاً رخ داده است را مدل می‌کنند. $e \sim_a e'$ می‌تواند به این صورت خوانده شود که «اگر فرض شود که عمل e رخ داده است رخداد عمل e' با دانشِ a سازگار است».

اعلان عمومی $[!\varphi]$ نیز خود به نوعی یک مدل عمل است که در آن $E = \{!\}$ و $\sim = \{(!, !)\}$ و $pre = \{(!, \varphi)\}$.

---

[۴] event model

[۵] precondition function

[۶] کلمه‌ی «عمل» ترجمه‌ای است از کلمه‌ی event، از آنجایی که این کلمه علاوه بر منطق شناختی پویا در نظریه احتمالات نیز استفاده می‌شود، باید دانست که با تفسیرهای متفاوتی در این دو مقوله به کار می‌رود. در نظریه احتمال، event آن است که در منطق بدان گوییم گزاره. در حالی که یک event در منطق شناختی پویا به همراه گزاره‌ی پیش‌شرط ایجاد می‌شود، ولی در واقع eventهای مدلِ عمل، مدلِ شناختی داده شده را تغییر می‌دهند و خود بخشی از مدل نیستند. از این پیچیده‌تر، گاهی اوقات به تمام مدل عمل، یک event اطلاق می‌شود.

نتیجه‌ی رخداد یک عمل نمایش داده شده با A در وضعیت نمایش داده شده با M برحسب ساختاری ضربی مدل می‌شود.

۲.۲ منطق شناختی پویای احتمالاتی (PDEL)

برای اینکه بتوانیم به گونه‌ای صریح و شفاف در باب تغییر داده‌های احتمالاتی در قالبی شناختی-پویا استدلال کنیم، می‌بایست منطق شناختی احتمالاتی موجود را به‌وسیله‌ی اصول موضوعه‌ی تحویل مناسب توسعه دهیم. در این بخش نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان این کار را بر مبنای معناشناسی مدل‌های عمل احتمالاتی، که معرفی خواهد شد، انجام داد.

تعریف ۱.۲.۲. زبان شناختی پویای احتمالاتی. زبان شناختی پویای احتمالاتی به فرم Backus-Naur به‌صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\varphi, \psi ::= \top \mid \bot \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid K_a\varphi \mid [A,e]\varphi \mid \sum_{i=1}^{n} r_i \mathbf{P}_a(\varphi_i) \geq r$$

با همان نمادگذاری منطق شناختی احتمالاتی، علاوه بر آن A مدل عمل احتمالاتی و e عملی از آن می‌باشد. فرمول‌هایی که پیش‌شرط‌ها را در مدل احتمالاتی عمل تعریف می‌کنند از همین زبانی که معرفی شد می‌آیند.

در این زبان علاوه بر خلاصه‌نویسی‌های پیش‌گفته خلاصه‌نویسی‌های زیر نیز مطرح است:

$$\langle A,e\rangle\psi : \quad \neg[A,e]\neg\psi$$

و به منظور اینکه پیش‌شرط‌ها را در یک شئ از زبان فرموله کنیم قرار می‌دهیم

$$pre_{A,e} : \bigvee_{\varphi\in\Phi, pre(\varphi,e)>0} \varphi \qquad (۵.۲)$$

ملاحظه ۲.۲.۲. در مقاله‌ی [؟]، $pre_{A,e}$ به‌صورت زیر مطرح شده است:

$$pre_{A,e} : \bigvee_{\varphi\in\Phi, pre(\varphi,e)\geq 0} \varphi \qquad (۶.۲)$$

این تعریف معادل است با $\bigvee_{\varphi\in\Phi}\varphi$ زیرا $pre(\varphi,e)$ تابع احتمال است و همواره بزرگتر یا مساوی صفر است.

به دلایلی که مطرح می‌شود تعریف ۵.۲ طبیعی‌تر به نظر می‌رسد. اولاً $pre_{A,e}$ به‌عنوان پیش‌شرط e مطرح است پس باید شامل پیش‌شرط‌هایی باشد که به e احتمال مثبت نسبت می‌دهند، ثانیاً اگر برای هر پیش‌شرط φ داشته باشیم $pre(\varphi,e)=0$ می‌توان $pre_{A,e}$ را تعریف کرد $\bot$ که از دو جنبه‌ی زیر قابل دفاع است:

- از منظر جبری وقتی ترتیب به‌وسیله‌ی استلزام روی فرمول‌ها تعریف شده باشد داریم $\bigvee \phi = \bot$.

- از نقطه نظر منطقی از آنجایی که منظور ما از $pre(\varphi, e)$ احتمال رخداد e است وقتی φ برقرار است، زمانی که برای هر $\varphi \in \Phi$ داریم $pre(\varphi, e) = ۰$، e از جهت احتمالاتی امکان وقوع ندارد، بنابراین اگر ما $pre_{A,e}$ را قرار دهیم $\bot$ از برقراری پیش‌شرط‌های e جلوگیری به عمل آورده‌ایم و از این رو اجازه نمی‌دهیم e رخ دهد.

فصل ۳

معمای Monty Hall

این فصل اختصاص یافته به بررسی مسأله‌ای دشوار، مشهور به معمای *Monty Hall*، با کمک منطق شناختی پویای احتمالاتی. همانطور که در بخش ؟؟ مطرح شد تنها دو گونه از سه گونه احتمالی که معرفی شد در به‌روزرسانی در این معما کافی است و همچنین تنها عملی که در آن رخ می‌دهد اعلان عمومی است. از این رو می‌توانیم منطق را به همان دو گونه از احتمال و اعلان عمومی محدود کنیم ولی کمی از سادگی مدل‌های ایستا و پویای آن بکاهیم و بنابراین برای حل این معما یک منطق اعلان عمومی احتمالاتی را به گونه‌ای معرفی می‌کنیم که مدل‌های ایستای آن مدل‌های کریپکی احتمالاتی باشند.

۱.۳ منطق اعلان عمومی احتمالاتی (PPAL)

مدل‌های شناختی احتمالاتی معرفی شده در فصل ۱ را به یاد بیاورید، در مدل کریپکی احتمالاتی که در اینجا معرفی می‌کنیم فضای احتمالاتی که به هر عامل $a \in \mathcal{A}$ در هر جهان $s \in S$ تخصیص می‌دهیم به‌صورتی است که فضای نمونه یعنی $S_{a,s}$ هر زیرمجموعه‌ی دلخواهی از S می‌تواند باشد ولی σ-جبر مجموعه‌های اندازه‌پذیر ($\mathcal{F}_{a,s}$) همواره مجموعه‌ی توانی فضای نمونه است. همچنین چون تمامی زیرمجموعه‌های تک عضوی از فضای نمونه در σ-جبر قرار می‌گیرند، می‌توان اندازه‌ی احتمالاتی را مستقیماً روی فضای نمونه تعریف کرد و در نتیجه تعریف مدل‌های کریپکی احتمالاتی به‌صورت زیر در می‌آید:

تعریف ۱.۱.۳. مدل‌های کریپکی احتمالاتی. فرض کنید $\mathcal{A}$ مجموعه‌ی عامل‌ها و $\mathbb{P}$ مجموعه‌ی گزاره‌های اتمی باشد. مدل کریپکی احتمالاتی ساختار $M_{PKL} = (S, \xrightarrow{\mathcal{A}}, P, V)$ است بطوریکه

- S مجموعه‌ای است غیر تهی از جهان‌های ممکن،
- $\xrightarrow{\mathcal{A}}$ مجموعه‌ای است از روابط دسترسی $\xrightarrow{a}$ که به‌ازای هر $a \in \mathcal{A}$ روی S تعریف شده‌اند،

- $P : \mathcal{A} \to (S \to (S_{a,s} \to [0,1]))$، تابعی احتمالاتی روی $S_{a,s}$ به هر عامل $a \in \mathcal{A}$ و هر جهان $s \in S$ نسبت می‌دهد (احتمالی که به t توسط تابعی که به a در s مربوط شده است نسبت داده می‌شود به‌صورت $P_a(s)(t)$ نمایش داده می‌شود)،
- V به هر گزاره‌ی اتمی مجموعه‌ای از جهان‌ها نسبت می‌دهد

مجوعه‌ی همه‌ی مدل‌های کریپکی احتمالاتی را $\mathbb{M}_{PKL}$ می‌نامیم. برای هر زیرمجموعه‌ی E از $S_{a,s}$ از آنجا که مجموعه‌های اندازه‌پذیر زیرمجموعه‌های $S_{a,s}$ هستند، داریم:

$$P_a(s)(E) = \sum_{t \in E} P_a(s)(t)$$

و برای هر فرمول φ در زبان تعریف می‌کنیم:

$$P_a(s)(\varphi) = \sum_{\{v \in S_{a,s} | M, v \vDash \varphi\}} P_a(s)(t)$$

تعریف ۲.۱.۳. زبان اعلان عمومی احتمالاتی $\mathcal{L}_{PPAL}$. این زبان بر پایه‌ی مجموعه‌ی شمارای $\mathbb{P}$ از گزاره‌های اتمی، مجموعه‌ی متناهی $\mathcal{A}$ از عامل‌ها، عملگر کریپکی $\Box_a$، عملگر به‌روزرسانی $[.]$ و نماد تابعی احتمالاتی $\mathbf{P}_a$ شکل می‌گیرد. فرمول‌های خوش‌تعریف با استفاده از فرم Backus-Naur به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\varphi, \psi ::= \top \mid \bot \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \Box_a\varphi \mid [!\varphi]\psi \mid \sum_{i=1}^{n} r_i \mathbf{P}_a(\varphi_i) \geq r$$

که در آن $p \in \mathbb{P}$، $a \in \mathcal{A}$ و $r_1, \ldots, r_n, r \in \mathbb{Q}$. $\sum_{i=1}^{n} r_i \mathbf{P}_a(\varphi_i)$ یک نام از زبان $\mathcal{L}_{PPAL}$ خوانده می‌شود، و $\sum_{i=1}^{n} r_i \mathbf{P}_a(\varphi_i) \geq r$ فرمول $a-$احتمالاتی از $\mathcal{L}_{PPAL}$ نامیده می‌شود. قرار دهید Γ_{PPAL} مجموعه‌ی همه‌ی فرمول‌های خوش‌تعریف و $P_{a,\mathcal{L}_{PPAL}}$ مجموعه‌ی همه‌ی فرمول‌های $a-$احتمالاتی از زبان $\mathcal{L}_{PPAL}$ باشد، و $T_{\mathcal{L}_{PPAL}}$ را نیز مجموعه‌ی همه‌ی نام‌ها قرار دهید. اگر از این زبان عملگر به‌روزرسانی را حذف کنیم آن را $\mathcal{L}_{PKL}$ می‌نامیم.

علاوه بر همه‌ی خلاصه‌نویسی‌های پیش‌گفته‌ی قابل بیان در این زبان، از آنجا که عملی غیر از اعلان عمومی در این زبان مطرح نیست برای سادگی نوشتار از $[\varphi]\psi$ به جای $[!\varphi]\psi$ به‌عنوان خلاصه‌نویسی استفاده می‌کنیم.

به منظور تعبیر این زبان می‌بایست به طور همزمان دو تعریف مطرح شود، یکی تعریف راستی و دیگری تعریف مدل‌های به‌روز شده. این دو تعریف به یکدیگر وابسته‌اند ولی به دور نمی‌انجامد.

تعریف ۳.۱.۳. معناشناسی منطق اعلان عمومی احتمالاتی. درستی فرمول $\varphi \in \Gamma_{\mathcal{L}_{PPAL}}$ در $s \in S$ در مدل کریپکی احتمالاتی M با نماد $M, s \vDash \varphi$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$M, s \vDash p$	اگر و فقط اگر	$s \in V(p)$
$M, s \vDash \neg\varphi$	اگر و فقط اگر	$M, s \nvDash \varphi$
$M, s \vDash \varphi \wedge \psi$	اگر و فقط اگر	$M, s \vDash \varphi$ و $M, s \vDash \psi$
$M, s \vDash \Box_a\varphi$	اگر و فقط اگر	برای هر $v \in S$، اگر $s \xrightarrow{a} v$، آنگاه $M, v \vDash \varphi$
$M, s \vDash [A]\psi$	اگر و فقط اگر	$M\|A, s \vDash \psi$ (تعریف ؟؟ را ببینید)
$M, s \vDash \sum_{i=1}^{n} r_i \mathbf{P}_a(\varphi_i) \geq r$	اگر و فقط اگر	$\sum_{i=1}^{n} r_i P_{a,s}(\varphi_i) \geq r$.

۲.۳ معمای Monty Hall

فرض کنید در یک مسابقه‌ی تلویزیونی شرکت کرده‌اید، و باید از میان سه در یکی را انتخاب کنید با این وصف که پشت یکی از آنها اتومبیل است و پشت دو در دیگر دوچرخه. شما دری را انتخاب می‌کنید، مثلاً در شماره ۱، و مجری، که می‌داند پشت هر در چه چیزی نهفته است، دری دیگر را باز می‌کند که پشت آن دوچرخه است، مثلاً در شماره ۳. او از شما می‌پرسد «آیا حاضرید دری که انتخاب کرده‌اید را با در شماره ۲ عوض کنید؟». سؤال اینجاست که عوض کردن در به نفع شماست یا نه؟

همانطور که در [؟] آمده است خانم سَوِنت[۱] که مرتباً در کتاب گینس به‌عنوان باهوش‌ترین فرد رکورد داشته است بر این باور است که اگر انتخاب را تغییر دهید در یک سوم موارد دوچرخه می‌برید و در دو سوم موارد اتومبیل. او اینگونه استدلال می‌کند که فرض کنید شما در مرحله‌ی اول دری را انتخاب کردید که پشت آن اتومبیل است، بنابر این شما نباید انتخابتان را تغییر دهید و این در یک سوم موارد اتفاق می‌افتد. از طرف دیگر فرض کنید که انتخاب اولیه‌ی شما دری باشد که پشتش دوچرخه است، که در دو سوم موارد رخ می‌دهد. مجری نمی‌تواند دری که پشتش اتومبیل است و دری که شما انتخاب کرده‌اید را باز کند او مجبور است در دیگری را که پشتش دوچرخه است باز کند. بنابراین در حالتی که شما ابتدا دری را انتخاب کرده‌اید که پشتش دوچرخه است تغییر انتخاب، بردن ماشین را تضمین می‌کند. پس با تغییر انتخاب در دو سوم موارد برنده‌ی اتومبیل خواهید شد.

می‌خواهیم به کمک اثباتی صوری در PPAL نشان دهیم که تعویض در به نفع شماست و مدعای خانم سَوِنت را اثبات کنیم.

[۱] Savant

قبل از آن به چند لم نیازمندیم که آنها را در اینجا اثبات می‌کنیم.

لم ۱.۲.۳. $\mathbf{P}_a(\varphi) = ۱ - \mathbf{P}_a(\neg\varphi)$

برهان. از اصل جمع‌پذیری متناهی داریم $\mathbf{P}_a(\top \wedge \varphi) + \mathbf{P}_a(\top \wedge \neg\varphi) = \mathbf{P}_a(\top)$ و با استفاده از احتمال راستی حکم برقرار است. □

لم ۲.۲.۳. در فرمول $\sum_{i=۱}^{n} r_i \mathbf{P}_a(\varphi_i) \geq r$، اگر داشته باشیم $\mathbf{P}_a(\varphi_j) = r'$، که در آن $۱ \leq j \leq n$ و r' عددی گویا باشد، آنگاه می‌توان اثبات کرد:

$$\sum_{i=۱, i\neq j}^{n} r_i \mathbf{P}_a(\varphi_i) \geq r - r'$$

برهان. از فرضیات و با استفاده از خلاصه‌نویسی فرمول‌ها و اصل 0-نام‌ها داریم

$$r_۱ \mathbf{P}_a(\varphi_۱) + \cdots + r_j \mathbf{P}_a(\varphi_j) + \cdots + r_n \mathbf{P}_a(\varphi_n) \geq r$$

$$0\mathbf{P}_a(\varphi_۱) + \cdots - \mathbf{P}_a(\varphi_j) + \cdots + 0\mathbf{P}_a(\varphi_n) = -r'$$

سپس با استفاده از اصل افزودن، حکم قضیه اثبات می‌شود. □

لم ۳.۲.۳. در فرمول $[\varphi] \sum_{i=۱}^{n} r_i \mathbf{P}_a(\varphi_i) \geq r$، اگر داشته باشیم $[\varphi]\mathbf{P}_a(\varphi_j) = r'$، که در آن $۱ \leq j \leq n$ و r' عددی گویا باشد، آنگاه می‌توان اثبات کرد:

$$[\varphi] \sum_{i=۱}^{n} r_i \mathbf{P}_a(\varphi_i) \geq r \leftrightarrow [\varphi] \sum_{i=۱, i\neq j}^{n} r_i \mathbf{P}_a(\varphi_i) \geq r - r_j r'$$

برهان. فرض کنید $\mathbf{P}_a(\varphi) > 0$ آنگاه هم‌ارزی‌های زیر با استفاده از اصل به‌روزرسانی احتمال ۱ برقرارند:

$$[\varphi] \sum_{i=۱}^{n} r_i \mathbf{P}_a(\varphi_i) \geq r \leftrightarrow \sum_{i=۱}^{n} r_i \mathbf{P}_a(\varphi \wedge [\varphi]\varphi_i) \geq r\mathbf{P}_a(\varphi)$$

$$[\varphi]\mathbf{P}_a(\varphi_j) = r' \leftrightarrow \mathbf{P}_a(\varphi \wedge [\varphi]\varphi_j) = r'\mathbf{P}_a(\varphi)$$

حال با استفاده از لم ؟؟ و خلاصه‌نویسی فرمول‌ها بدست می‌آوریم

$$[\varphi] \sum_{i=۱}^{n} r_i \mathbf{P}_a(\varphi_i) \geq r \leftrightarrow \sum_{i=۱, i\neq j}^{n} r_i \mathbf{P}_a(\varphi \wedge [\varphi]\varphi_i) \geq (r - r_j r')\mathbf{P}_a(\varphi)$$

و در نتیجه اصل به‌روزرسانی احتمال ۱ حکم را نتیجه می‌دهد. برای حالت $\mathbf{P}_a(\varphi) = 0$ نیز مشابه همین استدلال با کمک اصل به‌روزرسانی احتمال ۲ برقرار است. □

اکنون به مدل‌سازی معما در دستگاه منطقی‌مان می‌پردازیم و سپس به اثبات مدعا روی می‌آوریم.

مجموعه‌ی عامل‌ها را $\mathcal{A} = \{c, m\}$ می‌گیریم (c معرف شرکت‌کننده و m معرف مجری) و مجموعه‌ی گزاره‌های اتمی را اجتماع سه مجموعه‌ی A، C و O. بطوریکه
$A = \{A_۱, A_۲, A_۳\}$ که در آن A_i یعنی اتومبیل پشت در شماره i است.
$C = \{C_۱, C_۲, C_۳\}$ که در آن C_i یعنی شرکت‌کننده ابتدا در شماره i را انتخاب کرده است.
$O = \{O_۱, O_۲, O_۳\}$ که در آن O_i یعنی در شماره i توسط مجری باز شده است.

اکنون قواعد بازی را مدل می‌کنیم. این قواعد به این شرح هستند که: تنها یک اتومبیل پشت درهاست، شرکت‌کننده تنها می‌تواند یک در را انتخاب کند و مجری تنها می‌تواند یک در را باز کند.

$$onecar \ = \oplus A, \quad onechoice \ = \oplus C, \quad oneopen \ = \oplus O$$

که $\oplus$ یعنی «یای انحصاری[۲]». فرض می‌کنیم که شرکت‌کننده می‌بایست به اینکه اتومبیل پشت دری خاص قرار دارد احتمال $\frac{۱}{۳}$ نسبت دهد. همچنین فرض می‌کنیم شرکت‌کننده با انتخاب یک در چیزی در مورد جایگاه اتومبیل کشف نمی‌کند. بنابراین شرکت‌کننده بعد از انتخاب در نیز می‌بایست این احتمال را همان $\frac{۱}{۳}$ در نظر بگیرد، یعنی انتخاب شرکت‌کننده مستقل است از جایی که اتومبیل قرار دارد.

$$equal \ = \bigwedge_{i\in\{۱,۲,۳\}} \mathbf{P}_c(A_i) = \frac{1}{3}, \qquad independentAC \ = \bigwedge_{j\in\{۱,۲,۳\}} [C_j]equal$$

بخش اساسی بررسی این معما آن است که ببینیم تحت چه شرایطی مجری دری را باز می‌کند. او دقیقاً یک در را باز می‌کند به شرطی که شرکت‌کننده آن را انتخاب نکرده باشد و اتومبیل نیز پشت آن نباشد.

$$conditions = \bigwedge_{i,j\in\{۱,۲,۳\}} [C_i](O_j \leftrightarrow (\neg A_j \wedge \neg C_j \wedge \bigwedge_{k\in\{۱,۲,۳\},k\neq j} \neg O_k))$$

حال قرار دهید

$$initial = \ onecar \wedge onechoice \wedge oneopen \wedge equal \wedge independentAC \wedge conditions$$

سئوال این است که شرکت‌کننده انتخاب خود را تغییر دهد یا نه:

$$switch = \ [C_۱][O_۳]\mathbf{P}_c(A_۱) \leq \mathbf{P}_c(A_۲)$$

اگر این جمله درست باشد، احتمال اینکه شرکت‌کننده ماشین را ببرد با تغییر در انتخاب کاهش نمی‌یابد. معلوم می‌شود که $initial$ برای بدست آوردن این نتیجه کفایت نمی‌کند. آنچه ضروری است آن است که شرکت‌کننده از برقراری شرایط اولیه‌ی بازی مطمئن باشد $\mathbf{P}_c(initial) = 1$:. ما همچنین به دو فرض طبیعی نیز نیاز داریم، اولاً از نظر شرکت‌کننده احتمال اینکه او در شماره ۱ را انتخاب کند

[۲] exclusive or

بزرگتر از صفر است: $\mathbf{P}_c(C_۱) > 0$ ثانیاً بعد از اینکه شرکت‌کننده در شماره ۱ را انتخاب کرد از نظر او احتمال اینکه مجری در ۳ را باز کند بزرگتر از صفر است: $[C_۱]\mathbf{P}_c(O_۳) > 0$. اینها برای بدست آوردن *switch* کفایت می‌کنند.

فرض *independentAc* دلالت دارد بر اینکه $[C_۱]\mathbf{P}_c(A_۱) = \frac{1}{3}$ و بنابراین:

$$\mathbf{P}_c(A_۱) = \mathbf{P}_c(O_۳ \wedge A_۱) + \mathbf{P}_c(\neg O_۳ \wedge A_۱) \ \Rightarrow\ [C_۱]\mathbf{P}_c(O_۳ \wedge A_۱) \leq \frac{1}{3} \qquad (۱.۳)$$

با در نظر گرفتن شرایط *conditions*، *onechoice* و *onecar* خواهیم داشت:

$$[C_۱]\mathbf{P}_c(A_۲ \to O_۳) = 1 \qquad (۲.۳)$$

زیرا از شرایط *onechoice* و *onecar* داریم

$$C_۱ \leftrightarrow \neg C_۱ \wedge \neg C_۳ \quad \text{و} \quad A_۲ \leftrightarrow \neg A_۱ \wedge \neg A_۳$$

و در نتیجه

$$C_۱ \wedge A_۲ \to \neg C_۳ \wedge \neg A_۳ \qquad (۱)$$

از طرف دیگر بنابر شرط *conditions* داریم $[C_۱]O_۱ \to [C_۱]\neg C_۱$. از این و از $C_۱ \to [C_۱]C_۱$ نتیجه می‌شود $C_۱ \wedge O_۱ \to \bot$ که معادل است با

$$\neg C_۱ \vee \neg O_۱ \qquad (۲)$$

و به همین صورت داریم

$$\neg A_۲ \vee \neg O_۲ \qquad (۳)$$

پس با استفاده از (۱)، (۲) و (۳) بدست می‌آید

$$C_۱ \wedge A_۲ \to \neg C_۳ \wedge \neg A_۳ \wedge \neg O_۱ \wedge \neg O_۲$$

و از قاعده‌ی ضرورت $[C_۱]$ داریم

$$[C_۱](C_۱ \wedge A_۲) \to [C_۱](\neg C_۳ \wedge \neg A_۳ \wedge \neg O_۱ \wedge \neg O_۲)$$

و از شرط *conditions* نتیجه می‌شود $[C_۱](C_۱ \wedge A_۲) \to [C_۱]O_۳$ که به خاطر اصل ثبات اتم معادل است با

$$C_۱ \to (A_۲ \to O_۳)$$

در نتیجه داریم $[C_۱]C_۱ \to (A_۲ \to O_۳)$ و بنابراین $C_۱ \to [C_۱](A_۲ \to O_۳)$ و

$$C_۱ \leftrightarrow C_۱ \wedge [C_۱](A_۲ \to O_۳)$$

و با استفاده از قاعده‌ی هم‌ارزی نتیجه می‌شود

$$\mathbf{P}_c(C_۱ \wedge [C_۱](A_۲ \to O_۳)) = \mathbf{P}_c(C_۱)$$

و چون طبق اصل به‌روزرسانی-احتمال ۱ داریم

$$\mathbf{P}_c(C_۱) > 0 \to ([C_۱]\mathbf{P}_c(A_۲ \to O_۳) = 1 \leftrightarrow \mathbf{P}_c(C_۱ \wedge [C_۱](A_۲ \to O_۳)) = \mathbf{P}_c(C_۱))$$

گزاره‌ای که به دنبالش بودیم اثبات می‌شود.

حال با استفاده از ۲.۳ بدست می‌آید:

$$[C_۱]\mathbf{P}_c(O_۳ \wedge A_۲) = \mathbf{P}_c(A_۲) \tag{۳.۳}$$

زیرا از لم ۱.۲.۳ می‌دانیم

$$\mathbf{P}_c(A_۲ \wedge \neg O_۳) = 0$$

و از اصل جمع‌پذیری متناهی داریم

$$\mathbf{P}_c(O_۳ \wedge A_۲) + \mathbf{P}_c(\neg O_۳ \wedge A_۲) = \mathbf{P}_c(A_۲)$$

پس با استفاده از لم ۲.۲.۳ بدست می‌آید

$$\mathbf{P}_c(O_۳ \wedge A_۲) = \mathbf{P}_c(A_۲)$$

و سپس قاعده‌ی ضرورت $[C_۱]$ حکم را اثبات می‌کند.

(۳.۳) به همراه $[C_۱]\mathbf{P}_c(A_۲) = \frac{1}{3}$ (که از $independentAC$ بدست می‌آید) و با استفاده از لم ۳.۲.۳ ما را مجاز می‌کند که نتیجه بگیریم $[C_۱]\mathbf{P}_c(O_۳ \wedge A_۲) = \frac{1}{3}$. حال خلاصه‌نویسی فرمول‌ها و لم ۳.۲.۳ (قرار دهید $r_j = ۱$، $r' = \frac{1}{3}$ و $r = ۰$) و (۱.۳) نتیجه دهد:

$$[C_۱]\mathbf{P}_c(O_۳ \wedge A_۱) \leq \mathbf{P}_c(O_۳ \wedge A_۲)$$

و با استفاده از اصل ثبات اتم خواهیم داشت

$$[C_۱]\mathbf{P}_c(O_۳ \wedge [O_۳]A_۱) \leq \mathbf{P}_c(O_۳ \wedge [O_۳]A_۲) \tag{۴.۳}$$

و در نهایت اثبات می‌شود

$$[C_۱][O_۳]\mathbf{P}_c(A_۱) \leq \mathbf{P}_c(A_۲) \tag{switch}$$

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

احتمال	probability
احتمال پسینی	posterior probability
احتمال پیشینی	prior probability
احتمال رخداد	occurrence probability
احتمال گزاره‌ای	propositional probability
احتمال مشاهده‌محور	observation probability
اصل موضوع	axiom
اصول موضوعه‌ی تحویل	reduction axioms
اعلان عمومی	public announcement
اندازه‌ی احتمالاتی	probability measure
اندازه‌ی احتمالاتی درونی	inner probability measure
ایستا	static
باور	belief
به‌روزرسانی	update

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

agent	عامل
axiom	اصل موضوع
belief	باور
common knowledge	همه‌دانی مشترک
completeness	تمامیت
consistent	سازگار
countably additive	جمع‌پذیر شمارا
distinguish	تمییز دادن
dynamic	پویا
epistemic	شناخت
event	عمل
exclusive or	یای انحصاری
finitely additive	جمع‌پذیر متناهی
formula	فرمول
higher order information	فرادانش
hypochondriac	خودبیمار انگار
inner probability measure	اندازه‌ی احتمالاتی درونی
intropection	خودآگاهی