

باسمه تعالی

فرآیندهای تصادفی کاربردی

پیک نوروزی، بهار ۱۴۰۱

تمرین‌های نظری

۱. احتمال این‌که در صد بار پرتاب سکه‌ی سالم دقیقاً پنجاه بار شیر بیاید را، تا دست کم سه رقم اعشار، محاسبه کنید. احتمال این‌که در $2n$ بار پرتاب سکه‌ی سالم دقیقاً n بار شیر بیاید، با افزایش n چه رفتاری دارد؟

۲. در یک ظرف صد مهره قرار دارد. اگر دویست بار، هر بار به تصادف یک مهره از ظرف خارج کنیم و پس از مشاهده‌ی آن دوباره به ظرف برگردانیم، امید ریاضی تعداد مهره‌هایی که دقیقاً یک‌بار دیده می‌شوند چقدر است؟ احتمال آن‌که همه‌ی مهره‌ها دیده شوند چطور؟ تخمین‌های عددی از جواب ارائه کنید.

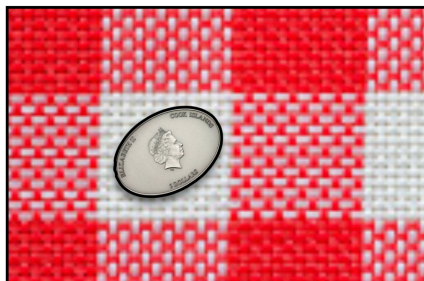


۳. یک تکه چوب به طول یک متر از یک نقطه‌ی تصادفی (با توزیع یکنواخت) شکسته است. امید ریاضی نسبت طول قطعه‌ی بزرگ‌تر به کوچک‌تر را محاسبه کنید. اگر چوب از دو نقطه‌ی تصادفی (مستقل از هم و با توزیع یکنواخت) شکسته باشد، امید ریاضی طول کوچک‌ترین قطعه، قطعه‌ی متوسط و بزرگ‌ترین قطعه را محاسبه کنید.

۴. دنباله‌ای X_1, X_2, \dots از متغیرهای مستقل نرمال با میانگین صفر و واریانس یک در نظر بگیرید. ما کسیم k جمله‌ی اول را رکورد تا مرحله‌ی k می‌نامیم و می‌گوییم در مرحله‌ی k یک «رکوردشکنی» رخ داده اگر جمله‌ی k ام از همه‌ی جملات پیش از خود بزرگ‌تر باشد. امید ریاضی تعداد رکوردشکنی‌ها تا قبل از n را محاسبه کنید. امید ریاضی رکورد مرحله‌ی n ام چطور بر حسب n افزایش می‌یابد؟

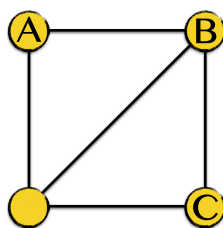
۵. اگر وتری به تصادف از یک دایره انتخاب کنیم، احتمال آن‌که دایره‌ای به شعاع نصف و هم‌مرکز با دایره‌ی اصلی را قطع کند چقدر است؟ اگر دایره‌ی کوچک‌تر هم‌مرکز با دایره‌ی اصلی نباشد این احتمال بزرگ‌تر می‌شود یا کوچک‌تر؟

۶. یک سکه‌ی دایره‌ای شکل به قطر دو را روی میز پرتاب می‌کنیم! اگر رومیزی نقش چهارخانه با خانه‌های مربعی به ضلع سه داشته باشد، چقدر احتمال دارد که سکه کاملاً درون یکی از مربع‌ها بیفتد؟ اگر سکه بیضی با طول قطرهای اصلی یک و نیم و دو و نیم باشد چطور؟

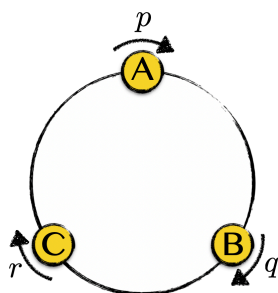


۷. یک مهره‌ی اسب حرکت خود را از یکی از چهار گوشه‌ی صفحه‌ی شطرنج شروع می‌کند و در هر گام، یکی از حرکت‌های مجاز خود را به تصادف انجام می‌دهد. امید ریاضی زمانی که طول می‌کشد تا اسب به جای اول خود برگردد را محاسبه کنید؟

۸. اگر با شروع از راس A روی گراف زیر به طور تصادفی قدم بزنیم، در درازمدت احتمال این‌که در راس B باشیم چقدر است؟ تخمین تا جای ممکن خوبی از احتمال این‌که تا گام n ام راس C را ندیده باشیم ارائه کنید.



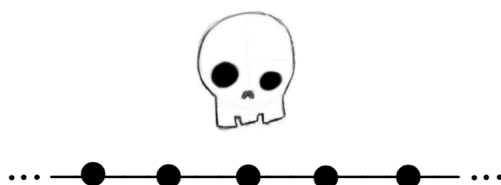
۹. یک قدم زن تصادفی بر دایره‌ی زیر روی سه خانه‌ی A, B, C قدم می‌زند. او در هر نوبت یا یک گام در جهت ساعت‌گرد و یا یک گام در جهت پادساعت‌گرد حرکت می‌کند. احتمال‌های حرکت ساعت‌گرد در خانه‌های A, B, C به ترتیب برابر p, q, r است. آیا با داشتن این احتمال‌ها می‌توانید تعیین کنید که در درازمدت این قدم‌زن دایره را در جهت ساعت‌گرد دور می‌زند یا پادساعت‌گرد؟ با چه سرعتی؟



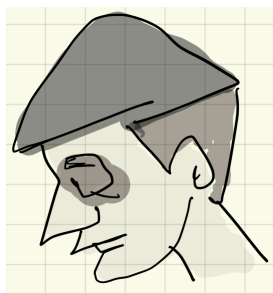
۱۰. در شهری با n نفر جمعیت به تازگی ویروس جدیدی آمده که کشنده نیست اما هر کس به آن مبتلا می‌شود همیشه ناقل باقی می‌ماند! فرض کنید هر روز دو نفر از اهالی شهر (که به تصادف و با توزیع یکنواخت انتخاب شده‌اند!) با هم دیدار کنند و اگر کسی ناقل باشد در هر دیدار ویروس را با احتمال p منتقل کند. اگر در ابتدا یک نفر به ویروس مبتلا باشد، امید ریاضی زمانی که طول می‌کشد تا تمام شهر به ویروس مبتلا شوند چقدر است؟

۱۱. در همان شهر مساله‌ی قبل، درباره‌ی موضوعی در ابتدا هر دو نفر از اهالی شهر نظر متفاوتی دارند! اگر در هر ملاقات روزانه، یکی از طرفین (که به تصادف از بین دو نفر انتخاب می‌شود) نظر دیگری را بپذیرد، چند روز طول می‌کشد تا همه نظر یکسانی پیدا کنند؟

۱۲. تعدادی ذره روی محور اعداد صحیح قرار دارند. در هر لحظه هر کدام از ذرات، مستقل از یکدیگر، به احتمال $1 - \epsilon$ یک گام تصادفی با احتمال برابر به یکی از دو جهت برمی‌دارد و یا با احتمال ϵ به دو ذره تبدیل می‌شود. ذراتی که به مبدا برسند به مرگ فجیعی می‌میرند! نشان دهید اگر ϵ مثبت باشد، هر چقدر هم که کوچک باشد احتمال مثبتی وجود دارد که جمعیت ذرات هیچ‌گاه منقرض نشود.



۱۳. الکسی ایوانوویچ تنها ۲۰ سکه دارد اما به شدت نیازمند ۴۰ سکه است! او که قمارباز مفلوکی است، در سودای آن است که با شرط‌بندی روی پرتاب سکه در قمارخانه‌ای در مسکو این پول را به دست آورد. او هر بار می‌تواند مقداری از پولش را شرط‌بندی کند. اگر نتیجه‌ی پرتاب سکه را درست حدس بزند همان‌قدر پول جایزه می‌گیرد و اگر اشتباه حدس زد، پولش را از دست می‌دهد. به نظر شما اگر از آغاز همه‌ی پولش را یک‌جا شرط‌بندی کند شانس بیشتری دارد یا این‌که هر بار فقط با یک سکه در شرط‌بندی شرکت کند؟ آیا روشی بهتر از این دو برایش وجود دارد؟



۱۴. در یک قطعه‌ی پرخطر از بزرگراه، به طور متوسط هر ماه سه تصادف رخ می‌دهد که یکی از آن‌ها مرگ‌بار است! احتمال این‌که در ماه آینده در این قسمت از بزرگراه تصادف داشته باشیم اما کسی نمیرد چقدر است؟

۱۵. در یک ایستگاه اتوبوس، زمان رسیدن مسافران و اتوبوس‌ها فرآیندهایی پواسون با نرخ‌های λ و μ است. هر اتوبوسی که می‌رسد همه‌ی مسافران حاضر در ایستگاه را سوار می‌کند. امید ریاضی و واریانس تعداد مسافرانی که سوار هر اتوبوس می‌شوند را محاسبه کنید.



۱۶. ظرفی حاوی تعدادی ذره داریم که مطابق با یک فرآیند پواسون با نرخ یک ذرات جدیدی به آن وارد می‌شوند. در هر کدام از حالت‌های زیر محاسبه کنید که در درازمدت چه کسری از زمان ظرف خالی خواهد بود:
 الف) هر ذره پس از یک زمان نمایی با مقدار متوسط τ از ظرف خارج شود.
 ب) هر ذره دقیقاً بعد از طی زمان τ از ظرف خارج شود.

۱۷. روی صد برگ کاغذ، صد عدد حقیقی متفاوت نوشته شده است. برگه‌ها به ترتیب کاملاً تصادفی، یکی پس از دیگری به شما نشان داده می‌شوند. شما باید بزرگ‌ترین عدد را انتخاب کنید اما اگر وقتی برگه‌ای به شما نشان داده شد همان وقت آن را انتخاب نکردید دیگر امکان بازگشت ندارید! چه روشی در پیش می‌گیرید تا احتمال انتخاب درست را تا جای ممکن افزایش دهید؟ احتمال بُردتان با این روش چقدر است؟

۱۸. در مساله‌ی قبل اگر بدانید اعداد مستقل از هم و با توزیع یکنواخت از بازه‌ی $[0, 1]$ انتخاب شده‌اند آیا استراتژی بهتری برای بازی خواهید داشت؟

۱۹. مامور آمارگیری برای تخمین میانگین تعداد اعضای خانوار به یک روستای کوچک رفته است. او از یک نمونه‌ی تصادفی از افراد تعداد اعضای خانواده‌شان را می‌پرسد و اعداد به دست آمده را میانگین می‌گیرد. نشان دهید این تخمین‌گر اریب است! می‌توانید تعیین کنید که اریبی در چه جهتی است؟ آیا راهی وجود دارد که بتوان از همان اعدادی که مامور آمارگیری به دست آورده تخمین‌گر نااریب مناسبی ساخت؟

۲۰. ترازوی گران‌قیمتی داریم که در هر بار استفاده، تخمین‌گر نااریبی با انحراف معیار σ از وزن شی مورد اندازه‌گیری ارائه می‌دهد. برای اندازه‌گیری وزن یک سیب و یک پرتقال، یک بار سیب، یک بار پرتقال و یک بار هر دو را روی ترازو گذاشته‌ایم و وزن کرده‌ایم. چه راهی برای به دست آوردن دقیق‌ترین نتیجه‌ی ممکن به کمک این سه عدد پیشنهاد می‌کنید؟