باسمه تعالی

فرآیندهای تصادفی کاربردی

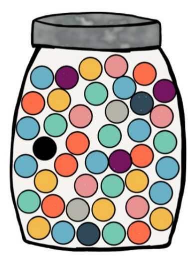
پیک امید

تمرین‌های تجربی

---

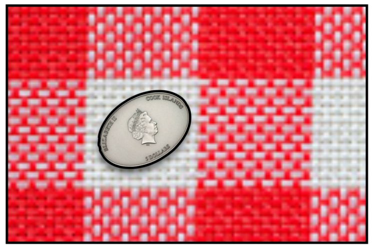
۱. دنباله‌ای $X_1, X_2, \cdots$ از متغیرهای مستقل نُرمال با میانگین صفر و واریانس یک در نظر بگیرید. ماکسیمم k جمله‌ی اول را رکورد تا مرحله‌ی k می‌نامیم و می‌گوییم در مرحله‌ی k یک «رکوردشکنی» رخ داده اگر جمله‌ی kام از همه‌ی جملات پیش از خود بزرگ‌تر باشد. به کمک شبیه‌سازی امید ریاضی تعداد رکوردشکنی‌ها و رکورد تا مرحله‌ی nام را محاسبه کنید. برای هر کدام از موارد قبل نمودار آن‌ها بر حسب n را رسم کنید.

۲. در یک ظرف m مهره قرار دارد. اگر n بار، هر بار به تصادف یک مهره از ظرف خارج کنیم و پس از مشاهده‌ی آن دوباره به ظرف برگردانیم، امید ریاضی تعداد مهره‌هایی که دقیقا یک‌بار دیده می‌شوند را با شبیه‌سازی تخمین بزنید. برای $m = 100$ و $n \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$ نمودار تقریبی امید ریاضی بر حسب n را رسم کنید.



۳. یک تکه چوب به طول یک متر از یک نقطه‌ی تصادفی (با توزیع یکنواخت) شکسته است. امید ریاضی نسبت طول قطعه‌ی بزرگ‌تر به کوچک‌تر را محاسبه کنید. جواب را به صورت نمودار تابعی رسم کنید که محور افقی، n، تعداد دفعات شبیه‌سازی و محور عمودی تخمین به دست آمده از امید ریاضی در n بار شبیه‌سازی است.

۴. یک سکه‌ی بیضی شکل به قطر یک و α را روی میزی به طول و عرض بی‌نهایت(!) پرتاب می‌کنیم. اگر رومیزی نقش چهارخانه با خانه‌های مربعی به ضلع دو داشته باشد، چقدر احتمال دارد که سکه کاملا درون یکی از مربع‌ها بیفتد؟ پاسخ را به عنوان نموداری از α در نظر گرفته و نمودار تقریبی احتمال بر حسب α رسم کنید. (فرض کنید مرکز بیضی به طور یکنواخت در یکی از مربع‌ها قرار خواهد گرفت و زاویه‌ی قرار گرفتن سکه روی میز هم زاویه‌ای یکنواخت در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ خواهد بود.)



۵. فرض کنید X_n تعداد افراد نسل n یک فرآیند شاخه‌ای باشد که هر فرد

۱. با احتمال 0.5 صفر فرزند و با احتمال 0.5 دو فرزند دارد.

۲. با احتمال 0.501 صفر فرزند و با احتمال 0.499 دو فرزند دارد.

می‌دانیم در هر دو حالت فرآیند شاخه‌ای با احتمال یک منقرض می‌شود. کوچک‌ترین nای که $X_n = 0$ را زمان انقراض می‌نامیم. بافت‌نگار (هیستوگرام) زمان انقراض در تعداد دفعات زیادی شبیه‌سازی را برای هر یک از دو حالت فوق رسم کنید. چه تفاوت کیفی بین این دو بافت‌نگار مشاهده می‌کنید؟

۶. فرض کنید توزیع اولیه‌ی یک زنجیر مارکوف σ و ماتریس گذار آن P باشد. می‌دانیم توزیع محل حضور زنجیر مارکوف در زمان از رابطه‌ی σP^n به دست می‌آید. فرض کنید که زنجیر مارکوف تحویل‌ناپذیر و نامتناوب است و توزیع پایای آن π باشد. منظور از *زمان آمیختگی* زنجیر مارکوف کوچک‌ترین nای است که

$$\sum_i \left|\left(\sigma P^n\right)(i) - \pi(i)\right| < \frac{1}{1000}.$$

نمودار زمان آمیختگی یک قدم زن تصادفی روی یک nضلعی منتظیم که از یک نقطه‌ی ثابت شروع می‌کند و در هر گام با احتمال p در جهت مثلثاتی و با احتمال $1-p$ در جهت خلاف مثلثاتی قدم می‌زند را بر حسب n و p رسم کنید. آیا می‌توانید حدسی از تابع زمان آمیختگی بر حسب n و p ارائه کنید؟

فرض کنید یک قدم‌زن تصادفی روی یک چنبره‌ی $n \times n$ به طور یکنواخت قدم می‌زند. منظور از چنبره‌ی $n \times n$ یک مربع $n \times n$ است که دو ضلع چپ و راست و دو ضلع بالا و پایین به هم دوخته شده‌اند.

۷. (زمان برخورد) اگر θ متوسط زمان رسیدن از X به Y باشد که X یک نقطه‌ی ثابت و Y یک نقطه‌ی تصادفی و یکنواخت در این چنبره باشند، θ را تخمین بزنید.

۸. (زمان پوشش) اگر از یک نقطه‌ی دلخواه در چنبره شروع کنیم متوسط زمانی که طول می‌کشد تا قدم‌زن تصادفی از همه‌ی نقاط بگذرد را تخمین بزنید.

۹. (زمان آمیختگی) متوسط زمان آمیختگی قدم‌زن با شروع از یک نقطه‌ی خاص را تخمین بزنید.

۱۰. در مدل نشت جهت‌دار یالی هم مانند مدل نشت جهت‌دار راسی یک آرایه‌ی مثلثی از راس‌ها مانند شکل زیر داریم که هر راس با دو یال جهت‌دار با دو راس لایه ی پایینی مرتبط است. این‌بار یال ها مستقل از هم با احتمال p باز می‌مانند و با احتمال $1-p$ بسته می‌شوند. در این مساله شما باید با شبیه‌سازی مدل آستانه‌ی نشت مدل یالی را تخمین بزنید. یعنی کوچک‌ترین p که به ازای آن، احتمال وجود مسیر نامتناهی جهت‌دار از یال‌های باز با شروع از مبدا مثبت باشد.