ATS Jules Ferry — TD 17 : Modélisation numérique – Équation de Laplace — Info

Nous nous proposons d'étudier la résolution numérique de l'**équation de Laplace** ($\boldsymbol{\Delta f = 0}$ où f est un champ scalaire) rencontrée 3 fois en physique :

- pour le champ de température T dans un conducteur thermique en régime stationnaire (cf *T8*) ;
- pour le champ du potentiel électrostatique V dans le vide (condensateur plan cf *TD EM1*) ;
- toujours pour V dans un conducteur électrique en régime stationnaire (cf *EM2*).

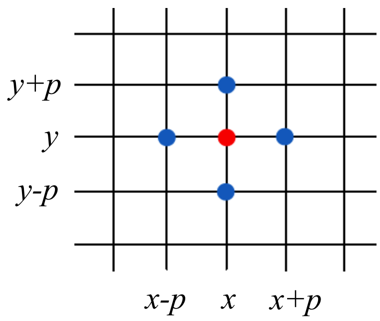
Cette équation est soluble analytiquement de manière assez simple dès lors que le problème est unidimensionnel.
Lorsque le problème devient bidimensionnel, l'écriture des conditions aux limites rend la résolution de l'équation de Laplace délicate … On fait alors appel à la résolution numérique.

Dans tout le TD, on prend pour exemple le champ de température $T(x, y)$ dans une plaque conductrice de géométrie rectangulaire (largeur l ; longueur L) où les conditions aux limites sont imposées sur les 4 côtés de la plaque (sur le dessus et le dessous de la plaque, on suppose une isolation thermique parfaite de la plaque).

I. Méthode différentielle

1. Calcul du Laplacien

Le laplacien en coordonnées cartésiennes à deux dimensions s'écrit $\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$.



Pour calculer numériquement le laplacien, on calcule les dérivées partielles par la méthode d'Euler : on maille l'espace en un réseau carré de côté p très petit devant la taille caractéristique du problème ($p \ll l$ et $p \ll L$: $1\,mm$ par exemple).

On peut alors approximer $\frac{\partial T}{\partial x}$ à $\frac{T(x+\frac{p}{2}, y) - T(x-\frac{p}{2}, y)}{p}$.

Donc $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)$ ce qui donne par Euler : $\frac{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+p/2} - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x-p/2}}{p} \simeq \frac{T(x+p) - T(x) - (T(x) - T(x-p))}{p^2}$

d'où $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \simeq \frac{T(x+p, y) + T(x-p, y) - 2T(x, y)}{p^2}$.

De même, $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \simeq \frac{T(x, y+p) + T(x, y-p) - 2T(x, y)}{p^2}$.

L'expression du Laplacien par la méthode d'Euler est donc :

$$\Delta T \simeq \frac{T(x+p, y) + T(x-p, y) + T(x, y+p) + T(x, y-p) - 4T(x, y)}{p^2} .$$

__Remarque__ : cette question théorique est tombée à l'épreuve de physique d'ATS 2017 ! (On l'a déjà vue au TPT4 de conduction thermique … L'écriture était beaucoup plus simple puisque le pas p du réseau était pris égal à l'unité cf III).

2. Résolution de l'équation de Laplace

On veut résoudre numériquement $\Delta T = 0$ donc d'après l'expression précédente :

$$\frac{T(x+p,y)+T(x-p,y)+T(x,y+p)+T(x,y-p)-4T(x,y)}{p^2} \simeq 0 .$$

Il vient : $T(x,y) \simeq \frac{T(x+p,y)+T(x-p,y)+T(x,y+p)+T(x,y-p)}{4}$: la résolution de l'équation de Laplace par la méthode d'Euler revient à imposer $T(x,y)$ comme la valeur moyenne de la température de ses 4 voisins ! (cf schéma précédent du maillage).

II. Implémentation sous Scilab

1. Algorithme

On considère une plaque rectangulaire ($0 \leqslant x \leqslant L$; $0 \leqslant y \leqslant l$) en régime stationnaire soumise aux conditions aux limites sur chaque côté :
$T(x=0,y)=T_g$, $T(x=L,y)=T_d$; $T(x,y=0)=T_b$ et $T(x,y=l)=T_h$.

On souhaite disposer d'un algorithme qui résolve l'équation de Laplace et renvoie le résultat sous la forme d'un graphique $T(x,y)$.

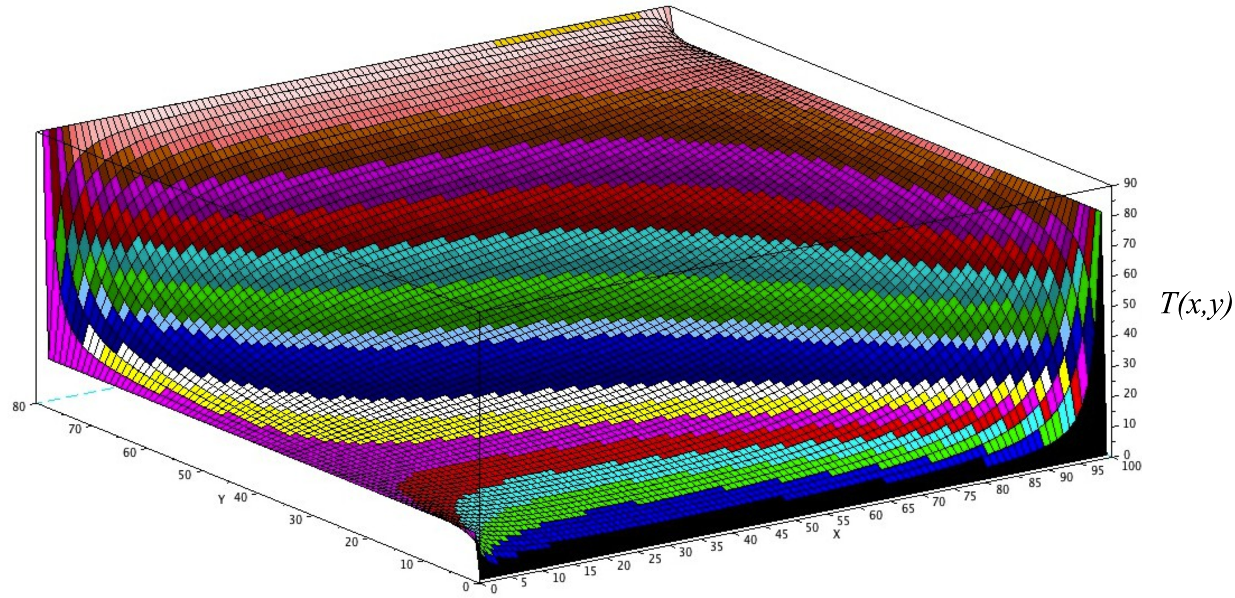
Bon courage !

2. Exemple d'algorithme

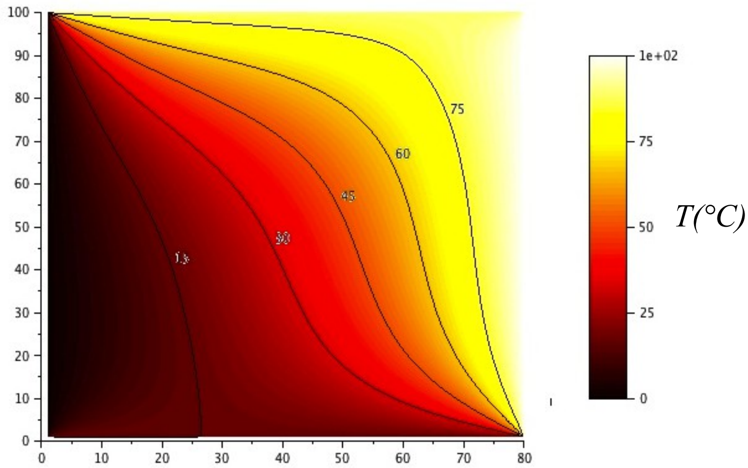
```
clear;

L=100 // longueur de la plaque : 10cm = 100mm
l=80 // largeur de la plaque : 8cm
N= 10 // nombre d'itérations d'Euler très limité au début ...

Thaut = 0; // définitions des conditions aux limites en °C
Tbas = 90;
Tgauche = 15;
Tdroite = 80;
Tini = 20; // condition initiale de la température de la plaque

for i=1:l
    for j=1:L
        Tp(i,j) = Tini; //initialisation de la température de la plaque
    end
end

Tp(:,1)=Tgauche; //on impose les conditions initiales
Tp(:,L)=Tdroite;
Tp(1,:)=Thaut;
Tp(l,:)=Tbas;

for k = 1:N
    for i=2:l-1
        for j=2:L-1
        Tp(i,j) = 0.25*(Tp(i-1,j)+Tp(i+1,j)+Tp(i,j-1)+Tp(i,j+1)); // Laplacien par Euler
        end
    end
end

clf
surf(Tp) // pour tracer T=f(x,y) en 3D
```

Pour représenter $T(x, y)$, on aura 2 solutions dont les procédures sont données :

```
surf(Tp) // pour tracer T=f(x,y) en 3D
```




```
x=linspace(1,l,l);
y=linspace(1,L,L);

clf
f=gcf() //facultatif : pour utiliser "hot color"
f.color_map=hotcolormap(64) //facultatif : code couleur intuitif
colorbar (0,100) //facultatif : voir l'échelle des températures de 0 à 100°C
contour(x,y,Tp,5) //facultatif : affiche 5 isothermes
Sgrayplot(x,y,Tp) // Tracer de la température à 2D par code couleur
```

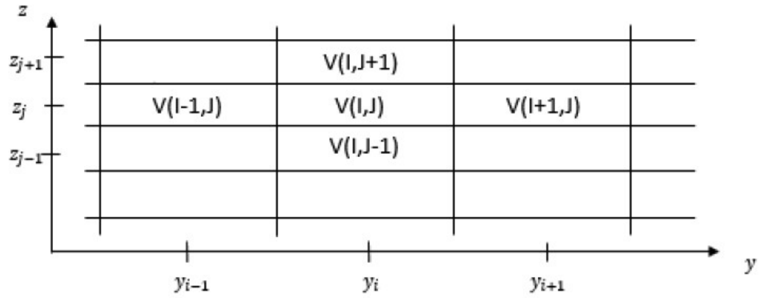


<u>Astuce</u> : sans aller jusqu'aux tracés d'isothermes, on pourra ouvrir « mathlab » et utiliser l'algorithme tel quel (en rajoutant quelques « ; » aux endroits opportuns) avec « surf(Tp) » : mathlab est alors beaucoup plus interactif dans l'utilisation des tracés de courbes, ce qui est intéressant pour un graphique à 3D …

III.Extrait de l'épreuve de physique 2017

L'équation étudiée est : $\dfrac{\partial^2 V(y,z)}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 V(y,z)}{\partial z^2}=0$ où $V(y,z)$ est le potentiel électrique.

On souhaite écrire un programme informatique permettant de déterminer la fonction potentiel électrostatique dans le réacteur alimenté en $\pm 10\,V$. La solution de ce problème doit vérifier l'équation de Laplace ci-dessus et les conditions aux limites imposées au potentiel $V(y,z)$ par l'expérimentateur qui sont ici $V\left(y=\pm\frac{a}{2};z\right)=0$. Dans ce programme, on va chercher à calculer le potentiel en différents points $(x=0;y_i;z_j)$ du réacteur avec $(0\le z_j<20)mm$ et $(-10\le y_i<+10)cm$. Le potentiel est calculé tous les millimètres verticalement et horizontalement. Ainsi, le potentiel est décrit dans un tableau de taille 201x21 où le réel V(I,J) contient la valeur en volt de $V(y_i,z_j)$. Le tableau suivant représente une partie de la discrétisation de l'espace en cellules.



Pour résoudre l'équation de Laplace, nous allons appliquer la méthode d'Euler. A titre d'exemple, cette méthode consiste à associer la dérivée partielle $\frac{\partial V(y,z)}{\partial y}$ à la quantité V(I+1,J)-V(I,J).

8) Ecrire, avec la méthode d'Euler, la quantité $\frac{\partial V(y,z)}{\partial z}$ en fonction de V(I,J+1) et V(I,J).
9) Ecrire, avec la méthode d'Euler, la quantité $\frac{\partial^2 V(y,z)}{\partial z^2}$ en fonction de V(I,J+1),V(I,J-1) et V(I,J).
10) Ecrire alors la définition à donner à V(I,J) avec la méthode d'Euler, en fonction de V(I+1,J), V(I,J+1), V(I-1,J) et V(I,J-1).

« Corrigé de l'épreuve » :

8) $\dfrac{\partial V}{\partial z}$ est associé à la quantité $\boxed{V(I,J+1)-V(I,J)}$

9) $\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ est associé à la quantité $\boxed{V(I,J+1)-2.V(I,J)+V(I,J-1)}$

NB : $\left(V(I,J+1)-V(I,J)\right)-\left(V(I,J)-V(I,J-1)\right)$

10) $\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$ s'écrit

$$V(I+1,J)-2.V(I,J)+V(I-1,J)+V(I,J+1)-2.V(I,J)+V(I,J-1)=0$$

soit $\boxed{V(I,J)=\dfrac{V(I+1,J)+V(I-1,J)+V(I,J+1)+V(I,J-1)}{4}}$