# Licence 2<sup>ème</sup> année, Physique Mécanique Semestre 1

Anthony LOUVAT-SEGURA, Vigrile CHEMINOT

November 2022

# Table des matières

Ι	Mat-304 : Calcul matriciel et fonctions de plusieurs variables	7
1	Repérage dans $\mathbb{R}^3$	9
2	Repérage dans $\mathbb{R}^3$	11
3	3.1 Définition et premières propriétés	13 13 14 15
4	4.1 Le gradient $\overrightarrow{\nabla}$	17 17 18 19 19
5	Intégration en plusieurs variables	21
6	6.1 Calcul matriciel	23 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25
7		27 27 28

7.4.1 Éléments propres et diagonalisation d'une matrice symétrique	35
Extremums en plusieurs variables	39
Mat-307 : Courbes paramétrées et équations différentielles pou physique I Courbes	r 41 43
Courbes paramétrées	45
1.1 Paramétrage et représentation graphique	45 46 46 47 48 51
1.3 Courbes en polaire	51 52 53 53 53 53 53 53
Propriétés métrique des courbes	55
Intégrales curvilignes	57
V Équations et systèmes différentielles	59
Généralités	61
Méthodes de résolutions explicites         2.1 Équations différentielles linéaires à coefficients constants          2.2 Équations à variables séparables          2.3 Systèmes différentielles linéaires          2.3.1 Résolution par diagonalisation	63 63 65 65
	7.4.1 Éléments propres et diagonalisation d'une matrice symétrique 7.4.2 Formes quadratiques  Extremums en plusieurs variables  Mat-307 : Courbes paramétrées et équations différentielles pour physique  I Courbes  Courbes  Courbes paramétrées  1.1 Paramétrage et représentation graphique 1.2 Étude analytique d'une courbe paramétrée 1.2.1 Domaine de définition et intervalle d'étude 1.2.2 Étude des branches infinies 1.2.3 Étude locale et points singuliers 1.2.4 Tableau de variation 1.2.5 Applications  1.3 Courbes en polaire 1.3.1 Domaine de définition et intervalle d'étude 1.3.2 Étude des branches infinies 1.3.3 Étude locale 1.3.4 Tableau de variation 1.3.5 Applications  1.4 Coniques  Propriétés métrique des courbes  Intégrales curvilignes  / Équations et systèmes différentielles  Généralités  Méthodes de résolutions explicites 2.1 Équations à variables séparables 2.2 Équations à variables séparables 2.3 Systèmes différentielles linéaires à coefficients constants 2.2 Équations différentielles linéaires

T/	ABLE	DES MATIÈRES	5
		2.7.1 Résolution par triangulation	
3	Intr	roduction au calcul variationnel	<b>7</b> 5
$\mathbf{V}$	M	lec-301 : Mécanique du solide indéformable	77
1	Tor	seurs	<b>7</b> 9
	1.1	Actions mécaniques	79
	1.2	Moment d'une force	79
	1.3	Torseur force	80
		1.3.1 Éléments de réduction	80
	1.4	Torseur de force répartie	80
	1.5	Torseur cinématique	80
	1.6	Torseur de liaisons	80
	1.7	Torseur déplacement infinitésimal	80
	1.8	Opérations sur les torseurs	80
2	Stat	tique du solide	81
	2.1	Principe fondamentale de la statique	81
	2.2	Principe des actions réciproques	81
	2.3	Applications aux cas usuelles	81
	2.4	Frottements secs	81
3	Cin	ématique du solide	83
	3.1	Composition des vitesses	83
	3.2	Composition des accélérations	83
4	Cin	étique du solide	85
	4.1	Géométrie des masses	85
		4.1.1 Notion de masse	85
		4.1.2 Centre de Gravité et référentiel barycentrique	86
	4.2	Torseur cinétique	86
	4.3	Matrice d'inertie	86

$\mathbf{V}$	VI Phy-301 : Électromagnétisme 1											
$\mathbf{V}$	VII Electrostatique											
V	VIII Magnétisme et Electromgnétisme 9											
IX	Phy302: Thermodynamique	93										
1	Transformations thermodynamiques  1.1 Description d'un système thermodynamique 1.1.1 Systèmes thermodynamiques 1.1.2 Grandeurs thermodynamiques et variables d'états 1.1.3 Équations d'états 1.1.4 Coefficients thermoélastiques  1.2 Transformations 1.3 Modèles 1.3.1 Modèle du gaz parfait 1.3.2 Modèle de Van der Waals, gaz réel 1.3.3 Modèle  1.4 Représentations graphique	95 96 96 97 97 97 98										
2	Premier principe           2.1 Préliminaires            2.1.1 Chaleur            2.1.2 Travail            2.1.3 Énergie interne            2.2 Premier principe de la thermodynamique            Second principe	99 99 99										
4	Machines thermiques	101										
5	Transitions de phase des corps purs	105										
$\mathbf{X}$	Annexes	107										

# Première partie

Mat-304 : Calcul matriciel et fonctions de plusieurs variables

Chapitre 1  $\label{eq:Repérage dans} \textbf{Repérage dans} \ \mathbb{R}^3$ 

Chapitre 2  $\label{eq:chapitre 2} \textbf{Repérage dans} \ \mathbb{R}^3$ 

# Dérivation en plusieurs variables

### 3.1 Définition et premières propriétés

En dimension 1, la dérivée ne peut être approchée par uniquement 2 directions (par la gauche et par la droite). A partir de la dimension 2, il y a infinité de directions par lesquelles approchée la dérivée.

### Schéma

On peut commencer par dérivée selon les vecteurs de bases de  $\mathbb{R}^n$  (les vecteurs  $\overrightarrow{u_n}$ ), les vecteurs

# **P**Définition

La dérivée partielle de  $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$  par rapport à  $x_i$ ,  $1 \ge i \ge n$ , en  $\overrightarrow{a} \in \mathscr{D}_f$ , noté  $\frac{\partial f(\overrightarrow{a})}{\partial x_i}$  ou  $f'_{x_i}(\overrightarrow{a})$  est la valeur de la limite suivante quand elle existe :

$$\frac{\partial f(\overrightarrow{a})}{\partial x_i} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_i + t, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{t}$$

Dans le cas d'une fonction défini comme  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ , on a :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t,y) - f(x,y)}{t}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{s \to 0} \frac{f(x+s,y) - f(x,y)}{s}$$

De manière pratique, on choisit la variable par rapport à laquelle on dérive l'expression, on considère toutes les autres constantes et on dérive "normalement".

# **Exemple**

1. Soit  $f(\overrightarrow{x}) = 3x_1^3x_3 + 2x_1x_2^2 - 5x_3^4$ , on a:

$$\frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_1} = 9x_1^2x_3 + 2x_2^2$$

$$\frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_2} = 4x_1 x_2$$
$$\frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x_3} = 3x_1^3 - 20x_3^3$$

2. Soit 
$$f(x,y) = e^{xy^2}$$
, on a:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y^2 e^{xy^2}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2xy e^{xy^2}$$

Il possible de dérivée selon une direction quelconque, pour cela on définit la dérivée directionnelle.



### Définition

Soient  $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \overrightarrow{d} \in \mathcal{D}_f$  et  $\overrightarrow{h} \in \mathbb{R}^n$ .

La dérivée directionnelle de f en  $\overrightarrow{a}$  suivant la direction  $\overrightarrow{h}$  est la quantité défini par la limite suivante si elle existe :

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{h}}(\overrightarrow{a}) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(\overrightarrow{a} + \epsilon \overrightarrow{h}) - f(\overrightarrow{a})}{\epsilon}$$

### 3.1.1Gradient et matrice jacobienne

On définit pour les fonction



### Définition

Soit un champ de vecteur  $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ , on considère les dérivées partielles selon chacune des variables.

Selon la valeur de p, on créé deux objets :

Si p=1, on définit le gradient de la fonction scalaire f en  $\overrightarrow{a}$ :

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{\nabla} f(\overrightarrow{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} (\overrightarrow{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} (\overrightarrow{a}) \end{pmatrix}$$

Si p > 1, on défini la matrice jacobienne  $J_f(\overrightarrow{d})$  (de dimension  $n \times p$ ) de la fonction

$$f \text{ en } \overrightarrow{a} :$$

$$J_f(\overrightarrow{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(\overrightarrow{a}) \end{pmatrix}$$

- 3.2 Différentielle
- 3.3 Dérivées d'ordres supérieurs

# Opérateurs différentielles

Attention, l'expression des opérateurs changent selon le système de coordonnées.

# 4.1 Le gradient $\overrightarrow{\nabla}$

Nous avons déjà définit le gradient d'une fonction évalué en un point, on va maintenant définir l'opérateur gradient.

### **D**éfinition

On appelle gradient, l'opérateur définit comme il suit :

$$\overrightarrow{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Le gradient d'une fonction scalaire  $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$  est donc :

$$\overrightarrow{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \times f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \overrightarrow{grad(\overrightarrow{f})}$$

### **⊬**Propriété

Soit un champ scalaire  $\overrightarrow{f}$  dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , nous avons pour expression du gradient :

— En coordonnées cartésiennes (par définition) :

$$\overrightarrow{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \overrightarrow{u_x} + \frac{\partial f}{\partial y} \overrightarrow{u_y} + \frac{\partial f}{\partial z} \overrightarrow{u_z}$$

— En coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\nabla} f = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \overrightarrow{u_r} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \overrightarrow{u_z}$$

— En coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\nabla} f = \frac{\partial r}{\partial x} \overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \overrightarrow{u_\phi}$$

### **ODémonstration**

→ soit

### 4.2 La divergence div

### Définition

Soit un champ de vecteurs  $\overrightarrow{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathscr{C}^1$  sur  $\mathscr{D}_f$ . La divergence de  $\overrightarrow{f}$  est donné par :

$$div(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{f} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

### Remarque

La divergence est également égale à la trace de la matrice jacobienne.

$$div(\overrightarrow{f}) = Tr(J_f)$$

### **₽**Propriété

Soit un champ scalaire  $\overrightarrow{f}$  dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , nous avons pour expression de la divergence :

— En coordonnées cartésiennes (par définition) :

$$div(\overrightarrow{f}) = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

— En coordonnées cylindriques :

$$div(\overrightarrow{f}) = \frac{1}{r} \frac{\partial (rf_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

— En coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\nabla} f = \frac{\partial r}{\partial x} \overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \overrightarrow{u_\phi}$$

### 

### 4.3 Le rotationnel rot

# **D**éfinition

Soit un champ de vecteurs  $\overrightarrow{f}: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  de classe  $\mathscr{C}^1$  sur  $\mathscr{D}_f$ , de coordonnées  $f = (f_1, f_2, f_3)$ .

Le rotationnel de  $\overrightarrow{f}$  de ce champ est défini par :

$$rot(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

### 4.4 Le laplacien $\Delta$

# **D**éfinition

Soit une champ scalaire  $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$  de classe  $\mathscr{C}^2$  sur  $\mathscr{D}_f$ . Le laplacien, noté  $\Delta$   $\nabla^2$ , est donné par :

$$\Delta \overrightarrow{f} = \nabla . \overrightarrow{\nabla} f = div(\overrightarrow{grad}f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^{2} f}{\partial x_{i}^{2}}$$

# 4.5 Équations aux dérivées partielles

Intégration en plusieurs variables

# Calcul matriciel



### Définition

Une matrice  $n \times m$  à coefficients réels est un tableau de nombres réels de n lignes et m

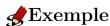
On note  $a_{ij}$  le coefficient à la i-ème et à la j-ème colonne.

On représente une matrice de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Une matrice  $n \times m$  à valeurs réelles appartient à l'ensemble des matrices  $n \times m$ , noté  $\mathbb{M}^{n\times m}(\mathbb{R}).$ 

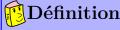
Toute application linéaire ou système d'équation linéaire peut être écrit sous forme matricielle.



> ex de base On considère l'application

### 6.1 Calcul matriciel

On commence par définir l'addition de deux matrices.



| Soient deux matrices A et B de dimension  $n \times m$ .

L'addition de ces deux matrices est donnée par :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

# Définition

Soient deux matrices A de dimension  $n \times m$  et B de dimension  $m \times p$ . La multiplication de ces deux matrices nous donnera une matrice C de dimension  $n \times p$ .

Le calcul des coefficients de la matrice C est donné par la formule :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \times b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

Attention, la multiplication matricielle n'est pas commutative

### **Exemple**

 $\geq$  On considère les matrices A = et B =

### Définition

Soit une matrice A de dimension  $n \times m$ .

L'opération de transposition de cette matrice nous renverra la matrice transposée de A, B de dimension  $m \times n$ .

Cet opération est défini comme il suit :

$$A^{\mathrm{T}}$$

### **Définition**

Soit une matrice A de dimension  $n \times m$ .

On appelle trace de la matrice A la somme de tous ses termes diagonaux.

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

### Propriété

Soient A et B de matrice et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$$--\operatorname{Tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{Tr}(A)$$

$$-\operatorname{Tr}(A^{\mathrm{T}}) = \operatorname{Tr}(A)$$

```
— Si A et B sont multipliable : Tr(AB) = Tr(BA)
— Si A et B sont semblables : Tr(A) = Tr(B)
```

- 6.1.1 Multiplication matricielle
- 6.1.2 Transposition matricielle
- 6.1.3 Propriétés et caractéristiques de matrices
- 6.2 Matrices particulières
- 6.2.1 Matrice carrée et rectangulaire
- 6.2.2 Matrice élémentaire et algorithme de Gaus-Jordan
- 6.2.3 Matrices de passage
- 6.2.4 Matrices triangulaires
- 6.3 Déterminants et inversion de matrices
- 6.3.1 Comatrice et matrice adjointe

# Diagonalisation

La diagonalisation est le second "problème principal" d'algèbre, le premier étant la résolution de systèmes linéaires. Diagonaliser une matrice revient à la "simplifier".

L'intérêt d'un tel procédé est qu'il simplifie certains calculs tel que la multiplication ou l'exponentiation.

La diagonalisation consiste à chercher une base  $\mathcal{B}$  de l'espace, dans laquelle la matrice A est diagonale.

Dans la suite de ce chapitre nous ne considérerons que des matrices carrées.



Une application linéaire  $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$  est dite diagonalisable si et seulement si  $\exists \mathscr{B}$  une base de  $\mathbb{R}^n$  tel que sa matrice représentative  $A_{\mathscr{R},\mathscr{B}}(f)$  est diagonale.

# 7.1 Éléments propres

Il convient dans un premier temps de définir les différents objets qui servirons à la diagonnalisation, ces objets sont appelés éléments propres.

### **D**éfinition

Soit A une matrice  $n \times n$ .

- On dit que  $\lambda \in \mathbb{C}$  est une valeur propre de A s'il existe  $x \in \mathbb{C}^n$  avec  $x \neq 0$  tel que  $Ax = \lambda x$ .
- On appelle alors le vecteur x le vecteur propre de A associé à la valeur propre  $\lambda$ .
- On appelle spectre de A l'ensemble des valeurs propres de A.
- On appelle sous espace propre de A (associé à la valeur propre  $\lambda$ ), noté  $E_{\lambda}$ , l'ensemble de tous les vecteurs x tel que  $Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A \lambda I_n)x = 0$ . Autrement dit,  $E_{\lambda} = \ker(A - \lambda I_n) = \{x \in E | Ax = \lambda x\}$

### **Exemple**

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ 

Par définition d'une valeur propre  $\lambda$ , nous cherchons un vecteur x tel que  $Ax = \lambda x$ . Dans le cas présent, on a :

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Il nous faut donc résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = \lambda x_1 \\ 4x_1 + 3x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$$

Sa résolution nous renvoie notamment le vecteur x=(7,7) et il se trouve que  $Ax=7\times x$ . On a donc que  $\lambda=7$  une valeur propre de la matrice A et x=(1,1) est vecteur un propre de la matrice A associé à la valeur propre  $\lambda=7$ .

L'utilisation de la définition d'une valeur propre pour son calcul est une opération assez fastidieuse, c'est pour cela que l'on passe par d'autres moyens pour les déterminer. On utilise pour cela le polynôme caractéristique de la matrice A.

### 7.2 Polynôme caractéristique et calcul des éléments propres

Le calcul des éléments propres est plus facile en passant par le polynôme caractéristique.

### Définition

Soit une application linéaire  $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$  et sa matrice représentative dans la base  $\mathscr{B}$   $A_{\mathscr{B}}(f)$ . On appelle polynôme caractéristique de l'application f, le polynôme défini de la facon suivante :

$$P_f(\lambda) = P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

### \*Proposition

Les valeurs propres  $\lambda$  de A sont les racines du polynôme caractéristique.

 $\lambda$  est une valeur propre de la matrice  $A \Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0$ 

### **Exemple**

Soit la matrice A définie comme  $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ .

On commence par chercher les valeurs propres de A. Par la proposition précédente, on a :

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & 4 \\ 3 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (7 - \lambda)(6 - \lambda) - 12$$

On cherche donc les racines de  $P_A(\lambda)$ .

$$P_A(\lambda) = 0$$
  

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 13\lambda + 30 = 0$$
  

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 3 \text{ et } \lambda_2 = 10$$

Les valeurs propres de la matrice A sont donc  $\lambda_1=3$  et  $\lambda_2=10$ 

On constate, assez aisément, que la détermination des valeurs propres à l'aide du polynôme caractéristique est beaucoup plus facile et rapide.

### <sup>L</sup>Propriétés

Soit la matrice A et son polynôme caractéristique  $P_A(\lambda)$ .

— Si l'on injecte 0 dans le polynôme caractéristique il nous renverra la valeur du déterminant de cette matrice :

$$P_A(0) = \det(A)$$

- Le polynôme caractéristique possède n racines dans l'ensemble  $\mathbb C$
- Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.
- Le polynôme caractéristique d'une matrice est égale à celui de sa transposée  $P_A(\lambda) = P_{A^T}(\lambda)$ .

Le polynôme caractéristique nous donne un moyen simple de déterminer les valeurs propres. De ces valeurs propres, on peut déduire le reste des éléments propres de la matrice.

Afin de pouvoir continuer sereinement, nous allons introduire les multiplicités algébriques et géométriques, qui seront utiles pour la suite.



- On appelle multiplicité géométrique d'une valeur propre  $\lambda$ : la dimension du sous espace propre associé à la valeur propre  $\lambda$ .
- On appelle multiplicité algébrique d'une valeur propre  $\lambda$ : la multiplicité de  $\lambda$  en tant que racine du polynôme caractéristique.

### Propriété

Soit  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$ , la trace de A est égale à la somme des valeurs propres multipliées avec leur multiplicité propre.

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \times a_i$$

Cette propriété permet une première vérification de la validité des éléments propres.



### - Méthode : Détermination des éléments propres

- 1. Déterminer le polynôme caractéristique
- 2. Trouver les valeurs propres de A, en déduire le spectre de A
- 3. Rechercher les vecteurs propres associés au valeurs propres  $\lambda$
- 4. Déterminer les sous espaces propres  $E_{\lambda}$  associés aux valeurs propres  $\lambda$ . Pour ce faire, il suffit de trouver le noyau de la matrice  $A - \lambda I_n \Leftrightarrow \ker(A - \lambda I_n)$ .

# **Exemple**

On se donne la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ 

On commence par poser  $A - \lambda I_3$ 

$$A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -1 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 & -1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = B$$

Le polynôme caractéristique nous est donné par le déterminant de cette nouvelle matrice

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det(B) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 & -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix}$$

On choisi de développer le déterminant selon la deuxième ligne, en effet celui-ci nous serra plus facile a calculer. On a donc:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = (2 - \lambda)((3 - \lambda)^2 - 1)$$

On sait que les racines du polynôme caractéristique, sont les valeurs propres de A, donc :

$$\Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0$$
  
 
$$\Leftrightarrow (2 - \lambda)((3 - \lambda)^2 - 1) = 0$$
  
 
$$\Leftrightarrow (2 - \lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = 0$$

Le premier facteur nous renvoie  $\lambda = 2$  et le deuxième facteur nous donne  $\lambda_1 = 2$  et  $\lambda_2 = 4$ . On a donc les valeurs propres de A qui sont :  $\lambda_1 = 2$  valeur propre de multiplicité algébrique 2,  $\lambda_2 = 4$  valeur propre de A de multiplicité algébrique 1.

On en déduit le spectre de  $A: Spec(A) = \{2, 4\}$ 

On souhaite maintenant déterminer les vecteurs propres x associées aux valeurs propres  $\lambda$ .

Pour une valeur propre  $\lambda$  donnée, la recherche du vecteur propre associée passe par la résolution de l'égalité  $(A - \lambda I_3)x = 0$ .

Pour la valeur propre  $\lambda_1 = 2$  on a  $(A - 2I_3)x = 0$ .On commence par poser  $A - 2I_3$ :

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = C$$

Il nous faut donc résoudre :

$$\Leftrightarrow (A - 2I_3)x = 0$$

$$\Leftrightarrow Cx = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

On peut décomposer le vecteur :

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il y a donc deux vecteurs propres  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  associées a la valeur propre  $\lambda_1 = 2$ .

Pour la valeur propre  $\lambda_2=4$  on pose  $(A-4I_3)x=0$ . On effectue un raisonnement analogue au précédent :

$$A - 4I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = D$$

On cherche  $ker(A - 4I_3)$ :

$$\Leftrightarrow \ker(A - 4I_3)$$

$$\Leftrightarrow \ker D$$

$$\Leftrightarrow Dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

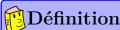
Ici il y a un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_2 = 4$  qui est  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Et enfin, a partir des vecteurs propres on déduit les sous espaces propres, ici :

$$E_{\lambda_1} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\0\\1 \end{pmatrix}\right)$$
$$E_{\lambda_2} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1\\0\\1 \end{pmatrix}\right)$$

### 7.3 Diagonalisation

Revenons sur la définition d'une matrice diagonalisable, pour en donner une définition plus mathématique.



La matrice  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$  est diagonalisable, s'il existe une matrice diagonale D et une matrice P inversible telles que  $A = PDP^{-1}$ , où P est la matrice de passage entre la base canonique et la base  $\mathscr{B}$  où la matrice D existe.

Une propriété qui viens directement a l'esprit est que les matrices A et D sont semblables (par définition).

Tout l'enjeu sera donc de déterminer la matrice de passage P.

Par ailleurs, il peut être intéressant de savoir si une matrice est diagonalisable.

### \*Théorème : Critère de diagonalisation

Soit  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}(\mathbb{R})$ . La matrice A est diagonalisable  $\Leftrightarrow \forall i = 1, ..., k$  on a  $\dim(E_{\lambda_i}) =$  multiplicité algébrique de  $\lambda_i$ 

### **∕** Corollaire

| Si  $P_A(\lambda)$  admet n racines réelles distinctes  $\Leftrightarrow$  A est diagonalisable

Une fois le critère de diagonalisation ou son corollaire vérifié on peut déduire la matrice diagonale D ainsi que le la matrice de passage P.

### **⊬**Propriété

Soit la matrice  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$  et ses valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  et leurs multiplicités  $a_1, \dots, a_k$  associées. La matrice diagonale D est donné par :

où les valeurs propres  $\lambda_i$  se répète autant fois que la valeur de leur multiplicité  $a_i$ .

Nous avons la matrice diagonale, maintenant il nous faut trouver la matrice de passage P.

### Propriété

Soit la matrice  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$  et ses vecteurs propres  $x_1, \ldots, x_n$ . La matrice de passage entre la base canonique  $\mathscr{B}_c$  et la base où la matrice diagonale se trouve  $\mathscr{B}_D$ , est la matrice composée de tous les vecteurs propres de A.

$$P_{\mathscr{B}_c,\mathscr{B}_D} = \begin{pmatrix} x_1 \mid & \dots \mid & x_n \end{pmatrix}$$

L'ordre des valeurs propres n'influe pas sur le résultat.

Il est néanmoins nécessaire de bien faire attention a garder l'ordre choisi sinon les calculs s'en trouveront erroné.

### - Méthode: Diagonalisation d'une matrice

- 1. Déterminer le polynôme caractéristique
- 2. Trouver les valeurs propres de A.
- 3. Factoriser le polynôme caractéristique.
- 4. Rechercher les sous espaces propres et leurs dimensions (multiplicité géométrique)
- 5. Déduire la matrice P et  $P^{-1}$



**∤** frv

La diagonalisation est une notion qui nous aide a déterminer des extremums de fonctions (Cf. Chapitre 8 : Extremums en plusieurs variables), permet d'analyser des relations de récurrences ou encore permet de résoudre des systèmes différentiels linéaires (Cf. Mat-307, Partie 2, Chapitre 2 : Systèmes différentiels).

### -`@-Méthode :

- 1. Puissance d'une matrice :
  - (a) Diagonaliser la matrice A
  - (b) Calculer la puissance de la matrice diagonale D

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k^n \end{pmatrix}$$

(c) Utiliser les matrices P et  $P^{-1}$  pour repasser dans la base canonique :

$$A = PDP^{-1}$$

### 2. Étude d'une suite :

# Pour Bla b On a Calcudiago On co polyr On re On d 2. Puiss On se On co

1. Étude d'une suite :

On considère la suite de Fibonnacci définie de manière récurrente comme il suis :

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$$
 avec  $u_0 = u_1 = 1$ 

On cherche a exprimer le terme générale de la suite (forme explicite).

Pour ce faire on pose  $\binom{u_{n+1}}{u_n}$ .

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \\ u_n = \end{cases}$$

Bla bla...

On a donc:  $x_n = Ax_{n-1}$  avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Calculer le n-ième terme de la suite  $x_n = Ax_{n-1}$  revient à calculer  $x^n = Ax$ ??? On diagonalise la matrice A:

On commence par rechercher les éléments propres de la matrice. On cherche le polynôme caractéristique:

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1 - \lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$$

On résoud  $P_A(\lambda) = 0$ , on obtient les valeurs propres  $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  et  $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . On déduit la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0\\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

2. Puissance d'une matrice :

On se donne la matrice A = ( On cherche a calculer  $A^3$ .

On commence par diagonaliser la matrice.

### Matrices symétriques et formes quadratiques 7.4

### Éléments propres et diagonalisation d'une matrice symétrique

On rappel la définition d'une matrice symétrique et d'une matrice orthogonale.



### Définition

Soit  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}(\mathbb{R})$ .

$$A$$
 est symétrique  $\Leftrightarrow A = A^{\mathrm{T}}$ 

$$A$$
 est orthogonale  $\,\Leftrightarrow\,\, AA^{\rm T} = I_n \,\,\Leftrightarrow\,\, A^{-1} = A^{\rm T}$ 



On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

La matrice A est une matrice symétrique car A = A

La matrice B est une matrice orthogonale car :

$$BB^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{3}$$

### \*Théorème des axes principaux

Toute matrice symétrique A peut être diagonalisée à l'aide d'une matrice orthogonale : il existe  $\Gamma \in \mathbb{M}^{n \times n}(\mathbb{R})$  orthogonale et une matrice diagonale réelle  $\Lambda$  telles que :

$$A = \Gamma \Lambda \Gamma^{-1} = \Gamma \Lambda \Gamma^{T}$$



 $\begin{cases} & \text{On se donne la matrice } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}. \end{cases}$ 

### 7.4.2Formes quadratiques



### Définition

Soit  $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ q(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$ On dit que q est une forme quadratique sur  $\mathbb{R}^n$ 

### **E**Définition

On dit que la forme q(x) est :

- semi-définie positive si  $q(x) \ge 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ .
- semi-définie négative si  $q(x) \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ .
- définie positive si  $q(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

- définie négative si  $q(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ .
- non définie si q(x) change de signe.

# ^Proposition

La forme quadratique q est semi-définie (définie) positive si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice A de la forme sont positives.

# \*Critère de Silvester

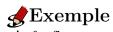
Une matrice A est semi-définie (définie) positive si et seulement si tous ses mineurs principales sont positifs, c'est à dire :

$$a_{11} \ge 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \ge 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \ge 0, \dots$$

Une matrice A est semi-définie (définie) négative si et seulement si les signes des mineurs principaux de A alternent :

$$a_{11} \le 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \le 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \le 0, \dots$$

Avec les  $\leq$  ou  $\geq$  sont respectivement remplacés pas < et > dans le cas des matrices définies



# Chapitre 8

Extremums en plusieurs variables

# Deuxième partie

Mat-307 : Courbes paramétrées et équations différentielles pour la physique

# Troisième partie Courbes

# Chapitre 1

# Courbes paramétrées

La trajectoire d'un corps dans un plan est déterminé par le couple de coordonnées (x, y) dépendant du temps t, c'est une équation paramétrique.

# **E**Définition

Soient f et g deux fonctions définies sur  $I \subseteq \mathbb{R}$ .

Le point M(t) de coordonnées (f(t), g(t)) décrit une courbe du plan C appelée courbe paramétrée (de paramètre t). La fonction de I sur (C) qui à t associe M(t) est un paramétrage de (C).

Les équations  $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$  définissent une représentation paramétrique de  $\mathscr{C}$ .

Notations: (x = x(t), y = y(t)) ou  $t \mapsto (x(t), y(t))$ 

Nous étudierons les propriétés des courbes paramétrées, qui peuvent être de deux natures :

- Cinématique : dépendantes du paramètre t.
  - ex : vitesse, accélération, ...
- Géométrique : indépendante du paramètre t.
  - ex: tangentes, ...

# Remarque

Par convention, on nomme le paramètre t le temps, bien que ce dernier peut n'avoir aucun rapport avec ce dernier.

De même, les vecteurs correspondants aux dérivées première et seconde, sont appelés respectivement vitesse et accélération.

# 1.1 Paramétrage et représentation graphique

La paramétrisation d'une courbe n'est jamais unique et il est possible de passer d'un paramétrage a l'autre.

#### Étude analytique d'une courbe paramétrée 1.2

#### 1.2.1 Domaine de définition et intervalle d'étude



# Définition

Le domaine de définition I du paramétrage est l'intersection des domaines de définition des fonctions x(t) et y(t).

$$\mathscr{D}_{\mathscr{C}} = \mathscr{D}_x \cap \mathscr{D}_y$$

Une fois le domaine de définition déterminée, on cherche à réduire le domaine de définition à un intervalle d'étude afin de simplifier l'étude. Pour ce faire, on utilise les propriétés de périodicité et de parités.

# Propriété

Soit la courbe  $\mathscr{C}$  défini par (x(t),y(t)). On étudie la périodicité des deux coordonnées. La coordonnée x(t) est périodique si  $x(t+T_1)=x(t)$  et la coordonnée y(t) est périodique  $si y(t+T_2) = y(t).$ 

Si  $T_1 = T_2 = T$  la période commune est T.

Si  $T_1 \neq T_2$  alors il faut déterminer la période commune T.

Pour ce faire, on a  $T = PPCM(T_1, T_2)$ .

La réduction de l'intervalle pour une courbe périodique de période T est [a, a + T] avec a = 0 ou  $a = \frac{T}{2}$ .

On rappelle que les fonctions sinus et cosinus sont  $2\pi$  périodique, et la tangente est  $\pi$ périodique.

Dans la plupart des cas, on fait en sorte que 0 soit dans l'intervalle pour pouvoir exploiter les propriétés de symétries.

# Propriété

Soit la courbe  $\mathscr{C}$  défini par (x(t), y(t)).

On étudie les propriétés de parités de chacune des coordonnées.

- Si x et y sont impaires, pour tout t la courbe est symétrique par rapport au centre
- Si x est impaire et y est paire, pour tout t la courbe est symétrique par rapport à l'axe  $(O_u)$ .
- Si x est paire et y est impaire, pour tout t la courbe est symétrique par rapport à l'axe  $(O_r)$
- Si x et y sont paires, pour tout t la courbe revient sur ces pas.

# **g**Exemple

On se donne un courbe  $\mathscr C$  défini par :

$$\mathcal{C} : \mathcal{D}_{\mathcal{C}} \to \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \begin{cases} x(t) = \sin(\frac{3t}{2}) \\ y(t) = \sin(\frac{t}{3}) \end{cases}$$

On recherche la période de chaque coordonnées :

$$x(t+T)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{3t}{2} + 2\pi\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3t + 4\pi\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(t + \frac{4\pi}{3}\right)$$

On déduit donc que la période de x(t) est  $T = \frac{4\pi}{3}$ .

$$y(t+T) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{t}{3} + 2\pi\right) \Leftrightarrow \sin\left(t + 6\pi\right)$$

On déduit donc que la période de y(t) est  $T = 6\pi$ .

On cherche maintenant la période commune : en cherchant PPCM(4,6). On obtient une période commune  $T=12\pi$ 

# 1.2.2 Étude des branches infinies

Une fois l'intervalle d'étude

# **P**Définition

Soit une courbe  $\mathscr{C}$  défini par ses coordonnées (x(t), y(t)) sur son domaine de définition  $\mathscr{D}_{\mathscr{C}}$ . On que dit que la courbe  $\mathscr{C}$  possède une branche infinie si au moins l'une des quantités suivantes : a, l ou m tend vers l'infini.

$$\lim_{t \to a} \mathscr{C} = \begin{cases} \lim_{t \to a} x(t) = l \\ \lim_{t \to a} y(t) = m \end{cases}$$

La définition ci-dessus, nous indique l'existence de branches infinies.

Mais il faut maintenant déterminer si la courbe  $\mathscr C$  possède des asymptotes ou des branches paraboliques.

Cette information nous permet de tracer les courbes plus facilement.

# Propriété

Soit une courbe  $\mathscr C$  défini par ses coordonnées (x(t),y(t)) sur son domaine de définition  $\mathscr D_{\mathscr C}$ . On détermine la nature des branches infinies ainsi que son équation, en suivant les critères ci-après :

- Si  $\lim_{t\to a} x(t) = \pm \infty$  et  $\lim_{t\to a} y(t) = y_0$  avec  $y_0 \in \mathbb{R}$ , la courbe admet une asymptote horizontale d'équation  $y = y_0$ .
- Si  $\lim_{t\to a} x(t) = x_0$  et  $\lim_{t\to a} y(t) = \pm \infty$  avec  $x_0 \in \mathbb{R}$ , la courbe admet un asymptote verticale d'équation  $x = x_0$
- Si  $\lim_{t\to a} x(t) = \pm \infty$  et  $\lim_{t\to a} y(t) = \pm \infty$ , alors possible asymptote ou branche parabolique :
  - Si  $\lim_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm \infty$ , la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique  $O_y$
  - Si  $\lim_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$ , la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique  $O_x$
  - Si  $\lim_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = a$ , il faut continuer l'étude :
    - Si  $\lim_{t\to a} y(t) ax(t) = \pm \infty$ , la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique y = ax.
    - Si  $\lim_{t\to a} y(t) ax(t) = b$  avec  $b \in \mathbb{R}$ , la courbe admet une asymptote oblique d'équation y = ax + b

SChéma et exemples

# 1.2.3 Étude locale et points singuliers

On commence dans un premier temps par définir le vecteur  $\overrightarrow{OM(t)}$  (autrement appelé  $\overrightarrow{M(t)}$ ), qui est défini par  $\binom{x(t)}{y(t)}$ .

Afin d'amorcer une étude locale d'une courbe paramétrée il convient de dériver ce vecteur, on a donc :  $\overrightarrow{M'(t)} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ , on obtient le vecteur vitesse.

Tout comme l'étude d'une fonction, tout ce qu'il de plus classique, l'essentiel de l'étude déroule au niveau des points d'annulations de ces dérivées.

# **Tangentes**

# **P**ropriété

Soit  $\mathscr{C}$  une courbe paramétrée par ses coordonnées x(t) et y(t). Nous considérons leurs dérivées, respectivement x'(t) et y'(t).

- Si  $x'(t_0) = 0$  et  $y'(t_0) \neq 0$ , la courbe admettra une tangente verticale en  $t = t_0$ .
- Si  $x'(t_0) \neq 0$  et  $y'(t_0) = 0$ , la courbe admettra une tangente horizontale en  $t = t_0$ .

On peut se convaincre assez facilement de la direction des tangentes à l'aide du petit raisonnement suivant.

En effet, si  $x'(t_0) = 0$ , la dérivée est entièrement portée par le vecteur unitaire  $\overrightarrow{y}$ , de ce fait la tangente ne peut être que verticale, et réciproquement.

# Exemple

On considère la courbe  $\mathscr C$  définie par :

$$\mathcal{C}: \mathcal{D}_{\mathcal{C}} \to \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \begin{cases} x(t) = \frac{4t^2 - 1}{t^3 + 1} \\ y(t) = \frac{4t^3 - t}{t^3 + 1} \end{cases}$$

On dérive la composante x(t):

$$x'(t) = \frac{x(-4x^3 + 3x + 8)}{(t^3 + 1)^2}$$

On résout l'équation x'(t) = 0.

On obtient  $S = \{0, 1, 46\}$ 

La courbe admet deux tangentes verticales.

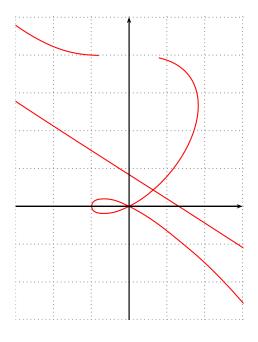
On dérive la composante y(t):

$$y'(t) = \frac{2t^3 + 12t^2 - 1}{(t^3 + 1)^2}$$

On résout l'équation y'(t) = 0.

On obtient  $S = \{-5, 99; -0, 3; 0, 28\}$ .

La courbe admet trois tangentes horizontales.



#### Points réguliers et singuliers

# **D**éfinition

Soit  $\mathscr{C}$  une courbe paramétrée par ses coordonnées x(t) et y(t). Nous considérons le vecteur vitesse  $\overrightarrow{v(t)}$  du point M(t).

- Si  $v(t_0) \neq \overrightarrow{0}$  alors la courbe admet en  $t = t_0$  un point régulier.
- Si  $v(t_0) = \overrightarrow{0}$  alors la courbe admet en  $t = t_0$  un point singulier.

Il est nécessaire de bien comprendre ce que sont ces deux points. Un point régulier est "un point normal de la courbe", c'est à dire que la courbe est tangente au vecteur vitesse  $\overrightarrow{v(t)}$ . Un point singuliers quant à lui est un point très particulier qui peut être de plusieurs natures. Néanmoins, son étude locale est, par définition, impossible en se cantonnant uniquement au vecteur vitesse.

Pour remédier à cela, on va faire un développement limité en  $t_0$ , au minimum à l'ordre 3. On rappel la formule de Taylor, pour une fonction f en un point  $x_0$  à l'ordre n:

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^n f^{(i)}(x_0) \frac{(x-x_0)^i}{i!}$$

On calcul les développements limités des deux coordonnées.

$$x(t) = x(t_0) + v_x(t_0)(t - t_0) + x''(t_0)\frac{(t - t_0)^2}{2!} + x^{(3)}(t_0)\frac{(t - t_0)^3}{3!} + \dots + o((t - t_0)^n)$$

et

$$y(t) = y(t_0) + v_y(t_0)(t - t_0) + y''(t_0)\frac{(t - t_0)^2}{2!} + y^{(3)}(t_0)\frac{(t - t_0)^3}{3!} + \dots + o((t - t_0)^n)$$

Puis on rassemble ces deux développement limités en un vecteur :

$$\overrightarrow{M(t)} = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x(t_0) \\ v_y(t_0) \end{pmatrix} (t-t_0) + \begin{pmatrix} x''(t_0) \\ y''(t_0) \end{pmatrix} \frac{(t-t_0)^2}{2} + \begin{pmatrix} x^{(3)}(t_0) \\ y^{(3)}(t_0) \end{pmatrix} \frac{(t-t_0)^3}{6} + \ldots + o(\|\overrightarrow{M(t)}\|^n)$$

Or par définition d'un point singulier  $(\overrightarrow{v(t_0)} = \overrightarrow{0})$ , on a :

$$\overrightarrow{M(t)} = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x''(t_0) \\ y''(t_0) \end{pmatrix} \frac{(t-t_0)^2}{2} + \begin{pmatrix} x^{(3)}(t_0) \\ y^{(3)}(t_0) \end{pmatrix} \frac{(t-t_0)^3}{6} + \dots + o(\|\overrightarrow{M(t)}\|^n)$$

Une fois cela fait nous cherchons les deux premiers vecteurs (associées a des degrés supérieurs à 2 dans le développement limité), non colinéaires. Ces deux vecteurs nous permettrons de définir la nature du point singulier, ainsi que le sens de parcours de la courbe à travers celui-ci.

# Propriété

Soit une courbe  $\mathscr C$  ayant un point singulier au point  $t=t_0$ .

Le développement limité de la courbe  $\mathscr C$  au point  $t=t_0$  à l'ordre n est le suivant :

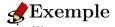
$$\overrightarrow{M(t)} = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} + \dots + \underbrace{\begin{pmatrix} x^{(p)}(t_0) \\ y^{(p)}(t_0) \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{l}} \underbrace{\frac{(t - t_0)^p}{p!}}_{p!} + \dots + \underbrace{\begin{pmatrix} x^{(q)}(t_0) \\ y^{(q)}(t_0) \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{m}} \underbrace{\frac{(t - t_0)^q}{q!}}_{q!} + \dots + o(\|\overrightarrow{M(t)}\|^n)$$

Avec les vecteurs  $\overrightarrow{l}$  et  $\overrightarrow{m}$ , les deux premiers vecteurs non colinéaires.

La nature du point singulier est donnée par les critères suivants :

- Si p est impair et q est pair, alors il s'agit d'un point régulier.
- Si p est impair et q est impair, alors il s'agit d'un point d'inflexion.
- Si p est pair et q est impair, alors il s'agit d'un point de rebroussement de  $1^{\text{ère}}$  espèce.
- Si p est pair et q est pair, alors il s'agit d'un point de rebroussement de  $2^{\text{nde}}$  espèce.

propriétés sur le sens de parcours demander à la prof Images à faires



#### Convexité

Dans le cas d'un point d'inflexion, il peut-être utile de chercher si avant et après lui la courbe est convexe ou concave.

#### 1.2.4 Tableau de variation

# 1.2.5 Applications

# - Méthode:

Soit une courbe  $\mathscr{C}$ , voici le déroulement de son étude :

- 1. Détermination de son ensemble de définition
- 2. Étude de la périodicité et des symétries pour un éventuelle réduction de l'intervalle d'étude.
- 3. Étude des limites et des branches infinies, déterminer les asymptotes.
- 4. Étude locale, recherche des tangentes et des possibles points de rebroussements et d'inflexion.
- 5. Dressage du tableau de variation.
- 6. Dessin de la courbe  $\mathscr{C}$ .

# **Exemple**

On considère la courbe  $\mathscr C$  définie par :

$$\mathcal{C} : \mathcal{D}_{\mathcal{C}} \to \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \begin{cases} x(t) = \frac{2t}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{2+t^3}{1+t^2} \end{cases}$$

On commence dans un premier temps par définir l'ensemble de définition. Dans notre cas, le dénominateur est commun aux deux fonctions.

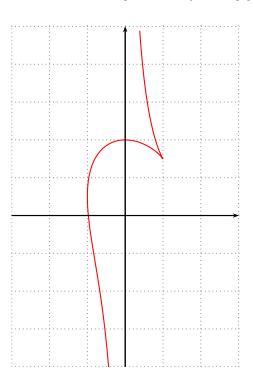
On cherche les valeurs interdites du dénominateur :

$$1 + t^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow t^2 = -1$$
$$\Leftrightarrow S = \{\emptyset\}$$

En effet, une racine carrée ne pouvant être négative dans  $\mathbb{R}$ , les fonctions n'admettent aucune valeur interdite. On obtient :  $\mathscr{D}_{\mathscr{C}} = \mathbb{R}$ 

52





# 1.3 Courbes en polaire

Cette section se concentrera sur l'étude des fonctions défini



Une courbe en polaire est une courbe paramétrée par :

$$\begin{array}{cccc} \mathscr{C} & : & \mathscr{D}_f & \to & \mathbb{R} \\ & \theta & \mapsto & r(\theta) \end{array}$$

où  $r(\theta)$  est la distance algébrique du point M à l'origine.

Autrement dit, 
$$\overrightarrow{OM(\theta)} = r(\theta) \overrightarrow{u_r(\theta)} = r(\theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

Le fait que  $r(\theta)$  soit une distance algébrique traduit le fait que ... Le point  $M(\theta)$  est donc bien à une distance  $|r(\theta)|$  mais dans la direction  $-\overrightarrow{u_r(\theta)}$ .

# **₽**Propriété

Soit  $\mathscr C$  une courbe en polaire, un paramétrage de la courbe  $\mathscr C$  serait :

$$r(\theta) \Leftrightarrow \begin{cases} x(\theta) = r(\theta)\cos(\theta) \\ y(\theta) = r(\theta)\sin(\theta) \end{cases}$$

1.4. CONIQUES 53

La plupart du temps, ramener une courbe en polaire en paramétrée n'est pas un choix judicieux pour son étude.

#### 1.3.1 Domaine de définition et intervalle d'étude

Périodicité : Si la période n'est pas multiple de  $2\pi$ , alors il faut faire des rotations pour déterminer la courbe dans son ensemble. Symétries :

# 1.3.2 Étude des branches infinies

# Propriété

- Si  $r(\theta)$  est périodique :
  - Si  $\lim_{\theta \to \theta_0} r(\theta) \sin \theta \theta_0 = l$  avec  $l \in \mathbb{R}$ , la courbe admet une asymptote oblique d'équation y = l dans le repère tourné d'angle  $\theta_0$ .
- Si  $r(\theta)$  n'est pas périodique :
  - Si  $\lim_{\theta \to \pm \infty} r(\theta) = \pm \infty$ , la courbe tend vers l'infini en spiralant.
  - Si  $\lim_{\theta \to \pm \infty} r(\theta) = 0$ , la courbe tend vers 0 en spiralant.
  - Si  $\lim_{\theta \to \pm \infty} r(\theta) = l$  avec  $l \in \mathbb{R}^*$ , la courbe s'enroule vers le cercle centré à l'origine et de rayon |l|.

# 1.3.3 Étude locale

# 1.3.4 Tableau de variation

# 1.3.5 Applications



Soit la courbe  $\mathscr{C}$  défini par la fonction  $r(\theta)$ :

$$\begin{array}{cccc} r(\theta) & : & \mathscr{D}_r & \to & \mathbb{R} \\ & \theta & \mapsto & 1 + \frac{1}{\theta - \frac{\pi}{4}} \end{array}$$

# 1.4 Coniques

# Chapitre 2

Propriétés métrique des courbes

# Chapitre 3 Intégrales curvilignes

# Quatrième partie Équations et systèmes différentielles

# Chapitre 1

# Généralités



# Définition

Une équation différentielle est une équation reliant une fonction et ses dérivées successives. L'inconnue est donc une fonction.

On peut l'écrire de façon très générale sous la forme  $F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0$  où y(x)est la fonction inconnue.

# Définition 🌣

On appelle système différentiel un ensemble d'équations différentielles, qui ne peuvent être résolues indépendamment les unes des autres.

Il se présente sous la forme :

$$\begin{cases} a_n y_1^{(n)} + a_{n-1} y_1^{(n-1)}(t) + \dots + a_2 y_1''(t) + a_1 y_1'(t) + a_0 y_1(t) = b_1(t) \\ \vdots \\ c_n y_k^{(n)} + c_{n-1} y_k^{(n-1)}(t) + \dots + c_2 y_k''(t) + c_1 y_k'(t) + c_0 y_k(t) = b_k(t) \end{cases}$$

où les  $y_k$  sont les fonctions inconnues,  $a_n$  et  $c_n$  des coefficients et  $b_k(t)$  représente les second membres des équations.

Courbe intégrale

# Chapitre 2

# Méthodes de résolutions explicites

Nous allons dans ce chapitre explorer les différentes méthodes de résolution (selon le type d'équation) qui permettent de résoudre une équation différentielle ou un système différentielle de manière exacte.

#### Équations différentielles linéaires à coefficients constants 2.1



# **O**Définition

On qualifie une équation différentielle de linéaires à coefficients constants toute équation de la forme :

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y + b(t) = 0$$

# Propriété

On appelle polynôme caractéristique, le polynôme qui associe a chaque dérivées d'ordre n de l'équation homogène une variable r à la puissance n.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y + b(t) = 0 \Leftrightarrow a_n r^n + a_{n-1} y^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0$$

Si le polynôme caractéristique n'admet pour racine uniquement des racines simples  $r_1, r_2, \ldots, r_n \in$  $\mathbb{C}$ , l'ensemble des solutions est alors l'espace vectoriel engendré par  $e^{r_1t}, \ldots, e^{r_nt}$ .

#### Équations à variables séparables 2.2

# Définition

On dit qu'une équation différentielle est à variable séparées si l'on peut factoriser f(y,t)

en termes ne dépendant que de y ou que de t.

$$y' = f(y, t) = g(t)h(y)$$

# Exemple

- Soit  $y'(t) = t^2y(t)$ On peut factoriser par  $g(t) = t^2$  et h(y) = y, on a donc bien f(y,t) = g(t)h(y). L'équation est a variables séparables.
- Soit  $y'(t)y^2(t) = e^t$ On peut la réécrire :  $y'(t) = \frac{e^t}{y^2(t)}$ On peut factoriser par  $g(t) = e^t$  et  $h(y) = \frac{1}{y^2}$ . L'équation est à variables séparables.
- L'équation  $y'(t) + y(t) t^2 = 0$  n'est pas à variables séparables car l'on ne peut pas factoriser cette dernière.

# -\display-Méthode : Résolution d'une équation différentielle à variables séparées

- 1. On vérifie, par l'intermédiaire de la définition, si l'équation est à variables séparables.
- 2. On pose  $\frac{y'}{h(y)} = g(t)$ .
- 3. On intègre la quantité précédemment déterminer  $\int \frac{y'}{h(y)dt} = \int g(t)dt$ .
- 4. On effectue le changement de variable u=y donc du=y'dt, on obtient :  $\int \frac{du}{h(u)} = \int g(t)dt.$
- 5. On obtient : H(u) = G(t) + C où H et F sont respectivement les primitives de f et  $\frac{1}{q}$  et C une constante.
- 6. On cherche  $H^{-1}$  la fonction réciproque H.
- 7. On effectue  $y(t) = u = H^{-1}(F(t) + C)$

# Exemple

— Soit l'équation  $(e^t + 1)y' + e^t y^2 = 0$ . On souhaite savoir si l'équation est à variables séparables. On peut réécrire :  $y' = \frac{e^t}{e^t + 1} y^2$  avec  $g(t) = \frac{e^t}{e^t + 1}$  et  $h(y) = y^2$ . L'équation est à variables séparables. On pose donc :

$$\int \frac{y'}{h(y)} dt = \int g(t) dt$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{y'}{y^2} dt = \int \frac{-e^t}{e^t + 1} dt$$

$$\Leftrightarrow -\int -\frac{y'}{y^2} dt = \int \frac{-e^t}{e^t + 1} dt$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y} + C_1 = \ln(e^t + 1) + C_2$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{\ln(e^t + 1) + C} \text{ avec } C = C_2 - C_1$$

La solution de l'équation est donc :  $y(t) = \frac{1}{\ln(e^t + 1) + C}$ 

— Soit l'équation  $y' = e^t y^2(t)$ .

On voit facilement que l'équation est à variables séparables.

On pose:

$$\frac{y'(t)}{y^2(t)} = e^t$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{y'(t)}{y^2(t)} = \int e^t dt$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{du}{u^2} = \int e^t dt \text{ avec } u = y \Rightarrow du = y'(t)dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{u} = e^t + C$$

# 2.3 Systèmes différentielles linéaires

# 2.3.1 Résolution par diagonalisation

# Diagonalisation dans $\mathbb{R}$

Dans un premier temps nous allons nous intéresser à la résolution des systèmes différentiels linéaire d'ordre 1 homogène.

### ${}^{f t}$ Théorème

Soit un système différentiel linéaire d'ordre 1 et sa représentation matriciel.

$$\begin{cases} y_1' = a_1 y_1 + b(t) \\ \vdots \\ y_n' = c_1 y_n + b_n(t) \end{cases} \Leftrightarrow Y'(t) = AY(t) + B(t)$$

On considère la matrice diagonale D (obtenue après diagonalisation de A), ses valeurs propres  $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$  ainsi que ses vecteurs propres  $v_1, \ldots, v_n$ .

Une solution homogène du système (B=0) est de la forme :

$$Y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \ldots + \alpha_n e^{\lambda_n t} v_n$$

**^**^^^^^

# **O**Démonstration

Soit un système différentiel linéaire d'ordre 1 et sa représentation matriciel :

$$Y' = AY$$

Par hypothèse, nous considérons A diagonalisable, donc :

$$Y' = PDP^{-1}$$

On pose  $P^{-1}Y = Z$  on peut réécrire :

$$PZ = PDZ$$

On dérive la quantité PZ, P étant constante on obtient PZ', donc :

$$PZ' = PDZ$$

La matrice P est, par définition, inversible (matrice de passage), on peut donc simplifier par P.

$$Z' = DZ$$

On obtient donc le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ y_n' = \lambda_n y_n \end{cases}$$

Et en résolvant, les équations une a une du système on obtient finalement :

$$\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ y_n(t) = C_n e^{\lambda_n t} \end{cases}$$

Donc  $y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + C_n e^{\lambda_n t}$ 

# **Exemple**

Nous souhaitons résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} -x' + x + 3y = 0 \\ -y' + 4x - 3y = 0 \end{cases}$$

avec les conditions x(0) = a et y(0) = b.

On commence par isoler la dérivée la plus haute.

$$\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = 4x - 3y \end{cases}$$

On cherche sa représentation matriciel, on pose  $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

On peut écrire:

$$Y' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Partons à la recherche de la matrice diagonale D et notamment des éléments propres de A.

Ici  $P_A(\lambda) = (1 - \lambda)(-3 - \lambda) - 12$ , sa résolution nous renvoie :  $\lambda_1 = -5$  et  $\lambda_2 = 3$ .

On recherche les vecteurs propres associés aux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

La recherche des vecteurs et sous-espaces propres nous donne :

La matrice A est diagonalisable, on en déduit la matrice D:

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On peut donc réécrire le système comme :

$$Y' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Il nous faut donc résoudre:

$$\begin{cases} x' = -5x \\ y' = 3y \end{cases}$$

Par le théorème précédent, on déduit :

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-5t} \\ y(t) = C_2 e^{3t} \end{cases}$$

Application des conditions initiales:

$$x(0) = C_1 e^{-5 \times 0} = a \Rightarrow C_1 = a$$

$$y(0) = C_2 e^{3 \times 0} = b \Rightarrow C_2 = b$$

Les solutions du système sont données par :

$$\begin{cases} x(t) = ae^{-5t} \\ y(t) = be^{3t} \end{cases}$$

On s'intéresse désormais aux solutions particulières de tels systèmes.

### ${}^{ullet}$ Théorème

Soit un système différentiel linéaire d'ordre 1 et sa représentation matriciel.

$$\begin{cases} y_1' = a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n + b \\ \vdots \\ y_n' = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n + b_n \end{cases} \Leftrightarrow Y' = AY + B$$

On pose Y=PV où P est la matrice de passage entre la base canonique et la base où se trouve la matrice diagonale.

Les solutions particulières d'un tel système sont données comme il suit :

$$V' = DV + \underbrace{P^{-1}B}_{C} \Leftrightarrow \begin{cases} v'_1 = \lambda_1 v + c_1 \\ \vdots \\ v'_n = \lambda_n + c_n \end{cases}$$

Pour revenir sur la variable y il suffit d'appliquer la matrice  $P^{-1}$  sur le système défini par la variable v.

# **ODémonstration**

Soit le système sous forme matricielle, Y' = AY + B.

On considère le vecteur V tel que Y = PV

$$\Leftrightarrow Y' = AY + B$$

$$\Leftrightarrow (PV)' = APV + B$$

$$\Leftrightarrow PV' = APV + B$$

$$\Leftrightarrow V' = \underbrace{P^{-1}AP}_{D}V + P^{-1}B$$

$$\Leftrightarrow V' = DV + P^{-1}B$$

# $\mathscr{J}$ Exemple

On considère le système différentiel :

$$\begin{cases}
-z_1' + z_1 - z_2 = e^t \\
-z_2' + 2z_1 + 4z_2 = 0
\end{cases}$$

On isole la plus haute dérivée :

$$\begin{cases} z_1' = z_1 - z_2 + e^t \\ z_2' = 2z_1 + 4z_2 \end{cases}$$

On réécrit le système sous sa forme matricielle, pour ce faire on pose  $Y=\begin{pmatrix} z_1\\z_2 \end{pmatrix}$ . On a

donc:

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

On essaie de diagonaliser la matrice A.

On commence donc par rechercher les éléments propres.

Ici  $P_A(\lambda) = (1 - \lambda)(4 - \lambda) - 4$  et sa résolution nous donne  $\lambda_1 = 3$  et  $\lambda_2 = 2$ .

La recherche des sous-espaces propres nous renvoie :

$$E_{\lambda_1} = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$$

$$E_{\lambda_2} = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

La matrice est diagonalisable. On déduit donc :

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

On en profite pour déterminer la matrice de passage inverse :

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On déduit que  $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

On défini V tel que Y = PV, on a donc  $V' = DV + P^{-1}B$ .

$$\begin{split} \Leftrightarrow &V' = DV + P^{-1}B \\ \Leftrightarrow &V' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times V + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^t \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow &V' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times V + \begin{pmatrix} e^t \\ -2e^t \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} v_1' = 3v_1 + e^t \\ v_2' = 2v_2 - 2e^t \end{cases} \end{split}$$

On résout donc les deux équations indépendamment.

- 1. Recherche de la solution générale de l'équation  $v'_1 = 3v_1 + e^t$  (E).
  - (a) Résolution de l'équation homogène  $v_{1h}$ : On détermine l'équation homogène associée  $(E_0): v'_1 = 3v_1$ .

Par l'un des théorèmes précédent, on sait que les solutions de cette équation sont de la forme :

$$v_{1h}(t) = C_1 e^{3t}$$

La fonction  $v_{1h} = C_1 e^{3t}$  est solution générale de l'équation (E)

(b) Recherche d'une solution particulière  $v_{1p}$ :

On utilise la méthode de variation de la constante. Pour ce faire on pose  $C_1$ k(t), on a donc:

$$v_1(t) = k(t)e^{3t}$$
  
 $v'_1 = k'(t)e^{3t} + 3k(t)e^{3t}$ 

On peut réécrire (E) de la manière suivante :

$$\Leftrightarrow k'(t)e^{3t} + 3k(t)e^{3t} = 3k(t)e^{3t} + e^{t}$$

$$\Leftrightarrow k'(t) = e^{-2t}$$

$$\Leftrightarrow k(t) = \int e^{-2t} dt$$

$$\Leftrightarrow k(t) = \frac{1}{-2} \int e^{-2t}$$

$$\Leftrightarrow k(t) = \frac{1}{-2} e^{-2t}$$

On injecte la fonction k(t) dans la solution homogène :

$$v_{1p} = \frac{e^{-t}}{-2}e^{3t} = \frac{e^t}{-2}$$

La fonction  $v_{1p}(t)$  est une solution particulière de l'équation (E).

(c) Déduction de la solution générale de (E): Par le principe de superposition, on déduit la solution générale de l'équation :

$$v_1(t) = v_{1h} + v_{1p}$$

$$v_1(t) = C_1 e^{3t} - \frac{e^t}{2}$$

- 2. Recherche de la solution générale  $v_2' = 2v_2 2e^t$ :
  - (a) Résolution de l'équation homogène associée  $(E_0)$ : Par le même raisonnement que précédemment, on trouve que :

$$v_{1h}(t) = C_2 e^{2t}$$

(b) Recherche d'une solution particulière : On réutilise la méthode de variation de la constante. On pose  $C_2 = k(t)$ , alors :

$$v_2 = k(t)e^{2t}$$

$$v_2' = k'(t)e^{2t} + 2k(t)e^{2t}$$

On a donc:

$$\Leftrightarrow k'(t)e^{2t} + 2k(t)e^{2t} = 2k(t)e^{2t} - 2e^{t}$$

$$\Leftrightarrow k'(t) = -2e^{-t}$$

$$\Leftrightarrow k(t) = \int -2e^{-t} dt$$

$$\Leftrightarrow k(t) = -2\int e^{-t}$$

$$\Leftrightarrow k(t) = 2e^{-t}$$

On injecte la fonction k(t) dans la solution homogène :

$$v_{1p} = 2e^{-t}e^{2t} = 2e^t$$

La fonction  $v_{1p}$  est solution particulière de l'équation (E).

(c) Déduction de la solution générale : Par le principe de superposition, on a :

$$v_2(t) = C_2 e^{2t} + 2e^t$$

On peut alors réécrire le système précédent comme :

$$\begin{cases} v_1(t) = C_1 e^{3t} - \frac{e^t}{2} \\ v_2(t) = C_2 e^{2t} + 2e^t \end{cases}$$

Par la définition du vecteur V on peut écrire :

$$\Leftrightarrow Y = PV$$

$$\Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ -2v_1 - v_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} C_1 e^{3t} - \frac{e^t}{2} + C_2 e^{2t} + 2e^t \\ -2C_1 e^{3t} + e^t - C_2 e^{2t} - 2e^t \end{pmatrix}$$

Le système a donc pour solutions :

$$\begin{cases} z_1(t) = C_1 e^{3t} - \frac{e^t}{2} + C_2 e^{2t} + 2e^t \\ z_2(t) = -2C_1 e^{3t} + e^t - C_2 e^{2t} - 2e^t \end{cases}$$

# 2.4 Intégrales premières ou constantes du mouvement

Lorsqu'il n'est pas possible de résoudre de manière explicite une équation ou un système différentielle, il peut être judicieux de passer par une intégrale première (autrement appelée

constante du mouvement.



# 🛂 Définition

Pour un système autonome, la fonction V est une intégrale première si et seulement si la quantité  $\overrightarrow{\nabla}V \times f = 0$ 

# **&**Exemple

— Équations de prédation de Lokta-Volterra :

Il s'agit d'un couple d'équation différentielle, décrivant l'évolution des proies et des prédateurs présent dans un milieu. On pose x(t) le nombre de proie et y(t) le nombre de prédateurs. On suppose que le nombre de proie est linéairement proportionnel au nombre de prédateur et réciproquement.

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t) \\ y'(t) = -cy(t) + dy(t)x(t) \end{cases}$$

Où les constantes a, b, c et d sont positives dont chacune représente respectivement :

- la natalité naturelle des proies
- la mortalité liée aux prédateurs des proies
- la mortalité naturelle des prédateurs
- la natalité des prédateurs liée au nombre de prédateur

On constate que le système n'est pas linéaire, on ne peut donc pas résoudre le système par les méthodes présentés précédemment. On donne la constante du mouvement:

$$V(x,y) = dx - c\ln(x) + by - a\ln(y)$$

Les solutions du systèmes sont donc des courbes de niveaux de V(x,y)

#### Utilisation des formes différentielles 2.5

#### 2.6 Autres méthodes

Il est nécessaire pour la résolution des systèmes de les "convertir" en problèmes de Cauchy.

# Propriété

On peut réécrire une système différentiel sous une forme matriciel.

— Pour un système d'ordre 1 :

$$Y' = AY + B$$

— Pour un système d'ordre n :

$$Y^{(n)} = AY + B$$

où Y est le vecteur contenant toutes les dérivées d'ordre inférieur à n:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_k' \\ \vdots \\ y_1^{(n)} \\ \vdots \\ y_k^{(n)} \end{pmatrix}$$

## **Exemple**

On considère le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + e^t \\ \dot{y} = 2x + 4y \end{cases} \quad \text{Ici} : Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } b(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

. On peut donc écrire :  $\dot{Y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ 

Soit le système :

$$\begin{cases} x'' = -2\omega^2 x + \omega^2 y \\ y'' = \omega^2 x - 2\omega^2 y \end{cases}$$

On pose donc le vecteur Y contenant toutes les dérivées d'ordres inférieurs à 2. On a donc Y=(x,y,x',y'). Puis on fait sorte de retrouver le même système par multiplication. On obtient :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2\omega^2 & \omega^2 & 0 & 0 \\ \omega^2 & -2\omega^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc on peut écrire :  $Y' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2\omega^2 & \omega^2 & 0 & 0 \\ \omega^2 & -2\omega^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$ 

## 2.7 Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1

Diagonalisation dans  $\mathbb C$ 

### 2.7.1 Résolution par triangulation

### 2.7.2 Comportement des solutions

Comportement en fonction des valeurs propres

Comportement asymptotique

## Introduction au calcul variationnel

# Cinquième partie

Mec-301 : Mécanique du solide indéformable

## Torseurs

Le torseur est un objet français (Cocorico!), permettant de représenter toutes les actions que subit un solide.

C'est un outils qui facilite les calculs et la formulation des lois. En effet, il faudrait diviser les lois en plusieurs théorème pour complètement inclure les informations contenues dans un torseur.

### 1.1 Actions mécaniques

### 1.2 Moment d'une force

## Définition

On appelle moment en A de la force  $\overrightarrow{F}$  passant par le point P, du solide  $\Sigma$  :

$$\overrightarrow{M_A(\overrightarrow{F})} = \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{A}$$

Un moment représente la capacité d'une force a crée une rotation autour d'un axe.

On peut définir la formule de transport des moments qui permet, connaissant le moment en un point A du solide, de calculer le moments de cette force sur n'importe quel point du solide.

### **₽**Propriété

Soient A et B deux points de l'espace et  $\overrightarrow{M_A}(\overrightarrow{F})$ ,  $\overrightarrow{M_B}(\overrightarrow{F})$  leurs moments associés de la force  $\overrightarrow{F}$  appliquée en P au solide  $\Sigma$ .

On définit la formule de transport des moments :

$$\overrightarrow{M_B}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{M_A}(\overrightarrow{F}) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{F}$$

### **O**Démonstration

≯ Soit

- Méthode : Calcul d'un moment avec le bras de levier

### 1.3 Torseur force

### Définition

$$\{\tau\}_A = \left\{\overrightarrow{R}_{M_A}\right\}_A = \left\{\underbrace{\sum_{1}^{n} \overrightarrow{F_i}}_{\sum_{1}^{n} \overrightarrow{AP_i}} \wedge \overrightarrow{F_i}\right\}_A = \left\{R_x \quad R_y \quad R_z \atop M_x \quad M_y \quad M_z\right\}_A$$

### Remarque

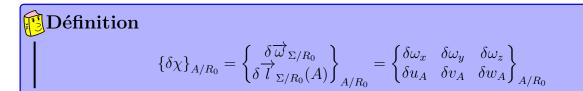
Dans le cas d'un point matériel le torseur force se réduit seulement à la résultante des forces

- 1.3.1 Éléments de réduction
- 1.4 Torseur de force répartie
- 1.5 Torseur cinématique

## Définition

$$\left\{\chi\right\}_{A/R_0} = \left\{\overrightarrow{V}_{\Sigma/R_0}(A)\right\}_{A/R_0} = \left\{\begin{matrix}\omega_x & \omega_y & \omega_z\\ u_A & v_A & w_A\end{matrix}\right\}_{A/R_0}$$

- 1.6 Torseur de liaisons
- 1.7 Torseur déplacement infinitésimal



### 1.8 Opérations sur les torseurs

## Statique du solide

- 2.1 Principe fondamentale de la statique
- 2.2 Principe des actions réciproques
- 2.3 Applications aux cas usuelles
- 2.4 Frottements secs

## Cinématique du solide

- 3.1 Composition des vitesses
- 3.2 Composition des accélérations

## Cinétique du solide

En cinématique, les mouvements des corps sont considérés en omettant l'inertie des ces derniers. En réalité, les mouvements des systèmes sont liés aux causes d'une part et à leurs inertie d'autre part.

La notion d'inertie caractérise la propriété du système de changer plus ou moins rapidement sa vitesse sous l'effet des forces qui lui sont appliquées. On simplifie souvent les choses, en réduisant l'inertie à la masse. Or le mouvement d'un solide ne dépend pas que de sa masse et des forces exercées sur ce dernier. En effet il dépend également de sa géométrie, de la distribution de sa masse, ...

L'étude de l'inertie s'effectue dans le cadre de la cinétique.

### 4.1 Géométrie des masses

### 4.1.1 Notion de masse

### Définition

A chaque solide  $\Sigma$  est associée un quantité (scalaire), noté m, qui représente la matière contenue dans ce dernier. On la définie comme il suit :

$$m = \int dm$$

avec dm l'élément infinitésimal de masse

Sachant cela il est possible de définit la masse à partir des distributions de masse :

- Masse volumique  $\rho$  (en  $kg.m^{-1}$ )
- Masse surfacique  $\sigma$  (en  $kg.m^{-2}$ )
- Masse linéique  $\lambda$  (en  $kq.m^{-1}$ )

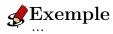
Par définition de ces trois grandeurs, on peut écrire l'élément infinitésimal de masse dm comme :

- $-dm = \rho(M)dV$
- $-dm = \sigma(M)dS$
- $-dm = \lambda(M)dl$

où dV, dS et dl sont respectivement les éléments infinitésimaux de volume, de surface et le déplacement élémentaire autour d'un point M.

En définitive, on peut donc écrire :

- $m=\int \rho(M)dV$  Très utilisée pour les solides en 3 dimensions  $m=\int \sigma(M)dS$  Utilisée pour les plaques
- $-m = \int \lambda(M) dl \rightarrow \text{Utilisée pour les tiges}$



- Centre de Gravité et référentiel barycentrique 4.1.2
- Torseur cinétique 4.2
- 4.3 Matrice d'inertie

# Sixième partie

Phy-301 : Électromagnétisme 1

Septième partie Electrostatique

# Huitième partie Magnétisme et Electromgnétisme

# Neuvième partie

Phy302: Thermodynamique

## Transformations thermodynamiques

### 1.1 Description d'un système thermodynamique

### 1.1.1 Systèmes thermodynamiques

Afin d'amorcer une étude thermodynamique (tout comme n'importe quel domaine de la physique), il faut définir le système étudié.

### **O**Définition

On appelle système thermodynamique, l'ensemble des corps étudiés contenus dans un volume délimité par une enveloppe, réelle ou fictive.

On distingue donc un milieu intérieur (le système) et un milieu extérieur. Selon les échanges que peut avoir le système avec un milieu extérieur on peut le qualifier de différents adjectifs.

- On dit que le système est ouvert, s'il peut échanger avec le milieu extérieur de la matière et de l'énergie.
- On dit que le système est fermé, s'il peut échanger que de l'énergie avec le milieu extérieur.
- On dit que le système est isolé, s'il ne peut échanger ni énergie ni matière avec le milieu extérieur.

### **Exemple**

- Un verre d'eau est un système ouvert, il peut échanger de l'énergie et de la matière avec le milieu extérieur (évaporation, liquéfaction).
- Le circuit de refroidissement d'un réfrigérateur est un système fermé, il ne peut pas échanger de matière (liquide en circuit fermé) mais il peut échanger de l'énergie avec le milieu extérieur.
- L'univers est considéré comme un système isolé (il n'est pas censé avoir de milieu extérieur donc aucun échange n'est possible).

#### 1.1.2Grandeurs thermodynamiques et variables d'états



Une variable d'état est une grandeur physique (mesurable) caractérisant l'état d'un système.

On se sert de tels variables pour l'établissement d'équations d'état.

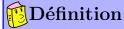
Ces variables peuvent-être qualifier :

- d'extensive, c'est à dire une grandeur qui dépend de la "taille". Pour le dire autrement, une grandeur est extensive si pour deux systèmes disjoints, leur réunion est la somme de ces grandeurs.
- d'intensive, c'est a dire une grandeur qui peut être mesuré de manière ponctuelle, elle ne dépend pas de la "taille" du système. Ces grandeurs ne sont pas additives.

### **Exemple**

Le volume V, la masse m et la quantité de matière n sont des grandeurs extensives. La température T ou  $\theta$  et la pression P sont des grandeurs intensives

A partir de ces grandeurs on définit l'équilibre d'un système thermodynamique.

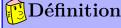


Un système est à l'équilibre thermodynamique si toutes ses variables d'état sont invariantes dans le temps (constantes) sans transfert de matière ou d'énergie.

### Pression

Température

### 1.1.3 **Equations** d'états



On appelle équation d'état une relation mathématique entre les différentes variables d'état caractérisant le système.

### Coefficients thermoélastiques 1.1.4



On définit trois grandeurs intensives nommées coefficients thermoélastiques.

Coefficient de dilatation isobare :  $\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{P}$ 

- Coefficient de compression isochore :  $\beta =$
- Coefficient de compressibilité isotherme :  $\chi_T =$

L'intérêt de tels coefficients est qu'ils sont facilement accessibles de manière expérimentale, et permettent d'accéder très rapidement a une équation d'état de n'importe quel matériau.

#### **Transformations** 1.2



### 🔁 Définition

On appelle transformation thermodynamique l'évolution d'un système d'un état d'équilibre initial a un état d'équilibre final.

On peut qualifier une transformation thermodynamique de plusieurs adjectif, que sont les suivants:

- Selon les caractéristiques du système :
  - isotherme : température T constante constante
  - isochore : volume V constant — isenthalpique : enthalpie H constante
  - isobare : pression P constante — isentropique : entropie S constante
  - isoénergétique : énergie interne U
- Selon les caractéristiques du milieu extérieur :
  - monobare : pression extérieur constante constante
  - monotherme : température extérieur
- Selon le type d'échange avec le milieu extérieur :
  - adiabatique : aucun transfert thermique réversible : aucune création d'entropie  $\delta Q = 0$  $\sigma_s = 0$

### Modèles 1.3

### Modèle du gaz parfait 1.3.1

Au prix de quelques approximations, il est possible d'étudier un gaz avec le modèle le plus simple qui soit, celui du gaz parfait.



### 5 Définition

Dans le modèle du gaz parfait on considère que :

— On suppose toutes les interactions internes du gaz (entre les molécule du gaz) sont négligeable.

Son équation d'état est :

$$PV = nRT$$

avec P: La pression du gaz en pascal, Pa

V: Le volume du gaz en mètres cubes,  $m^3$ 

n : La quantité de matière contenue dans le gaz en mole, mol

R: La constante d'état des gaz parfait qui vaut 8,314  $J.mol^{-1}.K^{-1}$ 

T: La température du gaz en kelvin,  ${\cal K}$ 

### Remarque

Tout gaz peut se comporter comme un gaz parfait s'il suffisamment dilué ( $V \to \infty$ ). Ou de manière analogue si la pression est suffisamment faible ( $P \to 0$ ).

- 1.3.2 Modèle de Van der Waals, gaz réel
- 1.3.3 Modèle
- 1.4 Représentations graphique

## Premier principe

- 2.1 Préliminaires
- 2.1.1 Chaleur
- 2.1.2 Travail
- 2.1.3 Énergie interne
- 2.2 Premier principe de la thermodynamique

Chapitre 3
Second principe

# Chapitre 4 Machines thermiques

Transitions de phase des corps purs

# Dixième partie Annexes