



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτά Μαθηματικά

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

3η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια Παράδοσης: 17/6/2020

Θέμα 1 (Συνδυαστική, 2.8 μον.). Εξετάζουμε τους τρόπους να μοιραστούν βιβλία Διακριτών Μαθηματικών σε 1000 φοιτητές. Στα υποερωτήματα που ακολουθούν, οι φοιτητές θεωρούνται διακεκριμένοι και κανένας φοιτητής δεν μπορεί να πάρει δύο ή περισσότερα βιβλία Διακριτών Μαθηματικών.

1. Με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν 200 αντίτυπα Hunter στους 1000 φοιτητές;
2. Με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν 200 αντίτυπα Hunter, 250 αντίτυπα Rosen, 100 αντίτυπα Liu, και 50 αντίτυπα Epp στους 1000 φοιτητές;
3. Έχουμε 1000 αντίτυπα από καθένα από τα βιβλία των Hunter, Rosen, Liu και Epp. Με πόσους τρόπους μπορούν να επιλέξουν βιβλίο Διακριτών Μαθηματικών οι 1000 φοιτητές;
4. Έχουμε 1000 αντίτυπα από καθένα από τα βιβλία των Hunter, Rosen, Liu και Epp. Με πόσους τρόπους μπορούν να επιλέξουν βιβλίο Διακριτών Μαθηματικών οι 1000 φοιτητές, αν πρέπει να διατεθεί τουλάχιστον ένα αντίτυπο από κάθε βιβλίο;
5. Έχουμε 4 (διακεκριμένα) σημεία διανομής όπου μοιράζεται μόνο το βιβλίο του Hunter. Με πόσους τρόπους μπορούν να κατανεμηθούν 1000 αντίτυπα του βιβλίου στα 4 σημεία διανομής, ώστε κάθε σημείο να μοιράσει 350 αντίτυπα το πολύ;
6. Έχουμε 4 σημεία διανομής, καθένα μοιράζει ένα από τα βιβλία των Hunter, Rosen, Liu, Epp. Σε κάθε σημείο διανομής υπάρχουν διαθέσιμα 1000 αντίτυπα από το βιβλίο που μοιράζεται. Με πόσους τρόπους μπορούν να σταθούν οι 1000 φοιτητές στις 4 ουρές αναμονής για να πάρουν βιβλίο;
7. Όπως στο (6), αλλά σε κάθε σημείο διανομής υπάρχουν διαθέσιμα μόνο 350 αντίτυπα από το βιβλίο που μοιράζεται.

Θέμα 2 (Συνδυαστική, 0.6 μον.). Διαμερίζουμε σε κλάσεις ισοδυναμίας το σύνολο των προτασιακών τύπων που ορίζονται σε $n \geq 5$ προτασιακές μεταβλητές p_1, \dots, p_n , ώστε κάθε κλάση της διαμέρισης να περιέχει όλους τους ταυτολογικά ισοδύναμους τύπους. (i) Πόσες είναι οι διαφορετικές κλάσεις που σχηματίζονται; (ii) Πόσες από τις κλάσεις αυτές περιέχουν τύπους ψ για τους οποίους αληθεύει η συνεπαγωγή $[(p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge p_4 \wedge p_5] \rightarrow \psi$;

Θέμα 3 (Συνδυαστική, Γεννήτριες Συναρτήσεις, 2.0 μον.). Στις προηγούμενη εξεταστική, είχαμε διαθέσιμα τέσσερα αμφιθέατρα, τα 1 – 4, για το μάθημα “Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα”. Στην εξέταση συμμετείχαν 190 φοιτητές. Στο Αμφ. 1 είχαμε 80 φοιτητές, στα αμφιθέατρα 2 και 3 είχαμε 35 φοιτητές στο καθένα, και στο Αμφ. 4 είχαμε 40 φοιτητές. Είχαμε μαζί μας 155 αντίτυπα θεμάτων τύπου A και μόλις 35 αντίτυπα θεμάτων τύπου B.

1. Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε τα δύο είδη θεμάτων στα 4 αμφιθέατρα, αν μας ενδιαφέρει μόνο πόσα θέματα κάθε είδους θα έχουμε σε κάθε αμφιθέατρο.
2. Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε τα δύο είδη θεμάτων, αν μας ενδιαφέρει ο τύπος του θέματος που θα πάρει κάθε φοιτητής (ως συνήθως, οι φοιτητές θεωρούνται διακεκριμένοι).
3. Ποια είναι η πιθανότητα να μην έχουμε θέματα τύπου B σε τουλάχιστον ένα από τα Αμφ. 2 ή 3;

4. Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει τους διαφορετικούς τρόπους να μοιράσουμε τους δύο τύπους θεμάτων στα τέσσερα αμφιθέατρα, αν μας ενδιαφέρει ο τύπος του θέματος που θα πάρει κάθε φοιτητής και θέλουμε να έχουμε τουλάχιστον 10 και άρτιο πλήθος θεμάτων τύπου Α στα Αμφ. 2, 3 και 4, και τουλάχιστον 15 θέματα τύπου Α στο Αμφ. 1.

Θέμα 4 (Γεννήτριες Συναρτήσεις, 1.6 μον.). Έστω ότι 100 φοιτητές καλούνται να συνδεθούν σε 100 εικονικές αίθουσες για να εξεταστούν στο μάθημα των Διακριτών Μαθηματικών. Θεωρούμε ότι οι εικονικές αίθουσες είναι πανομοιότυπες (δεν έχουμε διαφοροποίηση στην ώρα εξέτασης, στα θέματα, κλπ.). Θεωρούμε ακόμη ότι οι φοιτητές δεν είναι διακεκριμένοι και μας ενδιαφέρουν μόνο οι διαφορετικές κατανομές των φοιτητών (π.χ., μετράμε την κατανομή $(50, 50, 0, \dots, 0)$ μια μόνο φορά, αφού οι αίθουσες θεωρούνται πανομοιότυπες και δεν ενδιαφέρει σε ποιες ακριβώς αίθουσες πήγαν οι 50 φοιτητές και ποιες αίθουσες έμειναν άδειες). Προφανώς, σε πολλές από τις κατανομές, αρκετές αίθουσες μένουν κενές. Να διατυπώσετε τη Γεννήτρια Συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει το ζητούμενο, αν:

1. δεν υπάρχουν άλλοι περιορισμοί.
2. οι εικονικές αίθουσες που δεν είναι κενές πρέπει να έχουν διαφορετικό αριθμό φοιτητών.

Θέμα 5 (Γεννήτριες Συναρτήσεις, 2.0 μον.). (α) Θέλουμε να υπολογίσουμε το πλήθος των τρόπων να μοιράσουμε 500 διαφορετικά βιβλία στις βιβλιοθήκες 8 Ελληνικών Πανεπιστημίων. Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει το ζητούμενο, αν θεωρήσουμε ότι κάθε βιβλιοθήκη πρέπει να πάρει τουλάχιστον 20 βιβλία και το πολύ 100 βιβλία, και:

1. **δεν έχει** σημασία η σειρά με την οποία τα βιβλία φτάνουν στις βιβλιοθήκες.
2. **έχει** σημασία η σειρά με την οποία τα βιβλία φτάνουν στις βιβλιοθήκες.

(β) Να υπολογίσετε το πλήθος των δεκαδικών συμβολοσειρών μήκους $n \geq 4$ στις οποίες καθένα από τα ψηφία 0 και 1 εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά, καθένα από τα ψηφία 2 και 4 έχει άρτιο πλήθος εμφανίσεων, καθένα από τα ψηφία 7 και 9 έχει περιττό πλήθος εμφανίσεων, και δεν υπάρχουν περιορισμοί για το πλήθος των εμφανίσεων των υπόλοιπων ψηφίων (δηλ. των 3, 5, 6 και 8). *Σημείωση:* Αν δυσκολευτείτε στις πράξεις, είναι αποδεκτό να χρησιμοποιήσετε κατάλληλο λογισμικό.

Θέμα 6 (Αναδρομικές Σχέσεις, 1 μον.). Θέλουμε να προσδιορίσουμε το πλήθος των συμβολοσειρών μήκους n που σχηματίζονται από 6 χαρακτήρες, π.χ. τα a, b, c, d, e, f στις οποίες οι χαρακτήρες a ή b δεν εμφανίζονται (σε οποιαδήποτε θέση) μετά τους χαρακτήρες c ή d (π.χ. οι συμβολοσειρές $ca, cefb, bcfa, cffea$, κοκ. δεν είναι αποδεκτές). Να διατυπώσετε μια αναδρομική σχέση για το πλήθος αυτών των συμβολοσειρών και να την επιλύσετε με τη μέθοδο των γεννητριών συναρτήσεων.

Παράδοση. Οι εργασίες πρέπει να αναρτηθούν στο `courses.corelab.ntua.gr/discrete` μέχρι τα μεσάνυχτα της Τετάρτης 17/6. Την Πέμπτη 18/6, νωρίς το πρωί, θα ανακοινωθεί σχέδιο λύσεων στη σελίδα του μαθήματος.

Καλή Επιτυχία!