Διακριτά Μαθηματικά

3η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΟΙΡΑΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ

Α.Μ.: el18081

Θέμα 1:

1) Αφού κάθε φοιτητής μπορεί να πάρει το πολύ ένα βιβλίο πρέπει να διαλέξουμε 200 από τους 1000 διακεκριμένους φοιτητές για να πάρουν βιβλίο. Αυτό γίνεται με C(1000, 200) = $\frac{1000!}{(1000-200)! * 200!}$ τρόπους.
2) Αφού τα βιβλία συνολικά είναι 600 πρέπει να διαλέξω 600 φοιτητές που θα πάρουν βιβλίο και έπειτα να υπολογίσω όλες τις μεταθέσεις των 600 βιβλίων σε αυτούς τους φοιτητές όταν έχουμε ομάδες ίδιων βιβλίων. Αυτό γίνεται με C(1000, 600) $* \frac{600!}{200! * 250! * 100! * 50!}$ τρόπους.
3) Αφού κάθε φοιτητής θα πάρει ένα βιβλίο (έχουμε αρκετά για όλους και κάθε ένας θα πάρει το πολύ ένα) και έχουμε 1000 βιβλία του κάθε συγγραφέα και 1000 φοιτητές, κάθε φοιτητής μπορεί να πάρει από τον ίδιο συγγραφέα και πάλι τα βιβλία επαρκούν για όλους. Άρα για όλους τους φοιτητές έχουμε 4 επιλογές βιβλίων άρα τα βιβλία μπορούν να διανεμηθούν με 4^{1000} τρόπους.
4) Θα απαντήσουμε χρησιμοποιώντας την αρχή του εγκλεισμού αποκλεισμού. Οι τρόποι να διαδοθούν τα 1000 βιβλία σε 1000 φοιτητές χωρίς περιορισμούς είναι όπως δείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα 4^{1000}. Αν δε διανεμηθεί κανένα αντίτυπο από <u>ένα</u> βιβλίο οι τρόποι να διανεμηθούν τα υπόλοιπα 3 είναι 3^{1000} και επειδή μπορούμε να επιλέξουμε ποιο βιβλίο δε θα διανεμηθεί με 4 τρόπους, οι τρόποι να διανεμηθούν τα βιβλία στους φοιτητές αν δε διατεθεί κανένα αντίτυπο από ένα βιβλίο είναι $4 * 3^{1000}$. Αν δε διανεμηθεί κανένα αντίτυπο από <u>δύο</u> βιβλία οι τρόποι να διανεμηθούν τα υπόλοιπα 2 είναι 2^{1000} και η επιλογή των δύο που δε θα διανεμηθούν γίνεται με C(4, 2) = 6 τρόπους άρα υπάρχουν $6 * 2^{1000}$ τρόποι να διανεμηθούν τα βιβλία αν δεν διανεμηθούν καθόλου δύο βιβλία. Αντίστοιχα μπορούμε να επιλέξουμε <u>τρία</u> βιβλία που δε θα διανεμηθούν με C(4, 3) = 4 τρόπους και μπορούμε να μοιράσουμε το άλλο ένα βιβλίο με μοναδικό τρόπο (1000 ίδια βιβλία σε 1000 φοιτητές). Άρα υπάρχουν 4 τρόποι να διανείμουμε τα βιβλία αν δε διανεμηθεί κανένα αντίτυπο από 3 βιβλία. Άρα από αρχή εγκλεισμού

αποκλεισμού μπορούμε να διανείμουμε 1000 αντίτυπα βιβλίων από κάθε συγγραφέα σε 1000 φοιτητές αν πρέπει να διατεθεί τουλάχιστον ένα αντίτυπο από κάθε βιβλίο με $4^{1000} - 4 * 3^{1000} + 6 * 2^{1000} - 4$ τρόπους.

5) Αν δεν είχαμε κανέναν περιορισμό έχουμε να διανείμουμε 1000 μη διακεκριμένα αντικείμενα σε 4 διακεκριμένες υποδοχές. Αυτό γίνεται με C(4+1000-1, 1000)=C(1003, 1000) τρόπους. Αν ένα σημείο έχει 351 βιβλία (το σημείο αυτό επιλέγεται με 4 τρόπους) οι τρόποι να μοιραστούν τα υπόλοιπα 1000-351=649 βιβλία στα 4 σημεία είναι 4 ∗ C(4+649-1, 649) = 4 ∗C(652, 649). Αν δύο σημεία έχουν από 351 βιβλία (τα σημεία αυτά επιλέγονται με C(4, 2)=6 τρόπους οι τρόποι να μοιραστούν τα υπόλοιπα $1000 - 2 * 351 = 298$ βιβλία είναι $6 * \mathrm{C}(4 + 298 - 1, 298) = 6 * \mathrm{C}(301, 298)$. Δεν γίνεται 3 σημεία να έχουν από 351 βιβλία το καθένα αφού έχουμε 1000 βιβλία σύνολο. Άρα 1000 αντίτυπα του βιβλίου μπορούν να κατανεμηθούν στα 4 σημεία διανομής με $C(1003, 1000) - 4 * C(652, 649) + 6 * C(301, 298)$ τρόπους ώστε κάθε σημείο να μοιράσει 350 αντίτυπα το πολύ.

6) Πρέπει να διανείμουμε 1000 διακεκριμένους φοιτητές σε 4 διακεκριμένες θέσεις-υποδοχές (διακεκριμένες αφού κάθε μία μοιράζει άλλο βιβλίο) χωρίς περιορισμούς αφού κάθε θέση μπορεί να εξυπηρετήσει μέχρι και 1000 φοιτητές. Αν οι φοιτητές δεν ήταν διακεκριμένοι αυτό θα γινόταν με $C(4 + 1000 - 1)$ τρόπους. Εφόσον οι φοιτητές είναι διακεκριμένοι πολλαπλασιάζουμε και με τις 1000! δυνατές μεταθέσεις των φοιτητών. Άρα οι τρόποι να σταθούν οι 1000 φοιτητές στις 4 ουρές αναμονής για να πάρουν το βιβλίο είναι $C(4 + 1000 - 1, 1000) * 1000! = \frac{1003!}{3!}$.

7) Εδώ σε κάθε ουρά μπορούν να σταθούν το πολύ 350 φοιτητές αφού σε κάθε σημείο διανομής υπάρχουν διαθέσιμα μόνο 350 αντίτυπα από το βιβλίο που μοιράζεται. Θα χρησιμοποιήσουμε πάλι την αρχή του εγκλεισμού αποκλεισμού. Αν δεν είχαμε κανέναν περιορισμό όπως δείξαμε στο ερώτημα 6 οι φοιτητές μπορούν να σταθούν στην ουρά με $\frac{1003!}{3!}$ τρόπους. Αν στην ουρά ενός σημείου στέκονταν 351 φοιτητές (γίνεται με $4 * P(1000, 351)$ τρόπους, 4 για τα 4 σημεία διανομής, P(1000, 351) για τους τρόπους να επιλέξουμε τους 351 φοιτητές που θα βάλουμε στην ουρά) οι υπόλοιποι 649 μπορούν να μοιραστούν στα 4 σημεία με $\frac{(4+649-1)!}{(4-1)!} = \frac{652!}{3!}$ τρόπους. Άρα οι τρόποι να σταθούν οι φοιτητές στις 4 ουρές ώστε τουλάχιστον μία να έχει 351 και πάνω φοιτητές είναι $4 * P(1000, 351) *$

$\frac{652!}{3!}$. Αν δύο ουρές έχουν από 351 φοιτητές η κάθε μία (γίνεται με $C(4,2) * P(1000,351) * P(649,351)$ τρόπους, C(4, 2) = 6 για τα 4 σημεία διανομής, P(1000, 351) τρόποι να επιλέξουμε 351 φοιτητές για τη μία ουρά και P(1000-351, 351) = P(649, 351) τρόποι να επιλεγούν άλλοι 351 φοιτητές για την άλλη ουρά) οι υπόλοιποι 298 μπορούν να μοιραστούν στα 4 σημεία με $\frac{(4+298-1)!}{(4-1)!} = \frac{301!}{3!}$ τρόπους. Άρα οι τρόποι να σταθούν οι φοιτητές στις 4 ουρές ώστε δύο να έχουν από 351 και πάνω φοιτητές είναι $C(4,2) * P(1000,351) * P(649,351) * \frac{301!}{3!}$. Δεν γίνεται τρία σημεία να έχουν από 351 φοιτητές το καθένα αφού έχουμε 1000 φοιτητές. Άρα από την αρχή του εγκλεισμού αποκλεισμού οι 1000 φοιτητές μπορούν να σταθούν στα 4 διακεκριμένα σημεία διανομής με $\frac{1003!}{3!} - 4 * P(1000,351) * \frac{652!}{3!} + C(4,2) * P(1000,351) * P(649,351) * \frac{301!}{3!}$ τρόπους αν σε κάθε σημείο υπάρχουν διαθέσιμα μόνο 350 αντίτυπα από το βιβλίο που μοιράζεται.

Θέμα 2:

i) Αρκεί να βρω πόσοι μη ταυτολογικά ισοδύναμοι προτασιακοί τύποι που ορίζονται σε n≥5 προτασιακές μεταβλητές $p_1, p_2, \ldots, p_n$ υπάρχουν. Για να είναι δύο προτασιακοί τύποι ταυτολογικά ισοδύναμοι πρέπει για κάθε δυνατή αποτίμηση των προτασιακών μεταβλητών να έχουν ίδια τιμή αλήθειας. Άρα δύο προτασιακοί τύποι δεν θα είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι αν υπάρχει έστω και μία αποτίμηση των προτασιακών μεταβλητών για την οποία θα έχουν διαφορετική αληθοτιμή. Οι αποτιμήσεις των n προτασιακών μεταβλητών θα είναι 2^n αφού κάθε μια μπορεί να πάρει μία εκ των 2 τιμών Α ή Ψ (διανομή n προτασιακών μεταβλητών-αντικειμένων σε 2 διακεκριμένες αληθοτιμές-υποδοχές χωρίς να παίζει ρόλο η σειρά στις υποδοχές). Κάθε προτασιακός τύπος που μπορεί να κατασκευαστεί με αυτές τις n προτασιακές μεταβλητές για κάθε αποτίμηση τους θα παίρνει τιμή Α ή Ψ. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω αναζητώ πόσοι προτασιακοί τύποι υπάρχουν που ανά δύο δεν παίρνουν την ίδια αληθοτιμή για όλες τις αποτιμήσεις των προτασιακών μεταβλητών $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Δηλαδή ψάχνω με πόσους τρόπους μπορώ να «μοιράσω» τις 2^n διαφορετικές αποτιμήσεις των n προτασιακών μεταβλητών στις «υποδοχές» Α και Ψ. Κάθε μοιρασιά θα αντιστοιχεί και σε έναν προτασιακό τύπο που παίρνει την τιμή Α για τις αποτιμήσεις που τοποθετήθηκαν στην υποδοχή Α και την τιμή Ψ για τις αποτιμήσεις που τοποθετήθηκαν στην υποδοχή Ψ. Είναι προφανές ότι αυτή η μοιρασιά δεν μπορεί να δημιουργήσει δύο ταυτολογικά ισοδύναμους τύπους αφού αν οι τύποι είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι πρέπει να στις υποδοχές Α τους να έχουν ακριβώς τις ίδιες αποτιμήσεις όπως και στις υποδοχές Ψ τους. Οι τρόποι να μοιράσουμε 2^n διακεκριμένες αποτιμήσεις των n προτασιακών μεταβλητών p_1, p_2, …, p_n σε 2 υποδοχές χωρίς να παίζει ρόλο η σειρά στις υποδοχές είναι 2^{2^n}. **Άρα σχηματίζονται 2^{2^n} διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας.**

ii) Για να αληθεύει η συνεπαγωγή $[(p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge p_4 \wedge p_5] \rightarrow \psi]$ πρέπει για τις αποτιμήσεις των προτασιακών μεταβλητών p_1, p_2, …, p_n για τις οποίες αληθεύει ο τύπος $(p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge p_4 \wedge p_5$ να αληθεύει και ο τύπος ψ. Για να αληθεύει ο τύπος $(p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge p_4 \wedge p_5$ πρέπει p_4=Α=p_5 (1 αποτίμηση των προτασιακών μεταβλητών p_4, p_5) και $(p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3)$=Α ή ισοδύναμα από de Morgan $(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3)$=Ψ. Ο τύπος $(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3)$ παίρνει τιμή Α μόνο για την αποτίμηση p_1=0, p_2=0, p_3=1 άρα για τις υπόλοιπες 2^3-1=7 αποτιμήσεις των μεταβλητών p_1, p_2, p_3 παίρνει την επιθυμητή τιμή. Άρα συνολικά ο τύπος ψ θα πρέπει να παίρνει την τιμή Α για 7*1=7 αποτιμήσεις των μεταβλητών p_1, p_2, …, p_5. Για αυτές τις 7 αποτιμήσεις των μεταβλητών p_1, p_2, …, p5 οι μεταβλητές p_6, p_7, …, p_n (n-5 στο σύνολο) πρέπει όποια τιμή και να παίρνουν να μην επηρεάζουν την αληθοτιμή του ψ. Για αυτές υπάρχουν 2^{n-5} αποτιμήσεις άρα συνολικά ο τύπος ψ θα πρέπει να παίρνει την τιμή Α για $7*2^{n-5}$ αποτιμήσεις των προτασιακών μεταβλητών p_1, p_2, …, p_n. Για τις υπόλοιπες αποτιμήσεις των προτασιακών μεταβλητών ο ψ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε από τις 2 αληθοτιμές. Για να βρούμε πόσες από τις κλάσεις ισοδυναμίας περιέχουν τύπους ψ για τους οποίους αληθεύει η συνεπαγωγή πρέπει να βρούμε πόσοι μη-ταυτολογικά ισοδύναμοι τέτοιοι τύποι ψ υπάρχουν. Εντελώς αντίστοιχα με το ερώτημα (i) αυτοί θα είναι όσοι οι τρόποι να μοιράσουμε τις 2^n αποτιμήσεις των n προτασιακών μεταβλητών p_1, p_2, …, p_n στις δύο υποδοχές που η μία αντιστοιχεί στην αληθοτιμή Α και η άλλη στην Ψ. Μόνο που σε αυτήν την περίπτωση πρέπει για $7*2^{n-5}$ συγκεκριμένες αποτιμήσεις αυτών των προτασιακών μεταβλητών ο τύπος ψ να αληθεύει άρα αυτές τις τοποθετώ εξαρχής στην υποδοχή Α. Άρα μένει να μοιραστούν οι υπόλοιπες 2^n-$7*2^{n-5}$ αποτιμήσεις αληθοτιμών στις δύο υποδοχές. Αυτό γίνεται με $2^{2^n-7*2^{n-5}}$τρόπους. **Άρα $2^{2^n-7*2^{n-5}}$από τις κλάσεις ισοδυναμίας όπου κάθε κλάση ισοδυναμίας περιέχει όλους**

τους ταυτολογικά ισοδύναμους τύπους που ορίζονται σε n≥5 προτασιακές μεταβλητές p_1, p_2, …, p_n περιέχουν τύπους ψ για τους οποίους αληθεύει η συνεπαγωγή $[(p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge p_4 \wedge p_5] \rightarrow \psi]$.

Θέμα 3:

1) Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα «με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε τα θέματα Β στα τέσσερα αμφιθέατρα» αφού για κάθε τρόπο να μοιραστούν τα θέματα Β στα τέσσερα αμφιθέατρα υπάρχει μοναδικός τρόπος να μοιραστούν τα θέματα Α. Απλώς συμπληρώνουμε με θέματα Α τα αμφιθέατρα που δεν έχουν καλυφτεί πλήρως από θέματα Β και αυτό γίνεται με έναν τρόπο αφού μας ενδιαφέρει μόνο πόσα θέματα από κάθε είδος θα έχουμε σε κάθε αμφιθέατρο και τα θέματα Α επαρκούν ακριβώς για να καλύψουν τις 190-35=155 ελεύθερες θέσεις που έμειναν μετά το μοίρασμα των θεμάτων τύπου Β. Έχουμε λοιπόν να μοιράσουμε 35 μη διακεκριμένα θέματα-αντικείμενα τύπου Β σε 4 αμφιθέατρα-υποδοχές με περιορισμό στην χωρητικότητα κάθε αμφιθεάτρου. Ωστόσο στο σύνολο τους τα 35 θέματα τύπου Β είναι ίσα με τη χωρητικότητα των δύο μικρότερων αμφιθεάτρων (2 και 3) που χωρούν από 35 φοιτητές το καθένα άρα όπως και να μοιραστούν, δηλαδή και στην ακραία περίπτωση όλα να καταλήξουν σε ένα από τα δύο μικρότερα αμφιθέατρα, δεν παραβιάζεται κάποιος περιορισμός. Άρα μπορούμε να αγνοήσουμε τις χωρητικότητες των αμφιθεάτρων και το πρόβλημα ανάγεται στο με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν 35 μη διακεκριμένα αντικείμενα σε 4 διακεκριμένες υποδοχές με τη σειρά στις υποδοχές να μην έχει σημασία αφού μας ενδιαφέρει μόνο πόσα θέματα κάθε είδους θα έχουμε σε κάθε αμφιθέατρο. Αυτό γίνεται με C(4+35-1, 35) = C(38, 35)=8436 τρόπους. **Άρα μπορούμε να μοιράσουμε τα δύο είδη θεμάτων στα 4 αμφιθέατρα με 8436 τρόπους αν μας ενδιαφέρει μόνο πόσα θέματα κάθε είδους θα έχουμε σε κάθε αμφιθέατρο.**
2) Οι τρόποι να μοιραστούν 190 συνολικά θέματα σε 190 φοιτητές είναι όλες οι δυνατές μεταθέσεις των 190 θεμάτων. Άρα πρέπει να υπολογίσουμε τις μεταθέσεις των 190 γραπτών όταν έχουμε δύο ομάδες ίδιων αντικειμένων, τα θέματα Α με πληθάριθμο 155 και τα θέματα Β με πληθάριθμο 35. Αυτές θα είναι $\frac{190!}{155!*35!}$.

3) Χωρίς τους περιορισμούς αυτού του ερωτήματος, όπως δείξαμε στο ερώτημα (1) οι τρόποι να μοιραστούν τα θέματα στα τέσσερα αμφιθέατρα είναι 8436 εφόσον μας ενδιαφέρει μόνο πόσα θέματα κάθε είδους θα έχουμε σε κάθε αμφιθέατρο. Οι τρόποι να μοιραστούν τα θέματα ώστε μόνο το αμφιθέατρο 2 να μην έχει θέματα τύπου Β θα είναι ίσοι με τους τρόπους να μοιραστούν τα 35 θέματα Β στα αμφιθέατρα 1, 3, 4. Πάλι μας ενδιαφέρει μόνο πόσα θέματα κάθε είδους θα έχουμε σε κάθε αμφιθέατρο άρα λαμβάνοντας υπόψιν τα όσα αναλύθηκαν στο ερώτημα (1) το πρόβλημα αυτό είναι ισοδύναμο με το τη διανομή 35 μη διακεκριμένων αντικειμένων σε 3 διακεκριμένες υποδοχές (Αμφιθέατρα 1, 3, 4). Αυτή η διανομή γίνεται με C(3+35-1, 35) = C(37, 35) = 666 τρόπους. Οι τρόποι να μοιραστούν τα θέματα ώστε το αμφιθέατρο 3 να μην έχει θέματα τύπου Β θα είναι ίσοι με τους τρόπους να μοιραστούν τα θέματα ώστε το αμφιθέατρο 2 να μην έχει θέματα τύπου Β αφού αυτά τα δύο προβλήματα είναι τελείως ισοδύναμα. Άρα οι τρόποι να μοιραστούν τα θέματα ώστε το αμφιθέατρο 3 να μην έχει θέματα τύπου Β θα είναι 666. Οι τρόποι να μοιραστούν τα θέματα ώστε κανένα από τα αμφιθέατρα 2 και 3 να μην πάρουν θέματα τύπου Β θα είναι ίσοι με τους τρόπους διανομής 35 μη διακεκριμένων αντικειμένων σε δύο διακεκριμένες υποδοχές (αμφιθέατρα 1 και 4). Αυτοί οι τρόποι είναι C(2+35-1, 35) = C(36, 35) = 36. Από αρχή εγκλεισμού αποκλεισμού οι τρόποι να μοιραστούν τα θέματα ώστε να μην έχουμε θέματα τύπου Β τουλάχιστον σε ένα από τα Αμφ. 2, 3 θα είναι ίσοι με τους τρόπους να μοιραστούν τα θέματα ώστε το αμφιθέατρο 2 να μην έχει θέματα τύπου Β συν τους τρόπους να μοιραστούν τα θέματα ώστε το αμφιθέατρο 3 να μην έχει θέματα τύπου Β μείον τους τρόπους κανένα από τα δύο να μην έχει θέματα τύπου Β. Άρα οι τρόποι να μοιραστούν τα θέματα ώστε τουλάχιστον ένα από τα Αμφ 2 ή 3 να μην έχει θέματα τύπου Β είναι 666+666-36 = 1296. **Θεωρώντας όλες τις δυνατές μοιρασιές ισοπίθανες η πιθανότητα να μην έχουμε θέματα τύπου Β σε τουλάχιστον ένα από τα Αμφ 2 ή 3 θα είναι οι μοιρασιές στις οποίες τουλάχιστον ένα από τα Αμφ 2 ή 3 δεν έχει θέματα τύπου Β δια όλες τις μοιρασιές, δηλαδή** $\boldsymbol{P = \frac{1296}{8436} = 0.153627.}$

4) Για το πρώτο αμφιθέατρο οι επιλογές είναι είτε να δώσουμε 15 θέματα Α είτε 16, είτε 17, είτε 18, …, είτε 80, στο αμφιθέατρο 2 είτε θα δώσουμε 10 θέματα Α είτε 12, είτε 14, …, είτε 34 όπως και στο Αμφ. 3 και στο Αμφ. 4 θα δώσουμε είτε 10, είτε 12, είτε 14, …, είτε 40 αφού θέλουμε να έχουμε

τουλάχιστον 15 θέματα τύπου Α στο Αμφ. 1 και τουλάχιστον 10 και άρτιο πλήθος θεμάτων Α στα αμφιθέατρα 2, 3, 4. Επειδή όπως και στο ερώτημα 2 μας ενδιαφέρει ο τύπος του θέματος που θα πάρει κάθε φοιτητής, αν δώσουμε n θέματα Α στο πρώτο αμφιθέατρο αυτά μπορούν να μοιραστούν στους φοιτητές με C(80, n) τρόπους (διαλέγουμε n από τους 80 φοιτητές του αμφιθεάτρου και τους δίνουμε θέματα Α και όλοι οι υπόλοιποι φοιτητές θα πάρουν θέματα Β), αν δώσουμε n θέματα Α στο δεύτερο αμφιθέατρο αυτά μπορούν να μοιραστούν στους φοιτητές με C(35, n) τρόπους (και όλοι οι υπόλοιποι φοιτητές θα πάρουν θέματα Β), ομοίως για το τρίτο αμφιθέατρο, και αν δώσουμε n θέματα Α στο τέταρτο αμφιθέατρο αυτά μπορούν να μοιραστούν στους φοιτητές με C(40, n) τρόπους (και όλοι οι υπόλοιποι φοιτητές θα πάρουν θέματα Β). Άρα ο απαριθμητής για το αμφιθέατρο 1 θα είναι $(C(80, 15)x^{15}+C(80, 16)x^{16}+C(80, 17)x^{17}+\ldots+C(80, 80)x^{80})$ για τα αμφιθέατρα 2 και 3 θα είναι $(C(35, 10)x^{10}+C(35, 12)x^{12}+C(35, 14)x^{14}+\ldots+C(35, 34)x^{34})$ και για το αμφιθέατρο 4 θα είναι $(C(40, 10)x^{10}+C(40, 12)x^{12}+C(40, 14)x^{14}+\ldots+C(40, 40)x^{40})$ και συνεπώς η γεννήτρια συνάρτηση θα είναι $(C(80, 15)x^{15}+C(80, 16)x^{16}+C(80, 17)x^{17}+\ldots+C(80, 80)x^{80}) * (C(35, 10)x^{10}+C(35, 12)x^{12}+C(35, 14)x^{14}+\ldots+C(35, 34)x^{34}) * (C(35, 10)x^{10}+C(35, 12)x^{12}+C(35, 14)x^{14}+\ldots+C(35, 34)x^{34}) * (C(40, 10)x^{10}+C(40, 12)x^{12}+C(40, 14)x^{14}+\ldots+C(40, 40)x^{40})$ και ο όρος του οποίου ο συντελεστής μας δίνει τους διαφορετικούς τρόπους να μοιράσουμε τους δύο τύπους θεμάτων είναι ο x^{155} αφού έχουμε 155 θέματα Α συνολικά.

<u>Θέμα 4:</u>

1) Εάν οι αίθουσες ήταν διακεκριμένες μία κωδικοποίηση του προβλήματος θα μπορούσε να είναι το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης x1+x2+x3+…+x100=100 (1), όπου η μεταβλητή xi αντιστοιχεί στην αίθουσα i και η τιμή της είναι πόσοι φοιτητές είναι σε αυτήν την αίθουσα. Αφού οι αίθουσες είναι μη διακεκριμένες για να μην μετρήσουμε πολλές φορές την ίδια κατανομή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι πρώτα βάζουμε τις αίθουσες με τους λιγότερους φοιτητές. Στην κωδικοποίηση που προτείναμε αυτό εφαρμόζεται αν θεωρήσουμε ότι $x_i \le x_{i+1}$. Αφού ισχύει $x_2 \ge x_1$ τότε το x_2 μπορεί να γραφτεί ως $x_2 = x_1+y_1$ με $y_1 \ge 0$. Αντίστοιχα $x_3=x_2+y_2=x_1+y_1+y_2$ με $y_2 \ge 0$, $x_4=x_3+y_3=x_1+y_1+y_2+y_3$ με $y_3 \ge 0$ κ.ο.κ. Άρα η (1) θα γίνει: $100x_1+99y_1+98y_1+97y_3+\ldots+y_{99}=100$ που πλέον κωδικοποιεί το πρόβλημα.

Αναζητούμε το πλήθος των λύσεων αυτής της εξίσωσης. Ο απαριθμητής του x_1 θα είναι $1+x^{100}+x^{200}+x^{300}+\dots$ (θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι μόνο ο όρος x^{100} αφού οι παραπάνω όροι δεν μας ενδιαφέρουν αφού θέλουμε η ποσότητα στο αριστερό μέλος της εξίσωσης να γίνει ίση με 100 και όλοι οι όροι στο αριστερό μέλος είναι μη αρνητικοί). Αντίστοιχα ο απαριθμητής του 99y1 θα είναι $1+x^{99}+x^{198}+\dots$ και αντίστοιχα για όλες τις μεταβλητές έως ότου φτάσουμε στον απαριθμητή του y99 που θα είναι $1+x^1+x^2+x^3+\dots$. Η Γεννήτρια Συνάρτηση θα είναι το γινόμενο αυτών των απαριθμητών δηλαδή:

$\Gamma(x)=(1+x^{100}+x^{200}+x^{300}+\dots)*(1+x^{99}+x^{198}+x^{297}+\dots)*(1+x^{98}+x^{196}+x^{294}+\dots)*\dots *(1+x^1+x^2+x^3+\dots)$

Και αφού θέλουμε $100x_1+99y_1+98y_1+97y_3+\dots+y_{99}=100$ ο συντελεστής του όρου x^{100} θα μας δίνει το ζητούμενο.

2) Με τη λογική που χρησιμοποιήθηκε στο προηγούμενο ερώτημα βάζουμε τις κενές αίθουσες πρώτες και για τις μη κενές βάζουμε πρώτη αυτή που έχει τους λιγότερους φοιτητές. Για δύο διαδοχικές ,σε αυτήν την κατάταξη, μη κενές αίθουσες που κωδικοποιούνται στην εξίσωση x1+x2+x3+…+x100=100 (1) ως x_{i+1}, x_i θα ισχύει $x_{i+1} = x_i + 1 + y_i$ με $y_i \geq 0$ αφού η αίθουσα x_{i+1} θέλουμε να έχει περισσότερους ή ίσους φοιτητές από την x_i αφού βάζουμε πρώτα τις αίθουσες με τους λιγότερους φοιτητές και μάλιστα λόγω του ότι οι μη κενές αίθουσες πρέπει να έχουν διαφορετικό αριθμό φοιτητών η αίθουσα x_{i+1} πρέπει να έχει αυστηρά περισσότερους φοιτητές από την x_i εξ ου και το +1. Αναγκαστικά θα λάβουμε περιπτώσεις για το πόσες αίθουσες είναι μη κενές. Αν μόνο μία είναι μη κενή με βάση όσα αναφέρθηκαν πιο πάνω η (1) θα γίνει $x_{100}=100$. Ο απαριθμητής του x_{100} θα είναι $x^{100}+x^{200}+\dots$ (αφού $x_{100}>0$) και αυτή θα είναι και η γεννήτρια συνάρτηση της 1ης περίπτωσης. Αν έχουμε δύο μη κενές αίθουσες η εξίσωση θα γίνει $x_{99}+x_{100}=100 \Rightarrow 2x_{99}+y_{99}+1=100$ με $y_{99}\geq 0$ και η γεννήτρια του προβλήματος αυτού θα είναι $(1+x^2+x^4+\dots)(1+x+x^2+x^3+\dots)x$ αφού $(1+x^2+x^4+\dots)$ ο απαριθμητής του $2x_{99}$, $1+x+x^2+x^3+\dots$ ο απαριθμητής του y_{99} και x ο απαριθμητής του 1. Εντελώς αντίστοιχα για την 3η περίπτωση όπου θα έχουμε 3 μη κενές αίθουσες η (1) θα γίνει: $3x_{98}+2y_{98}+y_{99}+3=100$ και η γεννήτρια συνάρτηση θα είναι $(1+x^3+x^6+\dots)(1+x^2+x^4+\dots)(1+x+x^2+\dots)x^3$ και αντίστοιχα βρίσκονται και οι γεννήτριες συναρτήσεις για τις υπόλοιπες περιπτώσεις. Οι περιπτώσεις αυτές είναι αμοιβαία αποκλειόμενες (δε γίνεται να έχω ταυτόχρονα μόνο n ή μόνο m μη κενές αίθουσες αν $n\neq m$) άρα η

Γεννήτρια Συνάρτηση όλου του προβλήματος θα είναι το άθροισμα των γεννητριών συναρτήσεων όλων των περιπτώσεων, δηλαδή:
$\Gamma(x)=(x^{100}+x^{200}+\ldots)+(1+x^2+x^4+\ldots)(1+x+x^2+x^3+\ldots)x+(1+x^3+x^6+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots)(1+x+x^2+\ldots)x^3+\ldots$
και ο όρος του οποίου ο συντελεστής μας δίνει το ζητούμενο θα είναι ο x^{100}.

Θέμα 5:

α) Εφόσον έχουμε διακεκριμένα αντικείμενα (βιβλία) που πρέπει να μπουν σε διακεκριμένες θέσεις (βιβλιοθήκες) θα χρησιμοποιήσουμε εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις.

1) Κάθε βιβλιοθήκη θα πάρει από 20 έως 100 βιβλία. Κάθε βιβλιοθήκη παίρνει κάθε συγκεκριμένο επιτρεπτό αριθμό βιβλίων με μοναδικό τρόπο αφού δεν μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία τα βιβλία φτάνουν στις βιβλιοθήκες. Άρα ο εκθετικός απαριθμητής για κάθε βιβλιοθήκη θα είναι $\frac{x^{20}}{20!}+\frac{x^{21}}{21!}+\cdots+\frac{x^{99}}{99!}+\frac{x^{100}}{100!}$ Και αφού έχουμε 8 βιβλιοθήκες η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση θα είναι η Γ(x)= $\left(\frac{x^{20}}{20!}+\frac{x^{21}}{21!}+\cdots+\frac{x^{99}}{99!}+\frac{x^{100}}{100!}\right)^8$ και ο όρος του οποίου ο συντελεστής θα δίνει το ζητούμενο θα είναι ο $\frac{x^{500}}{500!}$ αφού έχουμε να μοιράσουμε 500 βιβλία.
2) Τώρα αφού έχει σημασία η σειρά με την οποία φτάνουν τα βιβλία στις βιβλιοθήκες όταν μία βιβλιοθήκη παίρνει n βιβλία ($20\leq n\leq 100$) αυτά τα n βιβλία μπορούν να μετατεθούν με n! τρόπους. Άρα ο εκθετικός απαριθμητής κάθε βιβλιοθήκης θα είναι $20!\frac{x^{20}}{20!}+21!\frac{x^{21}}{21!}+\cdots+99!\frac{x^{99}}{99!}+100!\frac{x^{100}}{100!}$ και αφού έχουμε 8 τέτοιες βιβλιοθήκες η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση θα είναι η Γ(x)= $\left(20!\frac{x^{20}}{20!}+21!\frac{x^{21}}{21!}+\cdots+99!\frac{x^{99}}{99!}+100!\frac{x^{100}}{100!}\right)^8$ και ο όρος του οποίου ο συντελεστής θα δίνει το ζητούμενο θα είναι ο $\frac{x^{500}}{500!}$ αφού έχουμε να μοιράσουμε 500 βιβλία.

β)

Εκθετικός απαριθμητής για καθένα από τα ψηφία 0 και 1:

$$\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\ldots=e^x-1$$

Εκθετικός απαριθμητής για καθένα από τα ψηφία 2 και 4:

$$1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^8}{8!}\dots=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

Εκθετικός απαριθμητής για καθένα από τα ψηφία 7 και 9:

$$\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}\dots=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

Εκθετικός απαριθμητής για καθένα από τα ψηφία 3, 5, 6 και 8:

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\dots=e^x$$

Άρα η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση θα είναι:

Γ(x) = $(e^x-1)^2\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2(e^x)^4=(e^{2x}-2e^x+1)\left(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{4}\right)^2e^{4x}=$
$\frac{1}{16}(e^{2x}-2e^x+1)(e^{4x}-2+e^{-4x})e^{4x}=\frac{1}{16}(e^{6x}-2e^{2x}+e^{-2x}-2e^{5x}+$
$4e^x-2e^{-3x}+e^{4x}-2+e^{-4x})e^{4x}=$

$\frac{1}{16}(e^{10x}-2e^{9x}+e^{8x}-2e^{6x}+4e^{5x}-2e^{4x}+e^{2x}-2e^x+1)$ (1)

Αφού αναζητούμε το πλήθος των εκθετικών συμβολοσειρών μήκους n, με τους περιορισμούς που λάβαμε υπόψιν κατά την κατασκευή των εκθετικών απαριθμητών και συνεπώς της εκθετικής γεννήτριας συνάρτησης, αυτό θα δίνεται από τον συντελεστή του $\frac{x^n}{n!}$ της εκθετικής γεννήτριας συνάρτησης (1).

Για την εκθετική συνάρτηση e^{kx} γνωρίζουμε ότι ο συντελεστής του $\frac{x^n}{n!}$ είναι k^n. Χρησιμοποιώντας αυτό στην γεννήτρια συνάρτησή μας και τη γραμμική ιδιότητα, ο συντελεστής του $\frac{x^n}{n!}$ θα είναι:

$$\frac{1}{16}(10^n-2*9^n+8^n-2*6^n+4*5^n-2*4^n+2^n-2)$$

Άρα το πλήθος των δεκαδικών συμβολοσειρών μήκους n με τους περιορισμούς της εκφώνησης θα είναι:

$$\boldsymbol{\frac{1}{16}(10^n-2*9^n+8^n-2*6^n+4*5^n-2*4^n+2^n-2)}$$

Θέμα 6:

Έστω a_n το πλήθος των συμβολοσειρών μήκους n που σχηματίζονται από έξι χαρακτήρες a, b, c, d, e, f στις οποίες οι χαρακτήρες a ή b δεν εμφανίζονται (σε οποιαδήποτε θέση) μετά τους χαρακτήρες c ή d.

- Κάθε συμβολοσειρά μήκους n-1 που ικανοποίει τον περιορισμό της εκφώνησης με την προσθήκη ενός c ή d ή e ή f στο τέλος της δημιουργεί μία συμβολοσειρά μήκους n που ικανοποιεί τους περιορισμούς της υπόθεσης αφού δεν προσθέτουμε κάποιο a ή b ώστε να «ρισκάρουμε» να εμφανιστεί μετά από κάποιο c ή d. Άρα με αυτόν τον τρόπο για κάθε μία από τις a_{n-1} συμβολοσειρές μήκους n-1 που έχουμε και ικανοποιούν τον περιορισμό μπορούμε να φτιάξουμε 4 διαφορετικές συμβολοσειρές μήκους n που ικανοποιούν τον περιορισμό αφού έχουμε να διαλέξουμε μεταξύ τεσσάρων χαρακτήρων για να βάλουμε στο τέλος της. Άρα με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε $4*a_{n-1}$ συμβολοσειρές μήκους n που σχηματίζονται από έξι χαρακτήρες a, b, c, d, e, f στις οποίες οι χαρακτήρες a ή b δεν εμφανίζονται (σε οποιαδήποτε θέση) μετά τους χαρακτήρες c ή d.
- Αν προσθέσουμε στο τέλος κάποιας συμβολοσειράς μήκους n-1 που ικανοποιεί τον περιορισμό ένα a ή ένα b η συμβολοσειρά μήκους n που δημιουργείται ικανοποιεί τον περιορισμό να μην εμφανίζεται κάποιο a ή κάποιο b μετά από κάποιο c ή από κάποιο d μόνο αν η συμβολοσειρά μήκους n-1 δεν περιέχει ούτε το c ούτε το d (Αλλιώς αν περιέχει έστω και ένα από τα c ή d, ακόμα και μία φορά, ο χαρακτήρας a ή b που θα προσθέσουμε στο τέλος της ακολουθίας θα εμφανίζεται μετά από αυτό). Οι συμβολοσειρές μήκους n-1, που σχηματίζονται από έξι χαρακτήρες a, b, c, d, e, f, που δεν περιέχουν ούτε c ούτε d και ικανοποιούν τον περιορισμό της εκφώνησης θα είναι οι συμβολοσειρές μήκους n-1 που δεν περιέχουν ούτε c ούτε d αφού όλες αυτές αναγκαστικά ικανοποιούν τον περιορισμό της εκφώνησης (δεν υπάρχει c ή d για να εμφανιστεί μετά από αυτό a ή b). Άρα οι συμβολοσειρές μήκους n-1 που σχηματίζονται από έξι χαρακτήρες a, b, c, d, e, f και δεν περιέχουν ούτε c ούτε d δηλαδή οι συμβολοσειρές μήκους n-1 που σχηματίζονται από τους χαρακτήρες a, b, e, f θα είναι 4^{n-1} (διάταξη

τεσσάρων διακεκριμένων χαρακτήρων σε n-1 διακεκριμένες θέσεις με επανάληψη στους χαρακτήρες). Σε κάθε μία τέτοια συμβολοσειρά μήκους n-1 προσθέτοντας στο τέλος της ένα a ή ένα b μπορώ να φτιάξω δύο συμβολοσειρές μήκους n που ικανοποιούν τον περιορισμό της εκφώνησης (μία βάζοντας a και μία βάζοντας b). Άρα με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε $2*4^{n-1}$ συμβολοσειρές μήκους n που σχηματίζονται από έξι χαρακτήρες a, b, c, d, e, f στις οποίες οι χαρακτήρες a ή b δεν εμφανίζονται (σε οποιαδήποτε θέση) μετά τους χαρακτήρες c ή d.

Άρα συνολικά η αναδρομική σχέση για το πλήθος αυτών των συμβολοσειρών θα είναι : $a_n = 4 * a_{n-1} + 2 * 4^{n-1}$

Έστω A(x) η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας a_n. Γνωρίζουμε ότι $α_0$=1 (η μία συμβολοσειρά μήκους 0 ικανοποιεί τους περιορισμούς της εκφώνησης). Για την επίλυση της αναδρομικής σχέσης για κάθε n≥1 πολλαπλασιάζουμε με x^n και αθροίζουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n * x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 4 * a_{n-1} * x^n + 2 * 4^{n-1} * x^n \Rightarrow$$

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n * x^n) - a_0 = x * \sum_{n=0}^{\infty} 4 * a_n * x^n + 2 * 4^n * x^n \Rightarrow$$

$$A(x) - a_0 = 4x * A(x) + 2x * \frac{1}{1-4x} \Rightarrow$$

$$(1-4x) * A(x) = \frac{2x}{1-4x} + 1 \Rightarrow A(x) = \frac{1-2x}{(1-4x)^2} \Rightarrow$$

$$A(x) = \frac{1}{(1-4x)^2} - \frac{2x}{(1-4x)^2}$$

Γνωρίζουμε ότι η γεννήτρια συνάρτηση $\frac{1}{1-4x}$ αντιστοιχεί στην ακολουθία 4^n. Άρα:

$$\frac{1}{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n * x^n \Rightarrow \left(\frac{1}{1-4x}\right)' = (\sum_{n=0}^{\infty} 4^n * x^n)' \Rightarrow$$

$$\frac{4}{(1-4x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n * n * x^{n-1} \Rightarrow \frac{4}{(1-4x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 4^{n+1} * (n+1) * x^n \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(1-4x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n * (n+1) * x^n$$

Άρα η ακολουθία που αντιστοιχεί στην γεννήτρια συνάρτηση $\frac{1}{(1-4x)^2}$ είναι η $4^n * (n+1)$.

Υπολογίσαμε ότι:

$$\frac{4}{(1-4x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n * n * x^{n-1} \xrightarrow{\pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\alpha\sigma\iota\alpha\zeta\omega\ \kappa\alpha\iota\ \tau\alpha\ \delta\acute{\upsilon}o\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda\eta\ \mu\varepsilon\ \left(-\frac{1}{2}\right)*x}$$

$$-\frac{2x}{(1-4x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) * 4^n * n * x^n$$

Άρα η ακολουθία που αντιστοιχεί στην γεννήτρια συνάρτηση $-\frac{2x}{(1-4x)^2}$ είναι η $\left(-\frac{1}{2}\right) * 4^n * n$.

Άρα η ακολουθία που αντιστοιχεί στη γεννήτρια συνάρτηση

$$A(x) = \frac{1}{(1-4x)^2} - \frac{2x}{(1-4x)^2}$$

Θα είναι η $a_n = 4^n * (n+1) - \frac{1}{2} * 4^n * n \Rightarrow a_n = \frac{1}{2} * 4^n (n+2)$