<u>Διακριτά Μαθηματικά</u>

1η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΟΙΡΑΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ

Α.Μ.: el18081

Θέμα 1:

α)

i) Έστω a το ενδεχόμενο ο A ιππότης και b το ενδεχόμενο ο B ιππότης. Τότε ο πίνακας αληθείας για τις προτάσεις τους θα είναι ο εξής:

a	b	$a \leftrightarrow a \wedge b$	$b \leftrightarrow \neg a$
Ψ	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α
Α	Α	Α	Ψ

Από τον παραπάνω πίνακα είναι εμφανές ότι η μόνη ανάθεση αληθοτιμών για την οποία ικανοποιούνται και οι δύο προτάσεις είναι α=Ψ και β=Α δηλαδή ο Α είναι απατεώνας και ο Β ιππότης. Πράγματι είναι το μόνο δυνατό σενάριο αφού αν ο Α ήταν ιππότης και έλεγε την αλήθεια τότε και ο Β θα ήταν ιππότης και θα έλεγε αλήθεια πως ο Α είναι απατεώνας που μας οδηγεί σε αντίφαση. Αν ήταν και οι δύο απατεώνες τότε από την πρόταση του Β συμπεραίνουμε ότι ο Α είναι ιππότης που πάλι μας οδηγεί σε αντίφαση. Άρα το μόνο δυνατό σενάριο είναι Α απατεώνας και Β ιππότης. Πράγματι τότε ο Α λέει ψέματα αφού μόνο ο Β είναι ιππότης και προφανώς ο Β λέει την αλήθεια όπως αρμόζει σε έναν ιππότη.

Άρα ο Α είναι απατεώνας και ο Β ιππότης.

ii) Έστω c το ενδεχόμενο ο C ιππότης και d το ενδεχόμενο ο D ιππότης. Τότε ο πίνακας αληθείας για την πρόταση του D θα είναι ο εξής:

c	d	$c\leftrightarrow\neg c\land\neg d$
Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Α	Α	Ψ

Από τον παραπάνω πίνακα είναι εμφανές ότι η μόνη ανάθεση αληθοτιμών για την οποία ικανοποιούνται και οι δύο προτάσεις είναι c=Ψ και d=A δηλαδή ο C είναι απατεώνας και ο D ιππότης. Αν υποθέταμε ότι ο C είναι ιππότης τότε θα έλεγε αλήθεια ότι ο ίδιος είναι απατεώνας που μας οδηγεί σε αντίφαση. Αν ήταν και οι δύο απατεώνες τότε η πρόταση του C θα ήταν αληθής που είναι άτοπο αφού ο C είναι απατεώνας. Ενώ όταν C απατεώνας και D ιππότης ο C λέει πράγματι ψέματα αφού μόνο ο ίδιος είναι απατεώνας.

Άρα ο C είναι απατεώνας και ο D ιππότης.

iii) Έστω e το ενδεχόμενο ο E ιππότης και f το ενδεχόμενο ο F ιππότης. Τότε ο πίνακας αληθείας για τις προτάσεις τους θα είναι ο εξής:

e	f	$e\leftrightarrow\neg f$	$f\leftrightarrow\neg e$
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Α
Α	Α	Ψ	Ψ

Δεν γίνεται να είναι και οι δύο απατεώνες γιατί τότε αφού και οι δύο λένε ψέματα από τα λεγόμενα τους προκύπτει ότι είναι και οι δύο ιππότες που είναι άτοπο. Αντίστοιχα δεν γίνεται να είναι και οι δύο ιππότες γιατί από τα λεγόμενα τους θα συμπεραίναμε ότι και οι δύο είναι απατεώνες. Οπότε ο ένας θα είναι ιππότης και ο άλλος απατεώνας. Τότε αυτός που είναι ιππότης δικαίως κατηγορεί τον άλλον ως απατεώνα, ενώ ο απατεώνας ψεύδεται όταν λέει ότι ο άλλος είναι απατεώνας.

Άρα ένας από τους E και F είναι απατεώνας.

β) **Ο σ_n είναι ικανοποιήσιμος για n περιττό και ταυτολογία για n ζυγό.** Για n=0 όποια και αν είναι η τιμή που παίρνει ο προτασιακός τύπος φ, αριστερά και δεξιά της συνεπαγωγής θα υπάρχει η ίδια αληθοτιμή άρα το αποτέλεσμα θα είναι True. Ο σ_1 θα έχει αριστερά της συνεπαγωγής κάτι αληθές (σ_0) και δεξιά τον τύπο φ.

Άρα η πρόταση θα πάρει ότι τιμη πάρει και ο φ αφου Α→Α δίνει Α και Α→Ψ δίνει Ψ. Για n=2 θα έχουμε σ1→φ. Ξέρουμε όμως ότι σ1 έχει ότι τιμή έχει και ο φ άρα ο $σ_2$ ισοδύναμα γράφεται: φ→φ που όπως ο $σ_0$ είναι πάντα αληθής. Άρα επαγωγικά αποδεικνύεται ότι για κάθε n ζυγό $σ_n$ αληθής ανεξαρτήτως της αληθοτιμής του φ και για κάθε n μονό η πρόταση παίρνει την τιμή που παίρνει και ο τύπος φ.

Αληθεύει ότι $σ_n \models σ_{n+1}$ για n περιττό γιατί τότε n+1 ζυγός άρα $σ_{n+1}$ ταυτολογία, άρα οι αναθέσεις αληθοτιμών που ικανοποιούν τη $σ_n$ ικανοποιούν σίγουρα και τη $σ_{n+1}$.

γ)

i) **Μόνο η πρόταση 99 είναι αληθής ενώ όλες οι άλλες είναι ψευδείς.** Η 99 δηλώνει αληθώς ότι 99 προτάσεις είναι ψευδείς (1-98 και 100). Δεν θα μπορούσαν να είναι δύο προτάσεις στη λίστα αληθείς γιατί οι δηλώσεις τους θα ήταν αντικρουόμενες.

ii) Έστω ότι διαλέγουμε ότι η πρόταση υπ’ αριθμόν κ είναι αληθής. Τότε όλες οι προτάσεις από 0 έως κ θα είναι αληθείς αφού αν «Τουλάχιστον κ από τις προτάσεις στη λίστα είναι ψευδείς» τότε και «Τουλάχιστον κ-1 προτάσεις στη λίστα θα είναι ψευδείς» κ.ο.κ.. Πρέπει κ=50 δηλαδή οι 50 πρώτες προτάσεις να είναι αληθείς και οι άλλες 50 (51-100) να είναι ψευδείς γιατί τότε θα είχαμε 50 ακριβώς ψευδείς προτάσεις (προτάσεις 51-100) (άρα και τουλάχιστον 50,49,48,…). Αν κ<50, δηλαδή η 50 ψευδής, και για n≥50 οι προτάσεις ήταν ψευδείς τότε η πρόταση 50 που θα δήλωνε ότι τουλάχιστον 50 προτάσεις είναι ψευδείς θα ήταν αληθής αφού πάνω από 50 προτάσεις θα ήταν ψευδείς σύμφωνα με την υπόθεση μας αλλά εμείς έχουμε δεχτεί ότι η 50 είναι ψευδής. Αντίστοιχα αν κ>50 τότε η πρόταση 51 που δηλώνει ότι τουλάχιστον 51 προτάσεις είναι ψευδής θα ήταν ψευδής αφού οι ψευδείς προτάσεις είναι ≤49 βάσει της υπόθεσής μας. Όμως έχουμε δεχτεί ότι η 51 αληθής που μας οδηγεί σε άτοπο. **Άρα οι προτάσεις από 1 έως 50 θα είναι αληθείς και οι προτάσεις από 51 έως 100 θα είναι ψευδείς.**

iii) Αν έχουμε 99 δηλώσεις όπως αυτές στο (ii) έχουμε ένα παράδοξο και είναι αδύνατον να αποφανθούμε ποιες είναι αληθείς και ποιες ψευδείς. Λόγω των δηλώσεων των προτάσεων όπως και στο προηγούμενο ερώτημα αν υποθέσουμε ότι η n-οστή πρόταση είναι αληθής θα είναι αληθείς και όλες οι προηγούμενες. Αν υποθέσουμε πάλι ότι η 50στη πρόταση είναι αληθής και όλες οι παραπάνω ψευδείς τότε η δήλωση της, ότι τουλάχιστον 50 από τις προτάσεις στη λίστα είναι ψευδής, θα είναι ψευδής αφού ο μέγιστος αριθμός προτάσεων που δύνανται να είναι ψευδείς είναι 49 (από 51 έως 99). Θεωρώντας παραπάνω από τις 50 πρώτες προτάσεις αληθείς (0…n αληθείς, n>50) και όλες τις άλλες ψευδείς είναι προφανές ότι πάλι δεν ικανοποιείται η δήλωση της πρότασης 50 άρα οδηγούμαστε ξανά σε άτοπο. Αν θεωρήσουμε τις 49 πρώτες προτάσεις αληθείς και όλες τις άλλες ψευδείς τότε η δήλωση της 50-στης πρότασης αληθεύει, αφού 50 προτάσεις (50-99) είναι ψευδείς, ενώ έχουμε θεωρήσει την πρόταση ψευδή άρα έχουμε πάλι άτοπο. Αντίστοιχα αν θεωρήσουμε λιγότερες από τις 49 πρώτες προτάσεις αληθείς και όλες τις άλλες ψευδείς (0…n αληθείς, n<49) πάλι το περιεχόμενο της πρότασης 50 θα είναι αληθές ενώ έχουμε υποθέσει ότι η πρόταση 50 είναι ψευδής άρα θα οδηγηθούμε ξανά σε άτοπο. Συνεπώς κάθε δυνατή επιλογή για το ποιες προτάσεις είναι αληθείς και ποιες ψευδείς μας οδηγεί σε άτοπο.

δ) 1) Αν $T \vDash \varphi$ από πληρότητα $T \vdash \varphi$ άρα θα υπάρχει τυπική απόδειξη για το φ με πεπερασμένο πλήθος υποθέσεων από το άπειρο σύνολο προτασιακών τύπων T, έστω T_0, τέτοιο ώστε $T_0 \subseteq T : T_0 \vdash \varphi$. Από εγκυρότητα $T_0 \vdash \varphi \Rightarrow T_0 \vDash \varphi$. **Άρα υπάρχει πεπερασμένο $T_0 \subseteq T$ τέτοιο ώστε $T_0 \vDash \varphi$.**

2) Αν T μη ικανοποιήσιμο τότε ισχύει $T \vDash \varphi$ για κάθε φ άρα και για φ αντίφαση. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι αν $T \vDash \varphi$ τότε υπάρχει πεπερασμένο $T_0 \subseteq T$ τέτοιο ώστε $T_0 \vDash \varphi$. Άρα υπάρχει πεπερασμένο T_0 ώστε $T_0 \cup \{\neg\varphi\}$ μη ικανοποιήσιμο. Όμως αφού φ αντίφαση τότε ¬φ ταυτολογία και συνεπώς T_0 μη ικανοποιήσιμο.

Θέμα 2:

α)

1) $\forall x \exists y \exists z(CS(x) \land M(y) \land M(z) \land y \neq z \rightarrow L(x, y) \land L(x, z)) \land \forall w(M(w) \land L(x, w) \rightarrow w=y \lor w=z)$

(Θεωρώντας ότι κάθε πληροφορικός συμπαθεί **ακριβώς** δύο μαθηματικούς)

2) $\exists x \forall y \forall z((OS(x) \land CS(y) \rightarrow U(y, x)) \land (OS(x) \land M(z) \rightarrow \neg U(z,x)))$

3) $\exists x \exists y(OS(x) \land OS(y) \land x \neq y \land \forall z(OS(z) \rightarrow z=x \lor z=y) \land \forall w(CS(w) \rightarrow U(w, x) \lor U(w,y))$

4) $\exists x \exists y(OS(x) \land OS(y) \land x \neq y \land \forall m(M(m) \rightarrow (U(m, x) \leftrightarrow U(m, y)))$

5) $\exists x \exists y(OS(x) \land OS(y) \land x \neq y \land \forall m(M(m) \land U(m, x) \land U(m, y) \rightarrow \forall r \exists z(OS(z) \land U(m, z) \land M(r) \land L(r, m) \rightarrow U(r, z)) \land \forall p \exists z(OS(z) \land U(m, z) \land CS(p) \rightarrow U(p, z))$

β) Πρέπει για κάθε αποτίμηση που ικανοποιούνται οι τύποι αριστερά της ταυτολογικής συνεπαγωγής να ικανοποιείται και ο τύπος δεξιά της για να είναι έγκυρη η λογική συνεπαγωγή. Παρατηρούμε ότι όλες οι μεταβλητές τόσο αριστερά όσο και δεξιά είναι δεσμευμένες, άρα πρέπει να ελέγξουμε τι γίνεται με τα κατηγορήματα Q. Θα εξετάσουμε πότε οι τύποι αριστερά ικανοποιούνται. Αν Q_1 δεν είναι ταυτολογία τότε η πρόταση $\forall x Q_1(x)$ δεν θα είναι αληθής αφού εφόσον δεν είναι ταυτολογία για κάποιο x $Q_1(x)=\Psi$. Άρα πρέπει $Q_1(x)$ ταυτολογία. Για $Q_1(x)$ ταυτολογία η πρόταση $\forall x Q_1(x) \rightarrow \forall x Q_2(x)$ είναι αληθής μόνο αν $Q_2(x)$ ταυτολογία αφού αν Q_2 δεν είναι ταυτολογία τότε η πρόταση $\forall x Q_2(x)$ δεν θα είναι αληθής αφού εφόσον δεν είναι ταυτολογία για κάποιο x: $Q_2(x)=\Psi$ και τότε η πρόταση θα είναι $A\rightarrow\Psi$ που μας δίνει ψέμα. Συνεχίζοντας κατά αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε ότι για να ισχύουν όλοι οι τύποι αριστερά της ταυτολογικής συνεπαγωγής θα πρέπει $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ ταυτολογίες. Σε αυτήν την περίπτωση και η πρόταση $\forall x(Q_1(x)\leftrightarrow Q_n(x))$ Θα είναι αληθής αφού θα είναι ισοδύναμη με $A\leftrightarrow A$ που δίνει Α. **Άρα η λογική συνεπαγωγή είναι έγκυρη.**

Θέμα 3:

α) 1) Στο αριστερό μέλος της συνεπαγωγής το y κάποια στιγμή θα παίρνει την τιμή x. Τότε η πρόταση θα γίνει:

$$\forall x P(x, x) \land \forall x(P(x,x) \rightarrow \forall z(P(x, z) \lor P(z, x))) \rightarrow \forall x \forall y(P(x,y) \lor P(y, x))$$

Που αφού ξέρουμε ότι η P έχει την ανακλαστική ιδιότητα από την υπόθεση της συνεπαγωγής, από Modus Ponens η πρόταση θα γίνει:

$$\forall x P(x, x) \land \forall x \forall z(P(x, z) \lor P(z, x)) \rightarrow \forall x \forall y(P(x, y) \lor P(y, x))$$

Αυτή η πρόταση γίνεται εμφανώς έγκυρη αν στο πρώτος σκέλος μετονομάσουμε την μεταβλητή z σε y οπότε η πρόταση ερμηνεύεται ως: αν ισχύει η ανακλαστική ιδιότητα και κάθε στοιχείο σχετίζεται (συνδέεται σε κάποιο ή κάποιο συνδέεται σε αυτό) με κάθε άλλο τότε κάθε στοιχείο θα σχετίζεται με κάθε άλλο. Αυτό προφανώς ισχύει αφού το συμπέρασμα αποτελεί μέρος της υπόθεσης. **Άρα η πρόταση είναι έγκυρη.**

2) Για οποιαδήποτε ερμηνεία της οποίας το σύμπαν έχει πληθάριθμο 1 προφανώς αφού το σύμπαν περιέχει μόνο ένα στοιχείο και αφού από την υπόθεση της συνεπαγωγής ισχύει η ανακλαστική ιδιότητα θα ισχύει και το συμπέρασμα που δηλώνει ότι υπάρχει x που να συνδέεται με όλα τα y μέσω της P (το x εδώ θα είναι το μοναδικό στοιχείο του σύμπαντος που αφού συνδέεται με τον εαυτό του, από

ανακλαστική ιδιότητα, θα συνδέεται με όλα τα στοιχεία του σύμπαντος που στην ουσία είναι μόνο ο εαυτός του). Άρα κάθε ερμηνεία σε σύμπαν με πληθάριθμο 1 αποτελεί μοντέλο της φ.

Έστω ότι ο τύπος ψ είναι λογικά έγκυρος για τυχαία ερμηνεία με σύμπαν που έχει πληθάριθμο n. Τότε για αυτά τα n στοιχεία, από το συμπέρασμα της συνεπαγωγής, ξέρουμε ότι θα υπάρχει κάποιο στοιχείο (έστω α) το οποίο για κάθε άλλο στοιχείο κ θα ικανοποιεί το κατηγόρημα P(α, κ). Έστω άλλη ερμηνεία που διαφέρει από την προηγούμενη μόνο όσον αφορά το σύμπαν. Συγκεκριμένα το σύμπαν αυτής της ερμηνείας θα είναι το σύμπαν της προηγούμενης συν ένα ακόμα στοιχείο (έστω β). Άρα αυτό το σύμπαν θα έχει πληθάριθμο n+1. Αν στο αριστερό μέλος της συνεπαγωγής εξετάσουμε την περίπτωση όπου το y παίρνει την τιμή x θα έχουμε:

$\forall x P(x, x) \land \forall x (P(x,x) \to \forall z (P(x, z) \lor P(z, x)))$

Που αφού ξέρουμε ότι η P έχει την ανακλαστική ιδιότητα, από Modus Ponens

η πρόταση θα γίνει:

$\forall x P(x, x) \land \forall x \forall z (P(x, z) \lor P(z, x))$ (1)

Εντελώς αντίστοιχα με το προηγούμενο ερώτημα. Δηλαδή έχουμε στην υπόθεση ότι οποιοδήποτε στοιχείο x του σύμπαντος θα σχετίζεται με κάθε άλλο μέσω της P (για κάθε στοιχείο y του σύμπαντος ή το x θα συνδέεται στο ή το y θα συνδέεται στο x). Άρα από την πρόταση (1) ξέρουμε ότι για το επιπλέον στοιχείο β είτε θα ισχύει P(α, β) ή P(β, α) ή και τα δύο.

- Αν ισχύει P(α, β) ή και τα δύο τότε θα ισχύει P(α, β) και από επαγωγική υπόθεση ισχύει P(α, κ) για κάθε άλλο στοιχείο του σύμπαντος πέραν του β, τότε θα ισχύει P(α, y) για κάθε στοιχείο y του σύμπαντος άρα το συμπέρασμα, που δηλώνει ότι υπάρχει x που για κάθε y θα ισχύει P(x, y) θα είναι αληθές και το x θα είναι το α.
- Αν ισχύει μόνο P(β, α) τότε τμήμα της αρχικής υπόθεσης που δηλώνει ότι:

  $\forall x \forall y (P(x,y) \to \forall z (P(x, z) \lor P(z, y)))$

  Όταν το x θα πάρει την τιμή α και το z την τιμή β θα γίνει:

  $\forall y (P(\alpha,y) \to (P(\alpha, \beta) \lor P(\beta, y)))$

  Επειδή όμως δεν ισχύει ότι P(α, β) η πρόταση γίνεται:

$\forall y\ P(\alpha,y) \to P(\beta, y)$ (2)

Όμως από επαγωγική υπόθεση για κάθε y διάφορο του β ισχύει P(α, y) άρα από (2) θα ισχύει και P(β, y) για κάθε y διάφορο του β και από ανακλαστική ιδιότητα θα ισχύει P(β, β). Συνεπώς θα ισχύει P(β, y) για κάθε στοιχείο y του σύμπαντος. Άρα το συμπέρασμα, που δηλώνει ότι υπάρχει x που για κάθε y θα ισχύει P(x, y) θα είναι αληθές και το x θα είναι το β.

Άρα σε κάθε περίπτωση, αν δεχτούμε τις υποθέσεις στο αριστερό μέλος της συνεπαγωγής, θα υπάρχει x για το οποίο θα ισχύει P(x, y) για κάθε y του σύμπαντος με πληθάριθμο n+1. **Άρα απεδείχθη επαγωγικά ότι κάθε ερμηνεία σε πεπερασμένο σύμπαν αποτελεί μοντέλο της ψ.**

3) Αν πάρουμε τη σχέση P(x, y) να είναι η σχέση $x \le y$ στους πραγματικούς αριθμούς τότε ισχύουν οι υποθέσεις της πρότασης ψ αφού έχουμε και την ανακλαστική ιδιότητα ($x \le x$) και αν x, y πραγματικοί αριθμοί με $x \le y$ τότε για κάθε πραγματικό αριθμό z ή θα είναι ο $x \le z$ δηλαδή $z \ge x$ ή ο $z \le y$ (αφού αν $z \ge x$ ή $z \le y$ ο z καλύπτει όλους τους πραγματικούς αριθμούς αφού έχουμε υποθέσει ότι $x \le y$). Όμως το συμπέρασμα που δηλώνει ότι υπάρχει x που είναι μικρότερο ή ίσο από κάθε y δηλαδή ότι το σύμπαν έχει ελάχιστο δεν ισχύει αφού οι πραγματικοί αριθμοί δεν έχουν ελάχιστο. **Άρα η ερμηνεία: το σύμπαν να είναι οι πραγματικοί αριθμοί και το P(x, y) η σχέση $x \le y$ δεν αποτελεί μοντέλο της ψ.**

β) Έστω ότι για συντομία γράφουμε την πρόταση της εκφώνησης ως $\alpha \to \beta$. Θα αποδείξουμε ότι $\neg(\alpha \to \beta)$ δηλαδή $\alpha \wedge \neg\beta$ είναι αντίφαση. $\neg\beta = \forall x \exists y P(x, y)$. Αυτό σημαίνει ότι όλα τα x συνδέονται σε ένα τουλάχιστον y μέσω της P και από το τμήμα της α που δηλώνει ότι $\forall x \neg P(x, x)$ γνωρίζουμε ότι αυτό το y θα είναι διάφορο του x. Από την α και συγκεκριμένα από το τμήμα της:

$$\forall x \neg P(x, x) \wedge \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \to y=z) \wedge \forall x \forall y \forall z (P(y, x) \wedge P(z, x) \to y=z)$$

Καταλαβαίνουμε ότι κάθε στοιχείο του σύμπαντος μπορεί να συνδεθεί, μέσω του P, μόνο σε ένα στοιχείο, διάφορο του εαυτού του, στοιχείο και ότι σε κάθε στοιχείο του σύμπαντος μπορεί να είναι συνδεδεμένο μόνο ένα στοιχείο. Άρα κάθε στοιχείο συνδέεται το πολύ σε ένα άλλο στοιχείο και αφού η πρόταση ¬β δηλώνει ότι κάθε σημείο του σύμπαντος συνδέεται σε κάποιο άλλο συμπεραίνουμε ότι κάθε στοιχείο του σύμπαντος θα συνδέεται σε ένα ακριβώς στοιχείο διάφορο του εαυτού του. Άρα εφόσον ξέρουμε και ότι σε κάθε στοιχείο του σύμπαντος μπορεί να είναι συνδεδεμένο μόνο ένα στοιχείο αναγκαστικά σε όλα τα στοιχεία του σύμπαντος θα είναι συνδεδεμένο κάποιο άλλο στοιχείο(Αν σε κάποιο δεν συνδεόταν στοιχείο τότε θα έπρεπε σε κάποιο άλλο στοιχείο να συνδέονται δυο). Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με το τμήμα της πρότασης α που δηλώνει ότι $\exists x \forall y \neg P(y, x)$ δηλαδή ότι υπάρχει ένα στοιχείο με το οποίο δε συνδέεται κανένα. Άρα η πρόταση $\alpha \wedge \neg\beta$ δεν είναι δυνατόν να γίνει αληθής, άρα είναι αντίφαση. **Συνεπώς η πρόταση ξ της εκφώνησης είναι έγκυρη.**

Θέμα 4:

α) Αφού όλες οι ακολουθίες που περιέχονται στο A* της εκφώνησης έχουν πεπερασμένο μήκος και αφού A* η ένωση όλων των A^k, όπου A^k σύνολο όλων των ακολουθιών από στοιχεία του A με μήκος k καταλαβαίνουμε ότι το k θα είναι πεπερασμένο. Επομένως το A^k θα είναι αριθμήσιμο αφού θα περιέχει πεπερασμένο αριθμό ακολουθιών (αφού οι ακολουθίες συγκεκριμένου πεπερασμένου μήκους κατασκευασμένες από πεπερασμένο αλφάβητο A είναι πεπερασμένες και ίσες με $|A|^k$). **Άρα το A* είναι αριθμήσιμο** ως ένωση αριθμήσιμα απείρου πλήθους αριθμήσιμων συνόλων.

β) Αφού η λύση σε ένα πρόβλημα είναι ένα πρόγραμμα μπορεί να παρασταθεί ως μία ακολουθία από ένα πεπερασμένο σύνολο χαρακτήρων (έστω A) που χρησιμοποιούνται στην γλώσσα προγραμματισμού μας. Συνεπώς το σύνολο των προγραμμάτων (έστω S) θα είναι το σύνολο όλων των ακολουθιών πεπερασμένου μήκους που προκύπτουν από στοιχεία του A. Το σύνολο S απεδείχθη στο (α) ερώτημα ότι είναι αριθμήσιμο.

Αφού κάθε πρόβλημα απόφασης στους φυσικούς αριθμούς μπορεί να αναπαρασταθεί από το σύνολο των φυσικών αριθμών για τους οποίους η απάντηση στο ερώτημα του προβλήματος είναι «ναι», μπορούμε για κάθε υποσύνολο του $\mathbb{N}$ να κατασκευάσουμε ένα αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης. Άρα θα υπάρχει μία ένα-προς-ένα αντιστοιχία μεταξύ προβλημάτων απόφασης στους φυσικούς αριθμούς και υποσυνόλων του $\mathbb{N}$. Άρα το σύνολο αυτών των προβλημάτων θα είναι ισάριθμο του $2^{\mathbb{N}}$ που είναι ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο.

Ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο (όπως είναι το σύνολο των προβλημάτων απόφασης στους φυσικούς αριθμούς) έχει απείρως περισσότερα στοιχεία από ένα αριθμήσιμο (όπως οι λύσεις των προβλημάτων που είναι προγράμματα) και συνεπώς τα προβλήματα απόφασης στους φυσικούς αριθμούς είναι απείρως περισσότερα από τις λύσεις που μπορούν να κατασκευαστούν με προγράμματα για αυτά. **Άρα υπάρχουν άπειρα προβλήματα απόφασης στους φυσικούς για τα οποία δεν υπάρχει λύση.**

γ) Οι συντελεστές του πολυωνύμου p παίρνουν τιμές στο $\mathbb{N}$ όπως και ο αρχικός κωδικός x_0. Άρα το σύνολο των τιμών που μπορεί να πάρει ο κάθε συντελεστής και ο αρχικός κωδικός είναι αριθμήσιμο αφού το $\mathbb{N}$ αριθμήσιμο. Το q παίρνει τιμές στους πρώτους αριθμούς που είναι υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Άρα το σύνολο των πρώτων αριθμών q είναι αριθμήσιμο. Ορίζουμε τις διατεταγμένες (d+3)αδες:

$(a_d, a_{d-1}, \ldots, a_0, q, x0)$. Το σύνολο αυτών των (d+3)άδων (έστω S) είναι αριθμήσιμο ως ένωση αριθμήσιμα απείρου πλήθους αριθμήσιμων συνόλων. Αφού είναι αριθμήσιμο θα υπάρχει απαρίθμηση των στοιχείων του. Έστω ότι στο i-οστό βήμα αντιστοιχεί η (d+3)άδα $s_i=(a_{di}, a_{(d-1)i}, \ldots, a_{0i}, q_i, x0_i)$ και έστω p_i το πολυώνυμο που ορίζουν τα $(a_{di}, a_{(d-1)i}, \ldots, a_{0i})$. Τότε αρχικά για t=0 δοκιμάζουμε τον κωδικό $x0_0$. Αν δεν ξεκλειδώσει τον υπερυπολογιστή έπειτα από 30s δοκιμάζουμε τον κωδικό που προκύπτει αν εκτελέσουμε 30 φορές την πράξη που αλλάζει τον κωδικό για την επόμενη (d+3)άδα s_i, δηλαδή την s_1 αν θεωρήσουμε ότι η απαρίθμηση ξεκινά από το 0. Δηλαδή ο κωδικός που θα εισάγουμε τη χρονική στιγμή t=30s θα είναι ο εξής:

$p_1(p_1(p_1\ldots(p_1(x0_1)\bmod q_1)\ldots\bmod q_1)\bmod q_1)\bmod q_1)$ όπου τα mod και τα p εμφανίζονται 30 φορές.

Αντίστοιχα αν ούτε αυτός ξεκλειδώσει τον υπερυπολογιστή συνεχίζουμε να δοκιμάζουμε κωδικούς κάθε 30s κατασκευασμένους έτσι ώστε την στιγμή t=30n, για τον κωδικό που θα εισάγουμε, να έχει εκτελεστεί η πράξη 30n φορές για τα δεδομένα s_n. Άρα ο κωδικός που εισάγουμε την στιγμή 30n είναι:

$p_n(p_n(p_n\ldots(p_n(x0_n)\bmod q_n)\ldots\bmod q_n)\bmod q_n)\bmod q_n)$ όπου τα mod και τα p εμφανίζονται 30n φορές.

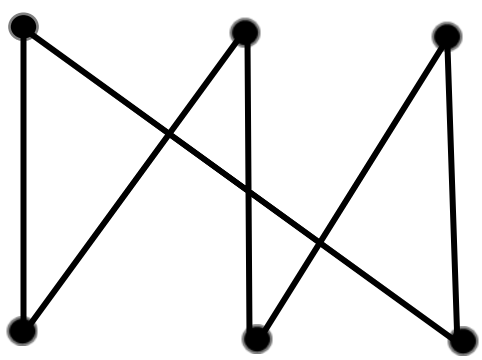
Σημαντική σημείωση: Θεωρούμε ότι ο υπολογιστής που εκτελεί τις πράξεις και παράγει τους προς εισαγωγή κωδικούς είναι αρκετά γρήγορος ώστε οι πράξεις να γίνονται τάχιστα και να μην έχει παρέλθει η στιγμή που πρέπει να εισαχθεί ο κωδικός μέχρι να υπολογιστεί.

Άρα κάθε 30s δοκιμάζουμε τον κωδικό που θα ξεκλείδωνε τον υπολογιστή την συγκεκριμένη χρονική στιγμή αν οι συντελεστές του πολυωνύμου, ο πρώτος αριθμός q και ο αρχικός κωδικός ταυτίζονταν με αυτούς της (d+3)άδας που δοκιμάζουμε στο συγκεκριμένο βήμα της απαρίθμησης. Άρα εάν κάποιος κωδικός που δοκιμάσαμε δεν ξεκλείδωσε τον υπερυπολογιστή ξέρουμε ότι σίγουρα η (d+3)άδα που δοκιμάζουμε σε αυτό το βήμα δεν αντιστοιχεί στα δεδομένα που είναι γνωστά στον διαχειριστή του προβλήματος. Αναγκαστικά κάποια (d+3)άδα ταυτίζεται με τους συντελεστές του πολυωνύμου τον πρώτο αριθμό q και τον αρχικό κωδικό αφού αυτές είναι αριθμήσιμες. Αν αυτή βρίσκεται στο m-οστό βήμα της απαρίθμησης τότε ο κωδικός που θα υπολογίσουμε και θα εισάγουμε την χρονική στιγμή 30m (πεπερασμένη χρονική στιγμή) με την παραπάνω διαδικασία θα ξεκλειδώσει τον υπερυπολογιστή. **Άρα εγγυημένα θα αποκτήσουμε πρόσβαση στον υπερυπολογιστή σε πεπερασμένο χρόνο.**

Θέμα 5:

α) Για το ευθύ αρκεί ν.δ.ο. αν μια διμελής σχέση R είναι κυκλική και ανακλαστική θα είναι και ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική. Προφανώς και θα είναι ανακλαστική από υπόθεση. Αφού για οποιαδήποτε τριάδα x,y,z ισχύει $(x,y) \in R \land (y,z) \in R \Rightarrow (z,x) \in R$ αυτή η σχέση θα ισχύει και για y=x και τότε θα έχουμε $(x,x) \in R \land (x,z) \in R \Rightarrow (z,x) \in \mathbb{R}$ και αφού $(x,x) \in R$ από ανακλαστική ιδιότητα και το λογικό 1 είναι το ουδέτερο στοιχείο του λογικού «και» η παραπάνω πρόταση γράφεται $(x,z) \in R \Rightarrow (z,x) \in R$. Άρα η σχέση R θα είναι συμμετρική. Αν $(x,y) \in R \land (y,z) \in R \Rightarrow (z,x) \in R$ όμως αφού η σχέση R είναι συμμετρική και $(x,z) \in R$. Άρα $(x,y) \in R \land (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$. Άρα η σχέση R θα είναι και μεταβατική. **Άρα η σχέση R θα είναι σχέση ισοδυναμίας.**

Για το αντίστροφο αρκεί ν.δ.ο. αν μια διμελής σχέση R είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική θα είναι και ανακλαστική και κυκλική. Προφανώς και θα είναι ανακλαστική από υπόθεση. Αφού είναι μεταβατική αν $(x,y) \in R$ και $(y,z) \in R$ τότε και $(x,z) \in R$. Επειδή όμως είναι και συμμετρική και $(z,x) \in R$. Άρα για οποιαδήποτε τριάδα x,y,z ισχύει $(x,y) \in R \land (y,z) \in R \Rightarrow (z,x) \in R$ άρα η σχέση R είναι κυκλική. **Άρα η σχέση R είναι ανακλαστική και κυκλική.**

β) 

Maximals τα τρία πάνω στοιχεία.

Minimals τα τρία κάτω.

γ) *Σημαντική σημείωση: Υποθέτουμε ότι οι αριθμοί που προκύπτουν ως δυνάμεις της ίδιας βάσης έχουν διαφορετικούς πρώτους παράγοντες. Πχ το 8 έχει ως πρώτους παράγοντες το (2, 2, 2) ενώ το 4 τους (2, 2).*

Πρέπει να ελέγξουμε αν είναι ανακλαστική αντισυμμετρική και μεταβατική.

Προφανώς θα είναι ανακλαστική αφού δύο ίδιοι θετικοί φυσικοί αριθμοί έχουν ίδιους πρώτους παράγοντες αφού πρόκειται για τον ίδιο αριθμό. Άρα κάθε πρώτος παράγοντας ενός θετικού φυσικού n θα είναι και πρώτος παράγοντας του n άρα (n, n) ∈ R.

Για την αντισυμμετρικότητα υποθέτουμε ότι (n, m) ∈ R και (m, n) ∈ R. Τότε αφού (n, m) ∈ R κάθε πρώτος παράγοντας του n θα είναι και πρώτος παράγοντας του m άρα το m έχει περισσότερους ή ίσους πρώτους παράγοντες με το n. Επίσης αφού (m, n) ∈ R κάθε πρώτος παράγοντας του m θα είναι και πρώτος παράγοντας του n άρα και το n έχει περισσότερους ή ίσους πρώτους παράγοντες από το m. Αναγκαστικά λοιπόν οι αριθμοί n και m έχουν τους ίδιους ακριβώς πρώτους παράγοντες επομένως αναγκαστικά n=m. Άρα αν (n, m) ∈ R και (m, n) ∈ R τότε m=n. Άρα η R θα είναι αντισυμμετρική.

Για την μεταβατικότητα αν (n, m) ∈ R και (m, z) ∈ R τότε, αφού (n, m) ∈ R, όλοι οι πρώτοι παράγοντες του n είναι και πρώτοι παράγοντες του m δηλαδή το m έχει ως πρώτους παράγοντες τους πρώτους παράγοντες του n και κάποιους ακόμα και αντίστοιχα, αφού (m, z) ∈ R, όλοι οι πρώτοι παράγοντες του m είναι και πρώτοι παράγοντες του z δηλαδή το z έχει ως πρώτους παράγοντες τους πρώτους παράγοντες του m και κάποιους ακόμα. Αφού το z έχει ως πρώτους παράγοντες και όλους τους πρώτους παράγοντες του m και σε αυτούς συμπεριλαμβάνονται όλοι οι πρώτοι παράγοντες του n, κάθε πρώτος παράγοντας του n θα είναι και πρώτος παράγοντας του z. Άρα (n, z) ∈ R. Συνεπώς αν (n, m) ∈ R και (m, z) ∈ R έχουμε (n, z) ∈ R άρα η R θα είναι μεταβατική.

Αφού η R είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική θα είναι σχέση διάταξης.