<u>Διακριτά Μαθηματικά</u>

2η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΟΙΡΑΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ

Α.Μ.: el18081

<u>Θέμα 1:</u>

α)

- Περιστέρια: n αυθαίρετα επιλεγμένοι αριθμοί από το σύνολο$\{1, 2, 3,\ldots, 2^n-3, 2^n-2\}$
- Φωλιές: $\{1, 2\}$, $\{3, 4, 5, 6\}$, $\{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$, $\{2^{n-2}-1,\ldots, 2^{n-1}-2\}$, $\{2^{n-1}-1,\ldots, 2^n-2\}$

Κατά αυτόν τον τρόπο αν σε μία φωλιά τοποθετηθούν τουλάχιστον 2 αριθμοί-περιστέρια θα ισχύει ότι ο μεγαλύτερος από τους δύο είναι μικρότερος ή ίσος του διπλάσιου του άλλου, αφού σε κάθε σύνολο-φωλιά το διπλάσιο του μικρότερου αριθμού του συνόλου είναι ίσο με τον μεγαλύτερο αριθμό του συνεπώς για κάθε ζεύγος αριθμών n, m που ανήκουν στο ίδιο σύνολο και ο n μεγαλύτερος του μικρότερου αριθμού του συνόλου και ο m μικρότερος ή ίσος του μεγαλύτερου αριθμού του συνόλου, με $n<m$, θα ισχύει $m\leq 2n$. Αφού οι φωλιές μας καλύπτουν όλο το σύνολο των αριθμών από 1 έως 2^n-2 και επιλέγουμε n αριθμούς από αυτό το σύνολο κάθε ένας από αυτούς τους αριθμούς θα ανήκει τουλάχιστον σε μία φωλιά και αφού οι φωλιές είναι φτιαγμένες ώστε να είναι ανά δύο ξένες μεταξύ τους κάθε αριθμός που επιλέγεται θα ανήκει ακριβώς σε μία φωλιά. Έχουμε να επιλέξουμε n αριθμούς-περιστέρια και να τους τοποθετήσουμε σε n-1 σύνολα-φωλιές (Αφού το πρώτο σύνολο φτάνει έως τον αριθμό 2^2-2 και το τελευταίο ως τον αριθμό 2^n-2 έχουμε $n-2+1 = n-1$ σύνολα). Άρα από αρχή του περιστερώνα 2 τουλάχιστον αριθμοί (έστω x, y με $x<y$) θα ανήκουν στο ίδιο σύνολο άρα για αυτούς τους δύο αριθμούς θα ισχύει $y\leq 2x$. **Άρα μεταξύ των n αυθαίρετα επιλεγμένων αριθμών πάντα θα υπάρχει ένα ζευγάρι όπου ο μεγαλύτερος από τους 2 αριθμούς θα είναι μικρότερος ή ίσος από το διπλάσιο του άλλου.**

β) Αρκεί ν.δ.ο. υπάρχει τμήμα της ακολουθίας στο οποίο όλοι οι διαφορετικοί αριθμοί που εμφανίζονται, εμφανίζονται άρτιο αριθμό φορών ο καθένας. Πράγματι τότε το γινόμενο τους θα είναι γινόμενο παραγόντων όπου καθένας από αυτούς τους παράγοντες θα είναι υψωμένος σε άρτια δύναμη άρα το γινόμενο θα είναι τέλειο τετράγωνο. Για να ελέγξουμε αν οι αριθμοί εμφανίζονται άρτιο ή περιττό πλήθος φορών δημιουργούμε για κάθε έναν από τους διαφορετικούς αριθμούς n μία μεταβλητή nmod2 και ξεκινάμε να «μετράμε» από την αρχή της ακολουθίας των N αριθμών ως το τέλος. Δηλαδή ξεκινάμε από μία κενή ακολουθία S και τις τιμές όλων των μεταβλητών τις αρχικοποιούμε 0 και κάθε φορά προσθέτουμε τον επόμενο αριθμό της ακολουθίας των N ακεραίων στην S, ενημερώνοντας την τιμή της μεταβλητής του (αν είναι πρώτη φορά που συναντάμε αυτόν τον διαφορετικό αριθμό η τιμή της μεταβλητής του θα γίνει 1 αν είναι 2η θα γίνει 0 κ.λ.π.) έως ότου η ακολουθία S να ταυτιστεί με την αρχική ακολουθία). Άρα αν όλες οι διαφορές των αντίστοιχων μεταβλητών, για κάθε διαφορετικό αριθμό, μεταξύ δύο βημάτων της μέτρησης είναι 0 τότε όλοι οι διαφορετικοί αριθμοί που εμφανίζονται στο διάστημα μεταξύ αυτών των δύο βημάτων εμφανίζονται άρτιο αριθμό φορών. Άρα αρκεί ν.δ.ο. υπάρχουν τουλάχιστον δύο βήματα της μέτρησης στα οποία οι αντίστοιχες μεταβλητές για κάθε έναν από τους διαφορετικούς αριθμούς έχουν την ίδια τιμή (αφού τότε η διαφορά τους θα είναι 0). Έχουμε n μεταβλητές που παίρνουν τιμές μεταξύ 0 και 1 άρα 2^n διαφορετικούς συνδυασμούς για τις τιμές των μεταβλητών και N+1 βήματα μέτρησης γιατί ξεκινάμε να μετράμε από την κενή ακολουθία S στην οποία κάθε φορά προσθέτουμε τον επόμενο αριθμό της αρχικής ακολουθίας με N αριθμούς άρα στο δεύτερο βήμα προσθέτουμε τον πρώτο αριθμό της ακολουθίας στο τρίτο τον δεύτερο και στο (N+1)-οστό τον N-οστό. Για κάθε βήμα της μέτρησης οι μεταβλητές θα παίρνουν κάποια από τίς δυνατές τιμές άρα κάθε βήμα θα αντιστοιχεί σε έναν συνδυασμό τιμών των μεταβλητών. Άρα εδώ έχουμε:

- Περιστέρια: $N+1 \geq 2^n+1$ βήματα μέτρησης
- Φωλιές: 2^n διαφορετικοί συνδυασμοί τιμών των μεταβλητών.

Άρα από αρχή του περιστερώνα θα υπάρχουν δύο βήματα της μέτρησης στα οποία για κάθε διαφορετικό αριθμό που έχουμε η τιμή της μεταβλητής του στο ένα βήμα θα είναι ίση με την τιμή της μεταβλητής του στο άλλο.

Άρα σε μία ακολουθία N ακεραίων με $N \geq 2^n$ υπάρχουν δύο ή περισσότερες διαδοχικές θέσεις της ακολουθίας τέτοιες ώστε το γινόμενο των αντίστοιχων αριθμών να είναι τέλειο τετράγωνο.

Θέμα 2:

α)

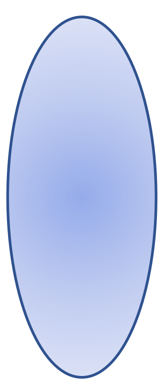
- Επαγωγική βάση: Σε tournament με 2 κορυφές κάθε μία από αυτές τις 2 είναι προσπελάσιμη από την άλλη μέσω μονοπατιού μήκους 1.
- Επαγωγική υπόθεση: Έστω tournament T(V, E) με $|V| \geq 2$ (τυχαίο) κορυφές στο οποίο υπάρχει κορυφή s* που είναι προσπελάσιμη από κάθε άλλη κορυφή μέσω μονοπατιού μήκους το πολύ δύο.
- Επαγωγικό βήμα: Θ.δ.ο. υπάρχει τέτοια κορυφή αν στο τουρνουά προσθέσουμε μία κορυφή u με τυχαίο τρόπο, δηλαδή στο τουρνουά με |V|+1 κορυφές και |E|+|V| ακμές (από τον ορισμό του τουρνουά).
    1. Αν στο νέο τουρνουά υπάρχει ακμή (u, s*) ή υπάρχει κορυφή w τέτοια ώστε να υπάρχουν οι ακμές (u, w) και (w, s*) τότε η u συνδέεται στην s* με μονοπάτι μήκους το πολύ 2 όπως και όλες οι άλλες κορυφές του γραφήματος (από επαγωγική υπόθεση), άρα και στο τουρνουά με |V|+1 κορυφές υπάρχει κορυφή με την επιθυμητή ιδιότητα και είναι η ίδια s*.
    2. Αν στο νέο τουρνουά η u δεν συνδέεται στην s* με μονοπάτι μήκους το πολύ 2 τότε δεν υπάρχει ακμή (u, s*) και για κάθε κόμβο w υπάρχει το πολύ μία από τις ακμές (u, w) και (w, s*). Από τον ορισμό του τουρνουά αν δεν υπάρχει η (u, s*) υπάρχει η (s*, u). Άρα όσες κορυφές συνδέονταν στην s* με μονοπάτι μήκους 1 θα συνδέονται στην u με μονοπάτι μήκους 2 και η s* θα συνδέεται στην u με μονοπάτι μήκους 1. Για κάθε ακμή α που συνδεόταν στο s* με μονοπάτι μήκους 2 θα υπάρχει κόμβος m τέτοιος ώστε να υπάρχουν οι ακμές (a, m) και (m, s*). Για να δείξω ότι κάθε τέτοια ακμή α θα συνδέεται στο u με μονοπάτι μήκους το πολύ 2 αρκεί ν.δ.ο. υπάρχει είτε ακμή (a, u) είτε (m, u). Έστω ότι δεν υπάρχει καμία από τις 2. Συνεπώς από τον ορισμό του τουρνουά θα υπάρχουν οι (u, a) και (u, m). Όμως αφού υπάρχουν τόσο η ακμή (u, m) όσο και η (m, s*) η u θα συνδέεται με την s με μονοπάτι μήκους δύο που είναι άτοπο αφού σε αυτήν την περίπτωση υποθέσαμε ότι κάτι τέτοιο δε συμβαίνει. Άρα υπάρχει είτε ακμή (a, u) είτε (m, u) άρα κάθε κορυφή a που συνδεόταν στην s* με μονοπάτι μήκους το πολύ δύο συνδέεται στην u με μονοπάτι μήκους το πολύ δύο. Άρα αφού όλες οι κορυφές του

τουρνουά πλην της u συνδέονται με την u με μονοπάτι μήκους το πολύ δύο (αφού η s*, όλες οι κορυφές που συνδέονταν στην s* με μονοπάτι μήκους το πολύ 1 και όλες οι κορυφές που συνδέονταν στην s* με μονοπάτι μήκους το πολύ 2 συνδέονται στην u με μονοπάτι μήκους το πολύ 2 και από επαγωγική υπόθεση αυτές είναι όλες οι κορυφές του τουρνουά πλην της u) και σε αυτήν την περίπτωση στο τουρνουά με |V|+1 κορυφές υπάρχει κορυφή με την επιθυμητή ιδιότητα και είναι η u.

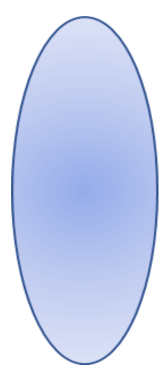
Άρα απεδείχθη επαγωγικά ότι σε κάθε τουρνουά T(V, E) με |V|≥2 κορυφές υπάρχει κορυφή που είναι προσπελάσιμη από κάθε άλλη κορυφή μέσω μονοπατιού μήκους το πολύ 2.

β)

- Επαγωγική βάση: για κάθε γράφημα με n κορυφές που δεν περιέχει το K_{r+1} ως υπογράφημα και n≤r θα ισχύει τετριμμένα ότι θα έχει το πολύ $\frac{(r-1)n^2}{2r}$ ακμές αφού κάθε γράφημα με n κορυφές έχει το πολύ $\frac{n(n-1)}{2}$ ακμές και για n≤r ⇒ n-1≤r-1 ⇒ (n-1)n≤(r-1)n ⇒ $\frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{(r-1)n}{2} \leq \frac{(r-1)n^2}{2r} \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{(r-1)n^2}{2r}$
- Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι το γράφημα με n-r κορυφές που δεν περιέχει το K_{r+1} ως υπογράφημα για οποιοδήποτε r≥2 έχει το πολύ $\frac{(r-1)(n-r)^2}{2r}$ ακμές.
- Επαγωγικό βήμα: Θ.δ.ο. το γράφημα με n κορυφές που δεν περιέχει το K_{r+1} ως υπογράφημα έχει το πολύ $\frac{(r-1)n^2}{2r}$ ακμές. Διαμερίζω τις κορυφές του σε δύο ομάδες A και B όπου η A περιέχει r κορυφές και η B n-r κορυφές.



Ομάδα A: r κορυφές



Ομάδα B: n-r κορυφές

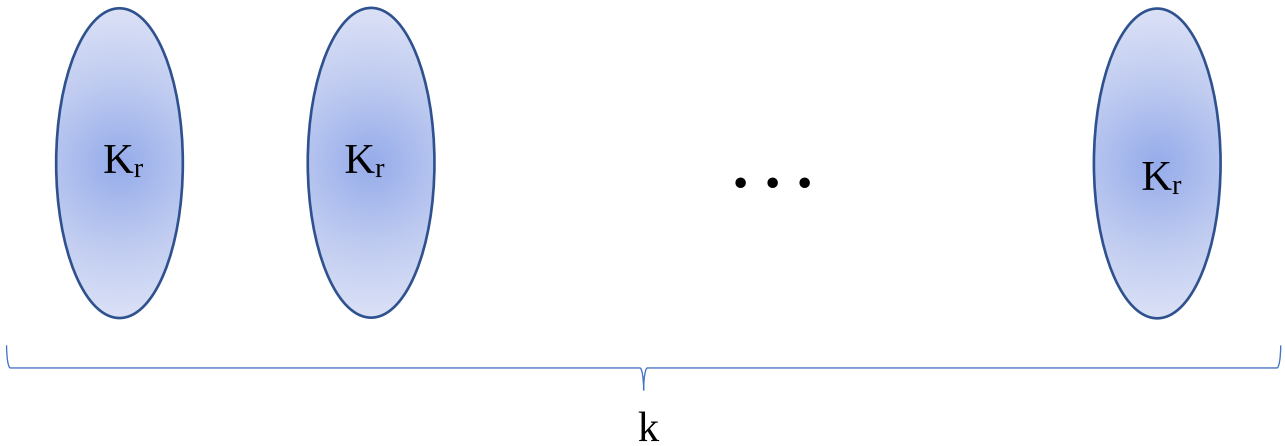
Ακμές μπορούν να υπάρχουν είτε στο εσωτερικό των ομάδων είτε μεταξύ των δύο ομάδων. Η ομάδα Α έχει το πολύ $\frac{r(r-1)}{2}$ ακμές στο εσωτερικό της αν περιέχει το K_r (φαίνεται και από την βάση της επαγωγής), η ομάδα Β έχει το πολύ $\frac{(r-1)(n-r)^2}{2r}$ ακμές αφού έχει n-r κορυφές και δεν περιέχει το K_{r+1}(επαγωγική υπόθεση) και μένει να μελετηθεί πόσες ακμές μπορούν να τοποθετηθούν ενδιάμεσα χωρίς να δημιουργηθεί το K_{r+1}. Αν η ομάδα Α είναι το K_r τότε για να μη δημιουργηθεί το K_{r+1}, εξαιτίας των ενδιάμεσων ακμών μεταξύ των ομάδων Α και Β, πρέπει να μη συνδέεται καμία κορυφή της ομάδας Α με όλες τις κορυφές της ομάδας Β. Άρα για να βάλουμε τον μέγιστο αριθμό ακμών μεταξύ των δύο ομάδων συνδέουμε κάθε κορυφή της ομάδας Β (n-r κορυφές) με όλες τις κορυφές πλην μίας της ομάδας Α (r-1 κορυφές). Άρα συνολικά προσθέτουμε

$\sum_1^{n-r}(r-1) = (\mathrm{r}-1)(\mathrm{n}-\mathrm{r})$ ενδιάμεσες ακμές το πολύ.

Άρα συνολικά θα έχουμε το πολύ: $\frac{r(r-1)}{2} + (r-1)(n-r) + \frac{(r-1)(n-r)^2}{2r} = \frac{r^3-r^2}{2r} + \frac{(rn-r^2-n+r)2r}{2r} + \frac{(r-1)(n^2-2rn+r^2)}{2r} = \frac{r^3-r^2}{2r} + \frac{2r^2n-2r^3-2rn+2r^2}{2r} + \frac{rn^2-2r^2n+r^3-n^2+2rn-r^2}{2r} = \frac{rn^2-n^2}{2r} = \frac{(r-1)n^2}{2r}$ ακμές.

Άρα απεδείχθη επαγωγικά ότι για κάθε n≥1, r≥2 κάθε απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα που έχει n κορυφές και δεν περιέχει το K_{r+1} ως υπογράφημα έχει το πολύ $\frac{(r-1)n^2}{2r}$ ακμές.

Θ.δ.ο. για κάθε r, k ≥ 2 υπάρχει γράφημα με kr κορυφές και $\frac{(r-1)rk^2}{2}$ ακμές που δεν περιέχει το K_{r+1} ως υπογράφημα. Διαμερίζω τις kr κορυφές μου σε k ομάδες με r κορυφές έκαστη. Κάθε μία από αυτές τις ομάδες θέλουμε να είναι το K_r άρα κάθε μία από αυτές τις ομάδες θα έχει μέσα $\frac{r(r-1)}{2}$ ακμές. Αφού έχουμε k τέτοιες ομάδες σύνολο εντός των ομάδων θα έχουμε $\frac{kr(r-1)}{2}$ ακμές. Μένει να δούμε πόσες μπορούμε να βάλουμε μεταξύ των ομάδων χωρίς να δημιουργηθεί το K_{r+1}.



Συνδέουμε κάθε κορυφή της $1^{ης}$ ομάδας με όλες εκτός από μία τις κορυφές της $2^{ης}$ (συγκεκριμένα την $1^{η}$ κορυφή της $1^{ης}$ με όλες εκτός από την $1^{η}$ της $2^{ης}$ την $2^{η}$ κορυφή της $1^{ης}$ με όλες εκτός από τη $2^{η}$ κορυφή της $2^{ης}$ κ.τ.λ.) και στη συνέχεια κάθε κορυφή της $1^{ης}$ ομάδας με όλες εκτός από μία της $3^{ης}$ ομάδας αλλά αυτή τη φορά συνδέοντας την $1^{η}$ κορυφή της $1^{ης}$ με όλες εκτός από την $2^{η}$ της $3^{ης}$ την $2^{η}$ κορυφή της $2^{ης}$ με όλες εκτός από τη $3^{η}$ κορυφή της $3^{ης}$ κ.τ.λ. και συνεχίζουμε αντίστοιχα έως ότου να συνδέσουμε με αυτόν τον τρόπο την $1^{η}$ ομάδα με όλες τις άλλες k-1 ομάδες. Αντίστοιχα συνδέουμε την $2^{η}$ ομάδα με τις k-2 ομάδες που δε συνδέεται ήδη την $3^{η}$ με τις k-3 ομάδες που δε συνδέεται ήδη και πάει λέγοντας έως ότου συνδέσουμε την (k-1)-οστή με την k-οστή. Με αυτόν τον τρόπο σύνδεσης δεν δημιουργείται το K_{r+1} ούτε από κάποιο K_r συν μία κορυφή με την οποία συνδέονται όλες όσες ανήκουν στο K_r αλλά ούτε «οριζόντια» εξαιτίας των πολλών ομάδων που συνδέονται μεταξύ τους. Μετρώντας τις ακμές που βάλαμε μεταξύ των ομάδων παρατηρούμε ότι μεταξύ δύο οποιονδήποτε ομάδων υπάρχουν πάντα r(r-1) ακμές (αφού συνδέουμε κάθε κορυφή της μίας ομάδας -συνολικά r κορυφές- με όλες εκτός από μία τις κορυφές της άλλης -συνολικά r-1 κορυφές-) και αφού συνδέουμε την $1^{η}$ ομάδα με k-1 ομάδες την $2^{η}$ με k-2 … την (k-1)-οστή με μία, συνολικά μεταξύ των ομάδων θα έχουμε: $(\mathrm{k}-1)[\mathrm{r}(\mathrm{r}-1)] + (\mathrm{k}-2)[\mathrm{r}(\mathrm{r}-1)] + \cdots + 2[\mathrm{r}(\mathrm{r}-1)] + 1[\mathrm{r}(\mathrm{r}-1)] = [(\mathrm{k}-1) + (\mathrm{k}-2) + \cdots + 2 + 1]\mathrm{r}(\mathrm{r}-1) = \frac{k(k-1)}{2} r(r-1)$

Επομένως οι συνολικές ακμές του γραφήματος, που κατασκευάσαμε με kr κορυφές και δεν περιέχει το K_{r+1} ως υπογράφημα, θα είναι: $\frac{kr(r-1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2} r(r-1) = \frac{kr(r-1)}{2}(1+k-1) = \frac{kr(r-1)}{2} k = \frac{(r-1)rk^2}{2}$

Άρα για κάθε r,k ≥ 2 υπάρχει γράφημα με kr κορυφές και $\frac{(r-1)rk^2}{2}$ ακμές που δεν περιέχει το K_{r+1} ως υπογράφημα και κατασκευάζεται με τον τρόπο που δείξαμε παραπάνω.

Θέμα 3:

Αφού το γράφημα είναι συνεκτικό για κάθε ζευγάρι κορυφών u, v υπάρχει μονοπάτι που να τις συνδέει. Αφού είναι διμερές υπάρχει μία τουλάχιστον διαμέρισή του σε δύο ανεξάρτητα σύνολα. Άρα αν τα μονοπάτια μεταξύ οποιονδήποτε δύο κορυφών u-v είναι:

1) περιττού μήκους τότε οι κορυφές θα ανήκουν σε διαφορετικά ανεξάρτητα σύνολα (αλλιώς θα υπήρχε ακμή μεταξύ δύο κορυφών ενός ανεξάρτητου συνόλου άρα το σύνολο δε θα ήταν ανεξάρτητο, άτοπο)
2) άρτιου μήκους τότε οι κορυφές u, v θα ανήκουν στο ίδιο ανεξάρτητο σύνολο (για τον ίδιο λόγο)

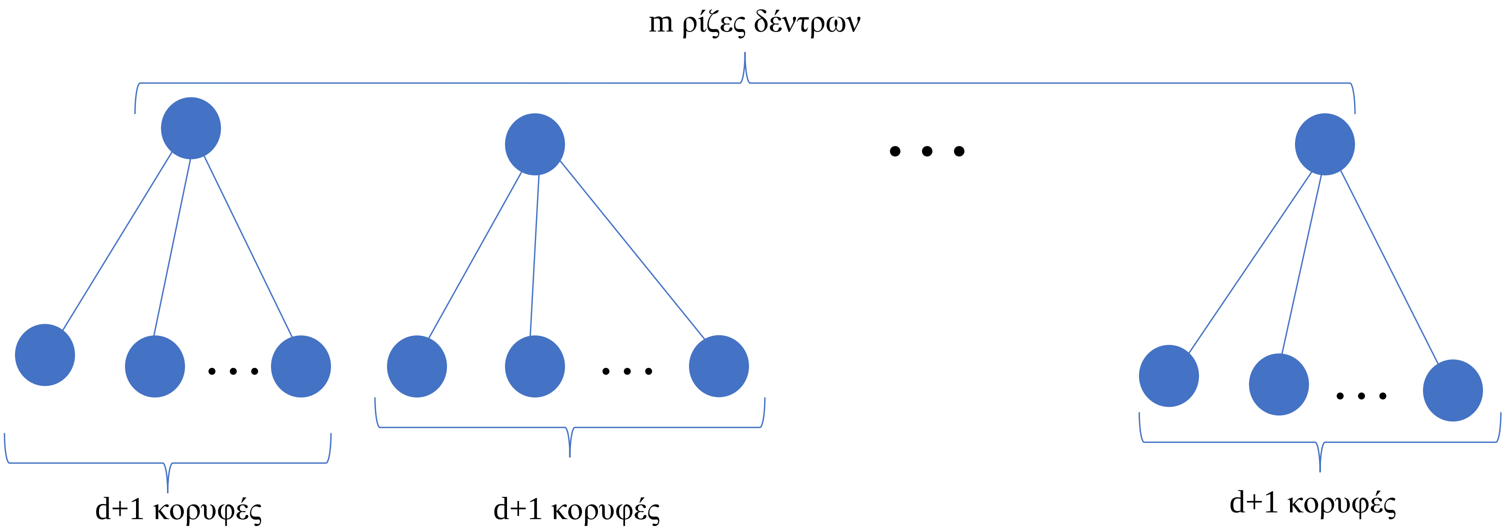
Έστω διαμέριση των κορυφών σε δύο ανεξάρτητα σύνολα $A=\{\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n\}$ και $B=\{\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_m\}$. Με βάση τα προηγούμενα ξέρουμε ότι τα μονοπάτια που συνδέουν οποιοδήποτε α_λ με οποιοδήποτε β_κ θα έχουν περιττό μήκος. Τότε αν υπάρχει διαφορετική διαμέριση των κορυφών σε δύο ανεξάρτητα σύνολα αναγκαστικά για να είναι διαφορετική κάποιο α_λ θα βρεθεί στο ίδιο ανεξάρτητο σύνολο με κάποιο β_κ. Όμως τα μονοπάτια που τα συνδέουν είναι περιττού μήκους και βρίσκονται στο ίδιο ανεξάρτητο σύνολο άρα υπάρχει ακμή μεταξύ δύο κορυφών που ανήκουν στο ίδιο ανεξάρτητο σύνολο που είναι άτοπο. **Άρα για κάθε απλό μη κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα υπάρχει μοναδική διαμέριση των κορυφών του σε δύο ανεξάρτητα σύνολα.**

Αν το G έχει k≥2 συνεκτικές συνιστώσες για κάθε μία από αυτές υπάρχει μοναδική διαμέριση των κορυφών σε δύο ανεξάρτητα σύνολα. Μεταξύ δύο συνεκτικών συνιστωσών δεν υπάρχουν ακμές αφού τότε θα συνδέονταν και θα αποτελούσαν την ίδια συνεκτική συνιστώσα. Για 2 συνεκτικές συνιστώσες οι οποίες διαμερίζονται σε δύο ανεξάρτητα σύνολα η καθεμία -έστω Α, Β και Γ, Δ- υπάρχουν δύο διαφορετικές διαμερίσεις οι Α∪Γ, Β∪Δ και Α∪Δ, Β∪Γ αφού μεταξύ των ανεξάρτητων συνόλων διαφορετικών συνεκτικών συνιστωσών δεν υπάρχουν ακμές άρα και η ένωση θα παραμένει ανεξάρτητο σύνολο. Αντίστοιχα για 3 διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες θα υπάρχουν 4 διαφορετικές διαμερίσεις και γενικεύοντας **για k συνεκτικές συνιστώσες θα υπάρχουν 2^{k-1} διαμερίσεις**, αφού για κάθε μία συνεκτική συνιστώσα που προσθέτουμε διπλασιάζονται οι δυνατές διαμερίσεις. Μπορεί να δειχθεί και πιο αυστηρά. Αν έχουμε $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ συνεκτικές συνιστώσες που η κάθε μία διαμερίζεται σε ανεξάρτητα σύνολα α_{n0}, α_{n1}, n=0, 1,… ,k τότε τα ανεξάρτητα σύνολα θα είναι όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί των α_{n0}, α_{n1}. Αφού έχουμε k μεταβλητές (κάθε ανεξάρτητο σύνολο θα αποτελείται από την ένωση k α_{ni} που παίρνουν τιμές 0 ή 1 αναλόγως ποιο ανεξάρτητο σύνολο i=0, 1 της συνεκτικής συνιστώσας n θα βάλουμε στο ανεξάρτητο σύνολο) που μπορούν να πάρουν δύο διαφορετικές τιμές η κάθε μία και θεωρούμε ίδιο αποτέλεσμα τους συμμετρικούς συνδυασμούς (δεν μας ενδιαφέρει να μετρήσουμε ως δύο διαφορετικές διαμερίσεις την διαμέριση A, B και B, A) θα έχουμε $\frac{2^k}{2}=2^{k-1}$ διαφορετικές διαμερίσεις.

Θέμα 4:

1) Έστω ότι στο απλό γράφημα G(V, E) με n κορυφές που είναι d κανονικό ο μέγιστος αριθμός κορυφών που δε συνδέονται μεταξύ τους με ακμή είναι m και αυτές οι κορυφές είναι οι $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ($m \geq 1$, ακόμα και αν το γράφημα είναι πλήρες για m=1 έχουμε μία κορυφή). Τότε αυτές οι κορυφές θα αποτελούν ένα ανεξάρτητο σύνολο με m κορυφές. Αφού το γράφημα είναι d-κανονικό κάθε μία από αυτές τις m κορυφές θα συνδέεται με d άλλες κορυφές, προφανώς όχι με κάποια εκ των $a_1, a_2, \ldots, a_m$ αφού έχουμε υποθέσει ότι δεν υπάρχουν ακμές μεταξύ αυτών των κορυφών. Αναπαριστούμε το γράφημα ως εξής:

- Τοποθετούμε κάθε μία από τις $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ως κορυφή ενός διαφορετικού δέντρου που έχει ως φύλλα όλους τους γείτονες της ρίζας του και δεν έχει ενδιάμεσους κόμβους.
- Κατά κανόνα φύλλα ενός δέντρου θα ταυτίζονται με φύλλα άλλων δέντρων αφού κάποιες κορυφές πιθανόν να γειτονεύουν με παραπάνω από μία από τις $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Επίσης αυτή η αναπαράσταση σίγουρα περιέχει όλες τις n αρχικές κορυφές αφού για να μην περιέχει κάποια κορυφή θα έπρεπε αυτή η κορυφή να μην είναι κάποια από τις $a_1, a_2, \ldots, a_m$ και να μη συνδέεται με καμία από τις $a_1, a_2, \ldots, a_m$ που θα σήμαινε ότι υπάρχουν m+1 κορυφές που δε συνδέονται μεταξύ τους με ακμή που είναι άτοπο αφού δεχτήκαμε ότι m είναι ο μέγιστος αριθμός αυτών των κορυφών.
- Αφού οι κορυφές $a_1, a_2, \ldots, a_m$ είναι βαθμού d κάθε τέτοιο δέντρο θα περιέχει d+1 κορυφές (η ρίζα συν d κορυφές με τις οποίες συνδέεται).



Με βάση τα όσα αναλύθηκαν παραπάνω αν αθροίσω τις κορυφές αυτής της αναπαράστασης του γραφήματος το αποτέλεσμα θα είναι μεγαλύτερο ή ίσο του n αφού κάποιες θα μετρούνται δύο φορές και η αναπαράσταση περιέχει τουλάχιστον n κορυφές. Αθροίζω m ομάδες των (d+1) κορυφών άρα τελικά προκύπτει:

$$m(d+1) \geq n \Rightarrow m \geq \frac{n}{d+1}$$

Άρα κάθε απλό γράφημα G(V, E) με n κορυφές που είναι d-κανονικό έχει ανεξάρτητο σύνολο με τουλάχιστον $\frac{n}{d+1}$ κορυφές.

Για τον υπολογισμό ενός τέτοιου συνόλου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον εξής αλγόριθμο:

- Ξεκινάμε από ένα κενό σύνολο M και ένα κενό σύνολο N.
- Για κάθε κορυφή v του αρχικού γραφήματος αν δεν ανήκει ούτε στο M ούτε στο N την προσθέτουμε στο M και προσθέτουμε όλους τους γείτονες της στο N.

Μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων θα έχει δημιουργηθεί ανεξάρτητο σύνολο με τουλάχιστον $\frac{n}{d+1}$ κορυφές. Αυτός ο αλγόριθμος έχει πολυωνυμική πολυπλοκότητα άρα θεωρείται αποδοτικός.

2) Έστω απλό γράφημα G(V, E) με n κορυφές. Εφαρμόζουμε τον προηγούμενο αλγόριθμο σε μία τυχαία μετάθεση των κορυφών. Αφού η μετάθεση των κορυφών

είναι τυχαία για κάθε κορυφή v του γραφήματος γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα να προστεθεί στο ανεξάρτητο σύνολο M είναι τουλάχιστον $\frac{1}{\deg(v)+1}$ αφού για κάθε κορυφή v που θα προσθέσουμε στο M, θα προσθέσουμε όλους τους deg(v) γείτονες της στο N αν δεν υπάρχουν ήδη. Άρα αν ορίσουμε μία τυχαία μεταβλητή X_v όπου X_v=1 αν η κορυφή v ανήκει στο M και X_v=0 αν δεν ανήκει στο M τότε όπως δείξαμε $P(X_v=1) \geq \frac{1}{\deg(v)+1}$ και για τη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής θα ισχύει $E(X_v) = 1\ P(X_v=1) + 0\ P(X_v=0) = P(X_v=1) \geq \frac{1}{\deg(v)+1}$.

Άρα για τη μέση τιμή των ανεξάρτητων κορυφών που ανήκουν στο M ισχύει: $E(\sum_{v\in V} Xv) = \sum_{v\in V}(E(Xv)) \geq \sum_{v\in V} \frac{1}{\deg(v)+1}$. Άρα υπάρχει θετική πιθανότητα ο αλγόριθμος μας να βρει ανεξάρτητο σύνολο με τουλάχιστον $\sum_{v\in V} \frac{1}{\deg(v)+1}$ κορυφές. **Άρα απεδείχθη με την πιθανοτική μέθοδο ότι το απλό γράφημα G με n κορυφές έχει ανεξάρτητο σύνολο με τουλάχιστον $\sum_{v\in V} \frac{1}{\deg(v)+1}$ κορυφές όπου deg(v) είναι ο βαθμός της κορυφής v.**

Θέμα 5:

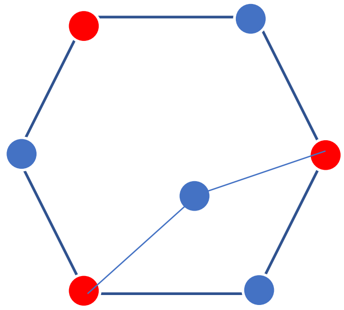
α)

1)

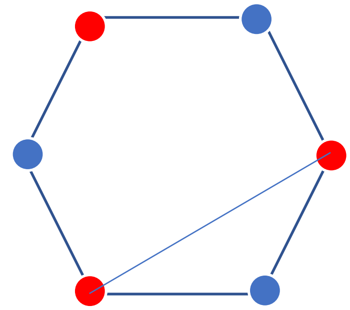
- Ευθύ: Αφαιρώντας μία κορυφή βαθμού δυο από το G και αντικαθιστώντας την με ακμή (απλοποίηση σειράς) δεν αλλάζει ο βαθμός των υπόλοιπων κορυφών του G (αφού το G έχει κύκλωμα Euler θα έχουν όλες άρτιο βαθμό). Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία έως ότου από το G να καταλήξουμε στο ομοιμορφικό H όλες οι κορυφές του H θα εξακολουθούν να έχουν άρτιο βαθμό άρα το H θα έχει κύκλωμα Euler.
- Αντίστροφο: Αν το H έχει κύκλωμα Euler όλες οι κορυφές του θα είναι άρτιου βαθμού. «Σπάζοντας» μία ακμή και παρεμβάλλοντας ανάμεσά στα δύο τμήματα μία κορυφή ο βαθμός των υπόλοιπων κορυφών δεν επηρεάζεται και η νέα κορυφή έχει βαθμό δύο που είναι άρτιος βαθμός. Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία έως ότου από το H να καταλήξουμε στο G όλες οι κορυφές του G θα είναι άρτιου βαθμού άρα το G θα έχει κύκλωμα Euler.

2) Αντί-Παράδειγμα:

G:



H:



Τα G και H είναι ομοιμορφικό αφού καταλήγουν ισομορφικά αν εφαρμόσουμε απλοποίηση σειράς στην ενδιάμεση κορυφή του G (αυτή που βρίσκεται εντός του εξαγώνου που ορίζουν οι υπόλοιπες κορυφές).

Το H έχει κύκλο Hamilton (ξεκινώντας από οποιαδήποτε κορυφή διασχίζουμε περιμετρικά το εξάγωνο χωρίς να χρησιμοποιούμε την ακμή που συνδέει τις δύο κόκκινες κορυφές)

Το G δεν έχει κύκλο Hamilton αφού είναι διμερές (ένα ανεξάρτητο σύνολο οι κόκκινες κορυφές, το άλλο οι μπλε) και έχει περιττό αριθμό κορυφών (7) (παραβιάζεται η αναγκαία συνθήκη ύπαρξης κύκλου Hamilton που δηλώνει ότι αν ένα γράφημα είναι διμερές και έχει κύκλο Hamilton πρέπει να έχει άρτιο αριθμό κορυφών). Άρα αν το H έχει κύκλο Hamilton το G δεν έχει κατά ανάγκη κύκλο Hamilton.

β) Θ.δ.ο. κάθε απλό γράφημα με $n \geq 3$ κορυφές και $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$ ακμές έχει κύκλο Hamilton (και παραπάνω ακμές να έχει, αν το γράφημα με $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$ ακμές έχει κύκλο Hamilton και αυτά με παραπάνω ακμές θα έχουν αφού για να έχουμε κύκλο Hamilton δε χρειάζεται να περάσουμε από όλες τις ακμές άρα απλώς αγνοούμε τις επιπλέον).

- Επαγωγική βάση: Για 3 κορυφές και 3 ακμές έχουμε το K_3 που θα έχει κύκλο Hamilton από Θ. Dirac (όλες οι κορυφές έχουν ίδιο βαθμο (2) που είναι μεγαλύτερος του αριθμού των κορυφών δια 2 (3/2))

- Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι κάθε απλό γράφημα με n-1 κορυφές (n≥ 4 ώστε n-1≥3) και $\frac{((n-1)-1)((n-1)-2)}{2}+2=\frac{(n-2)(n-3)}{2}+2$ ακμές έχει κύκλο Hamilton.
- Επαγωγικό βήμα: Έστω τυχαίο απλό γράφημα G με n κορυφές (n≥4) και $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2$ ακμές. Θ.δ.ο. στο γράφημα G με n κορυφές και $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2$ ακμές υπάρχει κορυφή u με deg(u)≥k-2. Έστω ότι δεν υπάρχει, τότε για κάθε κορυφή k του γραφήματος θα ισχύει deg(n)≤n-3 ⇒ $\sum_n \deg(n) \leq \sum_n n-3 \Rightarrow 2|\mathrm{E}| \leq n(n-3) \Rightarrow |E| \leq \frac{n(n-3)}{2}<\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2$ άτοπο αφού δεχτήκαμε ότι το γράφημα έχει $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2$ ακμές. Άρα υπάρχει κορυφή u με deg(u)≥k-2. Συνεπώς υπάρχει μία κορυφή u που έχει είτε βαθμό είτε n-2 είτε n-1 (Μεγαλύτερος βαθμός θα σήμαινε ότι δεν έχουμε απλό γράφημα). Έστω deg(u)=n-2. Αφαιρώντας την από το γράφημα G προκύπτει νέο γράφημα με n-1 κορυφές και $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2-(n-2)=(n-2)\left[\frac{(n-1)}{2}-1\right]+2=\frac{(n-2)(n-3)}{2}+2$ ακμές. Άρα το γράφημα που προκύπτει εμπίπτει στην επαγωγική υπόθεση άρα έχει κύκλο Hamilton. Ξαναβάζουμε την κορυφή u που αφαιρέσαμε στο γράφημα. Αφού είναι βαθμού n-2 θα συνδέεται με όλες εκτός από μία τις υπόλοιπες n-1 κορυφές άρα θα συνδέεται με δύο διαδοχικές κορυφές (έστω x, y) του κύκλου Hamilton άρα μπορεί να προκύψει νέος κύκλος Hamilton αν αντί να ακολουθήσουμε την ακμή που συνέδεε κανονικά αυτές τις δύο διαδοχικές κορυφές x, y πάμε από την x στην καινούρια (u) και από την καινούρια στη y. Αυτό γίνεται εγγυημένα αφού n-2≥4-2=2 άρα πάντα μπορούμε να κάνουμε αυτήν την παράκαμψη. Αν deg(u)=n-1 και την αφαιρέσουμε από το γράφημα το νέο γράφημα θα έχει n-1 κορυφές και $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2-(n-1)=$ $(n-1)\left[\frac{(n-2)}{2}-1\right]+2=\frac{(n-1)(n-4)}{2}+2=\frac{n^2-5n+4+2}{2}+1=\frac{(n-2)(n-3)}{2}+1$ ακμές. Άρα για αυτό το γράφημα δεν μπορούμε να υποθέσουμε ότι σίγουρα έχει κύκλο Hamilton αφού δεν πληροί τις υποθέσεις της επαγωγικής υπόθεσης. Όμως αν είχε μία παραπάνω ακμή θα είχε κύκλο Hamilton άρα έχει μονοπάτι Hamilton. Άρα σίγουρα ο γράφος που προκύπτει με την αφαίρεση της κορυφής βαθμού n-1 θα έχει μονοπάτι Hamilton και έστω x, y τα άκρα αυτού. Ξαναβάζουμε την κορυφή που αφαιρέσαμε στο γράφημα. Είναι βαθμού n-1 άρα συνδέεται με όλες τις άλλες κορυφές του γραφήματος άρα και με τα άκρα του μονοπατιού Hamilton x, y οπότε οι ακμές (x, u) και

(u, x) κλείνουν έναν κύκλο Hamilton. **Άρα απεδείχθη επαγωγικά ότι κάθε απλό γράφημα με n≥3 κορυφές και τουλάχιστον $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2$ ακμές έχει κύκλο Hamilton.**

Το γράφημα με n κορυφές και $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ ακμές θα μπορούσε να αποτελείται από το K_{n-1} που έχει n-1 κορυφές και $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ακμές, συν μία ακμή που να συνδέει το K_{n-1} με την μοναδική κορυφή που δε συνδέεται με καμία άλλη χωρίς αυτήν την ακμή. Αυτό το γράφημα δεν θα μπορούσε να έχει κύκλο Hamilton αφού η ακμή που συνδέει το K_{n-1} με την μοναδική κορυφή που δε συνδέεται με καμία άλλη χωρίς αυτήν την ακμή είναι γέφυρα άρα παραβιάζεται η αναγκαία συνθήκη ύπαρξης κύκλου Hamilton που δηλώνει πως αν το γράφημα G έχει κύκλο Hamilton δεν έχει γέφυρα ή σημείο κοπής. **Άρα για κάθε n≥3 υπάρχει απλό γράφημα με n κορυφές και $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ ακμές που δεν έχει κύκλο Hamilton.**

Θέμα 6:

α) Ευθύ: Θα δείξω επαγωγικά ότι αν $d_1+\ldots+d_n=2(n-1)$ με $d_1, d_2, \ldots, d_n$ θετικούς ακεραίους τότε υπάρχει δέντρο Τ με n κορυφές και βαθμούς κορυφών $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

- Επαγωγική βάση: Ισχύει τετριμμένα για n=2, $d_1+d_2=2(2-1)=2$ και αφού d_1, d_2 θετικοί ⇒ $d_1=d_2=1$ και πράγματι με δύο κορυφές βαθμού 1 φτιάχνεται δέντρο με ρίζα τη μία κορυφή και φύλλο την άλλη.
- Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για $d_1+\ldots+d_{n-1}=2(n-1-1)$ υπάρχει δέντρο Τ' με n-1 κορυφές και βαθμούς κορυφών $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$.
- Επαγωγικό βήμα: Θ.δ.ο. για $d_1+\ldots+d_n=2(n-1)$,n≥3 υπάρχει δέντρο Τ με n κορυφές και βαθμούς κορυφών $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Έστω ότι $d_1, d_2, \ldots, d_n\geq 2$. Τότε $d_1+\ldots+d_n\geq 2n > 2(n-1)$ άτοπο από υπόθεση αφού υποθέσαμε ότι $d_1+\ldots+d_n=2(n-1)$. Άρα αφού $d_1, d_2, \ldots, d_n$ θετικοί υπάρχει ένα τουλάχιστον $d_k=1$. Έστω τώρα ότι $d_1=d_2=\ldots=d_n=1$. Τότε $d_1+\ldots+d_n=n \neq 2(n-1)$ για κάθε n διάφορο του 2 (εδώ έχουμε δεχθεί ότι n≥3) άρα πάλι άτοπο από υπόθεση. Άρα αφού δεν μπορούν όλα τα $d_1, d_2, \ldots, d_n$ να παίρνουν ταυτόχρονα την τιμή 1 και είναι όλα θετικά θα υπάρχει ένα d_m με $d_m\geq 2$. Επιλέγω χωρίς βλάβη της γενικότητας k=n και m=1. Τότε: $d_1+\ldots+d_{n-1}+1=2(n-1) \Rightarrow$

$(d_1\text{-}1)+\ldots+d_{n-1}=2(n\text{-}1)\text{-}2 \Rightarrow (d_1\text{-}1)+\ldots+d_{n-1}=2(n\text{-}2)$. Άρα από επαγωγική υπόθεση θα υπάρχει δέντρο T' με n-1 κορυφές και βαθμούς κορυφών d_1-1, d_2, …, d_{n-1}. Κορυφή βαθμού d_1-1 μπορεί να υπάρξει αφού δεχτήκαμε ότι $d_1 \geq 2$. Προσθέτω μία κορυφή βαθμού d_n=1 στο δέντρο. Αφού είναι βαθμού 1 όπου και να συνδεθεί το γράφημα θα παραμείνει δέντρο (δεν μπορεί να κλείνει κύκλο και θα συνδεθεί με το συνεκτικό δέντρο T' άρα το τελικό γράφημα θα είναι συνεκτικό). Έστω ότι αυτή η νέα κορυφή συνδέεται με την κορυφή που είχε βαθμό d_1-1 (μπορούμε να τη συνδέσουμε εκεί γιατί επιθυμούμε να δείξουμε ότι υπάρχει τέτοιο δέντρο T). Τότε σε αυτήν την κορυφή θα προσπίπτει μία επιπλέον ακμή άρα θα αποκτήσει βαθμό d_1-1+1 = d_1. Άρα προέκυψε δέντρο T με n κορυφές βαθμών d_1, d_2, …, d_n.

Άρα απεδείχθη επαγωγικά ότι για d_1, d_2, …, d_n θετικούς ακεραίους για τους οποίους ισχύει $d_1+\ldots+d_n=2(n\text{-}1)$ υπάρχει δέντρο T με n κορυφές και βαθμούς κορυφών d_1, d_2, …, d_n.

Αντίστροφο: αν υπάρχει δέντρο με T με n κορυφές και βαθμούς κορυφών d_1, d_2,... , d_n τότε για τις ακμές του δέντρου θα ισχύει: $|\mathrm{E}| = \mathrm{n} - 1 \Rightarrow 2|E| = 2(n-1) \Rightarrow \sum_n \deg(n) = 2(n-1) \Rightarrow d1 + \cdots + dn = 2(n-1)$.

β) Έστω τυχαίες κορυφές u, v στο G. Στο μοναδικό μονοπάτι u - v p^*_{uv} στο ,τυχαίο αφού μπορεί να έχει παραπάνω από 1, ΕΣΔ του G βρίσκουμε την ακριβότερη ακμή (σε περίπτωση πολλαπλών ακριβότερων ακμών με το ίδιο βάρος επιλέγουμε μία τυχαία) και την αφαιρούμε (όποιο ΕΣΔ και να παίρναμε δε θα άλλαζε το βάρος της ακριβότερης ακμής αφού διαφορετικά ΕΣΔ προκύπτουν σε περίπτωση ισοβαθμίας βαρών). Έστω e_1 η ακμή που αφαιρέσαμε. Αφού αφαιρέσαμε μία ακμή από το ελάχιστο συνδετικό δέντρο πλέον έχουμε δύο συνεκτικές συνιστώσες. Αν στο αρχικό γράφημα G θεωρήσουμε ως ένα σύνολο τη μία συνεκτική συνιστώσα του ΕΣΔ που προέκυψε με αφαίρεση της ακμής e1 και ως άλλο σύνολο την άλλη συνεκτική συνιστώσα του τότε αυτά τα δύο σύνολα αποτελούν μία τομή την οποία διασχίζουν ακμές που δεν ανήκαν σε κάποιο ΕΣΔ ,ακμές κάποιου άλλου ΕΣΔ και η ακμή που αφαιρέσαμε από το τυχαίο ΕΣΔ. Έστω ότι υπάρχει άλλη ακμή e_2 φθηνότερη της e_1 που διασχίζει την τομή και δεν ανήκει σε κάποιο ΕΣΔ και μάλιστα θεωρούμε ότι η e_2 είναι η φθηνότερη από όσες διασχίζουν την τομή χωρίς βλάβη της γενικότητας αφού αναγκαστικά κάποια από όλες τις ακμές θα είναι η φθηνότερη. Τότε αυτή θα ανήκει σε μονοπάτι u-v αφού συνδέει τη μία συνεκτική συνιστώσα που περιέχει την u με την άλλη που περιέχει την v και μάλιστα αυτό το μονοπάτι θα είναι φτηνότερο του p^*_{uv} αφού η ακριβότερή του ακμή e1 αντικαταστάθηκε με μία φθηνότερη e2. Αφού είναι η ελαχίστου κόστους ακμή που διασχίζει την τομή θα ανήκει σε κάποιο ΕΣΔ πράγμα άτοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι δεν ανήκει. Άρα όποιο μονοπάτι p_{uv} και να πάρουμε (με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να πάρουμε όλα τα πιθανά p_{uv} μονοπάτια) θα έχει ακριβότερη ή ίσου βάρους ακμή με την e1. **Άρα αν ορίσουμε ως «κόστος» ενός u - v μονοπατιού p_{uv} το βάρος της βαρύτερης ακμής του, το μοναδικό u - v μονοπάτι p^*_{uv} στο ΕΣΔ ελαχιστοποιεί αυτό το κόστος για όλα τα ζευγάρια κορυφών u, v.**

Θέμα 7:

1) Αφού αν το G έχει κύκλους όλοι θα έχουν μήκος μεγαλύτερο ή ίσο του k, άρα οι ακμές κάθε κύκλου θα είναι περισσότερες ή ίσες από k και αφού η όψη είναι περιοχή επιπέδου που ορίζεται από απλό κύκλο και δεν μπορεί να διαιρεθεί σε μικρότερες όψεις, κάθε όψη θα ορίζεται από τουλάχιστον k ακμές. Άρα αν f ο αριθμός των όψεων του γραφήματος θα ισχύει:

$\sum_{f\in όψεις} \#ακμών(f) \geq kf$. (1)

Αφού κάθε ακμή του γραφήματος θα ανήκει είτε σε δύο όψεις (αν είναι ακμή κύκλου) είτε σε μία (αν δεν ανήκει σε κύκλο), θα ισχύει:

$\sum_{f\in όψεις} \#ακμών(f) \leq 2m$ (2) αφού το άθροισμα μεγιστοποιείται όταν όλες οι ακμές ανήκουν σε κύκλο άρα μετρούνται δύο φορές η κάθε μία (m το πλήθος των ακμών).

Από (1) και (2) $\Rightarrow kf \leq \sum_{f\in όψεις} \#ακμών(f) \leq 2m \Rightarrow kf \leq 2m \Rightarrow f \leq \frac{2m}{k}$ (3)

Από τον τύπο του Euler για συνεκτικά επίπεδα γραφήματα γνωρίζουμε ότι:
$n + f = m + 2 \overset{(3)}{\Rightarrow} m + 2 \leq n + \frac{2m}{k} \Rightarrow \frac{m(k-2)}{k} \leq n - 2 \Rightarrow m \leq \frac{k}{k-2}(n-2)$

2) i) Αφού δεν περιέχει κύκλους με μήκος μικρότερο ή ίσο του 5 και είναι απλό και επίπεδο θα συμφωνεί με τα δεδομένα του 1ου ερωτήματος για k=6. Άρα από τον τύπο του ερωτήματος (1) για το πλήθος m των ακμών έχουμε ότι:
$m \leq \frac{6}{6-2}(n-2) \Rightarrow m \leq \frac{3}{2}n - 3$

Έστω ότι δεν έχει κορυφή με βαθμό μικρότερο ή ίσο του 2. Τότε όλες του οι κορυφές θα έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 3. Άρα: $\sum_n \deg(n) \geq 3n \Rightarrow 2m \geq 3n \Rightarrow m \geq \frac{3}{2}n$.

Άρα τελικά για τις ακμές ισχύει: $\frac{3}{2}n \leq m \leq \frac{3}{2}n - 3 \Rightarrow \frac{3}{2}n \leq \frac{3}{2}n - 3 \Rightarrow 0 \leq -3$ Άτοπο! **Άρα κάθε απλό επίπεδο γράφημα G που δεν έχει κύκλους με μήκος μικρότερο ή ίσο του 5 έχει τουλάχιστον μία κορυφή με βαθμό μικρότερο ή ίσο του 2.**

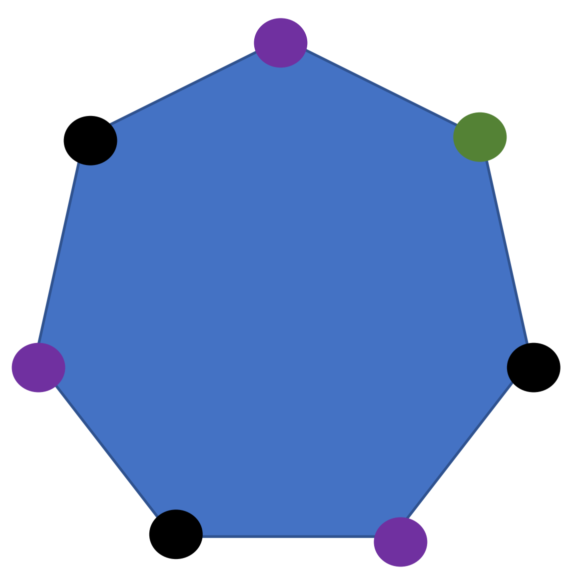
ii) Θα δείξω επαγωγικά ότι κάθε απλό επίπεδο γράφημα G με n κορυφές (n τυχαίος) που δεν έχει κύκλους με μήκος μικρότερο ή ίσο του 5 έχει χρωματικό αριθμό μικρότερο ή ίσο του 3.

- Επαγωγική βάση: Ισχύει τετριμμένα για n≤3 αφού ακόμα και αν όλες οι κορυφές συνδέονται μεταξύ τους χρειαζόμαστε το πολύ 3 χρώματα για να τις χρωματίσουμε, ένα για κάθε κορυφή του γραφήματος με 3 κορυφές.
- Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι τα απλά επίπεδα γραφήματα με n-1 (n≥4) κορυφές που δεν έχουν κύκλους με μήκος μικρότερο ή ίσο του 5 έχουν χρωματικό αριθμό μικρότερο ή ίσο του 3
- Επαγωγικό βήμα: Έστω απλό επίπεδο γράφημα με n κορυφές που δεν έχει κύκλους με μήκος μικρότερο ή ίσο του 5. Από το προηγούμενο ερώτημα γνωρίζουμε ότι αυτό το γράφημα θα έχει τουλάχιστον μία κορυφή βαθμού μικρότερου ή ίσου του 2. Την αφαιρούμε και αφού το γράφημα που προκύπτει έχει n-1 κορυφές και είναι επίπεδο (δεν προσθέτω κάποια ακμή ώστε να τέμνεται με κάποια άλλη ακμή) που δεν έχει κύκλους με μήκος μικρότερο ή ίσο του 5 (Αν η κορυφή δεν ανήκε σε κύκλο τότε η αφαίρεση της δεν επηρεάζει τους ήδη υπάρχοντες κύκλους που έχουν μήκος μεγαλύτερο ή ίσο του 5, ενώ αν ανήκε σε κύκλο έστω ότι με αφαίρεση της προκύπτει κύκλος με μήκος μικρότερο ή ίσο του 5, τότε αυτός ο κύκλος θα υπήρχε και χωρίς την αφαίρεση της -επιπλέον κορυφή δεν αναιρεί κύκλους- άρα το αρχικό γράφημα θα είχε κύκλο με μήκος μικρότερο ή ίσο του 5 που είναι άτοπο από υπόθεση και προφανώς η αφαίρεση της ακμής δεν μπορεί να δημιουργήσει κύκλους κάπου που δεν υπήρχαν), από επαγωγική υπόθεση θα έχει χρωματικό αριθμό μικρότερο ή ίσο του 3. Σε αυτό το γράφημα ξαναβάζουμε την κορυφή που αφαιρέσαμε (με τρόπο ώστε να μη χαλάει η επιπεδότητα και να μην κλείνουν κύκλοι με μήκος μικρότερο ή ίσο του 5) και ξέρουμε ότι έχει βαθμό μικρότερο ή ίσο του 2. Αν έχει βαθμό 1 τότε συνδέεται μόνο με μία κορυφή και συνεπώς μπορεί να πάρει το ίδιο χρώμα με μία άλλη κορυφή του γραφήματος διαφορετικού χρώματος από αυτήν με την οποία συνδέεται οπότε ο χρωματικός αριθμός του γραφήματος δεν επηρεάζεται και παραμένει μικρότερος ή ίσος του 3 ή αν όλες έχουν το ίδιο

χρώμα (όλες οι κορυφές ανεξάρτητες μεταξύ τους, το γράφημα έχει χρωματικό αριθμό 1) να πάρει ένα διαφορετικό χρώμα οπότε ο χρωματικός αριθμός του γραφήματος γίνεται 2 που είναι μικρότερος ή ίσος του 3. Αν έχει βαθμό 2 τότε συνδέεται με 2 κορυφές που, ακόμα και διαφορετικό χρώμα να έχουν (αν είχαν ίδιο χρώμα θα έπαιρνε το χρώμα μιας άλλης κορυφής του γραφήματος διαφορετικού χρώματος οπότε ο χρωματικός αριθμός θα παρέμενε μικρότερος ή ίσος του 3 και αν όλες είχαν το ίδιο χρώμα θα έπαιρνε ένα νέο χρώμα που δεν υπάρχει στο γράφημα και ο χρωματικός αριθμός του γραφήματος θα γινόταν $2\leq 3$), της αφήνουν περιθώριο να πάρει ένα τρίτο χρώμα που είτε υπάρχει ήδη κάπου αλλού στο γράφημα (δηλαδή δεν έχουν αυτό το χρώμα οι δύο κορυφές με τις οποίες συνδέεται) οπότε ο χρωματικός αριθμός του γραφήματος δεν επηρεάζεται και παραμένει μικρότερος ή ίσος του 3 ή αν το γράφημα είχε μόνο 2 χρώματα παίρνει ένα τρίτο διαφορετικό και ο χρωματικός αριθμός του γραφήματος γίνεται $3\leq 3$.

Άρα απεδείχθη επαγωγικά ότι κάθε απλό επίπεδο γράφημα G που δεν περιέχει κύκλους με μήκος μικρότερο ή ίσο του 5 έχει χρωματικό αριθμό μικρότερο ή ίσο του 3.

Ένα απλό επίπεδο γράφημα που δεν περιέχει κύκλους με μήκος μικρότερο ή ίσο του 5 και έχει χρωματικό αριθμό ίσο με 3 είναι το C_7 (κύκλος με 7 κορυφές). Ένας χρωματισμός των κορυφών του είναι ο εξής:



Θέμα 8:

Γνωρίζουμε ότι το πλήρες γράφημα K_q θα έχει χρωματικό αριθμό q αφού όλες οι κορυφές του συνδέονται μεταξύ τους. Έστω ότι το τυχαίο γράφημα G έχει n κορυφές. Το καρτεσιανό γινόμενο G x K_q θα περιέχει ένα αντίγραφο του K_q για κάθε κορυφή του G και ένα αντίγραφο του G για κάθε κορυφή του K_q. Άρα ο χρωματικός αριθμός του καρτεσιανού γινομένου τους δεν μπορεί να είναι μικρότερος από τον μέγιστο χρωματικό αριθμό των G, K_q γιατί εάν το G είχε το μέγιστο χρωματικό αριθμό (έστω r αυτός ο αριθμός) και το καρτεσιανό γινόμενο είχε χρωματικό αριθμό μικρότερο αυτού τότε δε θα είχαμε αρκετά χρώματα στο καρτεσιανό γινόμενο για να χρωματίσουμε τα αντίγραφα του G (αφού κάθε αντίγραφο χρειάζεται r χρώματα). Αντίστοιχα αν το K_q είχε το μέγιστο χρωματικό αριθμό και το καρτεσιανό γινόμενο είχε χρωματικό αριθμό μικρότερο του q τότε τα χρώματα του καρτεσιανού γινομένου δεν επαρκούν για να χρωματίσουμε τα αντίγραφα του K_q αφού κάθε αντίγραφο του K_q χρειάζεται q χρώματα. Άρα $\chi(G \text{ x } K_q) \geq \max(\chi(G), \chi(K_q)) = \max(\chi(G), q)$

Το καρτεσιανό γινόμενο των δύο γραφημάτων θα έχει q αντίγραφα του G. Κάθε ένα από αυτά θα χρωματίζεται με χ(G) χρώματα. Επιπλέον κάθε κορυφή κάθε αντιγράφου του G θα συνδέεται με q-1 κορυφές άλλων αντιγράφων του G όπου η κάθε μία από αυτές θα ανήκει σε διαφορετικό αντίγραφο του G . (όπως συνδέονταν οι αντίστοιχες κορυφές στο K_q). Από τον ορισμό του καρτεσιανού γινομένου οι κορυφές αυτές θα συνδεθούν με τέτοιο τρόπο ώστε να δημιουργηθεί n φορές το K_q και κάθε K_q θα αποτελείται από q κορυφές εκ των οποίων 2 αποκλείεται να βρίσκονται στο ίδιο αντίγραφο του G. Δηλαδή, αν αριθμήσουμε τις κορυφές κάθε αντιγράφου του G, θα υπάρχει ένα K_q με τις πρώτες κορυφές από τα q αντίγραφα του G, άλλο ένα με τις δεύτερες έως ότου φτάσουμε στο n-οστό που σχηματίζεται από τις n-οστές κορυφές των αντιγράφων του G. Αν $\chi(G)>\chi(K_q)=q$ και ονομάσουμε χ1, χ2, …,χn τα χ(G) χρώματα τότε χρωματίζουμε τις κορυφές του πρώτου αντιγράφου του G με τη σειρά με την 1η του κορυφή να παίρνει το χρώμα χ1 τη δεύτερη το χ2 … και τη n-οστή το χn. Στη συνέχεια χρωματίζουμε το δεύτερο αντίγραφο με την πρώτη του κορυφή να παίρνει το χρώμα χ2 τη δεύτερη το χ3 … και τη n-οστή το χ1.

Χρωματίζουμε όλα τα q αντίγραφα του G εκτελώντας αυτό το «rotation» στα χρώματα και αφού $q<\chi(G)$ οι πρώτες κορυφές κάθε ομάδας θα έχουν όλες διαφορετικό χρώμα μεταξύ τους (αφού υπάρχουν q αντίγραφα του G άρα το rotation θα γίνει q φορές άρα δε θα ξαναφτάσουμε στο σημείο η πρώτη κορυφή ενός αντιγράφου του G πέραν του πρώτου να πάρει το χρώμα χ1 και αντίστοιχα για τις δεύτερες, τρίτες, …,n-οστές αφού $q<\chi(G)\leq n$) άρα μπορούν να σχηματίσουν το K_q χωρίς προσθήκη χρώματος, αντίστοιχα οι δεύτερες και αντίστοιχα οι n-οστές. Άρα τα $\chi(G)$ χρώματα επαρκούν για να χρωματιστεί το καρτεσιανό γινόμενο G x K_q αν $q<\chi(G)$.

Αν $q\geq\chi(G)$ ονομάζουμε q1, q2, …,qk τα q διαφορετικά χρώματα με τα οποία χρωματίζεται το K_q. Εκτελώντας πάλι αντίστοιχο «rotation» χρωματίζουμε το K_q που σχηματίζεται από τις πρώτες κορυφές κάθε αντιγράφου του G με την πρώτη κορυφή του να παίρνει το χρώμα q1 τη δεύτερη το q2 … και τη k-οστή το qk, έπειτα το K_q που σχηματίζεται από τις δεύτερες κορυφές κάθε αντιγράφου του G με την πρώτη κορυφή του να παίρνει το χρώμα q2 τη δεύτερη το q3 … και τη k-οστή το q1. Χρωματίζουμε έτσι όλα τα n το πλήθος K_q. Άρα οι n πρώτες κορυφές των K_q, δηλαδή το πρώτο αντίγραφο του G, θα περιέχουν:

- q διαφορετικά χρώματα όπως και το δεύτερο αντίγραφο του G, το τρίτο κ.ο.κ. αν $n\geq q$ αφού τα χρώματα θα έχουν εκτελέσει τουλάχιστον ένα πλήρες rotation. Άρα αφού κάθε αντίγραφο του G περιέχει q χρώματα αυτά επαρκούν για να χρωματιστεί αφού ξέρουμε ότι για να χρωματιστεί το G χρειάζονται $\chi(G)\leq q$ χρώματα από υπόθεση.
- n διαφορετικά χρώματα όπως και το δεύτερο αντίγραφο του G, το τρίτο κ.ο.κ. αν $n\leq q$ αφού οι επαναλήψεις στις αλλαγές των χρωμάτων δεν επαρκούν για να πάρει όλα τα διαφορετικά q χρώματα κάθε αντίγραφο του G αλλά θα πάρει n από τα q διαφορετικά χρώματα. Αυτά επαρκούν για να χρωματιστεί κάθε αντίγραφο του G αφού και στην χειρότερη περίπτωση που το G είναι πλήρες γράφημα με n κορυφές χρειάζεται n χρώματα για να χρωματιστεί.

Άρα αν $q<\chi(G)$ χρειαζόμαστε $\chi(G)$ χρώματα για να χρωματίσουμε το καρτεσιανό γινόμενο G x K_q και αν $q\geq\chi(G)$ χρειαζόμαστε q χρώματα για να χρωματίσουμε το καρτεσιανό γινόμενο G x K_q. **Άρα σε κάθε περίπτωση $\chi(G \times K_q) = \max(\chi(G), q)$.**