

# Εισαγωγή στις Τηλεπικοινωνίες

1<sup>η</sup> Εργαστηριακή Άσκηση

Μοίρας Αλέξανδρος

A.M.: 03118081

Παράμετροι:  $f_m = 9$ ,  $AM = 1$

## 1<sup>ο</sup> Ερώτημα:

Το σήμα θα είναι το  $y(t) = \cos(2\pi \cdot 9t) \cdot \cos(2\pi \cdot 3 \cdot 9t) \Rightarrow$

$$y(t) = \cos(18\pi t) \cdot \cos(54\pi t)$$

Για τον υπολογισμό της συχνότητας του σήματος:

$$\begin{aligned} y(t) &= \cos(18\pi t) \cdot \cos(54\pi t) \Rightarrow \\ y(t) &= \frac{e^{j18\pi t} + e^{-j18\pi t}}{2} \cdot \frac{e^{j54\pi t} + e^{-j54\pi t}}{2} \\ &= \frac{1}{4} (e^{j72\pi t} + e^{-j36\pi t} + e^{j36\pi t} + e^{-j72\pi t}) \\ &= \frac{e^{j72\pi t} + e^{-j72\pi t}}{4} + \frac{e^{j36\pi t} + e^{-j36\pi t}}{4} \\ &= \frac{1}{2} \cos(\underbrace{72\pi t}_{\omega_1}) + \frac{1}{2} \cos(\underbrace{36\pi t}_{\omega_2}) \end{aligned}$$

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 36$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 18$$

Αναζητώ την συχνότητα ο πόλο του σήματος  $f_0$ :

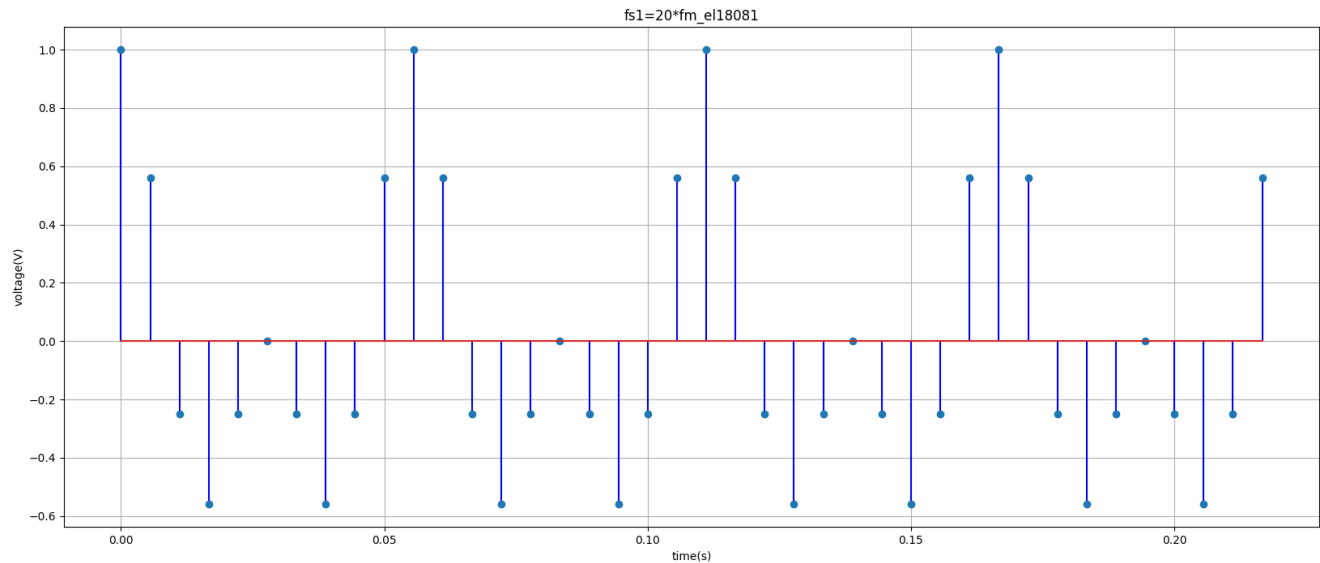
$$\begin{aligned} f_1 &= n_1 f_0 \Rightarrow 36 = n_1 f_0 \\ f_2 &= n_2 f_0 \Rightarrow 18 = n_2 f_0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} n_1=2 \\ n_2=1 \end{array} \right. \Rightarrow f_0 = 18 \quad \text{και πράγματι } f_1 = 2 \cdot 18 = 36$$

Άρα η συχνότητα του  $y(t)$  θα είναι  $f_0 = 18 = 2 \cdot f_m$

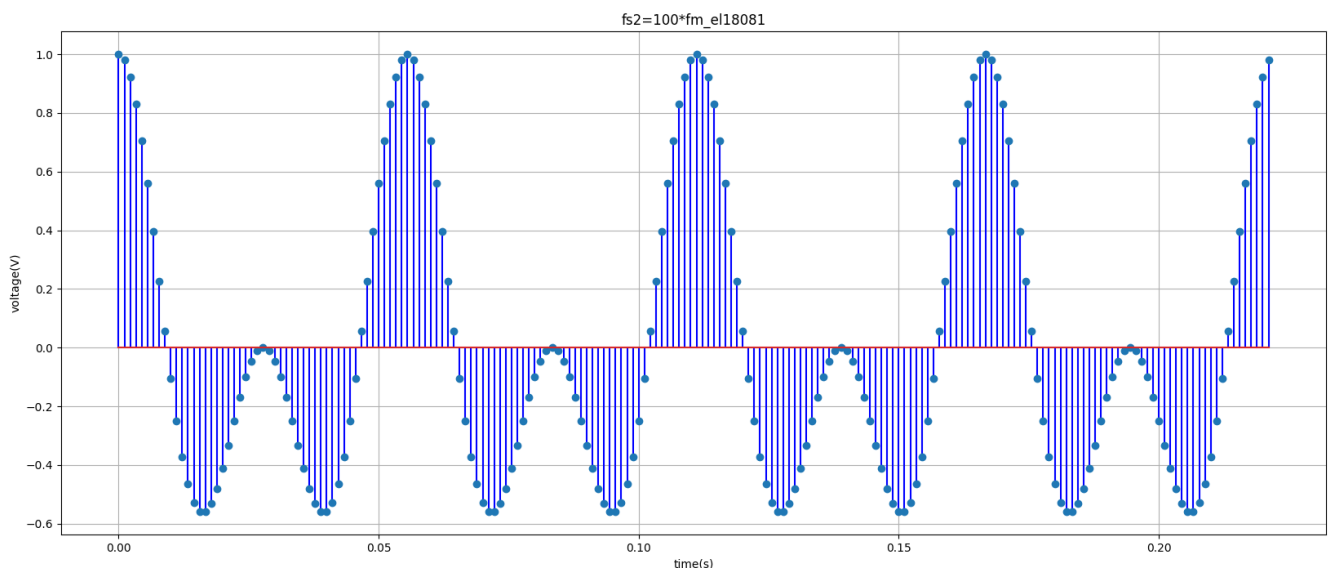
Άρα η περίοδος του σήματος θα είναι  $T = \frac{1}{2f_m}$ .

α)

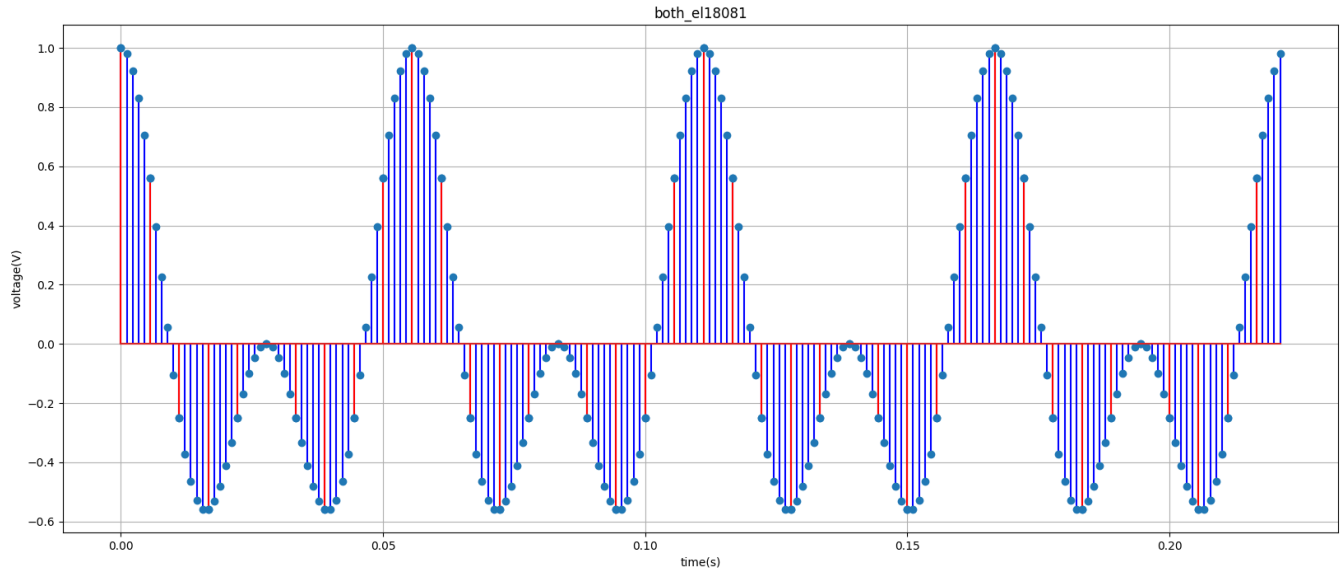
i) Τα δείγματα μετά από δειγματοληψία του  $y(t)$  με συχνότητα  $f_{s1} = 20f_m = 180\text{Hz}$ :



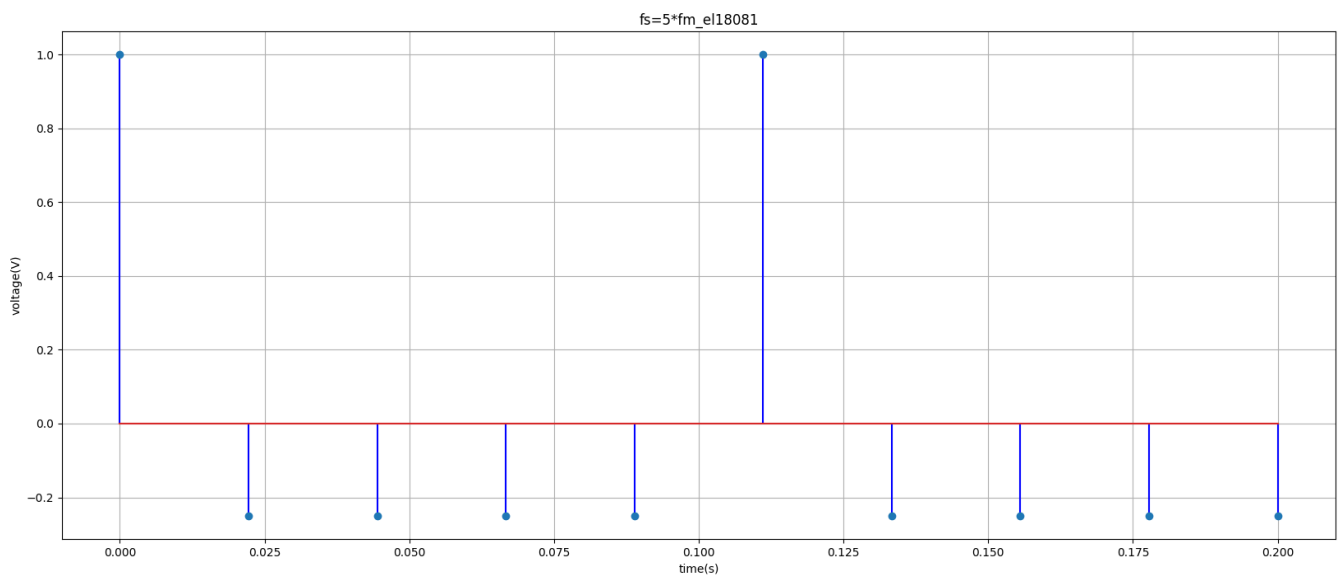
ii) Τα δείγματα μετά από δειγματοληψία του  $y(t)$  με συχνότητα  $f_{s2} = 100f_m = 900\text{Hz}$ :



iii) Κοινό διάγραμμα των δειγμάτων του  $y(t)$  των δύο παραπάνω ερωτημάτων:



β) Τα δείγματα μετά από δειγματοληψία του  $y(t)$  με συχνότητα  $f_s = 5f_m = 45\text{Hz}$ :



Παρατηρούμε ότι έχουμε πολύ λίγα δείγματα σε κάθε περίοδο, τα οποία δεν μας δίνουν καλή εικόνα για το αρχικό σήμα.

Από το θεώρημα Nyquist για να είναι δυνατή η ανακατασκευή του σήματος θα πρέπει η συχνότητα δειγματοληψίας  $f_s$  να είναι τουλάχιστον διπλάσια του εύρους ζώνης  $W$  του σήματος. Το εύρος ζώνης του  $y(t)$ , που είναι γινόμενο συνημίτονων, θα είναι το άθροισμα του εύρους ζώνης των δύο συνημίτονων (προκύπτει από συνέλιξη στο πεδίο της συχνότητας). Άρα  $W = f_m + 3f_m = 4f_m$ . Άρα η ελάχιστη

θεωρητική συχνότητα ώστε να είναι δυνατή η ακριβής ανακατασκευή του σήματος είναι  $f_{smin} = 2 \cdot 4f_m = 8f_m = 81Hz$ .

Άρα πράγματι, όπως παρατηρήθηκε και εποπτικά, για συχνότητα δειγματοληψίας  $f_s = 5f_m$  δεν είναι δυνατή η ακριβής ανακατασκευή του σήματος.

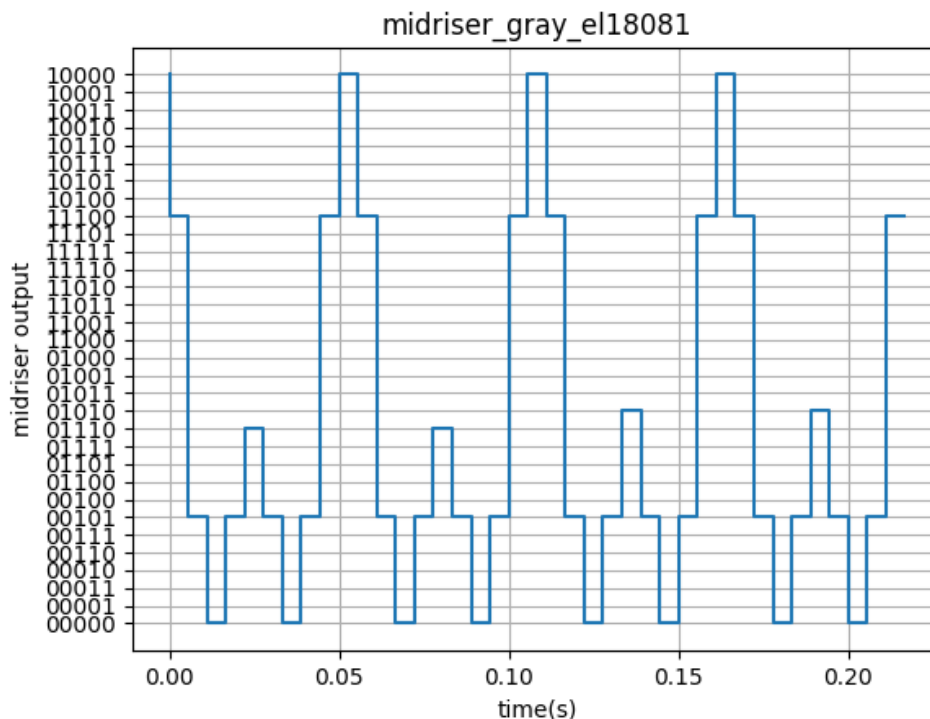
## 2<sup>ο</sup> Ερώτημα:

Δειγματοληπτούμε πάλι το σήμα με συχνότητα  $f_{s1} = 20f_m = 180Hz$  και το κβαντίζουμε με κβαντιστή 5 bits ( $f_m = 9$ , περιττή). Άρα ο κβαντιστής θα έχει  $2^5$  επίπεδα και το μέγεθος του βήματος θα είναι :  $\Delta = \frac{\text{μέγιστη τιμή σήματος} - \text{ελάχιστη τιμή σήματος}}{2^5}$

Σύμφωνα με την διαδικασία της κβάντισης κάθε αριθμός αντιστοιχίζεται σε ένα επίπεδο κβάντισης σύμφωνα με τη συνάρτηση

$$QuantizationLevel(x) = \Delta \left( \left\lfloor \frac{x}{\Delta} \right\rfloor + \frac{1}{2} \right).$$

α) Αντιστοιχίζουμε τα  $2^5$  επίπεδα κβάντισης στα αντίστοιχα  $2^5$  επίπεδα του κώδικα Gray 5 bits. Η έξοδος του κβαντιστή 5 bits θα είναι:



β)

```
θεωρητικό σα για : 03118049 = 0.03436151542265998
θεωρητικό σα για : 03118081 = 0.014064045021462147
03118049:
σ10= 0.04840490209472875
σ20= 0.04711387204501409
SNR10= 164.1526733528653
SNR10 (dB)= 22.15247959943479
SNR20= 173.27226631691227
SNR20 (dB)= 22.387290557929994
03118081:
σ10= 0.015813377178395004
σ20= 0.015391611112536131
SNR10= 1025.3830483461004
SNR10 (dB)= 30.108861333983125
SNR20= 1082.348773254203
SNR20 (dB)= 30.343672292478303
```

i) Για τα 10 πρώτα δείγματα η τυπική απόκλιση του σφάλματος κβάντισης υπολογίζεται  $\sigma_{10} = 0.0158$ .

ii) Για τα 20 πρώτα δείγματα η τυπική απόκλιση του σφάλματος κβάντισης υπολογίζεται  $\sigma_{20} = 0.0154$ .

iii) Το SNR κβάντισης για την περίπτωση (i) υπολογίζεται σε dB  $SNR_{10dB} = 30.109$  dB.

Το SNR κβάντισης για την περίπτωση (ii) υπολογίζεται σε dB  $SNR_{20dB} = 30.344$  dB.

Η θεωρητική τιμή του SNR κβάντισης υπολογίζεται από τον τύπο  $SNR_{\text{θεωρητικό}} = \frac{P}{\sigma_Q^2}$ .

Το  $\sigma_Q$  υπολογίζεται από τον κώδικα χρησιμοποιώντας τον τύπο  $\sigma_Q = \sqrt{\left(\frac{\Delta^2}{12}\right)}$  όπου  $\Delta = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2}$ . Τελικά προκύπτει  $\sigma_Q = 0.014064$ .

Για τον υπολογισμό του P:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\cos(2\pi f_m t) \cdot \cos(2\pi (AM+1)f_m t))^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2(2\pi f_m t) \cdot \cos^2(2\pi (AM+1)f_m t) dt \\
&= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1 + \cos(4\pi f_m t)}{2} \cdot \frac{1 + \cos(4\pi (AM+1)f_m t)}{2} dt \\
&= \frac{1}{4T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 + \cos(4\pi f_m t) + \cos(4\pi (AM+1)f_m t) + \cos(4\pi f_m t) \cdot \cos(4\pi (AM+1)f_m t) dt \\
&= \frac{1}{4T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 + \cos(4\pi f_m t) + \cos(4\pi (AM+1)f_m t) + \cos(4\pi AM f_m t) + \cos(4\pi (AM+3)f_m t) dt \\
&= \frac{1}{4T} \left[ \left[ t \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \left[ \frac{1}{4\pi f_m} \sin(4\pi f_m t) \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \left[ \frac{1}{4\pi (AM+1)f_m} \sin(4\pi (AM+1)f_m t) \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \right. \\
&\quad \left. + \left[ \frac{1}{4\pi AM f_m} \sin(4\pi AM f_m t) \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \left[ \frac{1}{4\pi (AM+3)f_m} \sin(4\pi (AM+3)f_m t) \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \right] \\
\left| \underline{T = \frac{1}{2f_m}} \right\rangle P &= \frac{1}{4T} (T + 0 + 0 + 0 + 0) = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Άρα:

$$SNR_{\text{θεωρητικό}} = \frac{P}{\sigma_q^2} = \frac{0.25}{(0.014064)^2} = 1263.928$$

και σε dB:

$$SNR_{\text{θεωρητικό dB}} = 10 \log_{10} \left( \frac{P}{\sigma_q^2} \right) = 31.017 \text{ dB}.$$

Το θεωρητικό SNR κβάντισης προκύπτει ελαφρώς μεγαλύτερο από τα SNR των περιπτώσεων (i) και (ii), με την τιμή της περίπτωσης (ii) να προσεγγίζει καλύτερα το θεωρητικό.

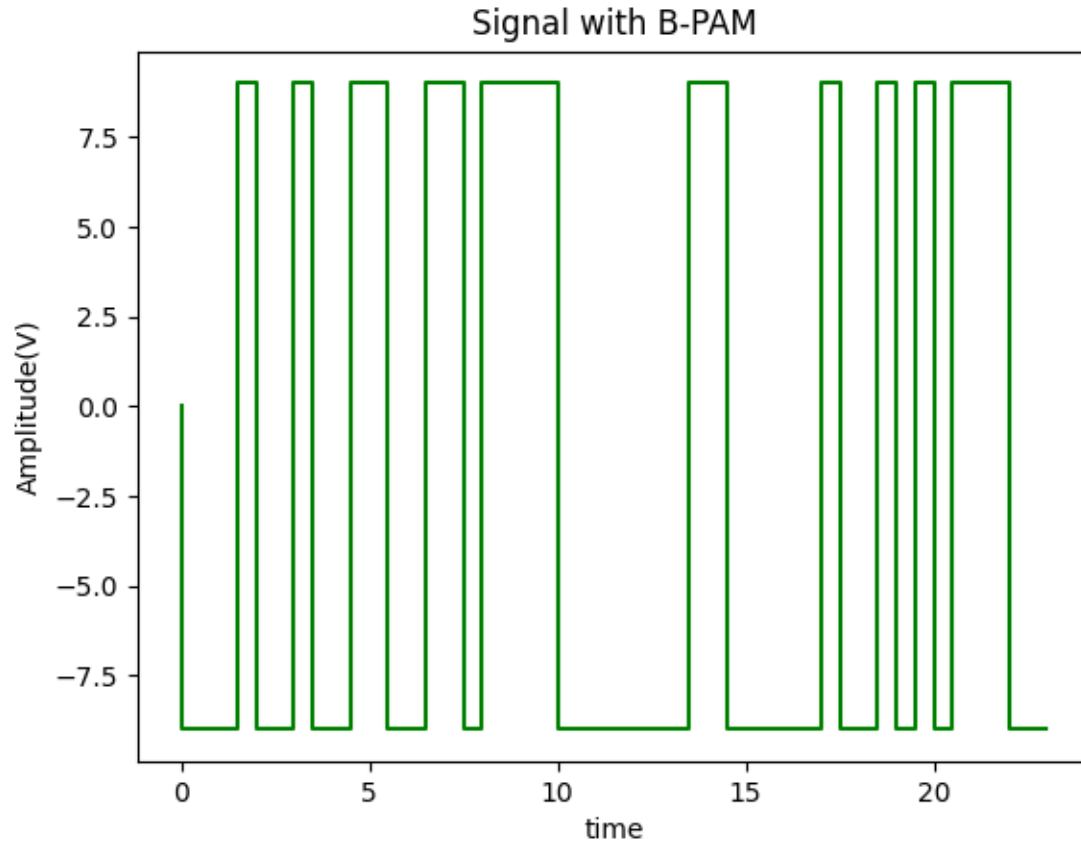
Οι διαφορές από την αναμενόμενη θεωρητική τιμή οφείλονται στον μικρό αριθμό δειγμάτων που λαμβάνονται υπόψη για τον υπολογισμό του SNR στις περιπτώσεις (i) και (ii) (10 και 20 αντίστοιχα και πράγματι για 20 δείγματα παρατηρείται καλύτερη προσέγγιση της θεωρητικής τιμής), καθώς και στο γεγονός ότι οι τιμές

γ) Το διάγραμμα για μια περίοδο της ροής μετάδοσης από bits θεωρώντας κωδικοποίηση γραμμής POLAR NRZ με διάρκεια bit 1 msec και πλάτος  $A = f_m = 9V$  είναι: (Για την κωδικοποίηση POLAR NRZ με πλάτος 9V και διάρκεια bit 1msec αντιστοιχίζουμε τα bits 0 σε παλμούς πλάτους -9V και διάρκειας 1msec και τα bits 1 σε παλμούς πλάτους +9V και διάρκειας πάλι 1msec)



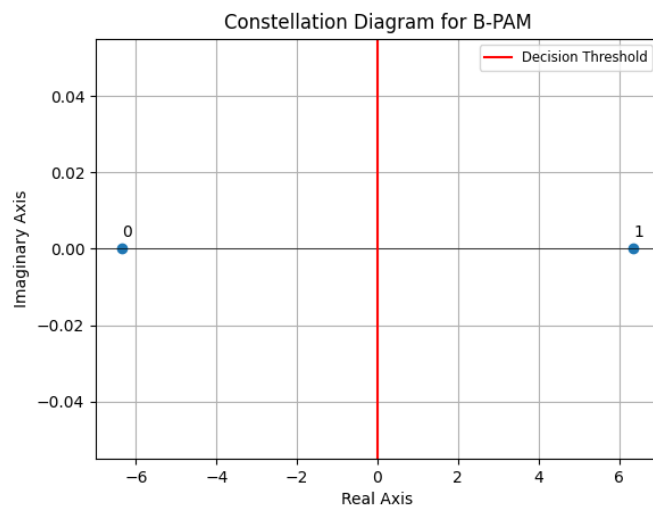
α) Παράγουμε την τυχαία ακολουθία bits 46 ψηφίων. Για να τη διαμορφώσουμε κατά B-PAM αντιστοιχίζουμε τα bits 0 της ακολουθίας σε τετραγωνικό παλμό διάρκειας 0.5sec και πλάτους -9V (-άθροισμα των 3 τελευταίων ψηφίων του αριθμού μητρώου) και τα bits 1 σε τετραγωνικό παλμό ίδιας διάρκειας και πλάτους +9V (άθροισμα των 3 τελευταίων ψηφίων του αριθμού μητρώου).

Το προκύπτον σήμα είναι το εξής:



β) Στο διάγραμμα αστερισμού, λόγω της διαμόρφωσης B-PAM, όλα τα bits του σήματος θα απεικονίζονται στα σημεία  $s_0 = \sqrt{E_b}$  και  $s_1 = -\sqrt{E_b}$ , όπου  $E_b = A^2 \cdot T_b = 9^2 \cdot 0.5 = 40.5$  J η μέση ενέργεια ανά bit.

Το διάγραμμα αστερισμού του παραπάνω σήματος:



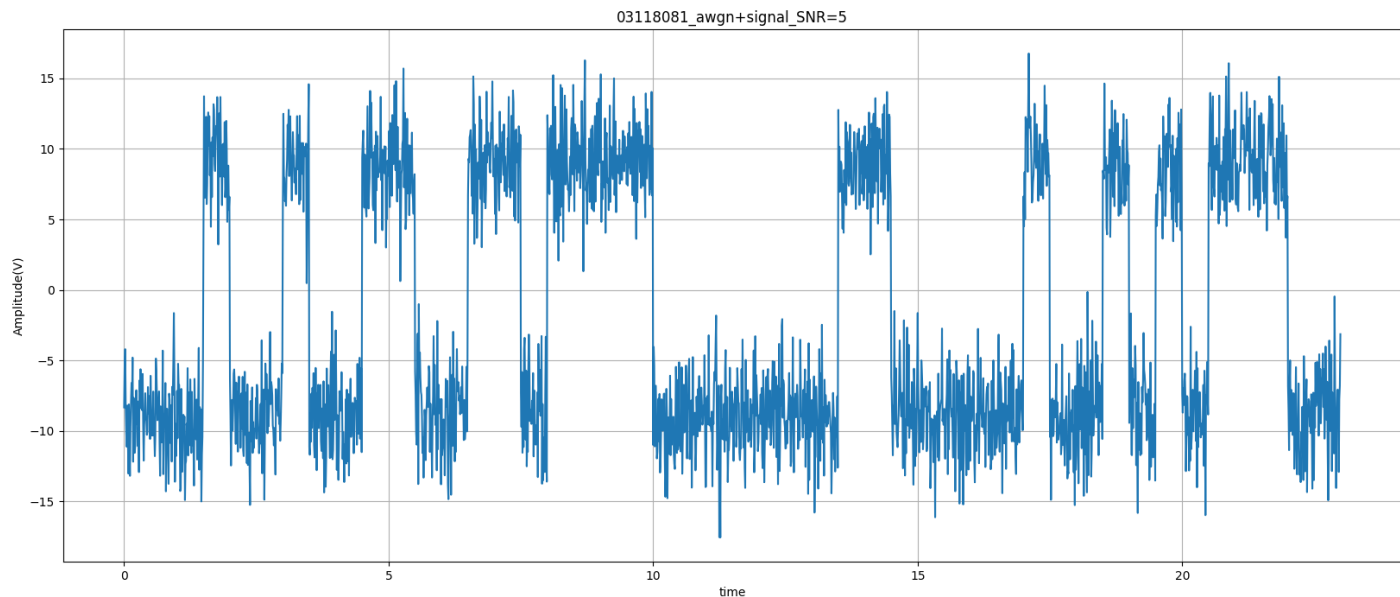


γ) Αρχικά δημιουργούμε 50 σημεία για κάθε κομμάτι, του διαμορφωμένου κατά B-PAM σήματος, που αντιστοιχεί σε ένα bit του αρχικού σήματος ώστε να φαίνεται καλύτερα η επίδραση του θορύβου.

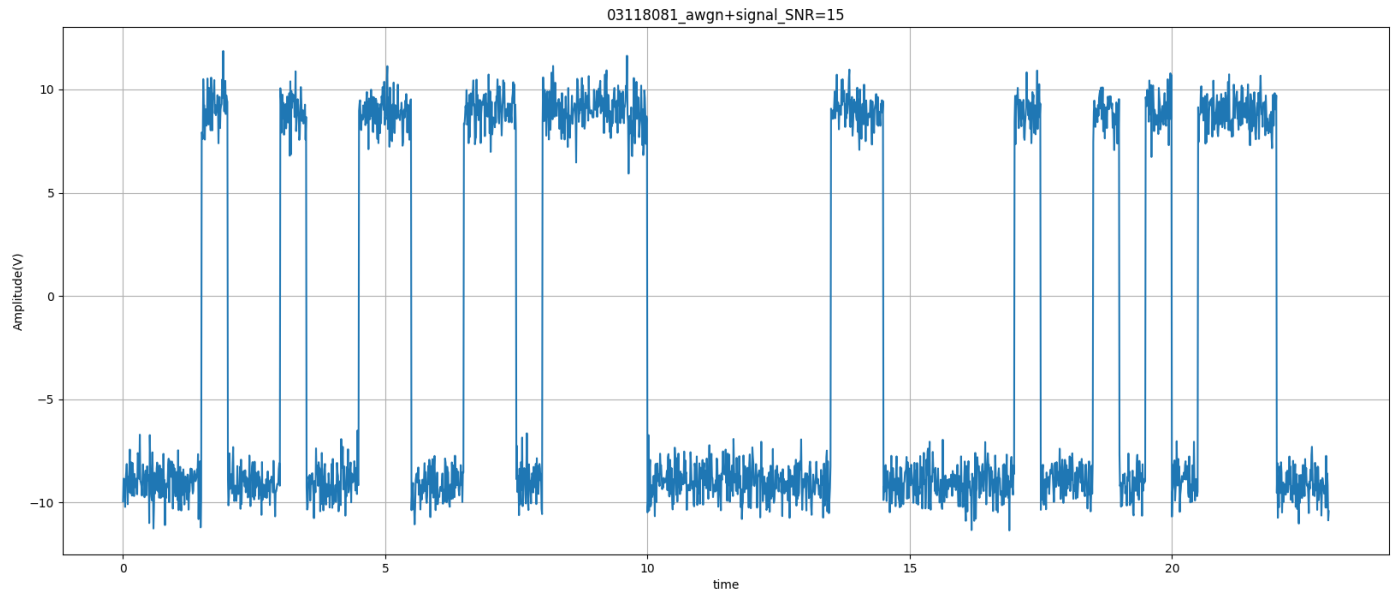
Μετατρέπουμε το SNR που μας δίνεται σε λογαριθμική κλίμακα και το χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε το  $N_0$  αφού  $SNR = \frac{E_b}{N_0}$ . Ύστερα παράγουμε τον AWGN θόρυβο, ως μιγαδικό αριθμό  $Z = X + jY$  ( $X, Y$  τυχαίες μεταβλητές), στο σήμα χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `random.normal` της βιβλιοθήκης NumPy τόσο για το φανταστικό όσο και το πραγματικό μέρος με τα δύο πρώτα ορίσματα της να είναι 0 και  $\sqrt{\frac{N_0}{2}}$  αντίστοιχα ώστε το φανταστικό και το πραγματικό μέρος του μιγαδικού θορύβου να ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση  $\sqrt{\frac{N_0}{2}}$  (ώστε η μονόπλευρη φασματική πυκνότητα ισχύος του θορύβου να είναι  $\frac{N_0}{2}$ ).

Τα σήματα που προκύπτουν μετά την πρόσθεση του πραγματικού μέρους του θορύβου στο σήμα B-PAM του υποερωτήματος α' για τις δύο διαφορετικές τιμές του SNR είναι τα παρακάτω:

- SNR=5 dB:



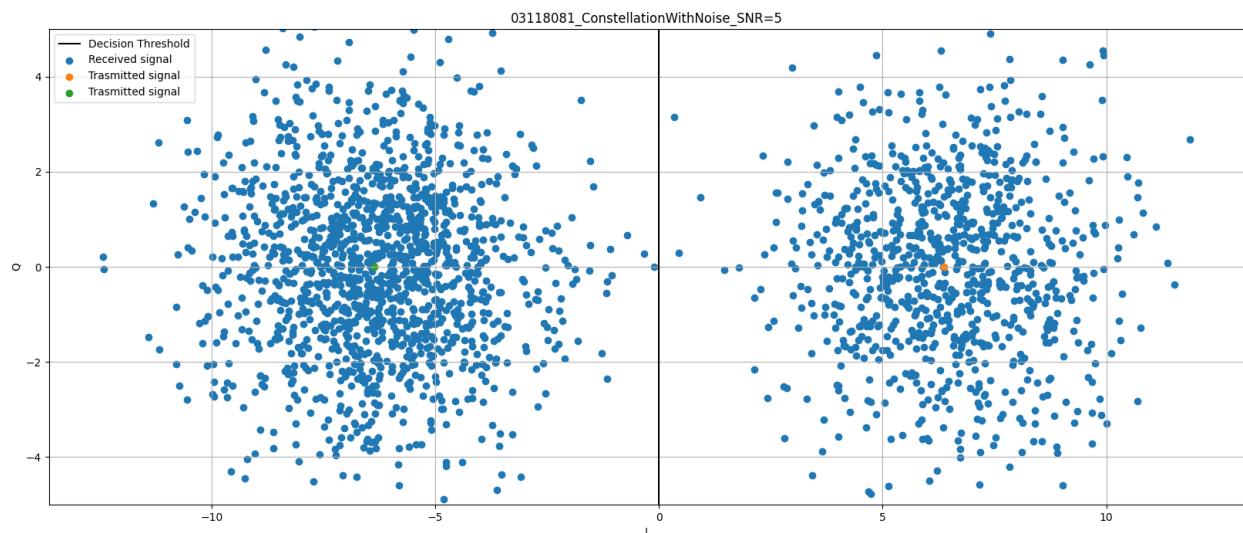
- SNR=15 dB:



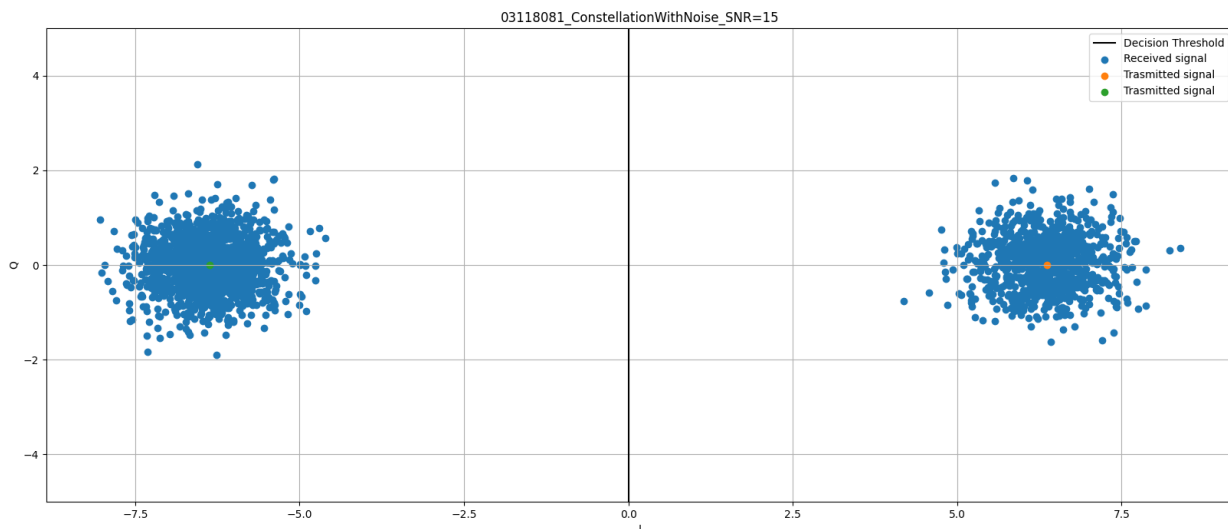
Παρατηρούμε ότι όσο μειώνεται το SNR τόσο περισσότερο ταλαντώνονται οι τιμές του ληφθέντος σήματος γύρω από αυτές που θα έπρεπε να έχουν. Αυτό είναι λογικό και αναμενόμενο καθώς μικρό SNR συνεπάγεται μεγάλη ισχύ του θορύβου σε σχέση με το σήμα, άρα και μεγάλη επίδραση του θορύβου στο σχήμα.

δ) Τα διαγράμματα αστερισμών των σημάτων που προέκυψαν στο υποερώτημα γ' είναι τα παρακάτω: (χρησιμοποιούμε την μιγαδική τυχαία μεταβλητή του θορύβου)

- SNR=5 dB:



- SNR=15 dB:

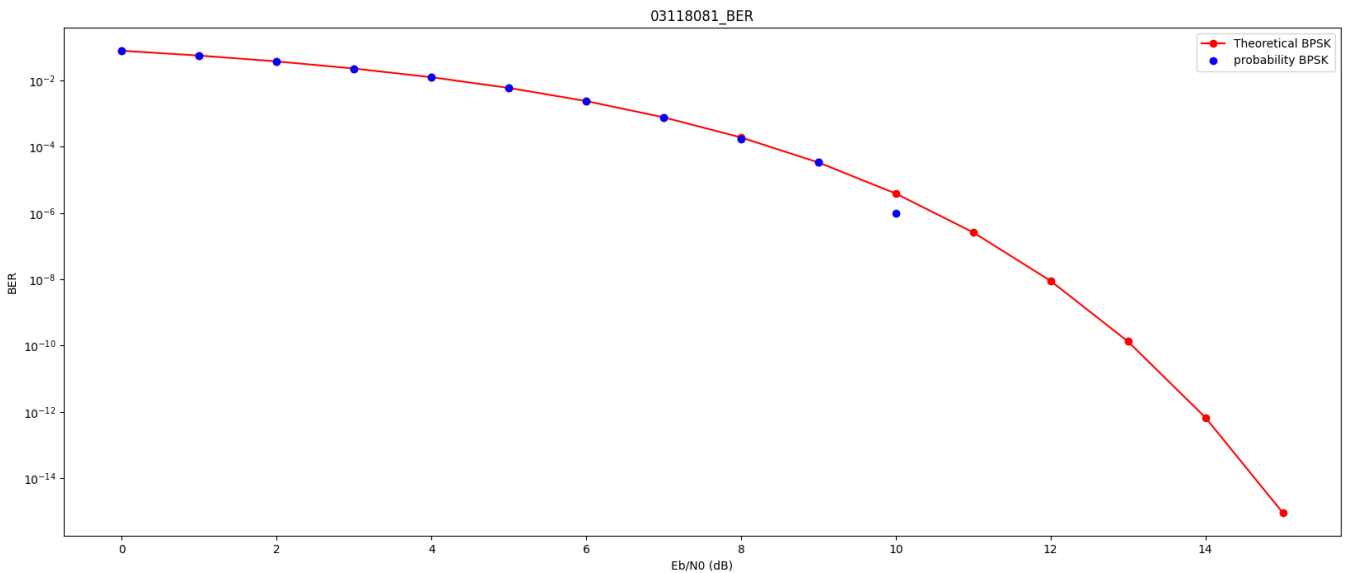


ε) Χρησιμοποιούμε σήμα με  $10^6$  bits το οποίο διαμορφώνεται κατά B-PAM, απεικονίζεται σε διάγραμμα αστερισμού (τα bits 0 αντιστοιχίζονται στο  $s_0$  και τα bits 1 στο  $s_1$ ) και του προστίθεται θόρυβος AWGN με τη διαδικασία που περιεγράφηκε παραπάνω. Ιδανικά θα χρησιμοποιούσαμε σήμα με περισσότερα bits για να έχουμε καλή εκτίμηση των λαθών και για μεγάλες τιμές του SNR ωστόσο περιοριζόμαστε από το λογισμικό που χρησιμοποιούμε, αφού για μεγαλύτερα σήματα σταματά την εκτέλεση του προγράμματος (signal: killed). Το decision threshold μας είναι ο άξονας yy' άρα για να ελέγξουμε αν γίνεται σφάλμα σε κάποιο bit ελέγχουμε αν, μετά την επίδραση του θορύβου, έχει αλλάξει το πρόσημο του σημείου στο οποίο αυτό απεικονιζόταν στο διάγραμμα αστερισμού. Για να υπολογίσουμε πειραματικά την πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου διαιρούμε τα εσφαλμένα bits που μετρήθηκαν όπως εξηγήθηκε παραπάνω με τα συνολικά μεταδιδόμενα bits.

Η πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου θεωρητικά είναι:

$$P[bit_{error}] = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Το διάγραμμα της πιθανότητας εσφαλμένου ψηφίου (BER) για τιμές του  $\frac{E_b}{N_0}$  από 0-15 dB θα είναι:

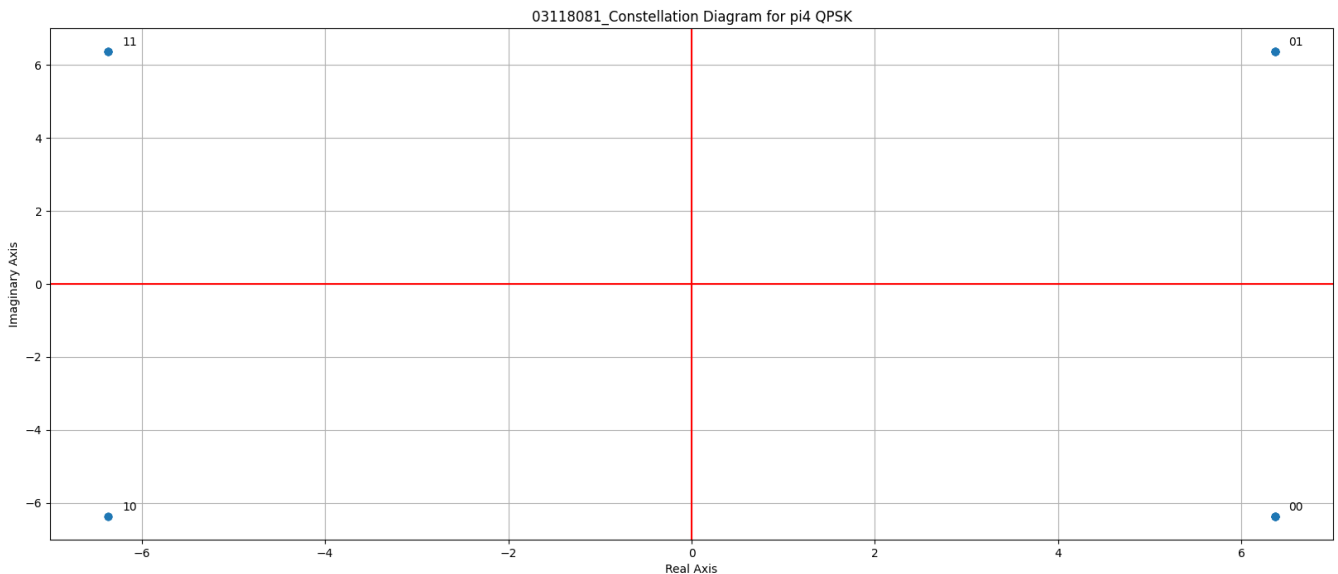


Παρατηρούμε ότι για τιμές του  $\frac{E_b}{N_0}$  από 0 έως 10 dB το πειραματικό και το θεωρητικό διάγραμμα πρακτικά ταυτίζονται. Για τιμές του  $\frac{E_b}{N_0}$  μεγαλύτερες του 10 πειραματικά προκύπτει μηδενική πιθανότητα σφάλματος. Αυτό οφείλεται στο μικρό πλήθος bits του σήματος για αυτές τις τιμές του  $\frac{E_b}{N_0}$ . Επίσης για  $\frac{E_b}{N_0} = 10$  πάλι δεν έχουμε επαρκές πλήθος bits στο σήμα ώστε να έχουμε καλή εικόνα για το σφάλμα με αποτέλεσμα η υπολογισμένη πιθανότητα να μη συγκλίνει τέλεια σε μια τιμή (μεταξύ διαφορετικών εκτελέσεων του προγράμματος το σημείο που αντιστοιχεί στην πιθανότητα  $\frac{E_b}{N_0} = 10 \text{ dB}$  ταλαντώνεται ελαφρώς γύρω από τη θεωρητική του τιμή).

#### 4ο Ερώτημα:

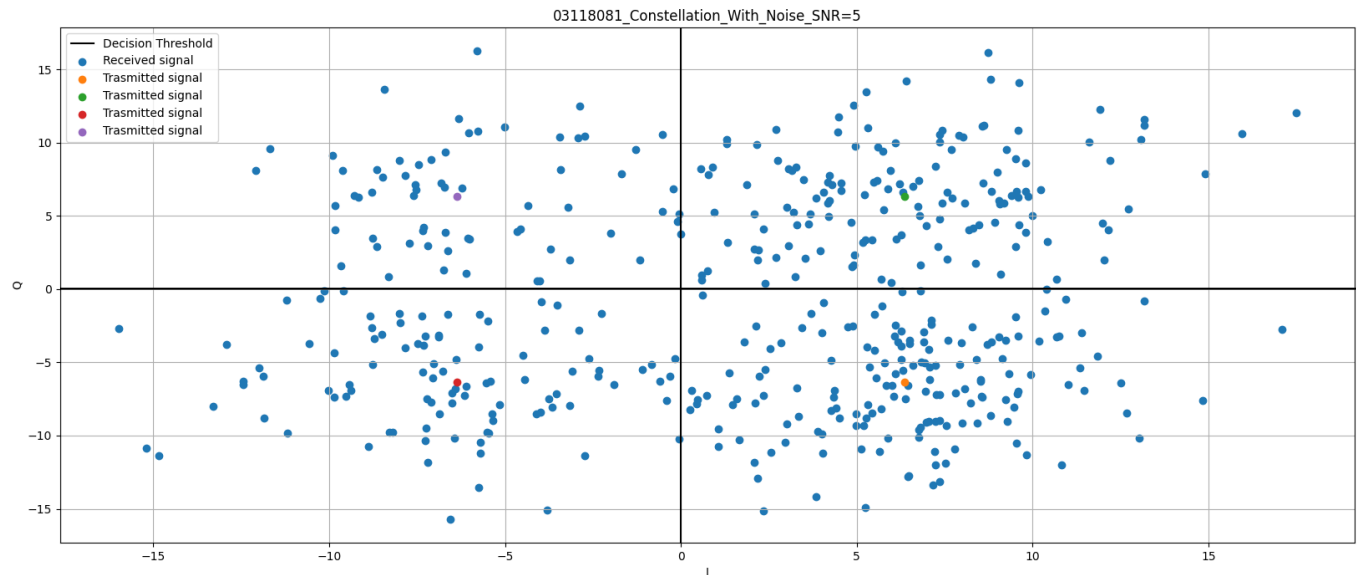
α) Σύμφωνα με τη διαμόρφωση QPSK τα 4 σύμβολα θα αντιστοιχίζονται σε συνημίτονα που έχουν μεταξύ τους συγκεκριμένη διαφορά φάσης (το καθένα έχει διαφορά φάσης  $\frac{\pi}{2}$  από τα άλλα δύο και  $\pi$  από το τρίτο). Στο διάγραμμα αστερισμού θεωρώντας απεικόνιση  $\frac{\pi}{4}$  Gray αυτά θα αντιστοιχίζονται στα σημεία  $(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{E_s}, \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{E_s})$ ,  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{E_s}, \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{E_s})$ ,  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{E_s}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{E_s})$ ,  $(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{E_s}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{E_s})$  και θεωρούμε ότι το σύμβολο (00) αντιστοιχίζεται στο σημείο  $(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{E_s}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{E_s})$  άρα το (01) αντιστοιχίζεται στο  $(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{E_s}, \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{E_s})$ , το (10) στο  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{E_s}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{E_s})$  και το (11) στο  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{E_s}, \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{E_s})$ .

Το διάγραμμα αστερισμού που προκύπτει είναι:

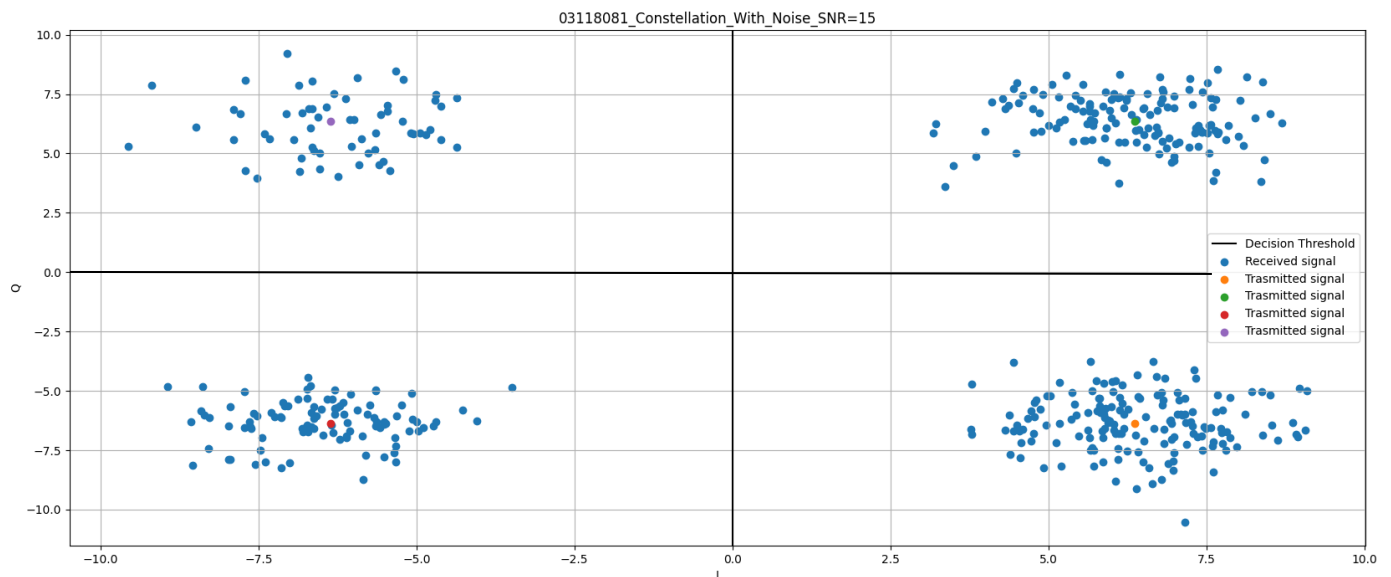


β) Ο θόρυβος παράγεται εντελώς αντίστοιχα με το ερώτημα 3γ', προστίθεται στο σήμα (προσθέτουμε τον μιγαδικό θόρυβο στα σημεία του διαγράμματος αστερισμού) και τα διαγράμματα αστερισμού που προκύπτουν για τις δύο τιμές του λόγου  $\frac{E_b}{N_0}$  είναι τα παρακάτω:

- SNR=5 dB:



- SNR=15 dB:



Σημείωση: Η οριζόντια μαύρη γραμμή  $y=0$  στα παραπάνω διαγράμματα προστέθηκε στο Word καθώς δεν μπορούσαμε να της δώσουμε το ίδιο label με την κατακόρυφη  $x=0$  (Decision Threshold) χρησιμοποιώντας την Python.

γ) Χρησιμοποιούμε πάλι σήμα  $10^6$  bits αλλά αυτή τη φορά το διαμορφώνουμε κατά QPSK, το απεικονίζουμε κατά  $\frac{\pi}{4}$  Gray και του προσθέτουμε θόρυβο με τη διαδικασία που έχει εξηγηθεί στα προηγούμενα ερωτήματα. Τώρα τα decision thresholds για να αποφασίσουμε αν έχει γίνει λάθος σε κάποιο σύμβολο, άρα και

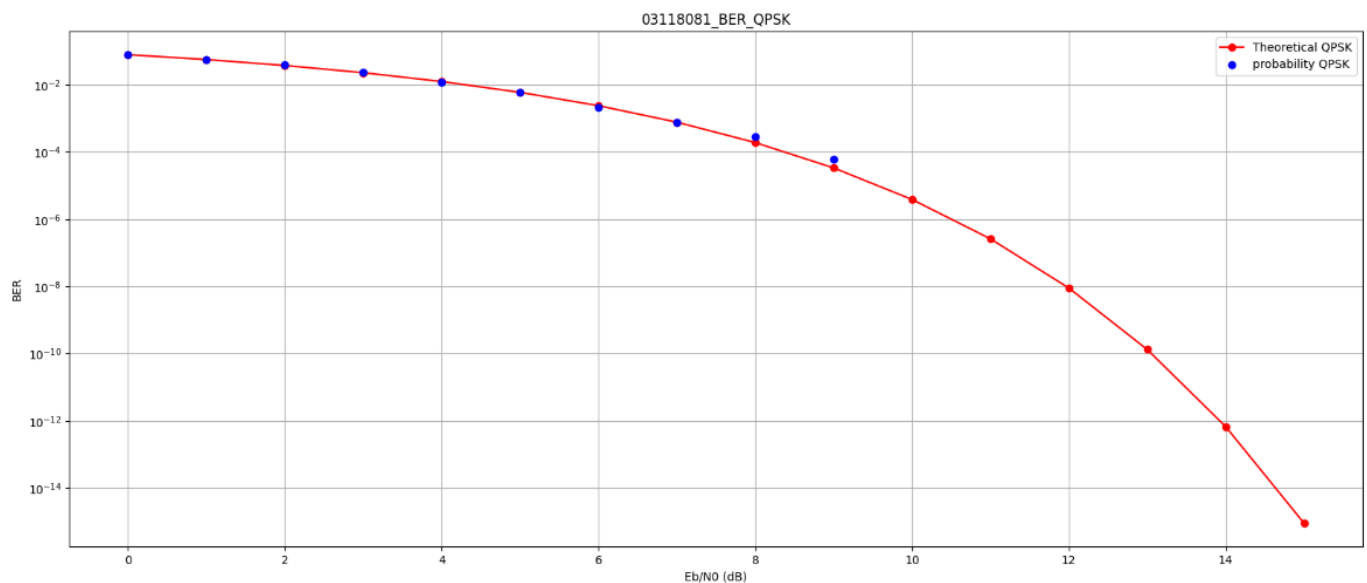
σε κάποιο bit, είναι και ο άξονας xx' και ο yy'. Συγκεκριμένα, λόγω της απεικόνισης Gray, αν ένα σύμβολο «βρεθεί» σε γειτονικό τεταρτημόριο από αυτό που αναμενόταν έχει γίνει σφάλμα στο ένα από τα δύο bits ενώ αν βρεθεί σε αντιδιαμετρικό έχει γίνει σφάλμα και στα δύο. Για να υπολογίσουμε πειραματικά την πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου διαιρούμε τα εσφαλμένα bits που μετρήθηκαν όπως εξηγήθηκε παραπάνω με τα συνολικά μεταδιδόμενα bits.

Πάλι το μικρό για τα δεδομένα σήμα μας δεν επιτρέπει καλή μέτρηση σφαλμάτων για μεγάλες τιμές του λόγου  $\frac{E_b}{N_0}$ .

Η πιθανότητα σφάλματος θεωρητικά είναι:

$$P[bit_{error}] = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Το διάγραμμα της πιθανότητας εσφαλμένου ψηφίου (BER) για τιμές του  $\frac{E_b}{N_0}$  από 0-15 dB θα είναι:



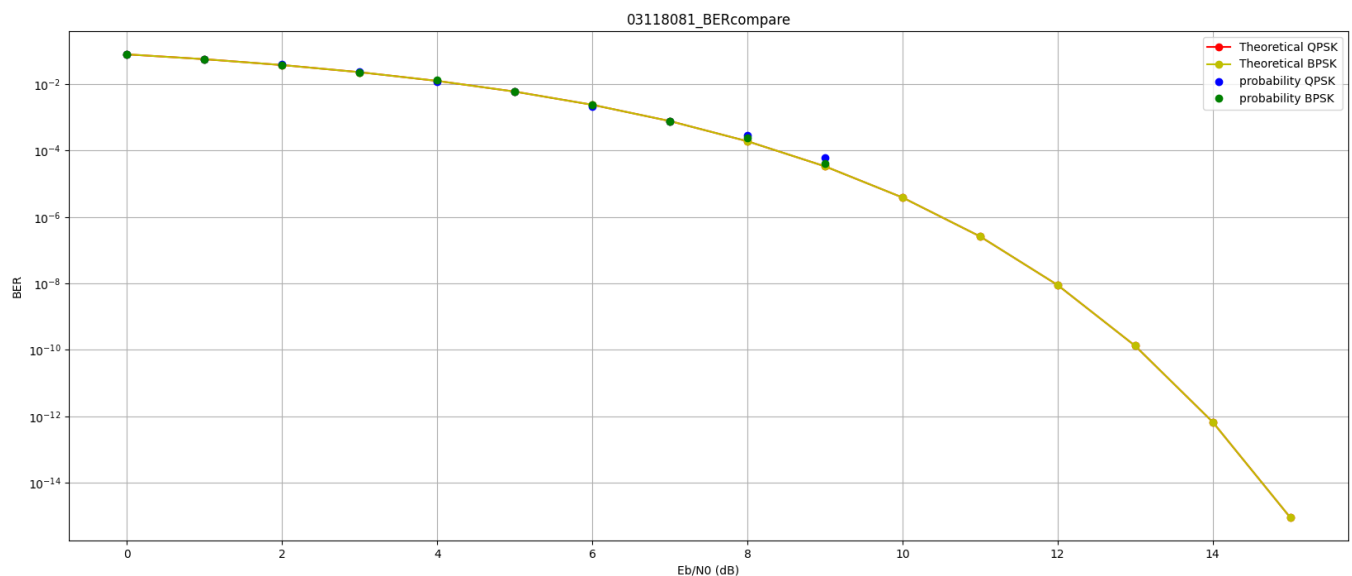
Παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές του λόγου  $\frac{E_b}{N_0}$  το πειραματικό και θεωρητικό διάγραμμα πρακτικά ταυτίζονται. Για μεγάλες τιμές αυτού του λόγου (από 10 έως 15 dB) πειραματικά προκύπτει μηδενική πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου γεγονός που οφείλεται στον προαναφερθέντα μικρό αριθμό bits.

Για να συγκρίνουμε την απόδοση της QPSK και της BPSK όσον αφορά το BER διαμορφώνουμε το σήμα μας και κατά BPSK και απεικονίζουμε σε κοινό διάγραμμα την πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου για τις δύο αυτές διαμορφώσεις.

Θεωρητικά η πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου για την BPSK είναι:  $Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = \frac{1}{2} \cdot$

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Το διάγραμμα που προκύπτει:



Παρατηρούμε ότι πρακτικά έχουν το ίδιο BER. Συνεπώς με την διαμόρφωση QPSK πετυχαίνουμε διπλάσιο ρυθμό μετάδοσης από τη BPSK χωρίς να απαιτείται περισσότερο εύρος ζώνης, αφού μεταφέρουμε δύο bits την ίδια χρονική στιγμή, στην ίδια μπάνα συχνότητας και χωρίς να αυξάνεται η πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου. Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η QPSK αποδίδει καλύτερα από τη BPSK.

δ) Άθροισμα τριών τελευταίων ψηφίων του Αριθμού Μητρώου = 0+8+1 = 9  
περιττός αριθμός άρα χρησιμοποιείται το αρχείο shannon\_odd.txt.

i) Διαβάζουμε το αρχείο κειμένου και μετατρέπουμε την κωδικοσειρά ASCII σε bits.

ii) Χωρίζουμε τη σειρά από τα bit που προέκυψε από τη μετατροπή σε οκτάδες και μετατρέπουμε κάθε οκτάδα σε δεκαδικό αριθμό. Εφόσον πρόκειται για κβαντιστή

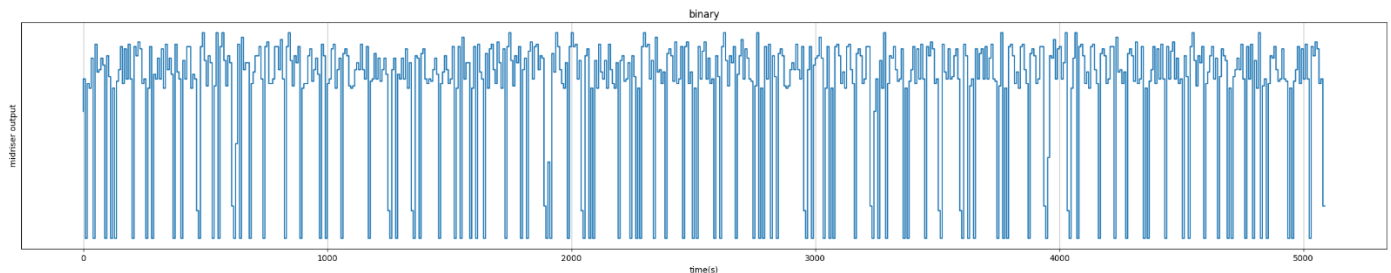


8 bits θα έχουμε  $2^8$  επίπεδα κβάντισης και μέγεθος βήματος:  $\Delta = \frac{\text{μέγιστος δεκαδικός από την παραπάνω διαδικασία} - \text{ελάχιστος δεκαδικός από την παραπάνω διαδικασία}}{2^8}$

Σύμφωνα με την διαδικασία της κβάντισης κάθε αριθμός αντιστοιχίζεται σε ένα επίπεδο κβάντισης σύμφωνα με τη συνάρτηση

$$\text{QuantizationLevel}(x) = \Delta \left( \left\lfloor \frac{x}{\Delta} \right\rfloor + \frac{1}{2} \right).$$

Το κβαντισμένο σήμα είναι το εξής:

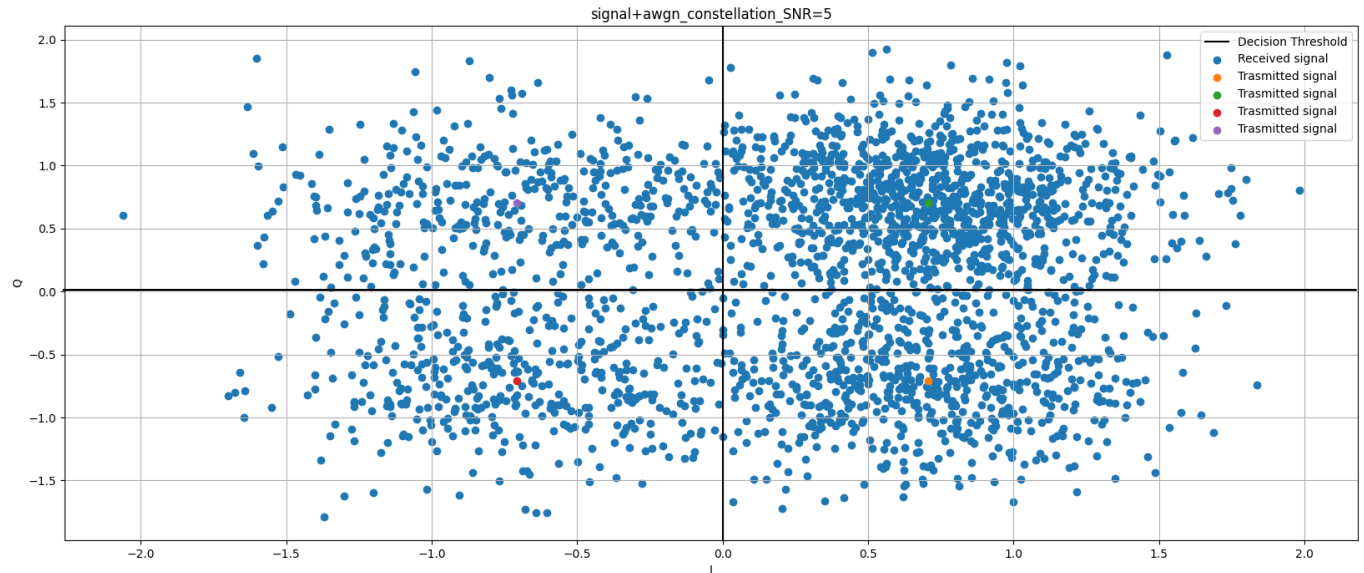


iii) Αντιστοιχίζουμε τους δεκαδικούς αριθμούς που προέκυψαν από την κβάντιση στα κατάλληλα επίπεδα Gray των 8 bits. Ομαδοποιούμε τα bits σε σύμβολα ανά δύο και τα διαμορφώνουμε κατά QPSK απεικονίζοντας τα στο διάγραμμα αστερισμού της διαμόρφωσης QPSK με απεικόνιση  $\frac{\pi}{4}$  Gray που αναλύθηκε παραπάνω. Η ενέργεια συμβόλου (Θεωρώντας διάρκεια παλμού  $T_b = 0.5s$  όπως πριν) θα είναι  $E_s = 2E_b = 2A^2 \cdot T_b = 2 \cdot 1^2 \cdot 0.5 = 1 J$ .

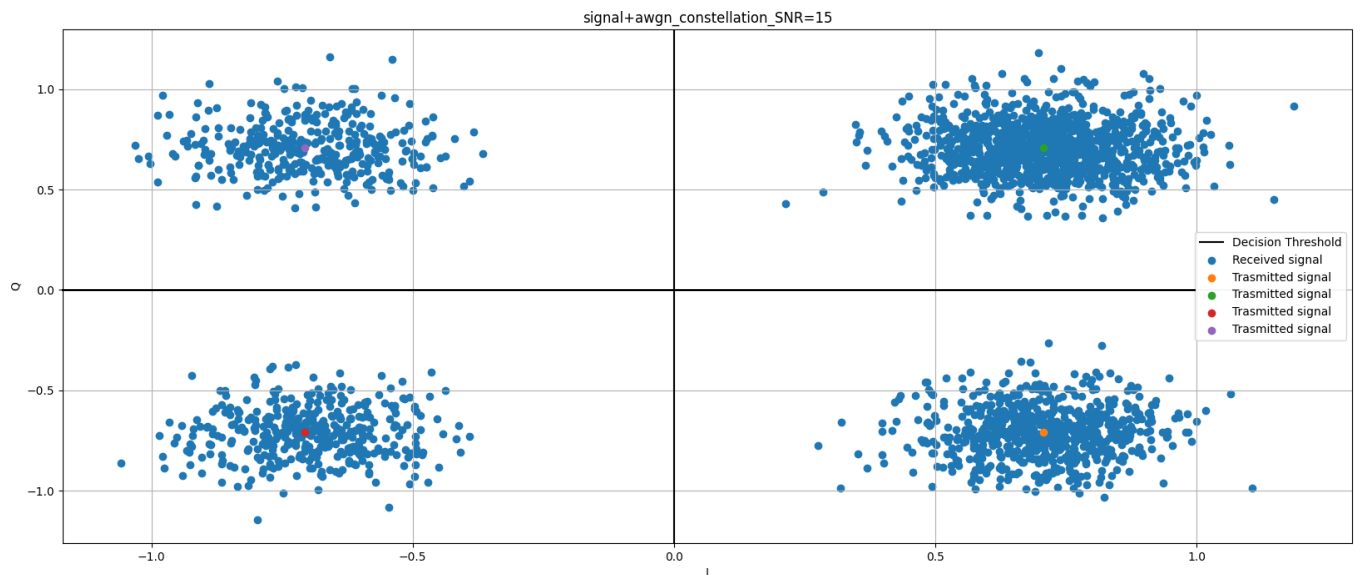
iv) Ο θόρυβος προστίθεται με εντελώς αντίστοιχο τρόπο με το υποερώτημα 4β'.

v) Τα διαγράμματα αστερισμού για τα σήματα που προέκυψαν στο υποερώτημα (iv) είναι:

- SNR=5 dB:



- SNR=15 dB:



Για την αποδιαμόρφωση ελέγχουμε με τη σειρά σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται το κάθε σημείο στο διάγραμμα αστερισμού και το αντιστοιχίζουμε στο σύμβολο που αντιστοιχεί στο εκάστοτε τεταρτημόριο.

vi) Υπολογίζουμε θεωρητικά και πειραματικά την πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου για τις δύο τιμές  $\frac{E_s}{N_0} = 5 \text{ dB}$  και  $\frac{E_s}{N_0} = 15 \text{ dB}$  με τον ίδιο τρόπο με το υποερώτημα 4γ'.

```
probability for SNR=5dB = 0.0380690737833595
Theoretical probability for SNR=5dB = 0.03767898814746339
probability for SNR=15dB = 0.0
Theoretical probability for SNR=15dB = 9.361039990685109e-09
```

Οι πειραματικές τιμές που υπολογίσαμε για την πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου είναι πολύ κοντά στις θεωρητικές και τυχόν αποκλίσεις οφείλονται στο ότι το προς μετάδοση κείμενο είναι μικρό.

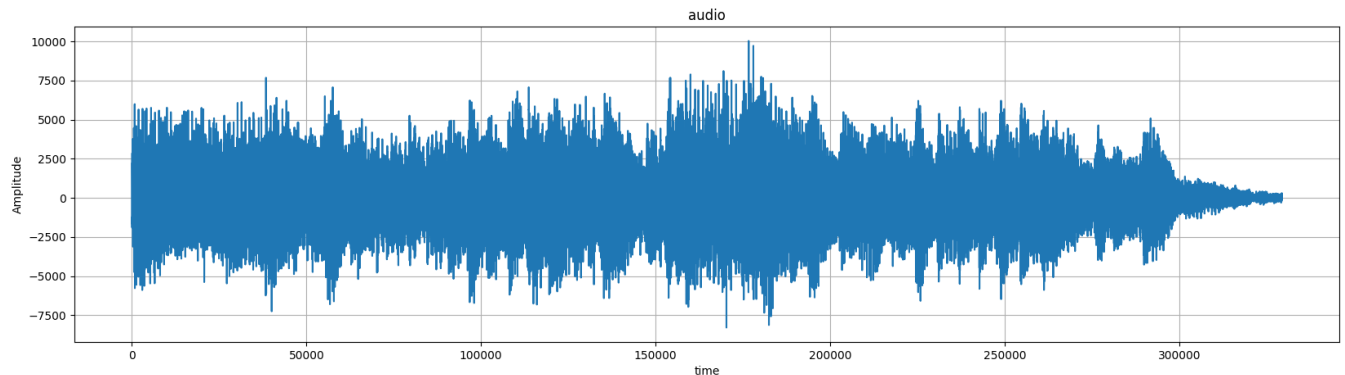
vii) Ομαδοποιούμε σε τετράδες τα σύμβολα που προκύπτουν από την αποδιαμόρφωση ώστε να σχηματίσουμε οκτάδες bits (οι οποίες από πριν θα είναι κωδικοποιημένες κατά Gray) και να αντιστρέψουμε την κωδικοποίηση Gray αυτών των οκτάδων bits ώστε να προκύψουν τα επίπεδα κβάντισης τα οποία είναι δεκαδικοί αριθμοί οι οποίοι στη συνέχεια μετατρέπονται σε δυαδικούς και ύστερα σε χαρακτήρες ASCII ώστε να εγγραφούν σε ένα νέο αρχείο κειμένου. Τα αρχεία κειμένου ονομάζονται "shannon\_odd\_SNR=5.txt" και "shannon\_odd\_SNR=15.txt" για τις δύο περιπτώσεις  $\frac{E_s}{N_0} = 5 \text{ dB}$  και  $\frac{E_s}{N_0} = 15 \text{ dB}$  αντίστοιχα και περιλαμβάνονται στο υποβληθέν συμπιεσμένο αρχείο.

### 5<sup>ο</sup> Ερώτημα:

Άθροισμα τριών τελευταίων ψηφίων του Αριθμού Μητρώου =  $0+8+1 = 9$  περιττός αριθμός άρα χρησιμοποιείται το αρχείο soundfile1\_lab2.wav.

α) Το διάβασμα του αρχείου με χρήση της εντολής read() της βιβλιοθήκης scipy.io.wavfile επιστρέφει έναν πίνακα δύο στοιχείων εκ των οποίων το πρώτο είναι το αναλογικό σήμα ήχου.

Το διάγραμμα της κυματομορφής του σήματος είναι:

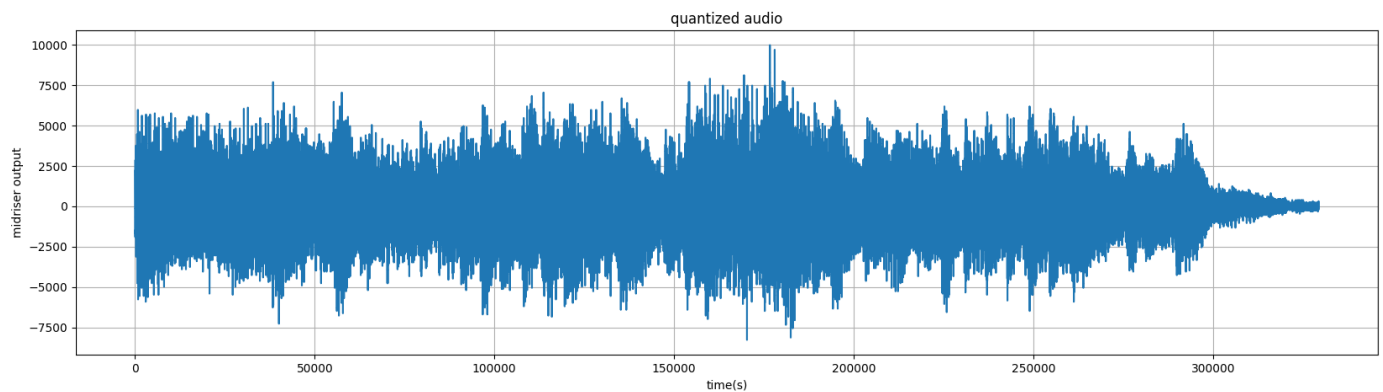


β) Εφόσον πρόκειται για κβαντιστή 8 bits θα έχουμε  $2^8$  επίπεδα κβάντισης και μέγεθος βήματος:  $\Delta = \frac{\text{μέγιστη τιμή ηχητικού σήματος} - \text{ελάχιστη τιμή ηχητικού σήματος}}{2^8}$

Σύμφωνα με την διαδικασία της κβάντισης κάθε αριθμός αντιστοιχίζεται σε ένα επίπεδο κβάντισης σύμφωνα με τη συνάρτηση

$$\text{QuantizationLevel}(x) = \Delta \left( \left\lfloor \frac{x}{\Delta} \right\rfloor + \frac{1}{2} \right).$$

Το σήμα που προκύπτει μετά την κβάντιση είναι το εξής:

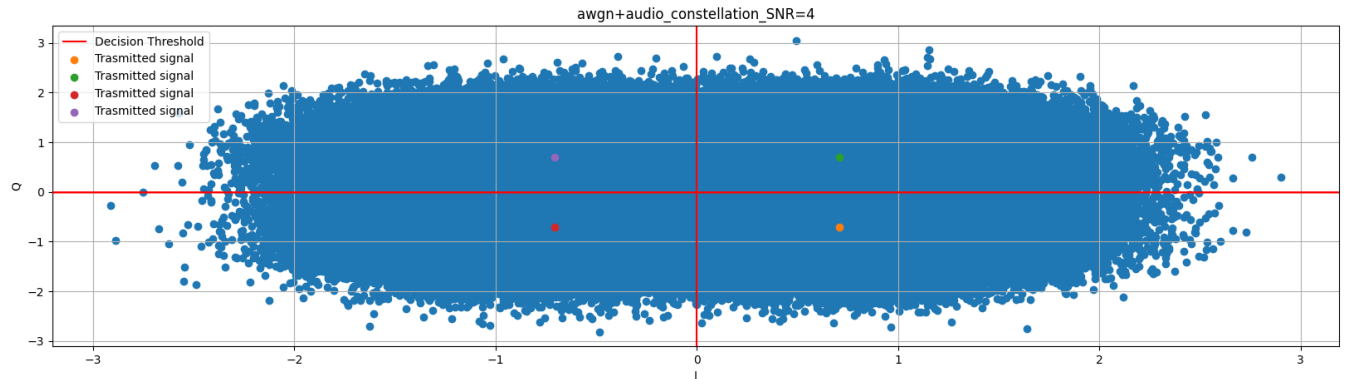


γ) Αντιστοιχίζουμε τους δεκαδικούς αριθμούς που προέκυψαν από την κβάντιση στα κατάλληλα επίπεδα Gray των 8 bits. Ομαδοποιούμε τα bits σε σύμβολα ανά δύο και τα διαμορφώνουμε κατά QPSK απεικονίζοντας τα στο διάγραμμα αστερισμού της διαμόρφωσης QPSK με απεικόνιση  $\frac{\pi}{4}$  Gray που αναλύθηκε παραπάνω. Η ενέργεια συμβόλου (Θεωρώντας διάρκεια παλμού  $T_b = 0.5s$  όπως πριν) θα είναι  $E_s = 2E_b = 2A^2 \cdot T_b = 2 \cdot 1^2 \cdot 0.5 = 1 J$ .

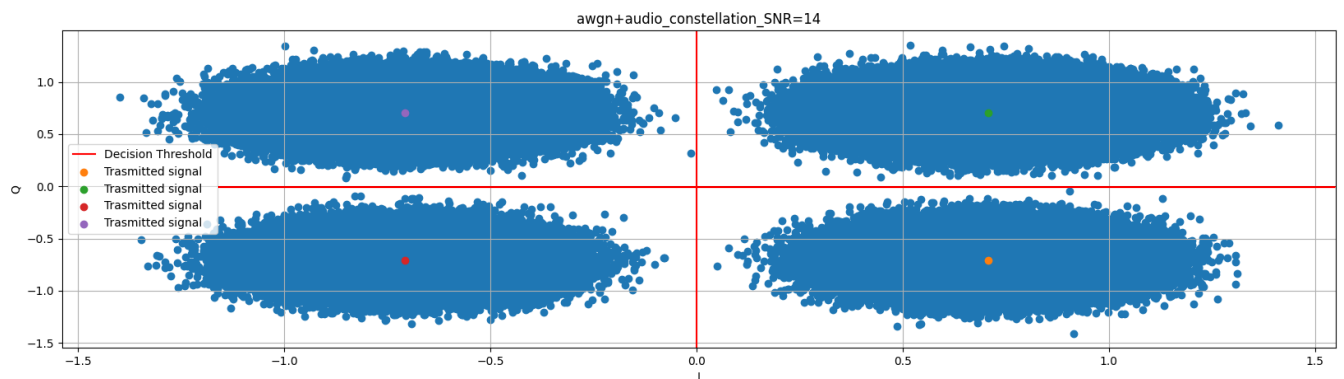
δ) Ο θόρυβος προστίθεται με εντελώς αντίστοιχο τρόπο με το υποερώτημα 4β'.

ε) Τα διαγράμματα αστερισμού για τα σήματα που προέκυψαν στο υποερώτημα δ' είναι:

- SNR=4 dB:



- SNR=14 dB:



Για την αποδιαμόρφωση ελέγχουμε με τη σειρά σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται το κάθε σημείο στο διάγραμμα αστερισμού και το αντιστοιχίζουμε στο σύμβολο που αντιστοιχεί στο εκάστοτε τεταρτημόριο.

στ) Υπολογίζουμε θεωρητικά και πειραματικά την πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου για τις δύο τιμές  $\frac{E_s}{N_0} = 4 \text{ dB}$  και  $\frac{E_s}{N_0} = 14 \text{ dB}$  με τον ίδιο τρόπο με το υποερώτημα 4γ'.

```
propability for SNR:4 = 0.056757398766897484
theoretical_propability for SNR:4 = 0.05649530174936167
propability for SNR:14 = 3.794628627285505e-07
theoretical_propability for SNR:14 = 2.6951481173667145e-07
```

Οι πειραματικές τιμές που υπολογίσαμε για την πιθανότητα εσφαλμένου ψηφίου είναι πολύ κοντά στις θεωρητικές και τυχόν αποκλίσεις οφείλονται στο ότι το προς μετάδοση ηχητικό σήμα είναι μικρό.

ζ) Ομαδοποιούμε σε τετράδες τα σύμβολα που προκύπτουν από την αποδιαμόρφωση ώστε να σχηματίσουμε οκτάδες bits (οι οποίες από πριν θα είναι κωδικοποιημένες κατά Gray) και να αντιστρέψουμε την κωδικοποίηση Gray αυτών των οκτάδων bits ώστε να προκύψει η τελική κυματομορφή του ήχου μετά τη μετάδοση, την οποία εγγράφουμε στα αρχεία ήχου "soundfile\_result\_SNR=4.wav" και "soundfile\_result\_SNR=14.wav" για τις δύο περιπτώσεις  $\frac{E_s}{N_0} = 4 \text{ dB}$  και  $\frac{E_s}{N_0} = 14 \text{ dB}$  αντίστοιχα. Τα δύο αρχεία ήχου περιλαμβάνονται στο υποβληθέν συμπιεσμένο αρχείο.