

Algebra Lineal Básica

Hernandez Pacheco Moises

Ramírez Hernandez Crystal

Matemáticas Aplicadas & Computación

Universidad Nacional Autónoma de México

FES Acatlán



9 de octubre de 2024

Índice general

I	Introducción	2
1.	Introducción	3
II	Conceptos Iniciales	4
2.	Tipos de Matices	5
2.1.	Matriz Cuadrada	5
2.2.	Matriz Nula	5
2.3.	Matriz Diagonal	6
2.4.	Matriz Escalar	6
2.5.	Matriz Identidad (o Unidad)	7
2.6.	Matriz Triangular Superior	7
2.7.	Matriz Triangular Inferior	8
2.8.	Matriz Simétrica	8
2.9.	Matriz Antisimétrica	9

Parte I

Introducción

Capítulo 1

Introducción

Hola Mundo

Parte II

Conceptos Iniciales

Capítulo 2

Tipos de Matrices

2.1. Matriz Cuadrada

Es una matriz que consta del mismo número de filas que de columnas. En símbolos, es aquella en que $m = n$. Al referirse a una matriz cuadrada de orden (n, n) , se dice simplemente que es una *matriz cuadrada de orden n* .

Por ejemplo:

a) la matriz $\mathbf{R} = [7]$, es una matriz cuadrada de orden 1;

b) la matriz

$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 2;

c) la matriz

$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 3;

d) una matriz cuadrada de orden n , se indica en general por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2.2. Matriz Nula

Es una matriz en que todos sus elementos son nulos. En símbolos, una matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ es una matriz nula, si cumple que $a_{ij} = 0$ para todo i y j . Se las representa con la letra \mathbf{O} .

Ejemplos:

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3. Matriz Diagonal

Es una *matriz cuadrada* en que los elementos no diagonales son todos nulos. En símbolos, una matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ es diagonal, si se cumple que $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$.

Ejemplos:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

2.4. Matriz Escalar

Es una *matriz diagonal* en la que todos los elementos son iguales.

En símbolos, una matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ es una matriz escalar, si se cumple que:

$$a = \begin{cases} \lambda & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases}$$

Ejemplos:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

No se impone ninguna condición particular sobre el valor del número λ puede ser un número natural, entero, racional, real, o complejo.

2.5. Matriz Identidad (o Unidad)

Es una *matriz escalar* en que todos sus elementos diagonales son iguales a la unidad. Se las simboliza con \mathbf{I}_n , en que n indica el orden matricial, o simplemente con \mathbf{I} .

Ejemplos:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En símbolos, se escribe

$$\mathbf{I} = [\delta_{ij}] \quad \text{con } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

En razón de que la letra i ya se ha reservado para representar las *filas* de una matriz cualquiera, se acostumbra utilizar el símbolo δ_{ij} , llamada “delta de Kronecker”, para representar el elemento genérico de la unidad.¹

NOTA: Esta matriz es muy útil, como base de espacios vectoriales, en la solución de sistemas de ecuaciones lineales, y de problemas de Programación Lineal.

2.6. Matriz Triangular Superior

Es una matriz en que todos los elementos bajo la diagonal principal son **nulos**. En símbolos, una matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ es triangular superior, si se cumple que $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$.

Ejemplos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Note que no se impone ninguna condición sobre los elementos situados en la diagonal principal o por encima de ella; algunos de los elementos a_{ij} , para los que $i \leq j$ pueden ser también nulos. Ese es el caso de los elementos b_{14} , b_{23} y b_{33} de la matriz \mathbf{B} .

¹En honor al matemático alemán Leopold Kronecker (1823-1891).

2.7. Matriz Triangular Inferior

Es una matriz en que todos los elementos sobre la diagonal principal son **nulos**. En símbolos, una matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ es triangular inferior, si se cumple que $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$.

Ejemplos:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Note que algunos de los elementos a_{ij} , para los que $i \geq j$ pueden ser nulos; no se estipula ninguna condición especial sobre ellos. Ese es el caso de los elementos d_{33} y d_{42} de la matriz \mathbf{D} .

2.8. Matriz Simétrica

Es una matriz *cuadrada* $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ en que $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i, j .

Ejemplos:

1) Sea la matriz $\mathbf{M} = [m_{ij}]_{2 \times 2}$ siguiente:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es simétrica, ya que se cumple la igualdad $m_{12} = m_{21} = 2$.

2) Sea la matriz $\mathbf{N} = [n_{ij}]_{3 \times 3}$ siguiente:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es simétrica, ya que se cumplen las igualdades

$$\begin{aligned} n_{12} &= n_{21} = 2, \\ n_{13} &= n_{31} = 1, \\ n_{23} &= n_{32} = -3 \end{aligned}$$

2.9. Matriz Antisimétrica

Es una matriz *cuadrada* $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ en que $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo i y j .

Ejemplos:

1) Sea la matriz $\mathbf{Q} = [q_{ij}]$ de orden dos:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es antisimétrica, ya que se cumple la igualdad

$$q_{21} = -q_{12}.$$

2) Sea la matriz $\mathbf{R} = [r_{ij}]$ de orden tres:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es antisimétrica, ya que se cumplen las igualdades

$$\begin{aligned} r_{12} &= -r_{21}, \\ r_{13} &= -r_{31}, \\ r_{23} &= -r_{32} \end{aligned}$$

Además, la definición de matriz antisimétrica implica que los elementos de su diagonal principal sean nulos.