Algebra Lineal Básica

Hernandez Pacheco Moises

Ramírez Hernandez Crystal

Matemáticas Aplicadas & Computación

Universidad Nacional Autónoma de México

FES Acatlán

9 de octubre de 2024

Índice general

Parte I

Introducción

Capítulo 1

Introducción

Hola Mundo

Parte II

Conceptos Iniciales

Capítulo 2

Tipos de Matices

2.1. Matriz Cuadrada

Es una matriz que consta del mismo número de filas que de columnas. En símbolos, es aquella en que $m = n$. Al referirse a una matriz cuadrada de orden *(n,n)*, se dice simplemente que es una *matriz cuadrada de orden* $\boldsymbol{n}$.
Por ejemplo:

a) la matriz $\mathbf{R} = [7]$, es una matriz cuadrada de orden 1;

b) la matriz

$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 2;

c) la matriz

$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 3;

d) una matriz cuadrada de orden n, se indica en general por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2.2. Matriz Nula

Es una matriz en que todos sus elementos son nulos. En símbolos, una matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ es una matriz nula, si cumple que $a_{ij} = 0$ para todo i y j. Se las representa con la letra $\mathbf{O}$.

Ejemplos:

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3. Matriz Diagonal

Es una *matriz cuadrada* en que los elementos no diagonales son todos nulos. En símbolos, una matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ es diagonal, si se cumple que $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$.

Ejemplos:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

2.4. Matriz Escalar

Es una *matriz diagonal* en la que todos los elementos son iguales.
En símbolos, una matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ es una matriz escalar, si se cumple que:

$$\mathbf{a} = \begin{cases} \lambda & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases}$$

Ejemplos:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

No se impone ninguna condición particular sobre el valor del número λ puede ser un número natural, entero, racional, real, o complejo.

2.5. Matriz Identidad (o Unidad)

Es una *matriz escalar* en que todos sus elementos diagonales son iguales a la unidad. Se las simboliza con $\mathbf{I}_n$, en que n indica el orden matricial, o simplemente con $\mathbf{I}$.

Ejemplos:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En símbolos, se escribe

$$\mathbf{I} = [\delta_{ij}] \qquad \text{con } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

En razón de que la letra i ya se ha reservado para representar las *filas* de una matriz cualquiera, se acostumbra utilizar el símbolo δ_{ij}, llamada "delta de Kronecker", para representar el elemento genérico de la unidad.[1]
NOTA: Esta matriz es muy útil, como base de espacios vectoriales, en la solución de sistemas de ecuaciones lineales, y de problemas de Programación Lineal.

2.6. Matriz Triangular Superior

Es una matriz en que todos los elementos bajo la diagonal principal son **nulos**. En símbolos, una matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ es triangular superior, si se cumple que $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$.

Ejemplos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Note que no se impone ninguna condición sobre los elementos situados en la diagonal principal o por encima de ella; algunos de los elementos a_{ij}, para los que $i \leq j$ pueden ser también nulos. Ese es el caso de los elementos b_{14}, b_{23} y b_{33} de la matriz $\mathbf{B}$.

[1] En honor al matemático alemán Leopold Kronecker (1823-1891).

2.7. Matriz Triangular Inferior

Es una matriz en que todos los elementos sobre la diagonal principal son **nulos**. En símbolos, una matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ es triangular inferior, si se cumple que $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$.

Ejemplos:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Note que algunos de los elementos a_{ij}, para los que $i \geq j$ pueden ser nulos; no se estipula ninguna condición especial sobre ellos. Ese es el caso de los elementos d_{33} y d_{42} de la matriz $\mathbf{D}$.

2.8. Matriz Simétrica

Es una matriz *cuadrada* $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ en que $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i, j.

Ejemplos:

1) Sea la matriz $\mathbf{M} = [m_{ij}]_{2\times 2}$ siguiente:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es simétrica, ya que se cumple la igualdad $m_{12} = m_{21} = 2$.

2) Sea la matriz $\mathbf{N} = [n_{ij}]_{3\times 3}$ siguiente:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es simétrica, ya que se cumplen las igualdades

$$\begin{aligned} n_{12} &= n_{21} &= 2, \\ n_{13} &= n_{31} &= 1, \\ n_{23} &= n_{32} &= \text{-3} \end{aligned}$$

2.9. Matriz Antisimétrica

Es una matriz *cuadrada* $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ en que $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo i y j.

Ejemplos:

1) Sea la matriz $\mathbf{Q} = [q_{ij}]$ de orden dos:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es antisimétrica, ya que se cumple la igualdad

$$q_{21} = -q_{12}.$$

2) Sea la matriz $\mathbf{R} = [r_{ij}]$ de orden tres:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es antisimétrica, ya que se cumplen las igualdades

$$\begin{aligned} r_{12} &= -r_{21}, \\ r_{13} &= -r_{31}, \\ r_{23} &= -r_{32} \end{aligned}$$

La definición de matriz antisimétrica implica que los elementos de su diagonal principal sean nulos.
En efecto, de la definición $a_{ij} = -a_{ji}$ y sumando a_{ji} a ambos miembros se obtiene que $a_{ij} + a_{ji} = 0$ y en particular para el caso en que $i = j$, $a_{ii} + a_{ii} = 0$, o sea $2a_{ii} = 0$, y dividiendo ambos miembros por el factor 2, se tiene que $a_{ii} = 0$.

2.10. Matriz Transpuesta

La transpuesta de una matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ de orden (m,n) es una matriz de orden (n,m), que se obtiene intercambiando filas por columnas (o lo que es igual, columnas por filas). El elemento a_{ij} de la matriz $\mathbf{A}$, ocupa el lugar de a_{ji} en la matriz transpuesta de $\mathbf{A}$.
Se simboliza la transpuesta de la matriz $\mathbf{A}$ por $\mathbf{A'}$ o por $\mathbf{A^t}$.

Si $\underset{(m,n)}{\mathbf{A}} = [a_{ij}]$ su transpuesta es $\underset{(n,m)}{\mathbf{A'}} = [a_{ji}]$.

Ejemplos:

$$\underset{(2,3)}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \underset{(2,2)}{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$$

Solución

$$\underset{(3,2)}{\mathbf{A}'} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \underset{(2,2)}{\mathbf{D}'} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} \\ d_{12} & d_{22} \end{bmatrix}$$

2.11. Matriz Inversa

En el conjunto de los números reales, para todo número $a \neq 0$ existe un número b, llamado inverso multiplicativo (o recíproco), que verifica la propiedad

$$a \cdot b = b \cdot a = 1.$$

Se simboliza ese número b por a^{-1} o por $\frac{1}{a}$.
Análogamente se plantea la posibilidad de que dada una matriz $\mathbf{A}$ cualquiera, existe otra matriz $\mathbf{B}$, conformable con $\mathbf{A}$ para la operación de producto, que satisfaga la relación $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}$, la relación $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$, o ambas simultáneamente, es decir:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I},$$

en que $\mathbf{I}$ es una *matriz identidad* de orden apropiado. Si esa matriz $\mathbf{B}$ existe, diremos que es una inversa multiplicativa de la matriz $\mathbf{A}$, y se la simbolizará por $\mathbf{A}^{-1}$.

Ejemplo

Sean las matrices de orden 2:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad y \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Efectuando los productos $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ y $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, se tiene:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I_2}$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I_2}$$