

# Apuntes de Cálculo Multivariable

Moisés Hernández Pacheco

Matemáticas Aplicadas & Computación

Universidad Nacional Autónoma de México

FES Acatlán

---

---

January 3, 2026

# Contents

<b>I</b>	<b>Introducción al Cálculo Multivariable</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>Funciones Multivariadas</b>	<b>3</b>
1.1	Introducción intuitiva . . . . .	3

# **Part I**

## **Introducción al Cálculo Multivariable**

# Chapter 1

## Funciones Multivariadas

### 1.1 Introducción intuitiva

Recordando las funciones vistas en cursos previos de cálculo, normalmente trabajábamos con funciones de una sola variable, por ejemplo:

$$f(x) = x^2$$

Aquí,  $x$  representa la variable independiente. A este tipo de expresiones las llamamos **funciones de una variable**.

Intuitivamente, una **función multivariable** es aquella que depende de más de una variable. Un ejemplo sencillo es:

$$f(x, y) = 3x^2 + y$$

También existen funciones cuyo resultado no es un número real, sino un vector. Por ejemplo:

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} 3x \\ 5y^2 \end{bmatrix}$$

En este caso, la entrada  $(x, y)$  puede interpretarse como un **punto en el plano cartesiano**.

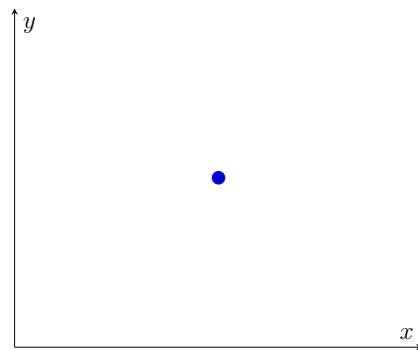


Figure 1.1: Punto  $(x, y)$  en el plano

Sin embargo, a diferencia de las funciones de una sola variable, las funciones multivariadas suelen representarse en tres dimensiones o más.

Aquellas funciones que dependen de dos variables de entrada pueden graficarse en tres dimensiones; no obstante, cuando una función tiene más de dos variables independientes, **no es posible representarla gráficamente de la forma tradicional**. En estos casos, se emplean distintos métodos y herramientas que permiten obtener una idea de su comportamiento y estructura, los cuales se estudiarán más adelante.

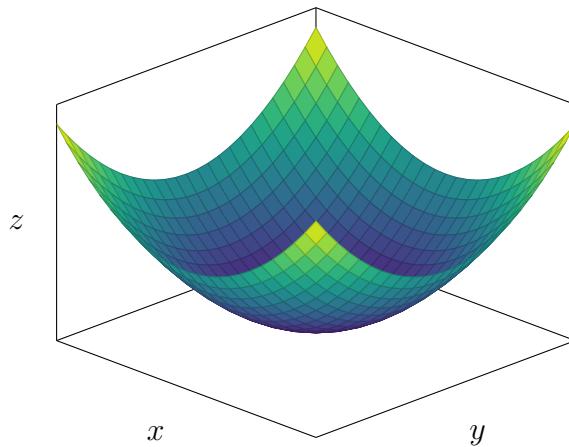


Figure 1.2: Superficie  $z = x^2 + y^2$

Como se verá más adelante, las funciones de dos o más variables, cuyas gráficas corresponden a superficies en tres o más dimensiones, pueden visualizarse en dos dimensiones mediante procesos de proyección o “aplanamiento”. Este enfoque permite analizar su comportamiento de manera más accesible, sin perder información relevante, y conduce igualmente a resultados de gran interés.

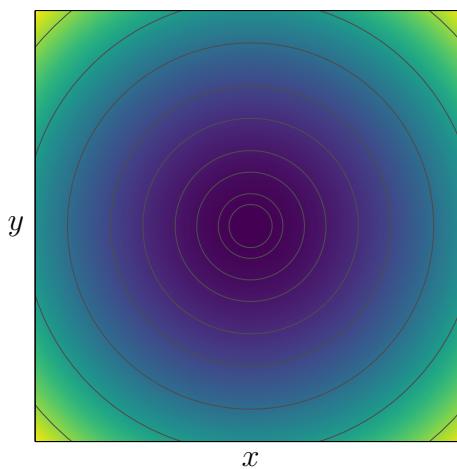


Figure 1.3: Curvas de nivel de la función  $z = x^2 + y^2$