

Apuntes de Cálculo Multivariable

Moisés Hernández Pacheco

Matemáticas Aplicadas & Computación

Universidad Nacional Autónoma de México

FES Acatlán

January 3, 2026

Contents

I	Introducción al Cálculo Multivariable	2
1	Funciones Multivariantes	3
1.1	Introducción intuitiva	3

Part I

Introducción al Cálculo Multivariable

Chapter 1

Funciones Multivariables

1.1 Introducción intuitiva

Recordando las funciones vistas en cursos previos de cálculo, normalmente trabajábamos con funciones de una sola variable, por ejemplo:

$$f(x) = x^2$$

Aquí, x representa la variable independiente. A este tipo de expresiones las llamamos **funciones de una variable**.

Intuitivamente, una **función multivariable** es aquella que depende de más de una variable. Un ejemplo sencillo es:

$$f(x, y) = 3x^2 + y$$

También existen funciones cuyo resultado no es un número real, sino un vector. Por ejemplo:

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} 3x \\ 5y^2 \end{bmatrix}$$

En este caso, la entrada (x, y) puede interpretarse como un **punto en el plano cartesiano**.

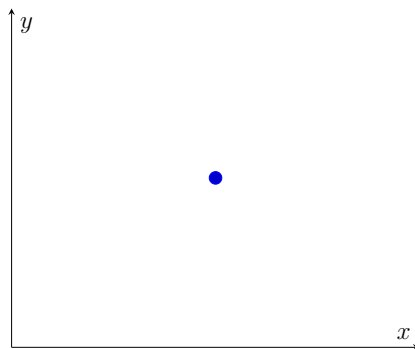


Figure 1.1: Punto (x, y) en el plano

Aquellas funciones que dependen de dos variables de entrada se grafican en tres dimensiones; a diferencia de las funciones de una sola variable, estas no generan curvas, sino **superficies**. No obstante, cuando una función posee más de dos variables independientes, su representación gráfica excede las tres dimensiones, lo que impide visualizarla de manera convencional. En estos casos, se emplean herramientas alternativas para analizar su comportamiento y estructura.

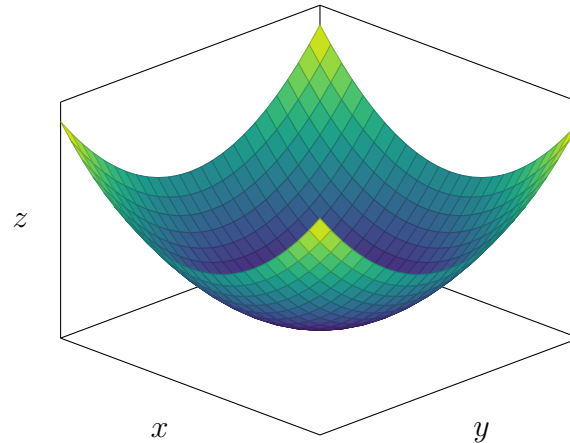


Figure 1.2: Superficie $z = x^2 + y^2$

Como se verá más adelante, las funciones de dos o más variables, cuyas gráficas corresponden a superficies en tres o más dimensiones, pueden visualizarse en dos dimensiones mediante procesos de proyección o “aplanamiento”. Este enfoque permite analizar su comportamiento de manera más accesible, sin perder información relevante, y conduce igualmente a resultados de gran interés.

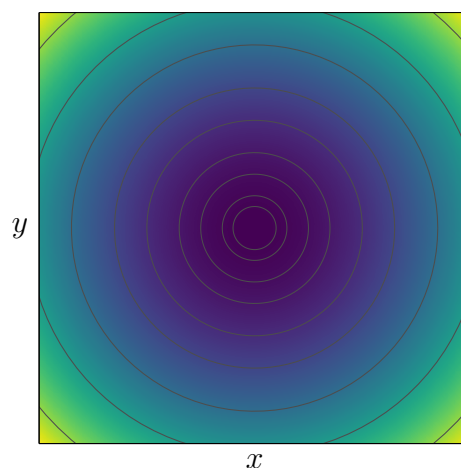


Figure 1.3: Curvas de nivel de la función $z = x^2 + y^2$

Por otro lado, existen funciones multivariantes que toman como entrada un vector de dos dimensiones y producen como salida un vector de tres dimensiones. A este tipo de funciones no les corresponde una gráfica en el sentido clásico, ya que no pueden representarse directamente en un sistema de coordenadas convencional.

No obstante, estas funciones pueden estudiarse de manera rigurosa mediante otras herramientas matemáticas que permiten analizar su estructura, forma y comportamiento. En particular, cuando un vector de parámetros se utiliza para describir puntos en el espacio, dichas funciones dan lugar a lo que se conoce como **superficies parametrizadas**. Este enfoque resulta fundamental para representar y comprender objetos geométricos más complicados, ya que permite describir superficies y curvas en espacios de mayor dimensión a partir de parámetros más simples, facilitando así su análisis teórico.