Apuntes de Cálculo Multivariable

Moisés Hernández Pacheco

Matemáticas Aplicadas & Computación

Universidad Nacional Autónoma de México

FES Acatlán

January 2, 2026

Contents

Part I

Introducción al Cálculo Multivariable

Chapter 1

Funciones Multivariables

1.1 Introducción intuitiva

Recordando las funciones vistas en cursos previos de cálculo, normalmente trabajábamos con funciones de una sola variable, por ejemplo:

$$f(x) = x^2$$

Aquí, x representa la variable independiente. A este tipo de expresiones las llamamos **funciones de una variable**.

Intuitivamente, una **función multivariable** es aquella que depende de más de una variable. Un ejemplo sencillo es:

$$f(x, y) = 3x^2 + y$$

También existen funciones cuyo resultado no es un número real, sino un vector. Por ejemplo:

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} 3x \\ 5y^2 \end{bmatrix}$$

En este caso, la entrada (x, y) puede interpretarse como un **punto en el plano cartesiano**.

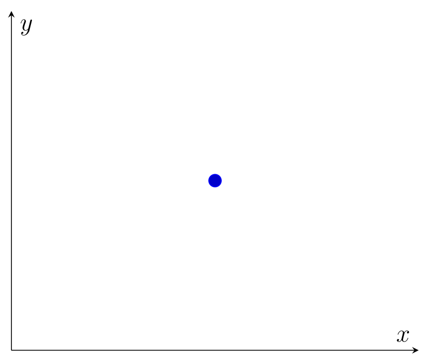

Figure 1.1: Punto (x, y) en el plano

Sin embargo, a diferencia de las funciones de una sola variable, las funciones multivariables suelen representarse en tres dimensiones o más.

Aquellas funciones que dependen de dos variables de entrada pueden graficarse en tres dimensiones; no obstante, cuando una función tiene más de dos variables independientes, **no es posible representarla gráficamente de la forma tradicional**. En estos casos, se emplean distintos métodos y herramientas que permiten obtener una idea de su comportamiento y estructura, los cuales se estudiarán más adelante.

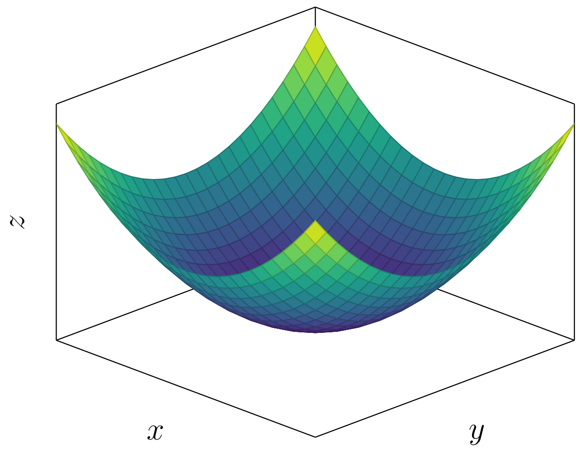

Figure 1.2: Superficie $z = x^2 + y^2$

Como se verá más adelante, las funciones de dos o más variables, cuyas gráficas corresponden a superficies en tres o más dimensiones, pueden visualizarse en dos dimensiones mediante procesos de proyección o "aplanamiento". Este enfoque permite analizar su comportamiento de manera más accesible, sin perder información relevante, y conduce igualmente a resultados de gran interés.

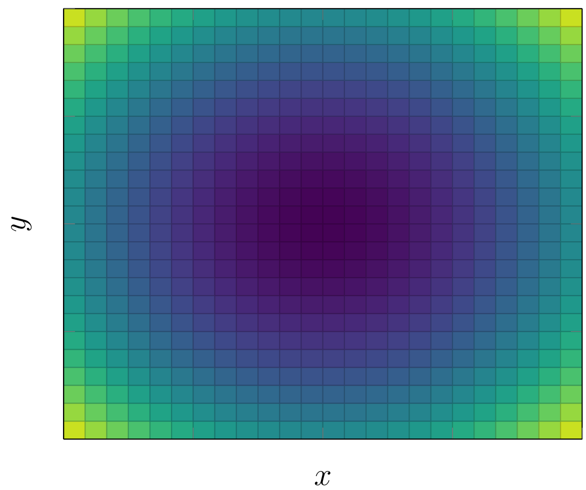

Figure 1.3: Superficie $z = x^2 + y^2$