Método de Runge Kutta

Este método veremos la de orden dos, tres, cuatro especificamente.

~~Para orden dos~~.

Este es un conjunto de métodos genéricos iterativos, explicitos e implicitos para la resolución de forma numérica de ecuaciones diferenciales

Los métodos de Runge Kutta logran una exactitud del procedimiento de la serie de Taylor, sin requerir el cálculo de de derivadas superiores.-

Los métodos de Runge Kutta de cualquier orden se deducen mediante el desarrollo de la serie de Taylor de la función $F(t, Y)$.

Existen muchas variaciones, pero todas se pueden denotar de una forma generalizada de la ecuación:

$$Y_{i+1} = Y_1 + F(X_i, Y_i, K)\,h.$$

La función incremento se escribe de forma general como:

$$F = a_1 K_1 + a_2 K_2 + \cdots + a_n K_n$$

donde las variables de K son:

$$K_1 = f(X_i, Y_i)$$

$$K_2 = f(X_i + P_1 h,\ Y_i + q_{11} K_1 h)$$

$$K_3 = f(X_i + P_2 h,\ Y_i + q_{21} K_1 h + q_{22} K_2 h)$$

$$\vdots$$

$$K_n = f(X_i + P_n h,\ Y_i + q_{2n-1} K_1 h + q_{n-1,2} K_2 h + \cdots + q_{n-1,n-1} K_{n-1} h)$$

Como cada K es una evaluación funcional, "p" y "q" son constantes, esta recurrencia hace que los métodos Runge-Kutta sean eficientes para la programación

Para $n=3$, es decir, Runge-Kutta del tercer orden el resultado son 6 ecuaciones con ocho incógnitas, al hacer el proceso llegamos a:

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{1}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3)h$$

donde $K_1 = f(X_i, Y_i)$

$$K_2 = f(X_i + \tfrac{1}{2}h, Y_i + \tfrac{1}{2}K_1 h)$$

$$K_3 = f(X_i + h, Y_i - K_1 h + 2K_2 h)$$

Para $n=4$

$$Y(a) = Y_0$$

Para $K = 0, 1, \ldots$

uno

$$Y_{K+1} = Y_K + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

donde

$$K_1 = f(X_K, Y_K)(h)$$

$$K_2 = f\left(X_K + \frac{h}{2}, y_K + \frac{h}{2}K_1\right)(h)$$

$$K_3 = f\left(X_K + \frac{h}{2}, Y_K + \frac{h}{2}K_2\right)(h)$$

$$K_4 = f(X_K + h, Y_K + hK_3)(h)$$

Para $n=2$

$$Y_{i+1} = Y_i + (a_1 K_1 + a_2 K_2)h$$

donde

$$K_1 = f(X_i, Y_i) \quad K_2 = f(X_i + P_1 h, Y_i + q_{11} K_1 h$$

al final de realizar proceso se tiene

$Y_{i+1} = Y_i + \frac{1}{2} h (K_1 + K_2)$

donde

$K_1 = f(X_i, Y_i)$

$K_2 = f(X_i + h, Y_i + K_1 h)$

Use el método de Runge-Kutta para la ecuación $y' = 2XY$, $Y(0) = 1$ nivel 2,3,4.

nivel dos

$X_0 = 0 \quad Y_0 = 1 \quad h = 0.1, \quad f(x,y) = 2XY$

$K_1 = f(X_0, Y_0) = f(0, 1)$

$K_2 = f(X_0 + h, Y_0 + K_1 h)$

$= f(0 + 0.1, \ 1 + K_1 (0.1))$

$Y_1 = Y_0 + \frac{1}{2} h (K_1 + K_2)$

$= 1 + \frac{1}{2} (0.1) (K_1 + K_2)$

$X_1 = X_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$

$K_1 = f(X_1, Y_1)$

$K_2 = f(X_1 + h, Y_1 + K_1 h)$

$Y_2 = Y_1 + \frac{1}{2} h (K_1 + K_2)$

Y asi sucesivamente hasta llegar Y_5.

nivel 3

$X_0 = 0, \quad Y_0 = 1, \quad h = 0.1, \quad f(x,y) = 2xy$

$K_1 = f(X_0, y_0)$

$K_2 = f(X_0 + \frac{1}{2}h, \; Y_0 + \frac{1}{2} K_1 h)$

$K_3 = f(X_0 + h, \; Y_0 - K_1 h + 2K_2 h)$

$Y_1 = Y_0 + \frac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3)$

Luego $X_1 = X_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$

$K_1 = f(X_1, y_1)$

$K_2 = f(X_1 + \frac{1}{2} h, \; Y_1 + \frac{1}{2} K_1 h)$

$K_3 = f(X_1 + h,\ Y_1 - K_1 h + 2K_2 h)$

$Y_2 = Y_1 + \frac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3)$

Y asi sucesivamenta para llegar Y_5.

Para nivel 4

$X_0 = 0 \quad Y_0 = 1 \quad h = 0.1 \quad f(x,y) = 2xy$

$K_1 = f(X_0, y_0)(h)$

$K_2 = f(X_0 + \frac{h}{2}, Y_0 + \frac{h}{2}K_1)(h)$

$K_3 = f(X_0 + \frac{h}{2}, Y_0 + \frac{h}{2}K_2)(h)$

$K_4 = f(X_0 + h, Y_0 + hK_3)(h)$

$Y_1 = Y_0 + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$

$X_1 = X_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$

$K_1 = f(X_1, Y_1)(h)$

$K_2 = f(X_1 + \frac{h}{2}, Y_1 + \frac{h}{2}K_1)(h)$

$K_3 = f(X_1 + \frac{h}{2}, Y_1 + \frac{h}{2}K_2)(h)$

$K_4 = f(X_1 + \frac{h}{2}, Y_1 + hK_3)(h)$

$Y_2 = Y_1 + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$

Y asi sucesivamente hasta llegar a Y_5.

Ejercicios de estudio

1) $y' = 2x + 3y$ $\quad y(1) = 1$ $\quad h = 0.10$.
   $y(3) : ??$

2) $y' = x + y$ $\quad y(2.2) ??$ $\quad y(2) = 4$, $h = 0.1$

3) $y' = x^2 - 3y$ $\quad y(0) = 1$ $\quad y(4) : ??$
   $h = 0.1$

4) $y' = x - y + 1$, $\quad h = 0.25$ $\quad y(0) = 1$
   $f(1) : ??$

5) $y' = 2y - 6$, $h = 0.25$, $y(0) = 1$
   $y(1) : ??$