Ecuaciones cuarticas

Sea la ecuación de grado cuatro:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Paso 1 - Calcular.

$$P = \frac{8b - 3a^2}{8} \qquad Q = \frac{8c - 4ab + a^3}{8}$$

$$R = \frac{256d - 64ac + 16a^2b - 3a^4}{256}$$

Paso 2 - Formar y resolver la cúbica.

$$U^3 - \frac{P}{2}U^2 - RU + \frac{4PR - Q^2}{8} = 0$$

Sólo tiene que obtener una raíz real.

Paso 3 Se sustituye U en una de estas ecuaciones y se resuelve V y W

$$P = 2U - V^2 \qquad \frac{Q}{-2V} = W \qquad r = U^2 - W^2.$$

Paso 4 Determinar las raices

$$X = \frac{v \pm \sqrt{v^2 - 4(U - W)}}{2} - \frac{a}{4}$$

$$X = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 \mp 4(U + W)}}{2} - \frac{a}{4}$$

Resolver $x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12 = 0$

$a = 4 \quad b = -1 \quad c = -16 \quad d = -12$

$$P = \frac{8b - 3a^2}{8} = \frac{8(-1) - 3(4)^2}{8} = \frac{-56}{8} = -7$$

$$Q = \frac{8c - 4ab + a^3}{8} = \frac{8(-16) - 4(4)(-1) + (4)^3}{8} = -6$$

$$R = \frac{256d - 64ac + 16a^2b - 3a^4}{256}$$

$$= \frac{256(-12) - 64(4)(-16) + 16(4)^2(-1) - 3(4)^4}{256}$$

$$= 0$$

La ecuación cúbica

$$U^3 - \frac{P}{2}U^2 - RU + \frac{4PR - Q^2}{8} = 0$$

$$U^3 - \frac{-7}{2}U^2 - 0U + \frac{4(-7)(0) - (-6)^2}{8} = 0$$

$$U^3 + \frac{7}{2}U^2 - \frac{9}{2} = 0$$

Resolver la cúbica

$a = \frac{7}{2} \quad b = 0 \quad c = -\frac{9}{2}$

$$P = \frac{3b - a^2}{3} = \frac{3(0) - \left(\frac{7}{2}\right)^2}{3} = -\frac{49}{12}$$

$$q = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27} = \frac{2\left(\frac{7}{2}\right)^3 - 9\left(\frac{7}{2}\right)(0) + 27\left(-\frac{9}{2}\right)}{27}$$

$$= \frac{\frac{343}{4} - \frac{243}{2}}{27}$$

$$= \frac{-\frac{143}{4}}{27} = -\frac{143}{108}$$

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

$$= \left(\frac{-\frac{143}{108}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\frac{49}{12}}{3}\right)^3$$

$$= \left(-\frac{143}{216}\right)^2 + \left(-\frac{49}{36}\right)^3$$

$$= 0.438293038 - 2.521626372$$

$$= -2.083333334$$

Entonces $D < 0$

$$\cos\theta = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$\cos\theta = 0.416909621$

$\theta = 1.14075362$

$$\cos\theta = \frac{-\frac{-\frac{143}{108}}{2}}{\sqrt{-\left(-\frac{\frac{49}{12}}{3}\right)^3}}$$

$$\cos\theta = \frac{\frac{143}{216}}{\sqrt{2.521626372}}$$

Para $K=0$.

$$X = 2\sqrt{\frac{-P}{3}} \cos \frac{\theta + 2K\pi}{3} - \frac{a}{3}.$$

$$X = 2\sqrt{\frac{49}{36}} \cos \frac{1{,}14075362}{3} - \frac{7}{6}.$$

$\boxed{X = 1}$ Este sería el valor de U.

Luego:

$P = 2u - v^2$.

$P = -7 \quad q = -6 \quad u = 1$

$-7 = 2(1) - v^2$.

$-7 = 2 - v^2$

$(-9 = -v^2)(-1)$

$\boxed{3 = v}$

$\frac{q}{-2v} = w$

$\frac{-6}{-2(3)} = w$

$\boxed{1 = w}$

$$X = \frac{v \pm \sqrt{v^2 - 4(u-w)}}{2} - \frac{a}{4}$$

$$X = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1-1)}}{2} - \frac{4}{4}$$

$$= \frac{3 \pm 3}{2} - 1 < \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$X = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 - 4(u+w)}}{2} - \frac{a}{4}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1+1)}}{2} - \frac{4}{4}$$

$$= \frac{-3 \pm 1}{2} - 1 < \begin{matrix} -2 \\ -3 \end{matrix}$$

R// $X = -2$, $X = -1$, $X = -3$, $X = 2$.

$x^4 - 2x^2 + 8x - 3 = 0$

$a = 0 \quad b = -2 \quad c = 8 \quad d = -3$

$$P = \frac{8b - 3a^2}{8} = \frac{8(-2) - 3(0)^2}{8} = -2$$

$$Q = \frac{8c - 4ab + a^3}{8} = \frac{8(8) - 4(0)(-2) + (0)^3}{8} = 8$$

$$R = \frac{256d - 64ac + 16a^2b - 3a^4}{256}$$

$$= \frac{256(-3) - 64(0)(8) + 16(0)^2(-2) - 3(0)^3}{256}$$

$R = -3$

La ecuación es:

$$U^3 - \frac{P}{2}U^2 - RU + \frac{4PR - Q^2}{8} = 0$$

$$U^3 + U^2 - (-3)U + \frac{4(-2)(-3) - (8)^2}{8} = 0$$

$$U^3 + U^2 + 3U - 5 = 0$$

Resolver la ecuación cúbica.

$a=1 \quad b=3 \quad c=-5.$

$$p=\frac{3b-a^2}{3}=\frac{3(3)-(1)^2}{3}=\frac{8}{3}.$$

$$q=\frac{2a^3-9ab+27c}{27}$$

$$=\frac{2(1)^3-9(1)(3)+27(-5)}{27}=\frac{2(1)-27-135}{2}$$

$$q=\frac{-160}{27}$$

$$\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

$$=\left(\frac{\frac{-160}{27}}{2}\right)^2+\left(\frac{\frac{8}{3}}{3}\right)^3.$$

$$=8.77914952+0.70233196l$$

$$=9.481481482$$

Como $\Delta>0.$

$$X=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}-\frac{a}{3}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{160}{54}+\sqrt{9.481481482}}+\sqrt[3]{\frac{160}{54}-\sqrt{9.481481482}}-\frac{1}{3}$$

$$=1.821367205+(-0.488033871)-\frac{1}{3}$$

$$X=0.99999999\bar{9}$$

$$\frac{Q}{-2v}=W$$

$$P=2u-v^2$$

$$-2=2(0.99999999\bar{9})-v^2$$

$$\frac{8}{-2(2)}=W$$

$$(-4=-v^2)(-1)$$

$$4=v^2$$

$$\boxed{-2=W}$$

$$\boxed{2=v}$$

$$X=\frac{v \pm \sqrt{v^2-4(u-w)}}{2}-\frac{a}{4}$$

$$X=\frac{2 \pm \sqrt{2^2-4(0.9999\bar{9}+2)}}{2}-\frac{0}{4}$$

$$=\frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} \quad \begin{cases} \dfrac{2 \pm \sqrt{8}\,i}{2} \\[2ex] \dfrac{2+\sqrt{8}\,i}{2} \end{cases}$$

$$X=\frac{-v \pm \sqrt{v^2-4(u+w)}}{2}-\frac{a}{4}$$

$$=\frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4(0.9999\bar{9}-2)}}{2}-\frac{0}{4}$$

$$=\frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} \quad \begin{cases} \dfrac{-2-\sqrt{8}}{2}=-2.414213562 \\[2ex] \dfrac{-2+\sqrt{8}}{2}=0.414213562 \end{cases}$$

All $X=\dfrac{2 \pm \sqrt{8}\,i}{2}$, $X=\dfrac{-2 \pm \sqrt{8}}{2}$

Ejercicios de practica

1) $x^4 - 8x^2 - 18x - 2x^3 + 9 = 0$.

2) $2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 2 = 0$

3) $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3x + 7 = 0$.

Método de Horner

1) Se escoge 1 valor inicial X_0.
2) Se determina Es.
3) Se realiza la división sintetica dos veces.
4) Se determina la 1ª aproximación.

$$X_{i+1} = X_i - \frac{R}{S}.$$

5) Se determina Ea desde la 1ª iteración
6) Si $|Ea| \leq Es$. fin X_{i+1} es raiz, caso contrario regresar el paso 3, $X_i = X_{i+1}$