Integración numérica.

Es una técnica que se puede usar para aproximar el valor de la integral de una función que no sea posible integrar.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

El problema para usar los métodos analíticos de integración es que es posible que F no se pueda expresar en términos de funciones elementales o aunque F se conozca, ésta no se pueda evaluar fácilmente.

Por ejemplo $\int_1^5 e^{-x^2}dx$, $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^5}$, $\int_0^1 \sqrt{1-x^3}\,dx$, etc

Supongamos que se quiere estimar el valor de

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

donde la función f es continua en el intervalo finito [a,b].

Se empieza dividiendo el intervalo $[a,b]$ en N subintervalos de igual longitud,
$[X_0, X_1], [X_1, X_2], [X_2, X_3], \ldots [X_K, X_{K+1}] \ldots [X_{n-1}, X_n]$
donde los N+1 puntos $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$ de la Partición se obtienen a partir de la fórmula:

$$X_K = a + Kh, \quad K = 0, 1, 2, 3, \ldots, N.$$

Siendo $h = \frac{b-a}{N}$, donde h es el tamaño del paso.–

Las fórmulas de integración se basan en la idea de integrar una función polinomial en vez de f(x)

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b f_n(x)\,dx$$

donde $f_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ es

es un polinomio de interpolación de grado n

Regla del trapecio donde $n=1$, es decir,

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b f_1(x)\,dx$$

donde $f_1(x)$ es un polinomio de interpolación.

Para los datos.

x	a	b
y	f(a)	f(b)

el polinomio de interpolación nos quedaría.

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

al integrar el polinomio se obtiene.

$$\int_a^b f_1(x)\,dx = f(a)x + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)^2 \Big|_a^b$$

$$= f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,\frac{(b-a)^2}{2}$$

$$= f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{1}\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$\int_a^b f_1(x)\,dx = (b-a)\left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{2}\right]$$

$$= (b-a)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]}$$ Regla del trapecio Simple.

Ejemplo 1 Aproximar $\int_0^1 e^{x^2}dx$.

$$\int_0^1 e^{x^2}dx = (1-0)\left[\frac{f(0)+f(1)}{2}\right] = (1)\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

$$= 1.859140914 \text{ R//.}$$

Ejemplo 2 Aproximar. $\int_2^4 \frac{e^x}{x}dx$

$$\int_2^4 \frac{e^x}{x}dx = (4-2)\left(\frac{f(2)+f(4)}{2}\right) = \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{4}$$

$$\simeq 17.34406556$$

La regla del trapecio se puede ampliar si subdividimos el intervalo $[a,b]$ en "n" subintervalos, todos de la misma longitud. $h=\frac{b-a}{n}$

Sea $P=\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ la partición que se forma al hacer dicha subdivisión al usar propiedades integrales se tiene:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

Si se aplica la regla del trapecio simple a cada integral, se obtiene

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (X_1 - X_0)\left[\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\right] + \cdots + (X_n - X_{n-1})\left[\frac{f(X_{n-1})+f(X_n)}{2}\right]$$

$\vdots$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)\left[\frac{f(X_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(X_i) + f(X_n)}{2n}\right]}$$

Regla del trapecio compuesta.

Ejemplo: Integre la función utilizando 6 intervalos.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

$\boxed{n=6}$

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-(-1)}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

i		X_i	$f(X_i)$
0	$a=X_0$	-1	0.2419707245
1	$X_1=X_0+h$	$X_1=-1+1/3=-\frac{2}{3}$	0.3194480055
2	$X_2=X_1+h$	$X_2=-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$	0.3773832277
3	$X_3=X_2+h$	$X_3=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0$	0.3989422804
4	$X_4=X_3+h$	$X_4=0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$	0.3773832277
5	$X_5=X_4+h$	$X_5=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$	0.3194480055
6	$X_6=X_5+h$	$X_6=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$	0.2419707245

$\sum_{i=1}^{n-1}$

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) = 0.3194480055 + 0.3773832277 + 0.3989422804 + 0.3773832277 + 0.3194480055 = 1.792604747$$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\left[\frac{f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(x_n)}{2n}\right]$$ Pág7

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = (1-(-1))\left[\frac{0.2419707245+2(1.792604747)+f(x_6)}{2(6)}\right]$$

$$I = 2\left[\frac{3.027180219+0.2419707245}{12}\right]$$

$$\boxed{I = 0.6781918239}$$ R//