# INTERPOLACIÓN DE HERMITE

# Polinomios Osculantes

Los *polinomios osculantes* representan una generalización de los polinomios de Taylor y de Lagrange.

Dados $n+1$ números distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ en $\left[a,b\right]$ y los enteros no negativos $m_0, m_1, \ldots, m_n,$ y $m$=máx$\left\{m_0, m_1, \ldots, m_n\right\}$. El polinomio osculante que aproxima una función $f \in C^m\left[a,b\right],$ en $x_i,$ para cada $i = 0,1,\ldots,n$. El grado de este polinomio osculante es, a lo más,

$$M = \sum_{i=0}^{n} m_i + n$$

ya que el número de condiciones por cumplir es $\sum_{i=0}^{n} m_i + (n+1),$ y un polinomio de grado $M$ tiene $M+1$ coeficientes que se puede utilizar para satisfacerlas.

**Definición 3.8**

Sean $x_0, x_1, ..., x_n,\ n+1$ números distintos en $[a,b]$ y $m_i$ un entero no negativo asociado a $x_i$ para $i = 0,1,...,n$. Suponiendo que $f \in C^m[a,b]$ y que $m$=máx$_{0\leq i\leq n} m_i$. El *polinomio osculante* que aproxima $f$ es el polinomio $P(x)$ de menor grado tal que

$$\frac{d^k P(x_i)}{dx^k} = \frac{d^k f(x_i)}{dx^k} \text{ para cada } i = 0,1,...,n \text{ y } k = 0,1,...,m_i.$$

Cuando $n = 0$, el polinomio osculante que aproxima $f$ es simplemente el polinomio $m_0 - \acute{e}simo$ de Taylor para $f$ en $x_0$. Cuando $m_i = 0$ para cada $i$, el polinomio osculante es el $n$-ésimo polinomio de Lagrange que interpola $f$ en $x_0, x_1, ..., x_n$.

Cuando $m_i = 1$ para cada $i = 0, 1, \ldots, n$, se produce una clase de polinomios denominados POLINOMIOS DE HERMITE. En una función dada $f$, estos últimos concuerdan con $f$ en $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Además, como sus primeras derivadas concuerdan con las de $f$, tendrán la misma "forma" que la función en $(x_i, f(x_i))$, en el sentido de que las *líneas tangentes* del polinomio coinciden con las de la función.

En está asignatura se estudiará sólo los polinomios osculantes en esta situación y se examinará primero un teorema que describe con precisión la forma de los polinomios de Hermite.

**TEOREMA 3.9**

Si $f \in C^1[a,b]$ y si $x_0, x_1, ..., x_n \in [a,b]$ son distintos, el polinomio único de menor grado que concuerda con $f$ y $f'$ en $x_0, x_1, ..., x_n$, es el polinomio de Hermite de grado a lo más $2n+1$ que está dado por

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j) \hat{H}_{n,j}(x)$$

donde

$$H_{n,j}(x) = \left[1 - 2(x - x_j) L'_{n,j}(x_j)\right] L_{n,j}^2(x)$$

y

$$\hat{H}_{n,j}(x) = (x - x_j) L_{n,j}^2(x)$$

Dentro de este contexto $L_{n,j}(x)$ denota el $j$-ésimo polinomio de Lagrange de grado $n$ definido anteriormente en la ecuación

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)}$$

Más aún, si $f \in C^{2n+2}[a,b]$ entonces para $x \in [a,b]$

$$f(x) = H_{2n+1}(x) + \frac{(x-x_0)^2...(x-x_n)^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi),$$

para alguna $\xi$ con $a < \xi < b$.

EJEMPLO 1. Utilice el polinomio de Hermite que concuerda con los datos de la tabla siguiente para obtener una aproximación de $f(1.5)$.

| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ | $f'(x_k)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1.3 | 0.6200860 | -0.5220232 |
| 1 | 1.6 | 0.4554022 | -0.5698959 |
| 2 | 1.9 | 0.2818186 | -0.5811571 |

Primero, se calcula los polinomios de Lagrange y sus derivadas:

$$L_{2,0}(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9},$$

$$L'_{2,0}(x) = \frac{100}{9}x - \frac{175}{9};$$

$$L_{2,1}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{-100}{9} x^2 + \frac{320}{9} x - \frac{247}{9},$$

$$L'_{2,1}(x) = \frac{-200}{9} x + \frac{320}{9};$$

$$L_{2,2}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{50}{9} x^2 - \frac{145}{9} x + \frac{104}{9},$$

$$L'_{2,2}(x) = \frac{100}{9} x - \frac{145}{9}.$$

Así, los polinomios $H_{2,j}(x)$ y $\hat{H}_{2,j}(x)$ son

$$H_{2,0}(x)=\left[1-2(x-1.3)(-5)\right]\left(\frac{50}{9}x^2-\frac{175}{9}x+\frac{152}{9}\right)^2$$

$$=(10x-12)\left(\frac{50}{9}x^2-\frac{175}{9}x+\frac{152}{9}\right)^2$$

$$H_{2,1}(x)=1.\left(\frac{-100}{9}x^2+\frac{320}{9}x-\frac{247}{9}\right)^2$$

$$H_{2,2}(x)=10(2-x)\left(\frac{50}{9}x^2-\frac{145}{9}x+\frac{104}{9}\right)^2$$

$$\hat{H}_{2,0}(x)=(x-1.3)\left(\frac{50}{9}x^2-\frac{175}{9}x+\frac{152}{9}\right)^2$$

$$\hat{H}_{2,1}(x)=(x-1.6)\left(\frac{-100}{9}x^2+\frac{320}{9}x-\frac{247}{9}\right)^2$$

$$\hat{H}_{2,2}(x)=(x-1.9)\left(\frac{50}{9}x^2-\frac{145}{9}x+\frac{104}{9}\right)^2.$$

Finalmente,

$$H_5(x)=0.62008860H_{2,0}(x)+0.4554022H_{2,1}(x)+0.2818186H_{2,2}(x)$$

$$-0.5220232\hat{H}_{2,0}(x)-0.5698959\hat{H}_{2,1}(x)-0.5811571\hat{H}_{2,2}(x)$$

y

$$H_5(1.5)=0.62008860\left(\frac{4}{27}\right)+0.4554022\left(\frac{64}{81}\right)+0.2818186\left(\frac{5}{81}\right)$$

$$-0.5220232\left(\frac{4}{405}\right)-0.5698959\left(\frac{-32}{405}\right)-0.5811571\left(\frac{-2}{405}\right)$$

$$\underline{H_5(1.5)=0.5118277.}$$

un resultado cuya exactitud corresponde con 7 cifras decimales.

Aunque el teorema 3.9 proporciona una descripción completa de los polinomios de Hermite, en el ejemplo 1 se comprueba lo siguiente: La necesidad de determinar y evaluar los polinomios de Lagrange y sus derivadas hace tedioso el procedimiento, aun para valores pequeños de $n$. Otro método para generar las aproximaciones de Hermite tiene como base la fórmula de diferencias divididas interpolantes de Newton para el polinomio de Lagrange en $x_0, x_1, \ldots, x_n$,

$$P_n(x) = f\left[x_0\right] + \sum_{k=1}^{n} f\left[x_0, x_1, \ldots, x_k\right](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1}),$$

y la conexión entre la n-ésima diferencia dividida y la derivada de grado $n$ de $f$ como se describió en el teorema 3.6 de la clase anterior

Suponiendo que los números distintos $x_0, x_1, ..., x_n,$ están dados junto con los valores de $f$ y $f'$ en esos números. Definir una sucesión nueva $z_0, z_1, ..., z_{2n+1},$ por medio de:

$$z_{2i} = z_{2i+1} = x_i \text{ para cada } i = 0, 1, 2, ..., n.$$

y luego construir la tabla de diferencias divididas que utilice $z_1, z_2,$ $..., z_{2n+1}.$

Ya que $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$ para cada $i$, no se puede definir $f\left[z_{2i}, z_{2i+1}\right]$ a partir de la fórmula de diferencias divididas. Si se supone, con base en el teorema 3.6, que la sustitución razonable en este caso es $f\left[z_{2i}, z_{2i+1}\right] = f'(z_{2i}) = f'(x_i),$ y se podrá utilizar las entradas o datos

$$f'(x_0), f'(x_1), ..., f'(x_n)$$

en vez de las primeras diferencias divididas no definidas

$$f\left[z_0, z_1\right],\ f\left[z_2, z_3\right], ..., f\left[z_{2n}, z_{2n+1}\right]$$

Las diferencias divididas restantes se obtienen en la forma habitual y las diferencias divididas apropiadas se emplean en la fórmula de diferencias divididas interpolantes de Newton.

La siguiente tabla contiene los datos que se emplean en las columnas de las tres primeras diferencias divididas cuando se determina el polinomio de Hermite $H_5(x)$ para $x_0, x_1,$ y $x_2$.

Los datos restantes se generan tal como se hizo en la tabla de las diferencias divididas. El polinomio está dado por

$$H_{2n+1}(x) = f\left[z_0\right] + \sum_{k=1}^{2n+1} f\left[z_0, ..., z_k\right](x - z_0)(x - z_1)...(x - z_{k-1})$$

| $i$ | $z_i$ | $f(z_i)$ | Primeras Diferencias Divididas | Segundas Diferencias Divididas |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $z_0 = x_0$ | $f[z_0] = f(x_0)$ | | |
| | | | $f[z_0, z_1] = f'(x_0)$ | |
| 1 | $z_1 = x_0$ | $f[z_1] = f(x_0)$ | | $f[z_0, z_1, z_2] = \dfrac{f[z_1, z_2] - f[z_0, z_1]}{z_2 - z_0}$ |
| | | | $f[z_1, z_2] = \dfrac{f[z_2] - f[z_1]}{z_2 - z_1}$ | |
| 2 | $z_2 = x_1$ | $f[z_2] = f(x_1)$ | | $f[z_1, z_2, z_3] = \dfrac{f[z_2, z_3] - f[z_1, z_2]}{z_3 - z_1}$ |
| | | | $f[z_2, z_3] = f'(x_1)$ | |
| 3 | $z_3 = x_1$ | $f[z_3] = f(x_1)$ | | $f[z_2, z_3, z_4] = \dfrac{f[z_3, z_4] - f[z_2, z_3]}{z_4 - z_2}$ |
| | | | $f[z_3, z_4] = \dfrac{f[z_4] - f[z_3]}{z_4 - z_3}$ | |
| 4 | $z_4 = x_2$ | $f[z_4] = f(x_2)$ | | $f[z_3, z_4, z_5] = \dfrac{f[z_4, z_5] - f[z_3, z_4]}{z_5 - z_3}$ |
| | | | $f[z_4, z_5] = f'(x_2)$ | |
| 5 | $z_5 = x_2$ | $f[z_5] = f(x_2)$ | | |

EJEMPLO 2. Los valores de la siguiente tabla, usan los datos del ejemplo 1. Los valores subrayados son los datos conocidos; los restantes se generan mediante la fórmula de las diferencias divididas ordinarias.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.3 | 0.6200860 | | | | | |
| | | -0.5220232 | | | | |
| 1.3 | 0.6200860 | | -0.0897427 | | | |
| | | -0.5489460 | | 0.0663657 | | |
| 1.6 | 0.4554022 | | -0.0698330 | | 0.0026663 | |
| | | -0.5698959 | | 0.0679655 | | -0.0027738 |
| 1.6 | 0.4545022 | | -0.0290537 | | 0.0010020 | |
| | | -0.5786120 | | 0.0685667 | | |
| 1.9 | 0.2818186 | | -0.0084837 | | | |
| | | -0.5811571 | | | | |
| 1.9 | 0.2818186 | | | | | |

Aproximando $f(1.5)$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
H_5(1.5) = 0.6200860 &+ (1.5-1.3)(-0.5220232) \\
&+ (1.5-1.3)^2(-0.0897427) \\
&+ (1.5-1.3)^2(1.5-1.6)(0.0663657) \\
&+ (1.5-1.3)^2(1.5-1.6)^2(0.0026663) \\
&+ (1.5-1.3)^2(1.5-1.6)^2(1.5-1.9)(-0.0027738)
\end{aligned}
$$

$$\underline{H_5(1.5) = 0.5118277.}$$

**Interpolación de Hermite (Algoritmo "ALG033.m")**

Para obtener los coeficientes del polinomio interpolante de Hermite $H(x)$ en los números distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ para la función $f$:

ENTRADA: los números $x_0, x_1, ..., x_n$; valores $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$

y $f'(x_0), f'(x_1), ..., f'(x_n)$.

SALIDA: los números $Q_{0,0}, Q_{1,1}, Q_{2,2}, ..., Q_{2n+1,2n+1}$ donde

$$
\begin{aligned}
H_5(x) = Q_{0,0} &+ Q_{1,1}(x-x_0) + Q_{2,2}(x-x_0)^2 + Q_{3,3}(x-x_0)^2(x-x_1) \\
&+ Q_{4,4}(x-x_0)^2(x-x_1)^2 + ... \\
&+ Q_{2n+1,2n+1}(x-x_0)^2(x-x_1)^2...(x-x_{n-1})^2(x-x_n).
\end{aligned}
$$

Paso 1 Para $i = 0,1,...,n$ haga pasos 2 y 3.

Paso 2 Sea $z_{2i} = x_i$;

$z_{2i+1} = x_i$;

$Q_{2i,0} = f(x_i)$;

$Q_{2i+1,0} = f(x_i)$;

$Q_{2i+1,1} = f'(x_i)$.

Paso 3 Si $i \neq 0$ entonces tomar

$$Q_{2i,1} = \frac{Q_{2i,0} - Q_{2i-1,0}}{z_{2i} - z_{2i-1}}.$$

Paso 4 Para $i = 2, 3, ..., 2n+1$

Para $j = 2, 3, ..., i$ tomar $Q_{i,j} = \dfrac{Q_{i,j-1} - Q_{i-1,j-1}}{z_i - z_{i-j}}.$

Paso 5 SALIDA($\mathrm{Q}_{0,0}, Q_{1,1}, Q_{2,2}, ..., Q_{2n+1,2n+1}$);

PARAR.