clases de analis numérico.

1) Sea $F(x)=\ln x$, calcular la derivada por métodos numéricos en el punto $x=5$, en base a la tabla, con $h=0.05$, aplicando la primera y segunda diferencia hacia atrás

X	4.85	4.90	4.95	5	5.05	5.10	5.15
Y	ln(4.85)	ln(4.9)	ln(4.95)	ln5	ln(5.05)	ln(5.10)	ln(5.15)

Primera diferenca

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$$

$$f'(5)=\frac{f(5)-f(5-0.05)}{0.05}$$

$$f'(5)=\frac{\ln(5)-\ln(4.95)}{0.05}$$

$$f'(5)=0.2010067171$$

Segunda diferencia

$$f'(x_0)=\frac{3f(x_0)-4f(x_0-h)+f(x_0-2h)}{2h}$$

$$f'(5)=\frac{3f(5)-4f(4.95)+f(4.9)}{2(0.05)}$$

$$f'(5)=\frac{3\ln(5)-4\ln(4.95)+\ln(4.9)}{0.10}$$

$$f'(5)=0.199986361$$

Cálculo de errores

$$f(x)=\ln x \rightarrow f'(5)=\frac{1}{2}=0.2$$

Primera diferencia

$$Er=\left|\frac{Vv-Va}{Vv}\right|=\left|\frac{0.2-0.201006717 1}{0.2}\right|=5.0335855\times10^{-3}$$

$$Er\%=(5.0335855\times10^{-3})(100)=0.50335855\%$$

Segunda diferencia

$$Er=\left|\frac{Vv-Va}{Vv}\right|=\left|\frac{0.2-0.199986361}{0.2}\right|=6.8195176\times10^{-5}$$

$$Er\%=(6.8195176\times10^{-5})(100)=6.8195176\times10^{-3}\%$$

Comentarios:

* Resultados de la segunda diferencia finita presenta mejor precisión que la primera diferencia.-
* Este método es buena utilizarlo sino es riguroso la precisión
* Este método presenta inestabilidad.
* Si se desea precisión y exactitud este método no es el más apropiado.-

2) Para estudiar un determinado fenómeno físico, se registran los cambios producidos en él en la siguiente tabla.- Aproxima el valor $f'(1.3) = -0.639962$, utilizando la derivación numérica por diferencia centrada de orden 2 y 4

X	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
Y	2.5	2.436851	2.372895	2.308785	2.245066	2.182179

$h = 1.2 - 1.1 = 0.1$

Orden 2

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

$$f'(1.3) = \frac{f(1.3+0.1) - f(1.3-0.1)}{2(0.1)} = \frac{f(1.4) - f(1.2)}{0.2}$$

$$= \frac{2.245066 - 2.372895}{0.2}$$

$$= -0.639145$$

Ka

Orden 4

$$f'(x_0) = \frac{-f(x_0+2h)+8f(x_0+h)-8f(x_0-h)+f(x_0-2h)}{12h}$$

$$f'(1.3) = \frac{-f(1.3+0.2)+8f(1.3+0.1)-8f(1.3-0.1)+f(1.3-0.2)}{12(0.1)}$$

$$= \frac{-f(1.5)+8f(1.4)-8f(1.2)+f(1.1)}{1.2}$$

$$= \frac{-2.0182179+8(2.245066)-8(2.372895)+2.436851}{1.2}$$

$$= -0.6399666667$$

Cálculo de errores

Orden 2

$$Er = \left|\frac{Vv-Va}{Vv}\right| = \left|\frac{-0.639962-(-0.6399666667)}{-0.639962}\right|$$

$$= 7.29215172 2\times10^{-6}$$

$$Er\% = (7.29215172 2\times10^{-6})(100) = 7.029215172 2\times10^{-4}\,\%$$

Orden 4

$$Er = \left|\frac{Vv-Va}{Vv}\right| = \left|\frac{-0.639962+0.639145}{-0.639962}\right| = 1.2766383\times10^{-3}$$

$$E\% = (1.2766383\times10^{-3})(100) = 0.12766383$$

Comentarios ✓ Se acercan al valor verdadero.
✓ Arroja mayor precisión

Ejemplo

Aproximar la función $f'(3)$ de $f(x) = \ln x \operatorname{sen} x$ utilizando la fórmula de 3 puntos con $h = 0.1$

1) $$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

$$f'(3) = \frac{f(3+0.1) - f(3-0.1)}{2(0.1)}$$

$$= \frac{f(3.1) - f(2.9)}{0.2}$$

$$= \frac{\ln(3.1)\operatorname{sen}(3.1) - \ln(2.9)\operatorname{sen}(2.9)}{0.2}$$

$$\boxed{f'(3) \simeq -1.038434402}$$

2) → Sig. Pág.

$$f'(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)}{2h}$$

$$f'(3) = \frac{-3f(3) + 4f(3+0.1) - f(3+0.2)}{2(0.1)}$$

$$= \frac{-3\ln(3)\,sen(3) + 4\ln(3.1)\,sen(3.1) - \ln(3.2)\,Sen(3.2)}{0.2}$$

$$f'(3) = -1.045163979$$

Cálculo de errores.

① $Er = \left| \frac{V_v - V_a}{V_v} \right|$

$$V_v = f'(x) = \ln(x)\cos x + \frac{Sen\,x}{x}$$

$$f'(3) = \ln(3)\cos 3 + \frac{sen\,3}{3}$$

$$\boxed{f'(3) = -1.04057792}$$

$$Er = \left| \frac{-1.04057792 + 1.038434402}{-1.04057792} \right|$$

$$Er = 2.059930089 \times 10^{-3}$$

$$E\% = (2.059930089 \times 10^{-3})(100) = 0.2059930089\%$$

② $E_r = \left|\frac{V_v - V_a}{V_v}\right| = \left|\frac{-1.04057792 + 1.045163979}{-1.04057792}\right|$

$= 4.407223055 \times 10^{-3}$

$E\% = (4.407223055 \times 10^{-3})(100) = 0.4407223055\%$

Comentarios ✓ Ambas da una precisión es distinta, pero con una buena aproximación

✓ El error puede ser pequeño o grande siempre dependerá de la precisión.

Ejemplo Aproximar a $f'(4.2)$ la función $f(x) = \ln x \tan x$, utilizando la formula de 5 puntos con $h = 0.1$

① $f'(x_0) = \frac{1}{12h}\left[-25f(x_0) + 48f(x_0+h) - 36f(x_0+2h) + 16f(x_0+3h) - 3f(x_0+4h)\right]$

$f'(4.2) = \frac{1}{12(0.1)}\left[-25f(4.2) + 48f(4.2+0.1) - 36f(4.2+2(0.1)) + 16f(4.2+3(0.1)) - 3f(4.2+4(0.1))\right]$

$f'(4.2) = \frac{1}{1.2}\left[-25\ln(4.2)\tan 4.2 + 48\ln(4.3)\tan(4.3) - 36\ln(4.4)\tan 4.4 + 16\ln 4.5\tan 4.5 - 3\ln 4.6\tan 4.6\right]$

$\boxed{f'(4.2) = 1.785659143}$

Pay

(2) $f'(x_0)=\frac{1}{12h}\left[-3f(x_0-h)-10f(x_0)+18f(x_0+h)-6f(x_0+2h)\right.$
$\left.+f(x_0+3h)\right]$

$f'(4.2)=\frac{1}{12(0.1)}\left[-3f(4.2-0.1)-10f(4.2)+18f(4.2+0.1)\right.$
$\left.-6f(4.2+2(0.1))+f(4.2+3(0.1))\right]$

$=\frac{1}{1.2}\left[-3\ln(4.1)\tan(4.1)-10\ln(4.2)\tan(4.2)+\right.$
$18\ln(4.3)\tan(4.3)-6\ln(4.4)\tan(4.4)$
$\left.+\ln(4.5)\tan(4.5)\right]$

$\boxed{f'(4.2)=6.605387196}$

(3) $f'(x_0)=\frac{1}{12h}\left[f(x_0-2h)-8f(x_0-h)+8f(x_0+h)-f(x_0+2h)\right]$

$=\frac{1}{12(0.1)}\left[f(4.2-2(0.1))-8f(4.2-0.1)+8f(4.2+0.1)-\right.$
$\left.f(4.2+2(0.1))\right]$

$=\frac{1}{1.2}\left[\ln 4\tan 4-8\ln 4.1\tan 4.1+8\ln 4.3\tan 4.3-\right.$
$\left.\ln 4.4\tan 4.4\right]$

$\boxed{f'(x_0)=6.351926311}$

④ $f'(x_0) = \frac{1}{12h}\left[4f(x_0-3h) + 6f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 34f(x_0) + 3f(x_0+h) + 34f(x_0+2h)\right]$

$f'(4.2) = \frac{1}{12(0.1)}\left[4f(4.2-3(0.1)) + 6f(4.2-2(0.1)) - 8f(4.2-0.1) + 34f(4.2) + 3f(4.2+0.1) + 34f(4.2+2(0.1))\right]$

$f'(4.2) = \frac{1}{1.2}\left[4\ln 3.9\tan 3.9 + 6\ln 4\tan 4 - 8\ln 4.1\tan 4.1 + 34\ln 4.2\tan 4.2 + 3\ln 4.3\tan 4.3 + 34\ln 4.4\tan 4.4\right]$

$\boxed{f'(4.2) = 221.2568595}$

⑤ $f'(x_0) = \frac{1}{12h}\left[f(x_0-4h) - 3f(x_0-3h) + 4f(x_0-2h) - 36f(x_0-h) + 25f(x_0)\right]$

$f'(4.2) = \frac{1}{12(0.1)}\left[f(4.2-4(0.1)) - 3f(4.2-3(0.1)) + 4f(4.2-2(0.1)) - 36f(4.2-0.1) + 25f(4.2)\right]$

$f'(4.2) = \frac{1}{1.2}\left[\ln 3.8\tan 3.8 - 3\ln 4.1\tan 4.1 + 4\ln 4\tan 4 - 36\ln 4.1\tan 4.1 + 25\tan 4.2\ln 4.2\right]$

$\boxed{f' = -5.916572414}$

Cálculo de errores

$$f'(x) = \ln x \sec^2 x + \frac{\tan x}{x}$$

$f'(4.2) = 6.393951396 \rightarrow$ valor verdadero.

① $\cancel{E_r = 1.785659143 - 6.393951396}$

$$E_r = \left| \frac{V_v - V_a}{V_v} \right|$$

$$= \left| \frac{6.393951396 - 1.785659143}{6.393951396} \right|$$

$$= 0.7207268194$$

$$E\% = (0.7207268194)(100)$$

$$= 72.07268194\%$$

(2) $E_r = \left| \frac{6.393951396 - 6.605387196}{6.393951396} \right|$

$= 0.03306809622$

$E\% = (0.03306809622)(100)$

$\boxed{E\% = 3.306809622\%}$

(3) $E_r = \left| \frac{6.393951396 - 6.351926311}{6.393951396} \right|$

$= 6.572631288 \times 10^{-3}$

$E\% = (6.572631288 \times 10^{-3})(100)$

$\boxed{E\% = 0.6572631288\%}$

(4) $E_r = \left| \frac{6.393951396 - 221.2508595}{6.393951396} \right|$

$= 33.6031500 4$

$E\% = (33.60315004)(100) = 3360.315004\%$

(5) $Er = \left| \frac{6.393951396 + 5.916572414}{6.393951396} \right|$

$Er = 1.925338972$

$E\% = (1.925338972)(100)$

$\boxed{E\% = 192.5338972\%}$

<u>Comentarios</u> ✓ Depende si es hacia adelante, hacia atrás o centrada así es la precisión

✓ Que es precisa la #3

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Se deducen las fórmulas para calcular numéricamente y se pueden construir con el desarrollo de Taylor.

Algunas fórmulas de orden superior:

- Diferencias finitas hacia adelante <u>Primera diferen</u>

$$f''(X_0) = \frac{f(X_0+2h) - 2f(X_0+h) + f(X_0)}{h^2}$$

Pág 13

$$f'''(x_0) = \frac{f(x_0) - 3f(x_0-h) + 3f(x_0-2h) - f(x_0-3h)}{h^3}$$

$$f^{IV}(x_0) = \frac{f(x_0) - 4f(x_0-h) + 6f(x_0-2h) - 4f(x_0-3h) + f(x_0-4h}{h^4}$$

$f'(x_0) = $

SEGUNDA DIFERENCIA

$$f''(x_0) = \frac{-f(x_0+3h) + 4f(x_0+2h) - 5f(x_0+h) + 2f(x_0)}{h^2}.$$

$$f'''(x_0) = \frac{-3f(x_0+4h) + 14f(x_0+3h) - 24f(x_0+2h) + 18f(x_0+h) - 5f(x_0)}{2h^3}$$

$$f^{IV}(x_0) = \frac{-2f(x_0+5h) + 11f(x_0+4h) - 24f(x_0+3h) + 26f(x_0+h) + 3f(}{h^4}$$

Fórmulas diferencias finitas hacia atrás

Primera diferencia.

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0) - 2f(x_0-h) + f(x_0-2h)}{h^2}$$

$$f'''(x_0) = \frac{f(x_0) - 3f(x_0-h) + 3f(x_0-2h) - f(x_0-3h)}{h^3}$$

$$f^{IV}(x_0) = \frac{f(x_0) - 4f(x_0-h) + 6f(x_0-2h) - 4f(x_0-3h) + f(x_0-4h)}{h^4}$$

Segunda diferencia

$$f''(x_0) = \frac{2f(x_0) - 5f(x_0-h) + 4f(x_0-2h) - f(x_0-3h)}{h^2}$$

$$f'''(x_0) = \frac{5f(x_0) - 18f(x_0-1) + 24f(x_0-2h) - 14f(x_0-3h) + 3f(x_0}{h^3}$$

$$f^{IV}(x_0) = \frac{3f(x_0) - 14f(x_0-h) + 26f(x_0-2h) - 24f(x_0-3h) + 11f(x_0- \quad - 2f(x_0-5h)}{h^4}$$

Fórmulas de diferencias finitas centrales.

Primera diferencia

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}.$$

$$f'''(x_0) = \frac{f(x_0+2h) - 2f(x_0+h) + 2f(x_0-h) - f(x_0-2h)}{2h^3}.$$

$$f^{IV}(x_0) = \frac{f(x_0+2h) - 4f(x_0+h) + 6f(x_0) - 4f(x_0-h) + f(x_0-2h)}{h^4}$$

Segunda diferencia

$$f''(x_0) = \frac{-f(x_0+2h) + 16f(x_0+h) - 30f(x_0) + 16f(x_0-h) - f(x_0-2h)}{12h^2}.$$

$$f'''(x_0) = \frac{-f(x_0+3h) + 8f(x_0+2h) - 12f(x_0+h) + 12f(x_0-h) - 8f(x_0-2h) + f(x_0-3h)}{8h^3}.$$

$$f^{IV}(x_0) = \frac{-f(x_0+3h) + 12f(x_0+2h) - 39f(x_0+h) + 56f(x_0) - 39f(x_0-h) + 12f(x_0-2h) - f(x_0-3h)}{6h^4}$$

Ejemplo: Si $f(x) = \cos x$, con $h = 0.1$ determine en $x = 2$ la:

a) Segunda derivada con primer diferencia hacia adelante
b) tercera derivada con segunda diferencia hacia atrás
c) cuarta derivada con primer diferencia centrada.
d) Calcule los errores porcentuales.

Solución

a) $$f''(x_0) = \frac{f(x_0+2h) - 2f(x_0+h) + f(x_0)}{h^2}$$

$$f''(2) = \frac{f(2+2(0.1)) - 2f(2+0.1) + f(2)}{(0.1)^2}$$

$$= \frac{f(2.2) - 2f(2.1) + f(2)}{0.01}$$

$$= \frac{\cos 2.2 - 2\cos 2.1 + \cos 2}{0.01}$$

$$\boxed{f''(2) = 0.5044255397}$$

b) $$f'''(x_0) = \frac{5f(x_0) - 18f(x_0-h) + 24f(x_0-2h) - 14f(x_0-3h) + 3f(x_0-4h)}{2h^3}$$

$$f'''(2) = \frac{5f(2) - 18f(2-0.1) + 24f(2-2(0.1)) - 14f(2-3(0.1)) + 3f(2-4(0.1))}{2(0.1)^3}$$

$$= \frac{5\cos 2 - 18\cos(1.9) + 24\cos 1.8 - 14\cos 1.7 + 3\cos 1.6}{2\times 10^{-3}}$$

$$\boxed{f'''(2) = 0.9260507034}$$

c) $$f^{IV}(x_0) = \frac{f(x_0+2h) - 4f(x_0+h) + 6f(x_0) - 4f(x_0-h) + f(x_0-2h)}{h^4}$$

$$f^{IV}(2) = \frac{f(2+2(0.1)) - 4f(2+0.1) + 6f(2) - 4f(2-0.1) + f(2-2(0.1))}{(0.1)^4}$$

$$= \frac{\cos(2.2) - 4\cos 2.1 + 6\cos 2 - 4\cos 1.9 + \cos 1.8}{1\times 10^{-4}}$$

$$\boxed{f^{IV}(2) = -0.4154537785}$$

d) $f(x) = \cos x$

Valores verdaderos.

$f'(x) = -\operatorname{sen} x$

$f''(x) = -\cos x \longrightarrow f''(2) = 0.4161468365$

$f'''(x) = \operatorname{Sen} x \longrightarrow f'''(2) = 0.9092974268$

$f^{IV}(x) = -\cos x \longrightarrow f^{IV}(2) = 0.4161468365$

a)

$f''(2) = 0.5044255397$

$$Er = \left| \frac{0.4161468365 - 0.5044255397}{0.4161468365} \right|$$

$Er = 0.2121335439$

$E\% = (0.2121335439)100 = 21.21335439\%$

$f'''(2) = 0.9260507034$

$$Er = \left| \frac{0.9092974268 - 0.9260507034}{0.9092974268} \right| = 0.0184244187\text{9}$$

$E\% = (0.0184244187\text{9}) \times 100 = 1.842441879\%$

c) $f^{IV}(2) = -0.4154537785$

$$E_r = \left| \frac{0.4161468365 + 0.4154537785}{0.4161468365} \right|$$

$E_r = 1.998334583$

$E\% = (1.998334583)\,100$

$= 199.8334583\%$

Las diferencias finitas dan precisión en los cálculos, de forma didáctica, es manera de obtener valores aproximados.—

Si queremos exactitud veremos en la próxima clase el método de Richardson que sirve para determinar las derivadas con mayor exactitud y precisión en los calculos.—