Método de Euler centrado.

La formula recursiva es $Y_{n+1} = Y_n + hf(X_n, Y_n)$

Dada la ecuación diferencial con la condición inicial $y' = 2XY$, $Y(0) = 1$

Aproximar $y(0.5)$

$X_0 = 0$ $X_1 = 0.5$ no es lo suficiente pequeño.

entonces $h = 0.1$

Iteración $\underline{\underline{0}}$

$X_0 = 0$ $Y_0 = 1$ $h = 0.1$. $f(x,y) = 2xy$

$X_1 = X_0 + h = 0.1$

$Y_1 = Y_0 + hf(X_0, y_0) = 1 + 0.1[2(0)(0)] = 1$

$X_2 = X_1 + h = 0.2$

$Y_2 = Y_1 + hf(X_1, y_1) = 1 + 0.1[2(1)(0.1)]$

$= 1.02.$

Y así sucesivamente.

n	X_n	Y_n
0	0	1
1	0.1	1
2	0.2	1.02
3	0.3	1.0608
4	0.4	1.12445
5	0.5	1.2144

$Y(0.5) \simeq \underline{1.2144}$

Métodos de Euler mejorado (modificado)

Este método se basa en la misma idea del método anterior, pero hace un refinamiento en la aproximación.

$$Y_{n+1} = Y_n + h\left[\frac{f(X_n, Y_n) + f(X_{n+1}, Y^*_{n+1})}{2}\right.$$

donde $Y^*_{n+1} = Y_n + hf(X_n, Y_n)$

Aplicar el método de Euler mejorado, para aproximar $Y(0.5)$ si

$$Y' = 2XY$$
$$Y(0) = 1$$

Se define $h = 0.1$

$X_0 = 0 \quad Y_0 = 1 \quad h = 1 \quad f(x,y) = 2XY$

$X_1 = X_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$

$Y^*_1 = Y_0 + hf(X_0, Y_0)$

$= 1 + 0.1[2(0)(1)] = 1$

$$Y_1 = Y_0 + h\left(\frac{f(X_0, Y_0) + f(X_1, Y^*_1)}{2}\right)$$

$$Y_1 = 1 + 0.1\left(\frac{f(0,1) + f(0.1, 1)}{2}\right)$$

$$= 1 + 0.1\left(\frac{2(0)(1) + 2(0.1)(1)}{2}\right)$$

$= 1.01$

$$X_2 = X_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2$$

$$Y_2^* = Y_1 + hf(X_1, Y_1) = 1.0302$$

$$Y_2 = Y_1 + h\left(\frac{f(X_1, Y_1) + f(X_2, Y_2)}{2}\right)$$

$$= 1.040704$$

De esta manera se siguen calculando hasta llegar a $X = 0.5$

n	X_n	Y_n
0	0	1
1	0.1	1.01
2	0.2	1.040704
3	0.3	1.093988
4	0.4	1.173192
5	0.5	1.28336

$$Y(0.5) \simeq 1.28336$$

Aplicar el método de Euler mejorado para aproximar $Y(1.3)$ si tenemos.

$$y' = x - y + 5 \qquad Y(1) = 2.$$

$$\begin{cases} h = 0.1 \\ f(x,y) = x - y + 5 \\ X_0 = 1 \\ Y_0 = 2. \end{cases}$$

$$X_1 = X_0 + h = 1.1$$

$$Y_1^* = Y_0 + hf(X_0, Y_0) = 2.4$$

$$Y_1 = 2 + 0.1\left(\frac{f(1,2) + f(1.1, 2.4)}{2}\right)$$

$$Y_1 = 2.385$$

Y Así sucesivamente.

n	X_n	Y_n
0	1	2
1	1.1	2.385
2	1.2	2.742925
3	1.3	3.07635

$$Y(1.3) \simeq 3.07635$$

Método de Taylor

Teorema de Taylor de orden N.

Sea $Y(t)$ una función talque sea N veces continuamente diferenciable en el intervalo $[a,b]$ y existe Y^{N+1} existe en $[a,b]$ para todo $t_K + h \in [a,b]$ habrá un número $\varepsilon(t_K) \in [t_K + h, b]$ tal que:

$$Y(t_K+h) = Y(t_K) + Y'(t_K)\,h + Y''(t_K)\frac{h^2}{2!} + \cdots + Y^{N}(t_K)\frac{h^N}{N!}$$

$$+ Y^{N+1}(\varepsilon(t_K))\frac{h^{N+1}}{(N+1)!}$$

El valor numérico aproximado de la solución del problema de valor inicial $y' = f(t, y)$ con $y(t_0) = y_0$, en el intervalo $[a, b]$ mediante el método de Taylor, ester basado en la aplicación del teorema de Taylor en cada subintervalo $[t_k, t_{k+1}]$ de manera que el paso general del método de Taylor de orden N es:

$$y_{k+1} = y_k + y'(t_k) + y''(t_k)\frac{h^2}{2!} + \dots + y^N(t_k)\frac{h^N}{N!}$$

para $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Ejercicios de estudio.

Aplicar método de Euler.

① $y' = 2x \quad , \; y(0) = 1 \qquad y(2) = ??$

② $y' = (x + y - 1)^2, \; y(0) = 2 \qquad y(0.1) ??$

③ $y' = e^x + y \quad ; \; y(1) = 3 \qquad y(2.1) : ??$