Clase 3/abril/2020. analisis numérico Pág 1.

Polinomio Newton $p(x) = b_0 + b_1(X - X_0) + b_2(X - X_0)(X - X_1) + \dots$

$$+ b_n(X - X_0)(X - X_1)\dots(X - X_{n-1}).$$

Los coeficientes:

$$b_0 = F[X_0]$$

$$b_1 = F[X_1, X_0] = \frac{f(X_1) - f(X_0)}{X_1 - X_0}.$$

$$b_2 = F[X_2, X_1, X_0] = \frac{F[X_2, X_1] - F[X_1, X_0]}{X_2 - X_0}$$

$$b_2 = \frac{\frac{f(X_2) - f(X_1)}{X_2 - X_1} - b_1}{X_2 - X_0}$$

$$b_3 = F[X_3, X_2, X_1, X_0] = \frac{F[X_3, X_2, X_1] - \overbrace{F[X_2, X_1, X_0]}^{b_2}}{X_3 - X_0}$$

$$b_4 = F[X_4, X_3, X_2, X_1, X_0] = \frac{F[X_4, X_3, X_2, X_1] - \overbrace{F[X_3, X_2, X_1, X_0]}^{b_3}}{X_4 - X_0}$$

$$b_5 = F[X_5, X_4, X_3, X_2, X_1, X_0] = \frac{F[X_5, X_4, X_3, X_2, X_1] - \overbrace{F[X_4, X_3, X_2, X_1, X_0]}^{b_4}}{X_5 - X_0}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$b_n = F[X_n, X_{n-1}, \ldots, X_2, X_1, X_0] = \frac{F[X_n, X_{n-1}, \ldots, X_2, X_1] - \overbrace{F[X_{n-1}, \ldots, X_1, X_0]}^{b_{n-1}}}{X_n - X_0}$$

Ejemplo 1

Sea $f(x) = X^2$ y sea $P(x)$ el polinomio interpolador. que coincide con la función ~~con~~ las coordenadas de $X=2$, $X=5$, $X=7$. - Determine el polinomio de Newton de grado uno y dos.

X	2	5	7
Y	4	25	49

Polinomio de grado uno

$b_0 = f[X_0] = 4$

$$b_1 = F[X_1, X_0] = \frac{f(X_1) - f(X_0)}{X_1 - X_0} = \frac{25-4}{5-2} = \frac{21}{3} = 7$$

$P(x) = b_0 + b_1(X - X_0)$

$P_1(x) = 4 + 7(X-2)$

$= 4 + 7X - 14$

$P_1(x) = 7X - 10$

Polinomio de grado dos.

$$P(X) = b_0 + b_1(X - X_0) + b_2(X - X_0)(X - X_1)$$

$b_0 = 4$

$b_1 = 7$

$$b_2 = F[X_2, X_1, X_0] = \frac{F[X_2, X_1] - \overbrace{F[X_1, X_0]}^{b_1}}{X_2 - X_0} = \frac{\frac{25}{2} - 7}{7 - 2}$$

$$= \frac{11}{10}$$

Determinar:

$$F[X_2, X_1] = \frac{F(X_2) - F(X_1)}{X_2 - X_1} = \frac{49 - 24}{7 - 5} = \frac{25}{2}$$

$$P_2(X) = 4 + 7(X - 2) + \frac{11}{10}(X - 2)(X - 5)$$

$$= 4 + 7X - 14 + \frac{11}{10}(X^2 - 7X + 10)$$

$$= 7X - 10 + \frac{11}{10}X^2 - \frac{77}{10}X + 11$$

$$= \frac{11}{10}X^2 - \frac{7}{10}X + 1$$

¿Si interpola $X = 4$?

$$P_2(4) = \frac{11}{10}(4)^2 - \frac{7}{10}(4) + 1 = \frac{79}{5} \rightarrow \left(4, \frac{79}{5}\right)$$

Ejemplo. 2

Obtener el polinomio de interpolación de Newton por recurrencia, con los datos de la tabla e interpolar en el punto $X=5$.

	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4
X	4	-4	7	6	2
Y	278	-242	1430	908	40

$\Rightarrow$ Polinomio buscado es de grado 4, cuyo polinomio quedaria:

$$P(X)=b_0+b_1(X-X_0)+b_2(X-X_0)(X-X_1)+b_3(X-X_0)(X-X_1)(X-X_2)$$
$$+b_4(X-X_0)(X-X_1)(X-X_2)(X-X_3)$$

Por lo tanto iniciare por los factores y luego los coeficientes.

✓ Factor $(X-X_0)(X-X_1)=(X-4)(X+4)=X^2-4^2=\boxed{X^2-16}$

✓ $(X-X_0)(X-X_1)(X-X_2)=\underline{(X-4)(X+4)}(X-7)$
$$=(X^2-16)(X-7)$$
$$=\boxed{X^3-7X^2-16X+112}$$

✓ $(X-X_0)(X-X_1)(X-X_2)(X-X_3)=\underline{(X-4)(X+4)(X-7)}(X-6)$
$$=(X^3-7X^2-16X+112)(X-6)$$
$$=X^4-6X^3-7X^3+42X^2-16X^2+96X$$
$$+112X-672$$
$$=\boxed{X^4-13X^3+26X^2+208X-672}$$

Inicia determinando los valores de las constantes $b_0, \ldots, b_4$

X	4	-4	7	6	2
Y	278	-242	1430	908	40
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4

✓ Para $\underline{b_0}$

$$b_0 = F[X_0] = f(4) = \boxed{278}$$

✓ Para $\underline{b_1}$

$$b_1 = F[X_1, X_0] = \frac{f(X_1) - f(X_0)}{X_1 - X_0} = \frac{-242-278}{-4-4} = \boxed{65}$$

✓ Para $\underline{b_2}$

$$b_2 = F[X_2, X_1, X_0] = \frac{F[X_2, X_1] - \overbrace{F[X_1 - X_0]}^{b_1}}{X_2 - X_0} = \frac{152-65}{7-4} = \boxed{29}$$

$$F[X_2, X_1] = \frac{F(X_2) - f(X_1)}{X_2 - X_1}$$

$$= \frac{1430+242}{7+4}$$

$$= 152$$

✓ Para $\underline{b_3}$

$$b_3 = F[X_3, X_2, X_1, X_0] = \frac{F[X_3, X_2, X_1] - \overbrace{F[X_2, X_1, X_0]}^{b_2}}{X_3 - X_0}$$

$$= \frac{37 - 29}{6-4}$$

$$\boxed{= 4}$$

$$F[X_3, X_2, X_1] = \frac{F[X_3, X_2] - \overbrace{F[X_2, X_1]}^{152}}{X_3 - X_1} = \frac{522 - 152}{6 + 4} = 37$$

$$F[X_3, X_2] = \frac{f(X_3) - f(X_2)}{X_3 - X_2}$$

$$= \frac{908 - 1430}{6 - 7}$$

$$= 522$$

X	4	-4	7	6	2
Y	-278	-242	1430	908	40
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4

Para $\underline{b_4}$

$$b_4 = F[X_4, X_3, X_2, X_1, X_0] = \frac{F[X_4, X_3, X_2, X_1] - \overbrace{F[X_3, X_2, X_1, X_0]}^{b_3}}{X_4 - X_0}$$

$$= \frac{4 - 4}{2 - 4} = \boxed{0}$$

$$F[X_4, X_3, X_2, X_1] = \frac{F[X_4, X_3, X_2] - \overbrace{F[X_3, X_2, X_1]}^{37}}{X_4 - X_1}$$

$$= \frac{61 - 37}{2 + 4} = 4$$

$$F[X_4, X_3, X_2] = \frac{F[X_4, X_3] - \overbrace{F[X_3, X_2]}^{522}}{X_4 - X_2} = \frac{217 - 522}{2 - 7}$$

$$= 61$$

$$F[X_4, X_3] = \frac{F(X_4) - f(X_3)}{X_4 - X_3}$$

$$= \frac{40 - 908}{2-6}$$

$$= 217$$

X	4	-4	7	6	2
Y	278	-242	1430	908	40
	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4

Cuadro resumen

b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
278	65	29	4	0

$\Rightarrow$ El polinomio nos quedara.

$$P(X) = 278 + 65(X-4) + 29(X^2-16) + 4(X^3 - 7X^2 - 16X + 112)$$
$$+ 0(X^4 - 13X^3 + 26X^2 + 208X - 672)$$
$$= 278 + 65X - 260 + 29X^2 - 464 + 4X^3 - 28X^2 - 16X$$
$$+ 448 + 0$$

$$\underline{P(x) = 4x^3 + X^2 + 49X + 2} \quad R//$$

El polinomio resultante fue de tercer grado dado que el coeficiente del término cuadrático es de cero

- Interpolar $X = 5$.

$$P(5) = 4(5)^3 + (5)^2 + 49(5) + 2 = \underline{\underline{282}} \quad R//$$