METODO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN

$$y_{I+1} = y_i + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$,... (9)

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_1}{2})$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_2}{2})$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$$.

1. La ecuación (9) tiene mucha coincidencia con los 5 primeros términos de la serie de Taylor lo que significa gran exactitud sin calculo de derivadas, pero a cambio, se tiene que evaluar la función *f(x,y)*cuatro veces en cada subintervalo.

EJEMPLOS Y APLICACIÓN

Ejemplo 1

$$P.V.I = \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x - y \\ y(0) = 2 \\ y(1) = ? \end{cases}$$

Usando Runge-Kutta de cuarto orden.

Solución:

- ***Primera Iteración:*** *Calculo de constantes k_1, k_2, k_3, k_4*

$$k_1 = f(x_0, y_0) = x_0 - y_0 = 0 - 2 = -2$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_1}{2}) = f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{hk_1}{2}) = f(0 + \frac{0.2}{2}, 2 - 0.2)$$

$$= \frac{0.2}{2} - 2 + 0.2 = -1.7$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_2}{2}) = f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{hk_2}{2}) = f(0 + \frac{0.2}{2}, 2 + \frac{0.2(-1.7)}{2})$$

$$= \frac{0.2}{2} - 2 + \frac{0.2(-1.7)}{2} = \frac{10}{100} - \frac{200}{100} + \frac{17}{100} = -1.73$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3) = f(x_0 + h, y_0 + hk_3) = f(0 + 0.2, 2 + 0.2(-1.73))$$

$$= 0.2 - 2 + \frac{173}{1000} = -1.454$$

Cálculo De y_1:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) = 2 + \frac{0.2}{6}\left(-2 - 3.4 - 3.46 - 1.454\right) = 1.6562$$

- ***Segunda Iteración: Calculo de constantes k_1, k_2, k_3, k_4***

$$k_1 = f(x_1, y_1) = f(0.2, 1.6562) = 0.2 - 1.6562 = -1.4562$$

$$k_2 = f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{hk_1}{2}) = f(0.2 + \frac{0.2}{2}, 1.6562 + \frac{0.2(-1.7)}{2})$$

$$= 0.2 + \frac{0.2}{2} - 1.6562 + \frac{0.2(1.7)}{2} = -1.21058$$

$$k_3 = f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{hk_2}{2}) = 0.2 + \frac{0.2}{2} - 1.6562 + \frac{0.2(1.21058)}{2} = -1.235142$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3) = 0.2 + 0.2 - 1.6562 + 0.2(1.235142) = -10091716$$

Cálculo De y_2:

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) = 1.6562 + \frac{0.2}{6}\left(-1.4562 + 2(-1.2128)...\right) = 1.4109$$

- *Continuando llegamos a:*

$$y_3 = 1.246450474$$
$$y_4 = 1.148003885$$
$$y_5 = 1.103655714$$

Observación:

- *Los métodos descritos se llaman también métodos de un solo paso porque se apoyan y usan (x_i,y_i) para el cálculo de y_{i+1}.*
- *Estos Métodos además se apoyan en puntos x_i y x_{i+1} pero nunca en puntos anteriores a x_i.*

Ejemplo 2

Usar el método de Runge-Kutta para aproximar $y(0.5)$ dada la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = 2xy$$

$$y(0) = 1$$

Solución

Primero, identificamos el mismo ejemplo 1 de los dos métodos anteriores.
Segundo, procedemos con los mismos datos:

$$\begin{cases} x_0 & = & 0 \\ y_0 & = & 1 \\ h & = & 0.1 \\ f(x,y) & = & 2xy \end{cases}$$

Para poder calcular el valor de y_1 debemos calcular primeros los valores de k_1, k_2 ,k_3, y k_4. Tenemos entonces que: (MarcadorDePosición1)vc

$$k_1 = h \cdot f(x_0, y_0) = 0$$

$$k_2 = h \cdot f(x_o + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_1) = 0.1\left[2(0.05)(1)\right] = 0.01$$

$$k_3 = h \cdot f(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_2) = 0.1\left[2(0.05)(1.005)\right] = 0.01005$$

$$k_4 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.1\left[2(0.1)(1.01005\right] = 0.020201$$

$$\therefore\ y_1 = y_0 + \frac{1}{6}\left[0 + 2(0.01) + 2(0.01005) + 0.020201\right] = 1.01005$$

Con el fin de un mayor entendimiento de las fórmulas, veamos la siguiente iteración:

$x_2 = x_1 + h = 0.2$

$k_1 = h \cdot f(x_1, y_1) = 0.1[2(0.1)(1.01005)] = 0.020201$

$k_2 = h \cdot f(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}k_1) = 0.1[2(0.15)(1.02010)] = 0.03060$

$k_3 = h \cdot f(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}k_2) = 0.1[2(0.15)(1.02535)] = 0.03076$

$k_4 = h \cdot f(x_1 + h, y_1 + k_3) = 0.1[2(0.2)(1.04081)] = 0.04163$

$$\therefore\ y_2 = y_1 + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] = 1.04081$$

El proceso debe repetirse hasta obtener y_5. Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

n	x_n	y_n
0	0	1
1	0.1	1.01005
2	0.2	1.04081
3	0.3	1.09417
4	0.4	1.17351
5	0.5	1.28403

Concluimos que el valor obtenido con el método de Runge-Kutta es:

$$y(0.5) \approx 1.28403$$

Finalmente, calculamos el error relativo verdadero:

$$\left|\in_v\right| = \left|\frac{1.28402 - 1.28403}{1.28402} \times 100\%\right| = 0.0007\%$$

Con lo cual vemos que efectivamente se ha reducido muchísimo el error relativo. De hecho observamos que tenemos 6 cifras significativas en la aproximación

Ejemplo 3

Usar el método de Runge-Kutta para aproximar $y(2.2)$ dada la ecuación diferencial:

$$y' = x + y$$

$$y(2) = 4$$

Solución

Igual que siempre, tomamos $h = 0.1$ y llegaremos a la aproximación en dos pasos.

Con esta aclaración, tenemos los siguientes datos:

$$\begin{cases} x_0 & = & 2 \\ y_0 & = & 4 \\ h & = & 0.1 \\ f(x,y) & = & x + y \end{cases}$$

Primera Iteración:

$$x_1 = x_0 + h = 2.1$$

$$k_1 = h \cdot f(x_0, y_0) = 0.1[2+4] = 0.6$$

$$k_2 = h \cdot f(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_1) = 0.1[2.05 + 4.3] = 0.635$$

$$k_3 = h \cdot f(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_2) = 0.1[2.05 + 4.3175] = 0.63675$$

$$k_4 = h \cdot f\left(x_0 + h, y_0 + k_3\right) = 0.1\left[2.1 + 4.63675\right] = 0.673675$$

$$\therefore\ y_1 = y_0 + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right] = 4.6362$$

<u>Segunda Iteración</u>:

$$x_2 = x_1 + h = 2.2$$

$$k_1 = h \cdot f\left(x_1, y_1\right) = 0.1\left[2.1 + 4.6362\right] = 0.67362$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_1 + \tfrac{1}{2}h, y_1 + \tfrac{1}{2}k_1\right) = 0.1\left[2.15 + 4.97301\right] = 0.7123$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_1 + \tfrac{1}{2}h, y_1 + \tfrac{1}{2}k_2\right) = 0.1\left[2.15 + 4.99235\right] = 0.71424$$

$$k_4 = h \cdot f\left(x_1 + h, y_1 + k_3\right) = 0.1\left[2.2 + 5.35044\right] = 0.75504$$

$$\therefore\ y_2 = y_1 + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right] = 5.34982$$

Concluimos entonces que el valor buscado es:

$$y(2.2) \approx 5.34982$$