Método de Boole

Esta regla utiliza cinco puntos consecutivos igualmente separables para calcular la integral aproximada de la funcion.-

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{2h}{45}\left[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)\right]$$

$$h = \frac{b-a}{4}$$

Ejemplo: Utilizar el método de Boole para calcular

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x\,dx = \frac{2(0.125)}{45}\left[7f(1) + 32f(1.125) + 12f(1.25) + 32f(1.375) + 7f(1.5)\right]$$

$$h = \frac{b-a}{4} = \frac{1.5-1}{4} = 0.125$$

$$= \frac{1}{90}(7(0) + 32(0.1490691545) + 12(0.3486617989) + 32(0.6020765854)$$

$+7(0.9122964932)$

$$\int_1^{1.5} x^2 \ln x \, dx = 0.3845186746 \quad R//$$

Unidad 5 Problemas de valor inicial para ecuaciones diferenciales ordinarias.

i) Teoria elemental de los problemas de valor inicial para ED.

Una EDO es aquella que involucra una variable independiente, una variable dependiente y la derivada o derivadas de esta variable dependiente.-

Por ejemplo.

$y' = y$ — Solución $y = ce^x \; ; c \in R$.

Existen varios métodos de aproximación numérica de ecuaciones diferenciales

- ✓ Método de Euler
- ✓ Método de Euler mejorado

- ✓ Método de Taylor.
- ✓ Método de Runge Kutta.
- ✓ Método de Adams.
- ✓ Método de Simpson
- ✓ multipasos, entre otros

En estos métodos se busca aproximar el valor de $Y(X_i)$ donde X_i es un valor cercano a la condición inicial dada.- X_0 que corresponde

Condiciones iniciales.

La ecuación diferencial del primer orden con condiciones iniciales dado por:

$$t\frac{dy}{dt} = 2y \qquad \text{(método separables)}$$

$$\frac{dy}{y} = 2\frac{dt}{t}$$

$$C+ \quad \ln|y| = 2\ln|t| + C_2.$$

$$\ln|y| = 2\ln|t| + K \; ; \; K \in R.$$

$$\ln|y| = 2\ln|t| + \ln|K|$$

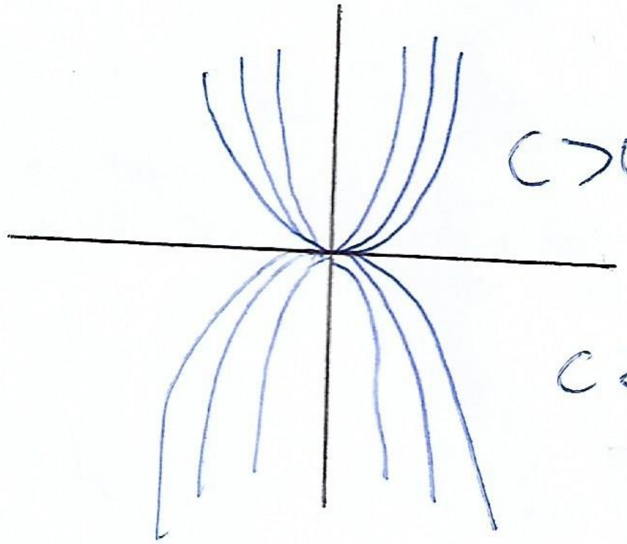
$$\ln|y| = \ln|t|^2 + \ln|K|$$

$$\ln|y| = \ln|t|^2 (K)$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|t|^2 (K)}$$

$$Y = t^2 K$$

Esto nos lleva a un modelo matemático.-



Un problema de primer orden con condiciones iniciales, está definida como:

$$Y' = f(t, y) \quad , \quad Y(t_0) = Y_0$$

A continuación, se muestran más ejemplos de problemas con condiciones iniciales de primer orden:

a) $y'(t) = 3y + 5, \quad Y(0) = 1$

b) $y'(t) = ty + 1, \quad Y(0) = 0$

c) $Y'(t) = -\dfrac{1}{1+y^2}, \quad Y(0) = 1$

Método de Euler.

a) Hacia adelante

El método de Euler, para la ecuación $y' = f(y,t)$ se obtiene reescribiendo la aproximación por diferencias hacia adelante.

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + hf(y_n, t_n)}$$

$$y_1 = y_0 + hy'_0 = y_0 + hf(y_0, t_0)$$

$$y_2 = y_1 + hf(y_1, t_1)$$

$$y_3 = y_2 + hf(y_2, t_2)$$

$$\vdots$$

$$y_n = y_{n-1} + hf(y_{n-1}, t_{n-1})$$

Resuelva $y' = -20y + 7e^{-0.5t}$ $\quad y(0) = 5$, por medio de Euler hacia adelante con $h = 0.01$ para $0 < t \leq 0.02$.

Los calculos. $h = 0.01$ $0 < t \leq 0.02$

$$Y_n = Y_{n-1} + hf(Y_{n-1}, t_{n-1})$$

$$Y(0) = 5$$

n	t_n	Y_n
0	0	5
1	0.01	4.07
2	0.02	3.32565

$$Y(0.01) = 5 + 0.01 f(5, 0)$$
$$= 4.07$$
$$Y(0.01) = 4.07 + 0.01 f(4.07, 0.01)$$
$$= 3.32565$$

Por lo tanto $Y(0.01) = 4.07$

$Y(0.02) = 3.32565$

El método de Euler hacia adelante es aplicable a un conjunto de EDO de primer orden.- Consideremos un conjunto de EDO de primer orden dado por.

$$Y' = f(Y, Z, t), \quad Y(0) = Y_0$$
$$Z' = g(Y, Z, t), \quad Z(0) = Z_0.$$

El método de Euler hacia adelante para la ecuación se escribe como:

$$Y_{n+1} = Y_n + hY_n' = Y_n + hf(Y_n, Z_n, t_n)$$

$$Z_{n+1} = Z_n + hZ_n' = Z_n + h\,g(Y_n, Z_n, t_n)$$

Pormedio del método de Euler hacia adelante con $h=0.5$, determine los valores de $Y(1)$ $\wedge$ $Y'(1)$ para

$$Y''(t) - 0.05\,Y'(t) + 0.15\,Y(t) = 0 \quad Y(0)=0 \quad Y'(0)=1.$$

Sea $Y'=Z$ entonces la EDO de segundo orden.

$$Y' = Z \qquad Y(0) = 1$$

$$Z' = 0.05Z - 0.15Y \quad ; Z(0) = 0$$

Con las condiciones iniciales son $Y_0 = Y(0) = 1$ y Z_0 $\wedge$ $Y'(0) = 0$ como nos piden en el valor de 1 y $h=0.5$ se llegaría a 2 iteraciones.

Para $t=0.5$

$$Y'(0) = Z_0 = 0$$

$$Z'_0 = 0.05 Z_0 - 0.15 Y_0$$

$$= 0.05(0) - 0.15(1)$$

$$Z'_0 = -0.15$$

$$Y_1 = Y_0 + hY'_0 = 1 + (0.5)(0) = 1$$

$$Z_1 = Z_0 + hZ_0 = 0 + (0.5)(-0.15)$$

$$= -0.075$$

Para $t=1$

$$Y'_1 = Z_1 = -0.075$$

$$Z'_1 = 0.05 Z_1 - 0.15 Y_1$$

$$= 0.05(-0.075) - 0.15(1)$$

$$= -0.15375$$

$$Y_2 = Y_1 + hY'_1 = 1 + 0.5(-0.075) = 0.96250$$

$$Z_2 = Z_1 + hZ'_1 = -0.075 + (0.5)(-0.15375)$$

$$= -0.15187$$

$$Y(1) = Y_2 = 0.96250$$

$$Y'(1) = Z(1) = Z_2 = -0.15187$$

Dada la siguiente ecuación diferencial con la condición inicial $y' = 2xy$; $y(0) = 1$, aproximar $y(0.5)$.

El valor de $h = \frac{x_1 - x_0}{n}$

donde x_0: es el valor inicial. n: Número de partes iguales

x_1: es el valor a aproximar.

$$\Rightarrow h = \frac{0.5 - 0}{5} = 0.1$$

$t_0 = 0 \rightarrow y_0 = 1$

$t_1 = 0.1 \rightarrow y_1 = y_0 + h y_0'$

$= 1 + 0.1 f(y_0, t_0)$

$= 1 + 0.1 f(1, 0)$

$= 1 + 0.1 (2)(1)(0)$

$= 1$

$t_2 \rightarrow 0.2 \rightarrow y_2 = y_1 + h y_1'$

$y_2 = 1 + 0.2 (f(1, 0.1))$

$= 1 + 0.2 (2)(1)(0.1)$

$= 1.04$

$t_3 = 0.3 \rightarrow Y_3 = Y_2 + hf(Y_2, t_2)$

$= 1.04 + 0.3f(1.04, 0.2)$

$= 1.04 + 0.3(2)(1.04)(0.2)$

$= 1.1648$

$t = 0.4 \rightarrow Y_4 = Y_3 + hf(Y_3, t_3)$

$= 1.1648 + 0.4(2)(1.1648)(0.3)$

$= 1.444352$

$t \rightarrow 0.5 \rightarrow Y_5 = Y_4 + hf(Y_4, t_4)$

$= 1.444352 + 0.5f(1.444352, 0.4)$

$= 1.444352 + 0.5(2)(1.444352)(0.4)$

$= 1.7332224$

$$\boxed{Y(0.5) = 1.7332224}$$

Método de Euler hacia atrás. es un método implícito

$$Y_{n+1} = Y_n + h\,f(Y_{n+1}, t_{n+1})$$

Puede hacerse

$$\tilde{Y}_{n+1} = Y_n + hf(Y_n, t_n)$$

$$Y_{n+1} = Y_n + hf(\tilde{Y}_{n+1}, t_{n+1})$$

Resolver $Y' = Y + 2xe^{2x}$

$Y(0) = 1$

$Y(3) : ??$

$$h = \frac{X_1 - X_0}{h} = \frac{3-0}{3} = 1$$

$Y_0 = 1 \quad X_0 = 0$

<u>Iteración 1:</u>

$$\tilde{Y}_1 = Y_0 + hf(X_0, Y_0)$$

$$= 1 + 1[1 + 2(0)e^{2(0)}]$$

$$\tilde{Y}_1 = 2$$

$$X_1 = X_0 + h = 0 + 1 = 1$$

$$Y_1 = Y_0 + hf(X_1; \tilde{Y}_1) = 1 + 1[2 + 2(1)e^{2(1)}]$$

$$= 17.778.$$

Iteración 2

$\tilde{Y}_2 = Y_1 + hf(X_1, Y_1)$

$= 17.778 + 1[17.778 + 2(1)e^{2(1)}]$

$= 50.334$

$X_2 = X_1 + h = 1 + 1 = 2$

$Y_2 = Y_1 + hf(X_2, \tilde{Y}_2)$

$= 17.778 + 1[50.334 + 2(2)e^{2(2)}]$

$= 286.505$

Iteración 3

$\tilde{Y}_3 = Y_2 + hf(X_2, Y_2)$

$= 286.505 + 1[286.505 + 2(2)e^{2(2)}]$

$\tilde{Y}_3 = 791.403$

$X_3 = X_2 + h = 2 + 1 = 3$

$Y_3 = Y_2 + hf(X_3, Y_3)$

$= 286.505 + 1[791.403 + 2(3)e^{2(3)}]$

$\boxed{Y_3 = 3498.481}$ R//

El método de Euler implica dos tipos de error:

a) truncado: Aunque la magnitud del error es aproximadamente proporcional a h, no resulta provechoso reducir este parámetro demasiado, porque el tiempo de calculo aumenta y consecuentemente, puede aumentar el error de redondeo.-

b) Inestabilidad Se presenta cuando la constante del tiempo de la ecuación es negativa, pero h no es lo suficientenente pequeño.-

En el método de Euler hacia atrás es incondicionalmente estable, se garantiza la positividad de la ecuación, cuando está debe ser positiva.

Luego veremos método de Euler Centrado y Modificado.