Regla de simpson de un tercio simple

Se sabe que se tiene los datos.

a	X_m	b
$f(a)$	$f(X_m)$	$f(b)$

donde X_m es el punto medio entre a y b

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b f_2(x)dx.$$

donde $f_2(x)$ es el polinomio de interpolación para los datos en la tabla anterior; el cual se utiliza Lagrange.-

$$f_2(x) = f(a)\frac{(X-X_m)(X-b)}{(a-X_m)(a-b)} + f(X_m)\frac{(X-a)(X-b)}{(X_m-a)(X_m-b)}$$

$$+f(b)\frac{(x-a)(X-X_m)}{(b-a)(b-X_m)}$$

Se integra y se obtiene.

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)\left[\frac{f(a)+4f(X_m)+f(b)}{6}\right]$$

Use la regla de simpson 1/3 para aproximar la integral $\int_0^1 \sqrt{1-x^3}\,dx$

① Determina el punto medio

$$X_m = \frac{0+1}{2} = 0.5$$

i	X_i	$f(X_i)$
0	0	1
1	0.5	$\frac{\sqrt{14}}{4}$
2	1	0

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\left[\frac{f(a)+4f(X_m)+f(b)}{6}\right]$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^3}\,dx = (1-0)\left[\frac{f(0)+4f(0.5)+f(1)}{6}\right]$$

$$= 1\left[\frac{1+4\left(\frac{\sqrt{14}}{4}\right)+0}{6}\right]$$

$$= \frac{1+\sqrt{14}}{6}$$

Use la regla de simpson de $1/3$, para aproximar la siguiente integral:

$$\int_2^4 \frac{e^x}{x}\,dx$$

① Determine el punto medio.

$$X_m = \frac{4+2}{2} = 3$$

i	X_i	$f(X_i)$
0	2	$\frac{e^2}{2}$
1	3	$\frac{e^3}{3}$
2	4	$\frac{e^4}{4}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\left[\frac{f(a)+4f(X_m)+f(b)}{6}\right]$$

$$\int_2^4 \frac{e^x}{x}\,dx = (4-2)\left[\frac{f(2)+4f(3)+f(4)}{6}\right]$$

$$= 2\left[\frac{\frac{e^2}{2}+4\left(\frac{e^3}{3}\right)+\frac{e^4}{4}}{6}\right] \approx 14.7082.$$

Al igual que la regla del trapecio, podemos extender la regla de simpson de 1/3, si subdividimos el intervalo [a,b] en n subintervalos de la misma longitud $h = \frac{b-a}{n}$

Sea $P = \{X_0, X_1, \ldots, X_n\}$ la partición que se forma al hacer la subdivisión del intervalo [a,b] en "n" subintervalos $X_{Mi} \in [X_{i-1}, X_i]$

es decir:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \cdots +$$

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

Para cada uno se aplica la regla de simpson 1/3 y se llega

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)\left[\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{mi}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{6n}\right.$$

Aproximar la siguiente integral de la regla de Simpsons de $\frac{1}{3}$ y subdividiendo en 5 intervalos

$$\int_0^6 \frac{\cos x}{x+1}\,dx$$

① $h = \frac{b-a}{n} = \frac{6-0}{5} = \frac{6}{5} = 1.2$

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	1
1	1.2	0.1647080762
2	2.4	-0.2168805046
3	3.6	-0.1949474818
4	4.8	0.01508603163
5	6	0.1371671838

Sumatoria.

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(x_m) = 0.1647080762 + (-0.2168805046) + (-0.1949474818) + 0.01508603163$$

$$= -0.2320338786$$

Determino los puntos medios de cada subintervalo.

$[0, 1.2] \rightarrow \frac{0+1.2}{2} = 0.6$

$[1.2, 2.4] \rightarrow \frac{1.2+2.4}{2} = 1.9$

$[2.4, 3.6] \rightarrow \frac{2.4+3.6}{2} = 3$

$[3.6, 4.8] \rightarrow \frac{3.6+4.8}{2} = 4.2$

$[4.8, 6] \rightarrow \frac{4.8+6}{2} = 5.4$

X_{mi}	$f(X_{mi})$
0.6	0.5158347593
1.9	-0.111479161
3	-0.2474981242
4.2	-0.09942809 2718
5.4	0.0991707 6187
Σ	0.1617473088

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\left[\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{mi}) + 2\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + f(x_n)}{6n}\right]$$

$$\int_0^6 \frac{\cos x}{x+1}\,dx = (6-0)\left[\frac{1 + 2(-0.2320338786) + 4(0.1617473088) + f(x_5)}{6(5)}\right]$$

$$= 6\left[\frac{1.182921478 + 0.1371671838}{30}\right]$$

$$\simeq 0.2640177324 \quad R//$$

Ejemplo. Aproximar la siguiente integral, utilizando la regla de simpson de 1/3 y subdividiendo en 4 intervalos

$$\int_2^4 \frac{e^x}{x}\,dx \qquad h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-2}{4} = \frac{2}{4} = 0.5.$$

Intervalos: $P = \{2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$

Subintervalos: $P_{mi} = \{2.25, 2.75, 3.25, 3.75\}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\left[\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{mi}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{6n}\right]$$

$$\int_2^4 \frac{e^x}{x}\,dx = \frac{(4-2)\left[f(2) + 4[f(2.25) + f(2.75) + f(3.25) + f(3.75)] + 2[f(2.5) + f(3) + f(3.5)] + f(4)\right]}{6(4)}$$

$$= \frac{2}{24}\left[\frac{e^2}{2} + 4\left[\frac{e^{2.25}}{2.25} + \frac{e^{2.75}}{2.75} + \frac{e^{3.25}}{3.25} + \frac{e^{3.75}}{3.75}\right] + 2\left[\frac{e^{2.5}}{2.5} + \frac{e^3}{3} + \frac{e^{3.5}}{3.5}\right] + \frac{e^4}{4}\right]$$

$$= \underline{\underline{14.6767}}$$

Regla de simpson de tres octavos.

Para en este caso corresponde a $n=3$, es decir,

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b f_3(x)\,dx.$$

donde $f_3(x)$ es un polinomio de interpolación para los siguientes datos

X_0	X_1	X_2	X_3
$f(X_0)$	$f(X_1)$	$f(X_2)$	$f(X_3)$

donde $X_0=a$, $X_3=b$, X_1, X_2, son los puntos que dividen en tres partes iguales al intervalo $[a,b]$, de igual manera se integra el polinomio de Lagrange y se usa el método de integración por partes para llegar a la formula.

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq (b-a)\left[\frac{f(X_0)+3f(X_1)+3f(X_2)+f(X_3)}{8}\right]$$

Aproximar la siguiente integral usando la regla de simpson de 3/8.

$$\int_1^4 e^x \ln x dx.$$

$$h = \frac{b-a}{3} = \frac{4-1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Particiones nos quedaria: $\{1, 2, 3, 4\}$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\left[\frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}\right]$$

$$\int_1^4 e^x \ln x dx = (4-1)\left[\frac{f(1) + 3f(2) + 3f(3) + f(4)}{8}\right]$$

$$= \frac{3}{8}\left[e\ln(1) + 3e^2\ln(2) + 3e^3\ln(3) + e^4\ln 4\right]$$

$$= 58.9698 \; / \; RA$$

Al igual que los casos anteriores la regla de Simpson de 3/8, se puede extender subdividimos $[a, b]$ en "n" intervalos de la misma longitud

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Sea $\{X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n\}$ luego cada subintervalo se divide en 3 partes iguales, quedando

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{8n}\left[f(x_0) + 3\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_{mi})\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

Aproximar la integral $\int_1^4 e^x \ln x \, dx$ aplicando la regla de Simpson 3/8 y subdividiendo en 3 intervalos.

$$h = \frac{b-a}{3} = \frac{4-1}{3} = 1 \qquad \frac{1}{3} \%$$

$$X_i : \{\underbrace{1, 2}_{1}, \underbrace{\,, 3}_{1}, \underbrace{\,, 4}_{1}\}$$

subintervalo: $\left\{\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}\right\}$.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{8n}\left[f(x_0) + 3\sum_{i=1}^{n} f(x_{mi}) + 2\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

$$\int_1^4 e^x \ln x\,dx = \frac{4-1}{8(3)}\left[f(1) + 3\left(f\left(\tfrac{4}{3}\right) + f\left(\tfrac{5}{3}\right) + f\left(\tfrac{7}{3}\right) + f\left(\tfrac{8}{3}\right) + f\left(\tfrac{10}{3}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. + f\left(\tfrac{11}{3}\right)\right) + 2\left[f(2) + f(3)\right] + f(4)\right]$$

$$= 57.966878$$