Integración numerica.

Evalue la integral de los siguientes datos tabulados

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
f(x)	1	7	4	3	5	2.

a) Integrar por el método del trapecio.

✓ verificar la distancia de h

$$x \quad 0 \quad 0.1 \quad 0.2 \quad 0.3 \quad 0.4 \quad 0.5$$

$$\underbrace{\quad}_{0.1}\ \underbrace{\quad}_{0.1}\ \underbrace{\quad}_{0.1}\ \underbrace{\quad}_{0.1}\ \underbrace{\quad}_{0.1}$$

✓ Como es más de dos puntos se utiliza el compuesto

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)\left[\frac{f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(x_n)}{2n}\right]$$

$$\int_0^{0.5} f(x)dx = (0.5-0)\left[\frac{f(0)+2(f(0.1)+f(0.2)+f(0.3)+f(0.4))+f(0.5)}{2(5)}\right]$$

$$= 0.5\left[\frac{1+2(7+4+3+5)+2}{10.}\right]$$

$$= 2.05$$

b) Integrando por el método del simpson 1/3 simple.

X 0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5

1 2 3 4 5 = n

Intervalos.

Nota

Para poder utilizar simpson compuesto el "n" debería ser múltiplo de dos.-

Por lo tanto se toma de la siguiente forma

X: 0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5

simpson 1/3 simpson 1/3 trapecio

Para $X=\{0, 0.1, 0.2\}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\left[\frac{f(x_0)\overset{\text{mas}}{+}4f(x_m)+f(x\ldots}{6}\right]$$

$$\int_0^{0.2} f(x)\,dx = (0.2-0)\left[\frac{f(0)+4f(0.1)+f(0.2)}{6}\right]$$

$$= 0.2\left[\frac{1+4(7)+4}{6}\right] = 1.1$$

Para $X=\{0.2, 0.3, 0.4\}$

$$\int_{0.2}^{0.4} f(x)\,dx = (0.4-0.2)\left[\frac{f(0.2)+4f(0.3)+f(0.5)}{6}\right]$$

$$= 0.2\left[\frac{4+4(3)+5}{6}\right] = 0.7$$

Para $x = \{0.4, 0.5\}$ $\qquad \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]$

$$\int_{0.4}^{0.5} f(x)\,dx = (0.5-0.4)\left[\frac{f(0.4)+f(0.5)}{2}\right]$$

$$= 0.1\left[\frac{5+2}{2}\right] = 0.35$$

$$\int_0^{0.5} f(x)\,dx = \int_0^{0.2} f(x)\,dx + \int_{0.2}^{0.4} f(x)\,dx + \int_{0.4}^{0.5} f(x)\,dx$$

$$= 1.1 + 0.7 + 0.35$$

$$= 2.15$$

c) Integrar por el método del simpson 3/8 compuesto

Como $n=5$ dificilmente puedo ocupar este método

Porque debe ser multiplo de 3.-

$$x:\ \underbrace{0 \quad 0.1 \quad 0.2 \quad 0.3}_{\text{simpson 3/8 simple}}\ \underbrace{\quad 0.4 \quad 0.5}_{\text{simpson 1/3 simple}}$$

Para $x = \{0, 0.1, 0.2, 0.3\}$ $\qquad \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\left[\frac{f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)}{8}\right]$

$$\int_0^{0.3} f(x)\,dx = (0.3-0)\left[\frac{f(0)+3f(0.1)+3f(0.2)+f(0.3)}{8}\right] = 0.3\left[\frac{1+3(7)+3(4)+3}{8}\right]$$

$$= 1.3875$$

Pag

Para $x = \{0.3, 0.4, 0.5\}$ $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\left[\frac{f(a) + 4 f(x_m) + f(b)}{6}\right]$

$$\int_{0.3}^{0.5} f(x)\,dx = (0.5-0.3)\left[\frac{f(0.3) + 4f(0.4) + 0.5)}{6}\right]$$

$$\int_{0.3}^{0.5} f(x)\,dx = 0.2\left[\frac{3 + 4(5) + 2}{6}\right]$$

$$= 0.2\left(\frac{25}{6}\right)$$

$$= \frac{5}{6}$$

$$\int_{0}^{0.5} f(x)\,dx = \int_{0}^{0.3} f(x)\,dx + \int_{0.3}^{0.5} f(x)\,dx$$

$$= 1.3875 + \frac{5}{6}$$

$$= 2.22083\overline{3}$$

Evaluee con 4 intervalos

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4}(x^2-3y^2+xy^3)\,dx\,dy$$

Aplicar el método del trapecio compuesto.
De igual manera la variable y queda constante.

$$I=\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-2}^{2}\left[\int_{0}^{4}(x^2-3y^2+xy^3)\,dx\right]dy$$

fórmula trapecio compuesto
$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\left[\frac{f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(x_n)}{2n}\right]$$

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{4-0}{4}=1$$

i	(x_i, y)
0	$(0, y)$
1	$(1, y)$
2	$(2, y)$
3	$(3, y)$
4	$(4, y)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\left[\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + f(x_n)}{2n}\right]$$

$$\boxed{f(x,y) = x^2 - 3y^2 + xy^3}$$

$$\boxed{f(0,y) = 0^2 - 3y^2 + 0y^3 = -3y^2} \rightarrow f(x_0).$$

$$f(1,y) = 1^2 - 3y^2 + 1(y)^3 = 1 - 3y^2 + y^3 \quad +$$

$$f(2,y) = 2^2 - 3y^2 + 2y^3 = 4 - 3y^2 + 2y^3.$$

$$f(3,y) = 3^2 - 3y^2 + 3y^3 = 9 - 3y^2 + 3y^3 \quad =$$

Sumatoria $\boxed{14 - 9y^2 + 6y^3.}$

$$f(4,y) = 4^2 - 3y^2 + 4y^3 = \boxed{16 - 3y^2 + 4y^3}$$

$$\int_0^4 f(x,y)\,dx \cong (4-0)\left[\frac{-3y^2 + 2(14 - 9y^2 + 6y^3) + 16 - 3y^2 + 4y^3}{2(4)}\right]$$

$$= 4\left[\frac{-3y^2 + 28 - 18y^2 + 12y^3 + 16 - 3y^2 + 4y^3}{8}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-24y^2 + 16y^3 + 44\right]$$

$$= 8y^3 - 12y^2 + 22$$

$$\int_{-2}^{2} (8y^3 - 12y^2 + 22)\,dy = I \qquad h = \frac{2-(-2)}{4} = 1$$

Intervalos $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$$\int_{-2}^{2} (8y^3 - 5y^2 + 22)\,dy = (2-(-2))\left[\frac{f(-2) + 2(f(-1) + f(0) + f(1)] + f(2)}{2(4)}\right]$$

$$= 4\left(\frac{-90 + 2(2 + 22 + 18) + 38}{8}\right)$$

$$= \cancel{58}\ 16$$

Se puede utilizar simpson 1/3, 3/8,

Evalue la integral triple

$$\int_{-4}^{4}\int_{0}^{6}\int_{-1}^{3} (x^3 - 2yz)\,dx\,dy\,dz$$ por trapecio

Con 8 intervalos. $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\left[\frac{f(x_0) + 2\sum f(x_i) + f(x_n)}{2n}\right]$

$$\int_{-1}^{3} (x^3 - 2yz)\,dx = (3-(-1))\left[\frac{f(-1) + 2\sum_{i=1}^{7} f(x_i) + f(3)}{2(8)}\right]$$

$$h = \frac{3-(-1)}{8} = \frac{4}{8} = 0.5$$

$$\boxed{f(-1, y, z) = -1 - 2yz} \leftarrow f(x_0).$$

$$f(-0.5, y, z) = -\frac{1}{8} - 2yz$$

$$f(0, y, z) = \quad -2yz$$

$$f(0.5, y, z) = \frac{1}{8} - 2yz.$$

$$f(1, y, z) = 1 - 2y, z$$

$$f(1.5, y, z) = \frac{27}{8} - 2yz$$

$$f(2, y, z) = 8 - 2yz$$

$$f(2.5, y, z) = \frac{125}{8} - 2yz$$

Suma $\quad 28 \cdot \; -14yz$

$$f(3, y, z) = 27 - 2yz$$

$$\int_{-1}^{3}(x^3-2yz)\,dx = 4\left[\frac{-1-2yz+2(28-14yz)+27-2yz}{16}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{26-4yz+56-28yz}{1}\right)$$

$$=\frac{41}{2}-8yz$$

$$\int_{0}^{6}\left(\frac{41}{2}-8yz\right)dy \qquad h=\frac{6-0}{8}=\frac{6}{8}=0.75$$

$$\boxed{f(0,z)=\frac{41}{2}} \to f(x_0)$$

$$f(0.75,z)=\frac{41}{2}-6z$$

$$f(1.5,z)=\frac{41}{2}-12z$$

$$f(2.25,z)=\frac{41}{2}-18z$$

$$f(3,z)=\frac{41}{2}-24z$$

$$f(3.75,z)=\frac{41}{2}-30z$$

$$f(4.5,z)=\frac{41}{2}-36z$$

$$f(5.25,z)=\frac{41}{2}-42z$$

Suma $287/9 - 168z$

$$f(6,z)=\frac{41}{2}-48z$$

$$\int_0^6 \left(\frac{41}{2} - 8yz\right)dy = (6-0)\left[\frac{\frac{41}{2} + 2\left(\frac{287}{9} - 168z\right) + \frac{41}{2} - 48z}{16}\right]$$

$$= \frac{6}{16}\left(\frac{82}{2} + \frac{574}{9} - 336z - 48z\right)$$

$$= \frac{943}{24} - 144z$$

$$\int_{-4}^{4}\left(\frac{943}{24} - 144z\right)dz \qquad h = \frac{4-(-4)}{8} = 1$$

$$\int_{-4}^{4}\left(\frac{943}{24} - 144z\right)dz = (4-(-4))\left[\frac{f(-4) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(4)}{16}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[f(-4) + 2\left(f(-3) + f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) + f(3)\right] + f(4)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{14767}{24} + 2\left(\frac{11311}{24} + \frac{7855}{24} + \frac{4399}{24} + \frac{943}{24} - \frac{2513}{24} - \frac{5969}{24} - \frac{9425}{24}\right) - \frac{12881}{24}\right]$$

$$= \frac{943}{3}$$

Analisis numerico. Integración de Rosemberg.

Este combina... dos aproximaciones de integración numérica, para obtener un valor más exacto.- Para encontrar el segundo nivel de aproximación se Puede extender hasta "n" niveles, de la misma forma que Richardson en la derivación, es decir, que la forma de trabajar es igual.-

Para nivel dos:

Nivel(1, i) Nivel (2, i)

Trapecio

$I_1(h_1)$, $I_2(h_2)$ → $\boxed{I(2,i)}$

Fórmula.

$$I_{(2,i)} = \frac{4}{3} I_{(1,1+i)} - \frac{1}{3} I_i$$

Para nivel 3.

Nivel (1, i) Nivel (2, i) Nivel (3, i)

Trapecio

$I(1,1)$, $I(1,2)$ → $I(2,1)$

$I(1,2)$, $I(1,3)$ → $I(2,2)$

$I(2,1)$, $I(2,2)$ → $I_{(3,1)}$

Fórmula

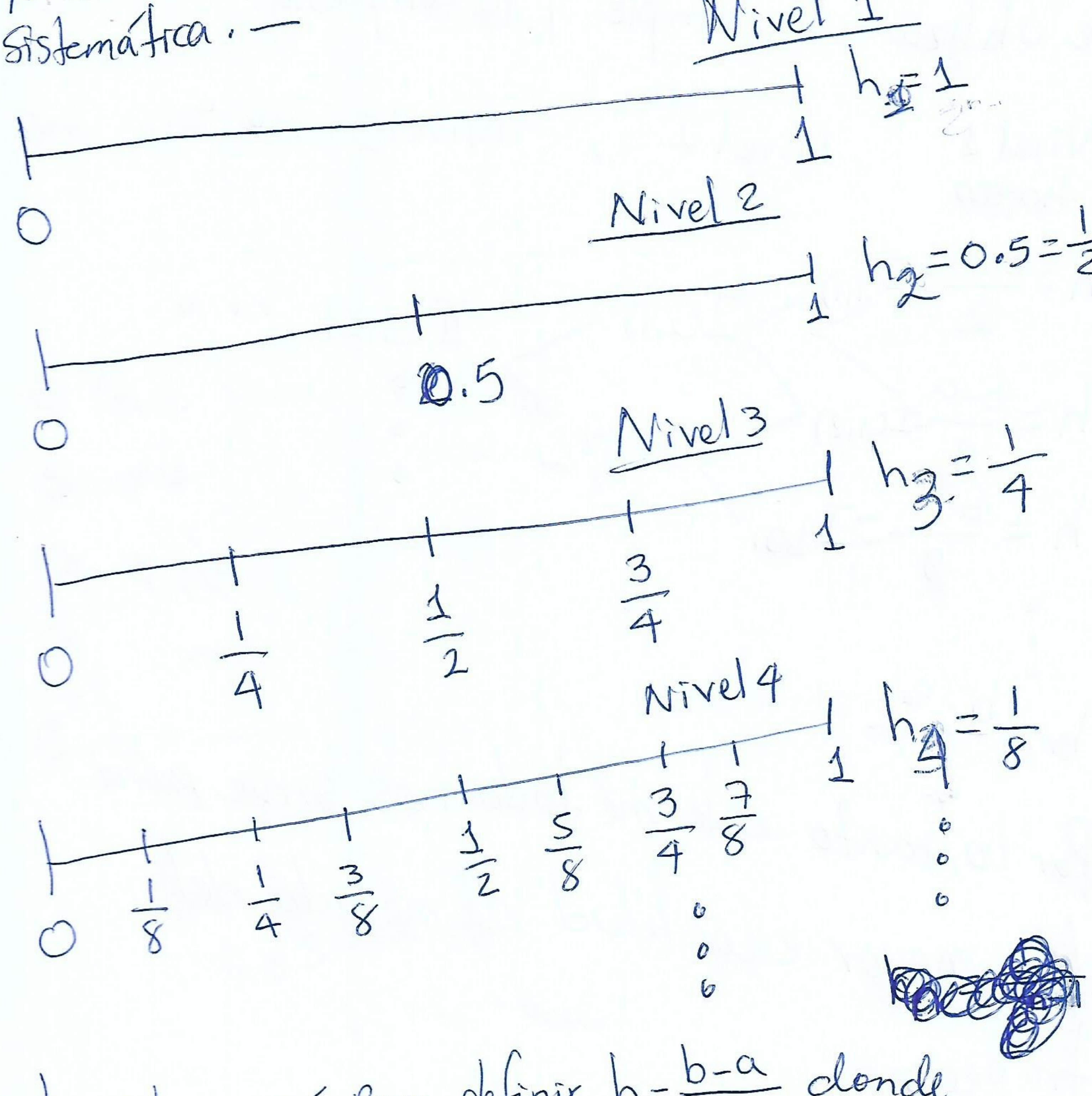
$$I_{(3,i)} = \frac{16}{15} I_{(2,i+1)} - \frac{1}{15} I_{(2,i)}$$

Y así sucesivamente los demás ~~m~~ niveles, es por ello que se genera con la fórmula.

$$I_{(k+1,i)} = \frac{4^k I_{(k-1,i+1)} - I_{(k-1,i)}}{4^k - 1}$$

Con $K \geq 2 \rightarrow$ Del nivel 3 o más.

Como este consiste en aplicar la extrapolación de Richardson a la fórmula de trapecio de forma sistemática.—



h_n: te servirá para definir $h=\frac{b-a}{n}$ donde por ejemplo. $h_4=\frac{1}{8} \rightarrow$ significar $h=\frac{b-a}{8}$

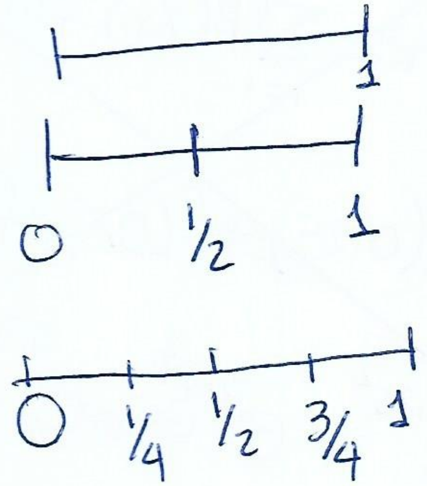
Si $h_{10} = \frac{1}{512}$ significa que $h = \frac{b-a}{512}$ correspondiente al trapecio, es de esta manera quee en ciertos niveles se utilizara la simple y la compuesta. —

Nivel 1 trapecio — Nivel 2 — Nivel 3 ...

$$\begin{array}{lll}
h = \frac{b-a}{2} = I(1,1) & & \\
 & I(2,1) & I(3,1) \quad \cdots \\
h = \frac{b-a}{4} = I(1,2) & & \vdots \\
 & I(2,2) & \\
h = \frac{b-a}{8} = I(1,3) & \vdots & \\
\vdots & & \\
h = \frac{b-a}{2} & &
\end{array}$$

Por lo tanto este método nos sirve para dar mayor exactitud al método del trapecio.

Use el algoritmo de Rosemberg para aproximar la integral $\int_0^1 e^{x^2}dx$ hasta nivel dos y tres.



$h_1 = 1$

Para nivel dos. $h_2 = \frac{1}{2}$

$h_3 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ Que para ~~[illegible]~~ Primer valor. se aplica trapecio simple.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2^n}\left[f(a)+f(b)\right] \qquad \boxed{n=1}$$

$$\int_0^1 e^{x^2}dx = \frac{1-0}{2}\left[f(0)+f(1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1+e\right]$$

$$= 1.859140914$$

Para segundo valor se trabaja trapecio compuesto.

$$\int_0^1 e^{x^2}dx = \frac{1-0}{4}\left[f(0)+2f(0.5)+f(1)\right] \qquad n=2$$

$$= 1.571583165$$

Nivel 1

1.8559140914

1.571583165

Nivel 2

1.47680619

Para determinar el valor nivel dos

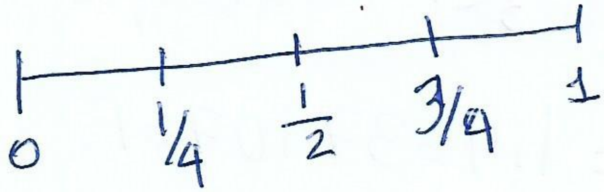
$$I_{(2,1)} = \frac{4}{3} I_{(1,2)} - \frac{1}{3} I_{(1,1)}$$

$$= \frac{4}{3}(1.571583165) - \frac{1}{3}(1.859140914)$$

$$= 1.47680619$$

$$\int_0^1 e^{x^2}dx = 1.47680619$$

Para nivel 3



n=3

$$\int_0^1 e^{x^2}dx = \frac{1-0}{8}\left[f(0) + 2\left[f(0.25) + f(0.5) + f(0.75)\right] + f(1)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[1 + 2\left[e^{0.25^2} + e^{0.5^2} + e^{0.75^2}\right] + e^1\right]$$

$$= 1.490678862$$

Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
1.8559140914	1.47680619	1.462837732
1.571583165	1.463710761	
1.490678862		

Nivel 2

$$I(2,2) = \frac{4}{3} I(1,3) - \frac{1}{3} I(1,2)$$

$$= \frac{4}{3}(1.490678862) - \frac{1}{3}(1.571583165)$$

$$= 1.463710761$$

Nivel 3

$$I(3,1) = \frac{16}{15} I(2,2) - \frac{1}{15} I(2,1)$$

$$= \frac{16}{15}(1.463710761) - \frac{1}{15}(1.47680619)$$

$$= 1.462837732$$

$$\int_0^1 e^{x^2}dx = 1,4628377732.$$

Ejemplo 2

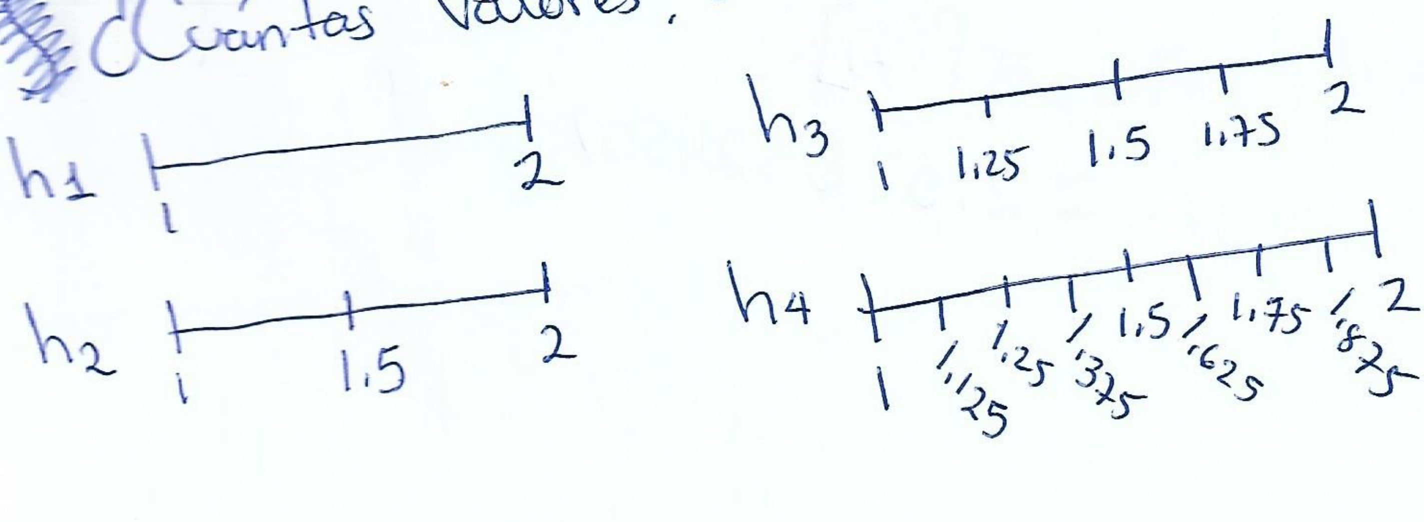
$$\int_1^2 e^x \ln x\,dx \quad \text{hasta nivel 4}$$

Para nivel 1. se tiene:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2^n}\left[f(a)+f(b)\right] \quad \text{Para } n=1$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2^n}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(X_{mi})+f(b)\right] \quad n \geq 2$$

¿Cuántas valores? Son 4 valores.



$$\int_1^2 e^x \ln x\,dx = \frac{2-1}{2}\left[f(1)+f(2)\right] = 2.560851701$$

$$\int_1^2 e^x \ln x\,dx = \frac{2-1}{4}\left[f(1)+2f(1.5)+f(2)\right]$$

$$= 2.189010122$$

$$\int_1^2 e^x \ln x\,dx = \frac{2-1}{8}\left[f(1)+2\left[f(1.25)+f(1.5)+f(1.75)\right]+ f(2)\right]$$

$$= 2.09430857$$

$$\int_1^2 e^x \ln x\,dx = \frac{2-1}{16}\left[f(1)+2\left[f(1.125)+f(1.25)+f(1.375)+f(1.5)+f(1.625)+f(1.75)+f(1.875)\right]+f(2)\right]$$

$$= 2.070524501$$

Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
2.560851701			
	2.065062929		
2.189610122		2.062586615	
			2.062586821
	2.062741385		
2.094308569		2.062586818	
	2.062596478		
2.070524501			

$$\int_1^2 e^x \ln x \, dx = 2.062586821$$