Métodos abiertos

En los métodos que usan intervalos, la raíz se encuentra entre un límite inferior y otro superior.- Son métodos convergentes, ya que se acercan progresivamente a la raíz a medida que crece el número de iteraciones.-

Al contrario, los métodos abiertos se basan en fórmulas que requieren de un sólo valor de x o de un par de ellos que no necesariamente encierran la raíz.- A veces divergen o se alejan de la raíz a medida que aumentan las iteraciones.-

Iteración punto fijo.

Dada una función $f(x)=0$ y un valor inicial X_0.-
De la función $f(x)$ se despeja X para encontrar una nueva función de X llamada $g(x)$.-
Se puede hacer de dos maneras:

a) Sumar x a ambos términos de la ecuación
b) Despejar la x del termino de Primer grado de la ecuación.-

Evaluar convergencia.

2) Se deriva la función $g(x)$.- El valor inicial debe cumplir el criterio de convergencia

$|g'(x)| < 1$

3) Se obtiene una nueva aproximación evaluando la fórmula general del método $X_{n+1} = g(X_0)$

4) Evaluar la aproximación relativa

$|Ea| < Es.$

$$Ea = \left| \frac{X_{n+1} - X_n}{X_{n+1}} \right| 100\%$$

Si es falso, repetir.-
Si es verdadero, Fin X_{n+1} es la raíz.

Ejemplo

$f(x) = x^2 - 2x - 3$ con un $X_0 = 4$.

con 3 cifras significativas.

Primero igualamos a cero.

$f(x) = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$x^2 = 2x + 3$

$x = \sqrt{2x+3} \rightarrow g(x) = \sqrt{2x+3}$

Probar convergencia

$g(x) = (2x+3)^{1/2} \rightarrow g'(x) = 1/2\,(2x+3)^{-1/2}(2)$

$= (2x+3)^{-1/2}$

Evaluar $x_0 = 4$

$g'(4) = (11)^{-1/2} = 0.301511345 < 1$ converge

$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-3})$

$\varepsilon_s = 0.05\%$

Iteración	X	g(x)	Ea
1	4	3.31662479	20.6045378
2	3.31662479	3.10374767	6.85871231
3	3.10374767	3.0343855	2.28587211
4	3.0343855	3.01144002	0.76194365
5	3.01144002	3.00381092	0.2539807
6	3.00381092	3.00127004	0.08466022
7	3.00127004	3.00042332	0.02822007
8	3.00042332	3.0001411	0.00940669
9	3.0001411	3.00004703	0.00313556
10	3.00004703	3.00001568	0.00104519
11	3.00001568	3.00000523	0.0003484
12	3.00000523	3.00000174	0.00011613
13	3.00000174	3.00000058	3.8711×10^{-5}
14	3.00000058	3.00000019	1.2904×10^{-5}
15	3.00000019	3.00000006	4.3012×10^{-6}
16	3.00000006	3.00000002	1.4337×10^{-6}
17	3.00000002	3.00000001	4.7791×10^{-7}
18	3.00000001	3	1.593×10^{-7}

La raíz de $X = 3$ con $Ea = 1.593 \times 10^{-7}$

Practica de <u>Excel</u> y <u>matlab</u>.

El método de punto fijo no es un método eficiente podemos aproximar la única solución real de $x^3+x+1=0$.-

Para iniciar debe poner el problema como punto fijo.- Para ello se despeja "x".-

Hay varias posibilidades:

a) $X = -1 - x^3$

b) $x = \sqrt[3]{-1-x}$

c) $X = \dfrac{-1-x}{x^2}$

d) $3x^3 + x = 1+2x^2 \longrightarrow X = \dfrac{1+2x^3}{1+3x^2}$

Cuando esto sucede se comprueba convergencia

Por ejemplo para $X_0 = 6.5$

a) $x' = -3x^2$

$g'(0.5) = |-3(0.25)| = |-0.75| = 0.75 < 1$ converge.

b) $x' = \frac{d}{dx}(-1-x)^{1/3}$

$x' = \frac{1}{3}(-1-x)^{-2/3}(-1)$

$x' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}$

$g'(0.5) = -\frac{1}{3\sqrt{(0.5)^2}}$

$g'(0.5) = -0.66\overline{6}$

$|g'(0.5)| = 0.66\overline{6} < 1$ converge.

c) $x = \frac{1-x}{x^2}$

$x' = \frac{d}{dx}(1-x)(x^{-2})$

$= \frac{d}{dx}(x^{-2}) - \frac{d}{dx}(x^{-1})$

$= -2x^{-3} - (-1)x^{-2}$

$= -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2}$

$g'(0.5) = -\frac{2}{(0.5)^3} + \frac{1}{(0.5)^2}$

$g'(0.5) = -12.$

$|g'(0.5)| = 12 \nless 1$ Por lo tanto no Converge.

Practica

✓ Practica el método con la expresión del literal "a" y "b" .- Compara resultados. Además compruebe convergencia del literal d. con 3 cifras significativas.

✓ Use la iteración de punto fijo para encontrar una raíz de $\cos x = \operatorname{sen} x$ con $X_0 = 0$ y 3 cifras signitivas.