Ceros de polinomios.

Métodos directos.

Las raices de un polinomio son números tales que hacen un polinomio evaluado en la raíz de como resultado cero.-

Forma lineal: $P(x) = a_1 x + a_0$.

$$P(x) = 0$$

$$a_1 x + a_0 = 0 \rightarrow x = -\frac{a_0}{a_1}$$

Ejemplo. $P(x) = x + 3$. R// $x = -3$.

$$x + 3 = 0 \rightarrow x = -3.$$

Forma cuadrática: $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Analisis del discriminante $D = b^2 - 4ac$.

$D > 0 \Rightarrow$ 2 raices reales y diferentes.

$D < 0 \Rightarrow$ 2 raices complejas.

$D = 0 \rightarrow$ 2 raices reales e iguales.

Para encontrar las raices.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Resolver. $P(x) = x^2+2x-8$; $P(x)=0$.

$D = (2)^2-4(1)(-8$

$D = 36 > 0$

$x^2+2x-8=0$

$a=1$

$b=2$

$c=-8$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2-4(1)(-8)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-2 \pm 6}{2}$$

$$\frac{-2-6}{2} = -4$$

$$\frac{-2+6}{2} = 2$$

R// $x=-4$, $x=2$.

$P(x) = x^2+2x+1$; $P(x)=0$.

$D = 2^2-4(1)(1)$

$D = 0$.

$x^2+2x+1=0$

$a=1$

$b=2$

$c=1$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-2}{2} = -1$$

R// $x=1$

$P(x) = x^2+x+1$; $P(x)=0$

$D = 1^2-4(1)(1)$

$D = -3 < 0$

$x^2+x+1=0$

$a=1$

$b=1$

$c=1$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

R// $x = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$x = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

Ecuaciones bicuadradas $P(x) = ax^4 + bx^2 + c$

$P(x) = x^4 - 13x^2 + 36$; $P(x) = 0$

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$; $y = x^2$

$y^2 - 13y + 36 = 0$ $\quad D = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4(1)(36)$

$= 25 \; (>0)$

$a = 1$
$b = -13$
$c = 36$

$$y = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4(1)(36)}}{2(1)}$$

$$y = \frac{13 \pm 5}{2} \quad \frac{13-5}{2} = 4 \quad \frac{13+5}{2} = 9$$

$y = x^2 \rightarrow 4 = x^2 \rightarrow \pm 2 = x$

$9 = x^2 \rightarrow \pm 3 = x$

R// $x = -2$, $x = 2$, $x = -3$, $x = 3$

Ecuaciones mayores que 2 no bicuadrada

$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$; Se necesita utilizar el método de la división sintetica

Divisores de 6 $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$.

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -6 & 11 & -6 & \\ & 1 & -5 & 6 & 1 \\ \hline 1 & -5 & 6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$P(x) = (x-1)(x^2-5x+6)$$
$$= (x-1)(x-2)(x-3)$$

$P(x) = 0$.

$(x-1)(x-2)(x-3) = 0$

$x = 1 \quad x = 2 \quad x = 3$ R/

Existe un método especial para ecuaciones de grado tres, conocido por Tartaglia-Cardano. Para ello leer el documento de método de Tartaglia

Una ecuación cúbica con coeficientes reales.- Entonces:

1) Si $\Delta = 0$ todas sus raíces son reales y al menos 2 de ellas serán iguales.-

2) Si $\Delta > 0$ la ecuación tiene unarraíz real y dos raíces imaginarias.

3) Si $\Delta < 0$ la ecuación tiene tres raíces reales simples.-

Para una ecuación cúbica de la forma.

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

debemos de reescribirlo como $y^3 + py + q = 0$.

Con:

$$p = \frac{3b - a^2}{3} \qquad q = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27}$$

el discriminante se determina.

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

Si $\Delta = 0$ las 2 posibilidades son:

1) Si $p = q = 0$, entonces tiene una ráiz triple con $x = -\frac{a}{3}$

2) Si $pq \neq 0$ entonces la ecuación tiene una raíz doble y una raíz simple dadas respectivamente por

$$x = -\frac{3q}{2p} - \frac{a}{3} \wedge x = -\frac{4p^2}{9q} - \frac{a}{3}$$

Si $\Delta > 0$ una raíz real viene dada por.

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} - \frac{a}{3}.$$

Las otras dos son imaginarias

$$x = -\frac{u+v}{2} - \frac{a}{3} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)i$$

donde

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$$

Si $\Delta<0$ la ecuación tiene tres raices reales simples que viene dada por:

$$x = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\theta+2k\pi}{3} - \frac{a}{3}$$ donde

$k=0,1,2$ y el ángulo $0<\theta<\pi$ está determinado por

$$\cos\theta = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Ejercicios.

1) $x^3+x^2+2=0.$

2) $6x^3+7x^2-9x+2=0$

3) $x^3+2x^2-5x+1=0$

4) $x^3+2x^2-5x+1=0.$

5) $25x^3+15x^2-9x+1=0$

6) $x^3-5x^2+3x-71=0$

7) $x^3-3x^2+3x-1=0$

$X^3+X^2+2=0 \Rightarrow X^3+X^2+0X+2=0$

$a=1 \quad b=0 \quad c=2$

$$p=\frac{3b-a^2}{3}=\frac{3(0)-1}{3}=\frac{-1}{3}$$

$$q=\frac{2a^3-9ab+27c}{27}=\frac{2(1)^3-\cancel{9(1)(0)}^{\,0}+27(2)}{27}=\frac{56}{27}$$

La ecuación resultante $Y^3-\frac{1}{3}Y+\frac{56}{27}=0$

El discriminante

$$\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

$$=\left(\frac{\frac{56}{27}}{2}\right)^2+\left(\frac{-\frac{1}{3}}{3}\right)^3$$

$$=\frac{784}{729}-\frac{1}{729}$$

$$=\frac{783}{729}$$

Como $\Delta>0$ la ecuación tiene una raíz real y dos raices imaginarias.

$$x = \sqrt[3]{-\frac{28}{27}+\sqrt{\frac{783}{729}}} + \sqrt[3]{-\frac{28}{27}-\sqrt{\frac{783}{729}}} - \frac{1}{3}$$

$$x = -0.087135592 - 1.27515184 4 - \frac{1}{3}$$

$$x = -1.695620769$$

Las imaginarias:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{28}{27}+\sqrt{\frac{783}{729}}} \qquad v = \sqrt[3]{-\frac{28}{27}-\sqrt{\frac{783}{729}}}$$

$$x = -\frac{\sqrt[3]{-\frac{28}{27}+\sqrt{\frac{783}{729}}} + \sqrt[3]{-\frac{28}{27}-\sqrt{\frac{783}{729}}}}{2} - \frac{1}{3} \pm$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{-\frac{28}{27}+\sqrt{\frac{783}{729}}} - \sqrt[3]{-\frac{28}{27}-\sqrt{\frac{783}{729}}}\right) i$$

$$6x^3+7x^2-9x+2=0$$

$$\frac{\boxed{6}x^3+7x^2-9x+2}{6}=0$$

$$x^3+\frac{7}{6}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{3}=0$$

$$a=\frac{7}{6} \quad b=-\frac{3}{2} \quad c=\frac{1}{3}.$$

$$P=\frac{3\left(-\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{7}{6}\right)^2}{3}=-\frac{211}{108}$$

$$q=\frac{2a^3-9ab+27c}{27}$$

$$=\frac{2\left(\frac{7}{6}\right)^3-\cancel{9}^{3}\left(\frac{7}{\cancel{6}_{2}}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)+27\left(\frac{1}{3}\right)}{27}$$

$$=\frac{\frac{343}{108}+\frac{63}{4}+9}{27}$$

$$q=\frac{754}{729}$$

$$\Delta = \left(\frac{\frac{75.4}{729}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\frac{211}{108}}{3}\right)^3$$

$$= 0.2677440788 - 0.276192788$$

$$= -0.008751999$$

Como $\Delta < 0$ la ecuación tiene tres raices reales simples.

$$X = 2\sqrt{-\frac{\left(-\frac{211}{108}\right)}{3}} \cos \frac{\theta + 2K\pi}{3} - \frac{a}{3}$$

donde:

$$\cos\theta = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{-\left(\frac{P}{3}\right)^3}}$$

$$\cos\theta = \frac{-\frac{\frac{754}{729}}{2}}{\sqrt{-\left(\frac{-\frac{211}{108}}{3}\right)^3}}$$

$$\cos\theta = \frac{-\frac{377}{729}}{0.525540473}$$

$$\cos\theta = -0.984028448$$

$$\theta = 2.962627583$$

Las raices son

$K = 0$

$$X = 1.613982116 \cos\frac{\theta + 2K\pi}{3} - \frac{7}{18}$$

$$X = 1.613982116 \cos\frac{2.962627583}{3} - \frac{7}{18}$$

$$\underline{X \simeq 0.499999\overline{9}}$$

$K = 1$

$$X = 1.613982116 \cos\frac{2.962627583 + 2\pi}{3} - \frac{7}{18}$$

$$\underline{X = -2}$$

$K = 2$

$$X = 1.613982116 \cos\frac{2.962627583 + 4\pi}{3} - \frac{7}{18}$$

$$X = 0.333\overline{3}$$

$$x^3-3x^2+3x-1=0.$$

$a=-3 \quad b=3 \; ; \; c=-1$

$$P=\frac{3b-a^2}{3}=\frac{3(3)-(-3)^2}{3}=\frac{9-9}{3}=0.$$

$$q=\frac{2a^3-9ab+27c}{27}$$

$$q=\frac{2(-3)^3-9(-3)(3)+27(-1)}{27}$$

$$q=\frac{-54+81-27}{27}=0.$$

$$\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{P}{3}\right)^3.$$

$$=(0)^2+(0)^3$$

$$=0$$

Como $\Delta=0$ todas sus raíces son reales.

Las raíces $x=-\frac{a}{3}=-\frac{-3}{3}=1$ R//