DIFERENCIACION NUMERICA

La derivada de una función tiene muchas aplicaciones, entre las cuáles esta la determinación de la velocidad instantánea de una partícula o móvil a partir de su función de posición. Este proceso es en ocasiones algo muy sencillo cuando se cuenta con dicha función, pero cuando se requiere solucionar el mismo problema con un conjunto de datos discretos y no con su función, el procedimiento no puede ser llevado de igual manera, es decir, el calculo no nos da una solución directa, por lo tanto se debe recurrir a otro tipo de análisis.

En la unidad anterior se estudio la aproximación polinomial para un conjunto de datos tabulados con base en esos conceptos. En esta unidad se estudiara la aproximación polinomial a partir de algunos valores de una función f, y dando ciertos puntos se puede determinar su derivada en un punto dado.

La derivada de una función f en x_0, esta definido de la siguiente manera:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Para valores pequeños de h, podemos aproximar la derivada de f en x_0 de la siguiente manera:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad h \neq 0 \tag{4.1}$$

Notaremos la aproximación a la derivada de una función f como f'

Esta formula aunque sencilla no tiene un comportamiento estable, ya que para funciones lineales puede llegar a ser exacta, no siendo así para funciones más generales. Pero sin duda alguna, es un buen punto de partida para el calculo de la derivada de una función, además hay que considerar que en algunos casos es la única opción con que se cuenta.

Para estimar el valor del error asociado a la ecuación (4.1), nos valemos del polinomio e Taylor de primer grado cuya estructura es la siguiente:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2 \qquad (4.2)$$

Si se toma $x=x_0+h$,entonces $h=x-x_0$ y se reemplaza en el polinomio (4.2), se tiene entonces que:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(\xi)}{2}h^2, \quad x_0<\xi<x_0+h$$

Despejando *f'(x0),* se obtiene

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-Oh \qquad (4.3)$$

Donde $O=\dfrac{f''(\xi)}{2}$, es el error de truncamiento.

Si $h>0$, a la formula (4.3) se le denomina la *primera diferencia finita hacia delante* o *diferencia progresiva* También podemos obtener la *diferencia finita hacia atrás* o *diferencia regresiva* si $h<0$

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}+Oh \qquad (4.4)$$

Ahora bien, si sumamos las ecuaciones (4.3) y (4.4), obtendremos la *diferencia finita centrada* de la siguiente manera:

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}+Oh^2 \qquad (4.5)$$

Podemos observar que el error de la ecuación (4.5) es del orden h^2, a diferencia de las ecuaciones (4.3) y (4.4) que tienen un error del orden *h*, es decir que la ecuación (4.5) converge rápidamente a cero, pero para ello se debe contar con 3 valores de *f(x)* a diferencia de (4.3) y (4.4) que solo requiere de dos puntos de la función *f(x)*.

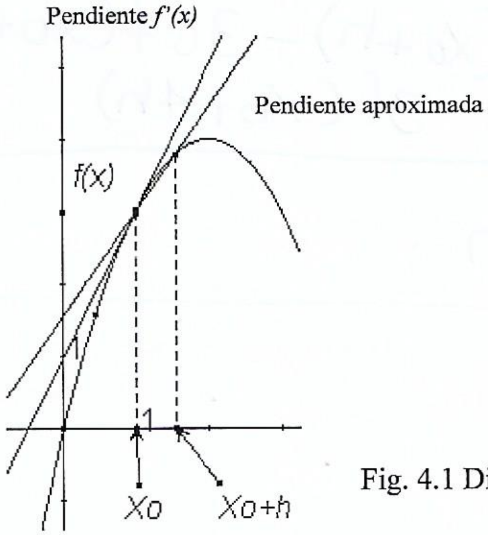

Fig. 4.1 Diferencia Finita Progresiva

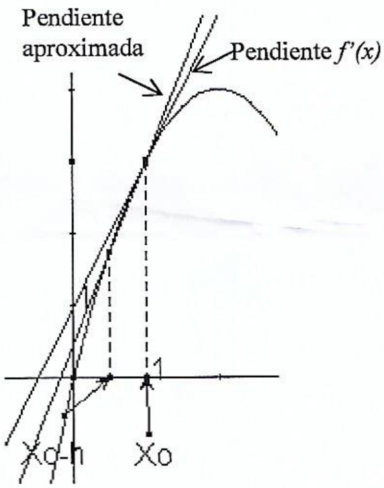

Fig. 4.2 Diferencia Finita Regresiva

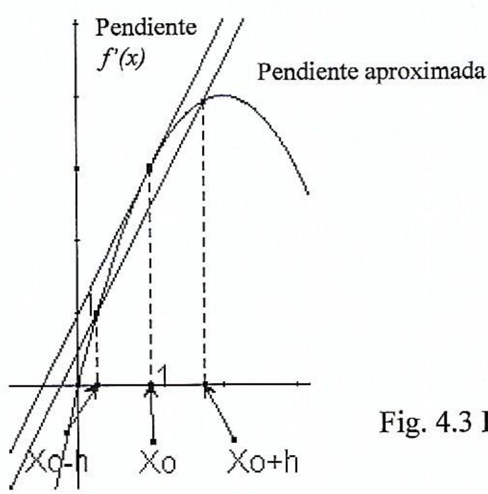

Fig. 4.3 Diferencia Finita Centrada

De manera análoga a la interpolación polinomial, el uso de mas puntos en la evaluación de la derivada producirá mayor exactitud; aunque esto implica mayor cantidad de evaluaciones funcionales y aumento de error de redondeo.

Entre las formulas mas comunes están la de tres puntos y la de cinco puntos. A continuación se mostrara la deducción de la formula de tres puntos a partir del polinomio de Taylor de segundo grado.

Se sabe que:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2}h^2+\frac{f'''(\xi)}{6}h^3$$

Despejando $f'(x_0)$ se tiene

$$f'(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{h}-\frac{f''(x_0)}{2}h-\frac{f'''(\xi)}{6}h^2 \qquad (4.6)$$

Como se quiere determinar la formula de los tres puntos, se toma

$X0$,

$x_1 = x_0 + h$,

$x_2 = x_0+2h$

y usando la ecuación (4.6) $x = x_1$

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\frac{f''(x_0)}{2}h-\frac{f'''(\xi)}{6}h^2$$

Para determinar $f''(x_0)$ en términos de x0, x1 y x2, se realiza los polinomios de Taylor de segundo grado para $x_1 = x_0 + h$ y para $x_2 = x_0+2h$

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2}h^2 \qquad (4.7)$$

$$f(x_0+2h)=f(x_0)+f'(x_0)2h+\frac{f''(x_0)}{2}(2h)^2 \qquad (4.8)$$

multiplicando a (4.7) por –2 y sumándoselo a (4.8) se tiene:

$$f(x_0+2h)=f(x_0)+f'(x_0)2h+2f''(x_0)h^2$$
$$-2f(x_0+h)=-2f(x_0)-f'(x_0)2h+f''(x_0)h^2$$

$$f(x_0+2h)-2f(x_0+h)=-f(x_0)+f''(x_0)h^2 \qquad (4.9)$$

Despejando $f''(x_0)$ de la ecuación (4.9) se tiene:

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0) - 2f(x_0+h) + f(x_0+2h)}{h^2} + Oh \tag{4.10}$$

Reemplazando (4.10) en (4.7) se obtiene

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0) - 2f(x_0+h) + f(x_0+2h)}{2h^2}h + Oh^2$$

$$f'(x_0) = \frac{2f(x_0+h) - 2f(x_0) - f(x_0) + 2f(x_0+h) - f(x_0+2h)}{2h} + Oh^2$$

$$f'(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)}{2h} + Oh^2 \tag{4.11}$$

La ecuación (4.11) es conocida como la ***formula de los tres puntos progresiva***. De manera similar es posible desarrollar las formulas de los tres puntos regresivas y centradas, así como las de los cinco puntos y derivadas de orden superior.