Clase 30/03/2020. Analisis numérico.

Error del polinomio de Lagrange.

Sea $f \in C^{n+1}[a,b]$; $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.- Entonces, para ~~cada~~ $n+1$ puntos distintos del intervalo $[a,b]$ y P_n el polinomio de interpolación de f en $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ existe:

$$|f(x) - P_n(x)| = \frac{f^{n+1}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

que representa el error absoluto.-

Ejemplo 1:

Determine el polinomio de Lagrange. a) 2 puntos. b) 3 puntos c) 4 puntos. d) Interpole la temperatura de ebullición de la acetona a la presión de 2 atm.

X (°C)	56.5	113	181	214.5
Y (atm)	1	5	20	40.

a) 2 puntos (grado 1)

$$P_1(x) = f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f(x_1)\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$$P_1(x) = 1\left(\frac{x-113}{56.5-113}\right) + 5\left(\frac{x-56.5}{113-56.5}\right)$$

$$= -\frac{1}{56.5}(x-113) + \frac{5}{56.5}(x-56.5)$$

$$P_1(x) = -\frac{1}{56.5}x + 2 + \frac{5}{56.5}x - 5$$

$$P_1(x) = \frac{8}{113}x - 3 \;/R//$$

b) tres puntos (grado dos)

$$P_2(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2} +$$

$$f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$P_2(x) = 1\left(\frac{(x-113)(x-181)}{(56.5-113)(56.5-181)}\right) + 5\left(\frac{(x-56.5)(x-181)}{(113-56.5)(113-181)}\right)$$

$$+20\left(\frac{(x-56.5)(x-113)}{(181-56.5)(181-113)}\right)$$

$$= \left(\frac{x^2-294x+20453}{7034.25}\right) + 5\left(\frac{x^2-237.5x+10226.5}{-3842}\right)$$

$$+20\left(\frac{x^2-169.5x+6384.5}{8466}\right)$$

$$= \frac{1}{7034.25}x^2 - \frac{294}{7034.25}x + \frac{20453}{7034.5} - \frac{5}{3842}x^2 + \frac{2375}{7684}x$$

68 $= \frac{905}{\cancel{68}\,68} + \frac{10}{4233}x^2 - \frac{1685}{4233}x + \frac{127690}{8466}$

$$P_2(x) = 1.20314678 8 \times 10^{-3} x^2 - 0.1307745297x + 4.681387334$$

c) 4 puntos (cúbica).

$$P_3(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$+ f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f(x_3)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$P_3(x) = 1\left(\frac{(x-113)(x-181)(x-214.5)}{(56.5-113)(56.5-181)(56.5-214.5)}\right) + 5\left(\frac{(x-56.5)(x-181)(x-214.5)}{(113-56.5)(113-181)(113-214.5)}\right)$$

$$+ 20\left(\frac{(x-56.5)(x-113)(x-214.5)}{(181-56.5)(181-113)(181-214.5)}\right) + 40\left(\frac{(x-56.5)(x-113)(x-181)}{(214.5-56.5)(214.5-113)(214.5-181)}\right)$$

$$P_3(x) = 1\left(\frac{x^3 - 508.5x^2 + 83516x - 4387168.5}{-1111411.5}\right) +$$

$$5\left(\frac{x^3 - 452x^2 + 61170.25x - 2193584.25}{389963}\right) +$$

$$20\left(\frac{x^3 - 383x^2 + 42742.25x - 1369475.25}{-283611}\right) +$$

$$40\left(\frac{x^3 - 350.5x^2 + 37064x - 1155594.5}{537239.5}\right)$$

$$P_3(x) = -\frac{2}{2222823}x^3 + \frac{3}{6557}x^2 - 0.0751440848x$$

$$+ 3.947384475 + \frac{5}{389963}x^3 - \frac{20}{3451}x^2 + 0.784308$$

$$3831x - 28.12554332 - \frac{20}{283611}x^3 + 0.02700$$

$$882547x^2 - 3.014146137x + 96.57419846$$

$$+ \frac{80}{1074479}x^3 - 0.0260963685 7x^2 + 0.2759668477x$$

$$-86.03942934$$

$$P_3(x) = 6.857342967 \times 10^{-4}x^3 - 4.425438409 \times 10^{-3}x^2 - 2.0290$$

$$14991x - 13.64338973$$

RH

d). $x = 2$ $\quad P_1(x) = \frac{8}{113}x - 3$.

$P_1(2) = \frac{8}{113}(2) - 3 = -\frac{323}{113} = -2.85840708$.

$P_2(x) = 1.203146788\times10^{-3}x^2 - 0.1307745297x$

$+ 4.681387334$

$P_2(2) = 4.424650862$

$P_3(x) = 6.857342967\times10^{-4}x^3 - 4.425438409\times10^{-3}x^2$

$- 2.029014991x - 13.64338973$

$P_3(2) = -17.71363559$.

EJEMPLO 2.

Sea $f(x) = e^x$ con $x \in [0,2]$ determine el polinomio de Lagrange de grado dos, determine el valor de $P_2(0.25)$, Además calcular el error porcentual y el teorico.

X	0	0.5	1
Y	1	$e^{0.5}$	e

$$P_2(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$+ f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$P_2(x) = 1\left(\frac{(x-0.5)(x-1)}{(0-0.5)(0-1)}\right) + e^{0.5}\left(\frac{(x-0)(x-1)}{(0.5-0)(0.5-1)}\right)$$

$$+ e\left(\frac{(x-0)(x-0.5)}{(1-0)(1-0.5)}\right)$$

$$P_2(x) = \frac{x^2 - 1.5x + 0.5}{0.5} + e^{0.5}\left(\frac{x^2 - x}{-0.25}\right) + e\left(\frac{x^2 - 0.5x}{0.5}\right)$$

$$= 2x^2 - 3x + 1 + \frac{e^{0.5}}{-0.25}x^2 + \frac{e^{0.5}}{0.25}x + \frac{e}{0.5}x^2 - ex$$

$$P_2(x) = \left(2 - \frac{e^{0.5}}{0.25} + \frac{e}{0.5}\right)x^2 + \left(-3 + \frac{e^{0.5}}{0.25} - e\right)x + 1$$ R//

$$P_2(0.25) = \left(2 - \frac{e^{0.5}}{0.25} + \frac{e}{0.5}\right)(0.25)^2 + \left(-3 + \frac{e^{0.5}}{0.25} - e\right)(0.25) + 1$$

$$P_2(0.25) = 1.271755724$$ R//

— o — o — o — o — o —

Valor real: $e^{0.25}$

$$V_v = e^{0.25}$$

$$E_v = e^{0.25} - 1.271755724 = 0.01226969269$$

$$E_r = \frac{0.01226969269}{e^{0.25}} = 9.555646273 \times 10^{-3}$$

$Ep = 9.55564\,6273 \times 10^{-3} (100)$

$Ep = 0.955564\,6273\%$ R//

$$\text{Error teórico} = \frac{f^{n+1}(\varepsilon_x)}{(n+1)!} (X-X_0)(X-X_1)(X-X_2)\cdots(X-X_n)$$

$$= \frac{e^1}{3!} (0.25-0)(0.25-1)(0.25-2)$$

$$= 0.148656\,0375.$$

EJERCICIOS DE CLASE

1. Construir el polinomio interpolante de Lagrange P. que concuerda con $f(x) = \cos x$ en los puntos $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$, π.- Luego Calcular $P(\frac{\pi}{4})$ y calcular el error relativo y teórico.-
2. Construir el polinomio interpolante de Lagrange P. que concuerda con $f(x) = e^x$ en los puntos $-2, -1, 0, 1, 2$.- Luego Calcular $P(-0.5)$ y calcular el error relativo y teórico.-
3. Use los polinomios interpolantes de Lagrange de grados unos, dos y tres más apropiados, para aproximar $f(2.5)$, si $f(2) = 0.5103757$

Si $f(2.2)=0.5207843$, $f(2.4)=0.5104147$
$f(2.6)=0.4813306$, $f(2.8)=0.4359160$.

④ Calcular el polinomio interpolador de la función $f(x)=\frac{1}{x}$ en los nodos $\{1, 2, 3\}$.- Luego calcular $f(0.7)$ y calcular el error porcentual y teórico.

Polinomio de Newton.

Se puede ajustar a un polinomio de n-ésimo grado a "n+1" datos.- El polinomio de n-ésimo grado es:

$$f_n(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)(x-x_1)+\dots+b_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}).$$

Los puntos asociados con datos se utilizan para evaluar los coeficientes $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$.- Para un polinomio de n-ésimo grado se requiere n+1 puntos: $[x_0, f(x_0)], [x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)], \dots, [x_n, f(x_n)]$ donde $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$, se puede determinar por 2 métodos:

a) Forma recursiva.

b) Diferencias divididas.

a) Forma recursiva.

$b_0 = f(x_0)$.

$$b_1 = \frac{f(x_1) - b_0}{x_1 - x_0}.$$

$$b_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - b_1}{x_2 - x_0}.$$

$$b_3 = \frac{\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} - b_2}{x_3 - x_0}$$

$$b_4 = \frac{\frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3} - b_3}{x_4 - x_0}.$$

$$\vdots$$

$$b_n = \frac{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} - b_{n-1}}{x_n - x_0}$$

Por diferencias divididas

Los coeficientes $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ se determinan:

$$b_0 = f(X_0)$$

$$b_1 = f[X_1, X_0]$$

$$b_2 = f[X_2, X_1, X_0]$$

$$b_3 = f[X_3, X_2, X_1, X_0]$$

$$\vdots$$

$$b_n = f[X_n, X_{n-1}, \ldots, X_1, X_0]$$

La primer diferencia dividida finita en forma general se representa por:

$$f[X_i, X_j] = \frac{f(X_i) - f(X_j)}{X_i - X_j}$$

La segunda diferencia dividida se representa:

$$f[X_i, X_j, X_k] = \frac{f[X_i, X_j] - f[X_j - X_k]}{X_i - X_k}$$