Diferencias Divididas

Diferencias Divididas

Los polinomios interpolantes generan aproximaciones polinómicas de grado cada vez mayor en un punto específico.

Las diferencias divididas generan sucesivamente los polinomios.

Suponiendo que $P_n(x)$ es el n-ésimo polinomio de Lagrange que concuerda con la función f en los números distintos $x_0, x_1, ..., x_n,$ las diferencias divididas de f respecto a $x_0, x_1, ..., x_n,$ se usan para expresar $P_n(x)$ en la forma:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + ...$$
$$+ a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1});$$

para las constantes apropiadas $a_0, a_1, ..., a_n.$

Para determinar a_0, se evalua $P_n(x_0) = f(x_0)$, así:

$$P_n(x_0) = a_0 + a_1(x_0 - x_0) + a_2(x_0 - x_0)(x_0 - x_1) + \ldots..$$
$$+ a_n(x_0 - x_0)(x_0 - x_1)\ldots(x_0 - x_{n-1});$$

$P_n(x_0) = a_0$, así que $a_0 = f(x_0)$.

Para determinar a_1, se evalua $P_n(x_1) = f(x_1)$, así:

$$P_n(x_1) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) + a_2(x_1 - x_0)(x_1 - x_1) + \ldots..$$
$$+ a_n(x_1 - x_0)(x_1 - x_1)\ldots(x_1 - x_{n-1});$$

$$P_n(x_1) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1)$$

y despejando a_1,

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

NOTACION DE DIFERENCIAS DIVIDIDAS

(Similar a la notación de Δ^2 de Aitken)

Diferencia Dividida Cero

$$f\left[x_i\right] = f(x_i)$$

Primera Diferencia Dividida

$$f\left[x_i, x_{i+1}\right] = \frac{f\left[x_{i+1}\right] - f\left[x_i\right]}{x_{i+1} - x_i}$$

Segunda Diferencia Dividida

$$f\left[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\right] = \frac{f\left[x_{i+1}, x_{i+2}\right] - f\left[x_i, x_{i+1}\right]}{x_{i+2} - x_i}$$

k-ésima Diferencia Dividida

$$f\left[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}\right] = \frac{f\left[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}\right] - f\left[x_i, x_{i+1}, \ldots, , x_{i+k-1}\right]}{x_{i+k} - x_i}$$

Usando la notación de diferencias divididas se puede expresar

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$
$$+ a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1});$$

así,

$$P_n(x) = f\left[x_0\right] + f\left[x_0, x_1\right](x - x_0) + f\left[x_0, x_1, x_2\right](x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ \dots + f\left[x_0, x_1, \dots, x_n\right](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1});$$

donde,

$$a_0 = f\left[x_0\right],$$

$$a_1 = f\left[x_0, x_1\right],$$

$$a_2 = f\left[x_0, x_1, x_2\right],$$

y en general,

$$a_k = f\left[x_0, x_1, \dots, x_k\right], \text{ para cada } k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Por lo tanto, se puede reescribir $P_n(x)$, así:

$$P_n(x) = f\left[x_0\right] + \sum_{k=1}^{n} f\left[x_0, x_1, ..., x_k\right](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1});$$

la cual se conoce como **fórmula de diferencias divididas interpolantes de Newton.**

El esquema de determinación de las diferencias divididas es el siguiente:

Esquema de determinación de las Diferencias Divididas

		Cero	Primera	Segunda	Tercera	Cuarta
i	x_i	$f\left[x_i\right]$	$f\left[x_{i-1}, x_i\right]$	$f\left[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\right]$	$f\left[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\right]$	$f\left[x_{i-4}, x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\right]$
0	x_0	$f\left[x_0\right]$				
			$f\left[x_0, x_1\right]$			
1	x_1	$f\left[x_1\right]$		$f\left[x_0, x_1, x_2\right]$		
			$f\left[x_1, x_2\right]$		$f\left[x_0, x_1, x_2, x_3\right]$	
2	x_2	$f\left[x_2\right]$		$f\left[x_1, x_2, x_3\right]$		$f\left[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\right]$
			$f\left[x_2, x_3\right]$		$f\left[x_1, x_2, x_3, x_4\right]$	
3	x_3	$f\left[x_3\right]$		$f\left[x_2, x_3, x_4\right]$		
			$f\left[x_3, x_4\right]$			
4	x_4	$f\left[x_4\right]$				