Analisis numérico

Determinar el polinomio de Newton de $f(x) = e^x$ con los valores de $x = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	1	e	e^2	e^3	e^4	e^5	e^6

bo

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
0	1 (b_0)						
1	e	1.7182281828					
2	e^2	4.67077427	1.476246221				
3	e^3	12.69648082	4.012853275	0.8455356847			
4	e^4	34.51261311	10.90806615	2.298404292	0.3632171518		
5	e^5	93.81500907	29.65119798	6.24771061	0.9873265795	0.1248218855	
6	e^6	255.0156344	80.60031267	16.98303823	2.683831905	0.3393010651	0.03574652993

Parte literal

$b_1 \to (x-x_0) = x - 0 = x$

$b_2 \to (x-x_0)(x-x_1) = x(x-1) = x^2 - x$

$b_3 \to (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = (x^2-x)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$

$b_4 \to (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = (x^3-3x^2+2x)(x-3)$

$= x^4 - 3x^3 - 3x^3 + 9x^2 + 2x^2 - 6x$

$= x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$

Pag 2.

$b_5 \to (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) = (x^4-6x^3+11x^2-6x)(x-4)$

$= x^5-4x^4-6x^4+24x^3+11x^3-44x^2$
$-6x^2+24x$

$= x^5-10x^4+35x^3-50x^2+24x$

$b_6 \to (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)$

$\to (x^5-10x^4+35x^3-50x^2+24x)(x-5) = x^6-10x^5+35x^4-50x^3+24x^2$
$-5x^5+50x^4-175x^3+250x^2-$
$120x$

Al formar el polinomio nos quedaría:

$P_5(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + b_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$
$+ b_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) + b_5(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$

$P_5(x) = 1 + 1.718281828x + 1.476246221(x^2-x) + 0.845535684 7($
$x^3-3x^2+2x) + 0.3632171518(x^4-6x^3+11x^2-6x) +$
$0.1248218855(x^5-10x^4+35x^3-50x^2+24x) + 0.03574652993$
$(x^6-15x^5+85x^4-225x^3+274x^2+120x)$

$P_5(x) = 1 + 1.718281828x + 1.476246221x^2 - 1.476246221x + 0.8455$
$356847x^3 - 2.536607054x^2 + 1.691071369x + 0.3632171518x^4$
$-2.179302911x^3 + 3.995388667x^2 - 2.179302911x +$
$0.1248218855x^5 - 1.248218855x^4 + 4.368765993x^3 +$
$6.241094275x^2 + 2.995725252x + 0.03574652993x^6 - 0.536197949x^5 +$
$3.038455044x^4 - 9.115365132x^3 + 9.79549201x^2 + 4.289583592x$

$$P_5(x) = 1 + 7.039112909x + 18.97161413x^2 - 6.086366365x^3$$
$$+ 2.153453341x^4 - 0.4113760635x^5 + 0.0357452993$$

Para calcular el error teórico del polinomio de Newton es la misma que la del polinomio de Lagrange.-

$$E = \frac{f^{(n+1)}(\mathcal{E}x)}{(n+1)!}(X-X_0)(X-X_1)\ldots(X-X_n).$$

Hago una coreccion $f^{(n+1)}(\mathcal{E}x) \rightarrow$ es la derivada de la función $f(x)$ la cual se indica.-

Ejemplo

Se quiere aproximar la función $f(x) = \cos(2x)$ en el intervalo [1,2] utilizando interporlación polinómica con 3 puntos dados por el vector $X = \{1.3, 1.2, 1.9\}$.- ¿Cuál es el error teórico que se cometería en el punto 1.5?

X	1.3	1.2	1.9
Y	-0.8568887534	-0.737393 7155	-0.7909677119

El polinomio a formarse es de grado dos $\rightarrow n+1 = 3 \Rightarrow$ esto nos lleva a la tercera derivada.

$f(x) = \cos 2x$

$f'(x) = -2\,\mathrm{sen}(2x)$

$f''(x) = -4\cos(2x)$

$f'''(x) = 8\,\mathrm{sen}(2x).$

$$E = \frac{8\,\mathrm{sen}(2)}{3!}(1.5-1.3)(1.5-1.2)(1.5-1.9)$$

$$\boxed{E = 0.02909751766}$$

Si $f(1.5) = \cos(2(1.5)) = -0.9899924966$

El polinomio de Newton quedaría

1.3	-0.8568887534		
1.2	-0.7373937155	-1.194950379	
1.9	-0.7909677119	-0.07653428057	1.864026831

$$P_3(x) = -0.8568887534 - 1.194950379(x-1.3) + 1.864026831(x-1.3)(x-1.2)$$

$$= -0.8568887534 - 1.194950379x + 1.555343549 + 1.864026831(x^2 - 2.5x + 1.56)$$

$$= 0.6984547959 - 1.194950379x + 1.864026831x^2 - 4.660067078x + 2.907881856$$

$$P_3(x) = 1.864026831x^2 - 5.855017457x + 3.606336652$$

$$P_3(1.5) = 1.864026831(1.5)^2 - 5.855017457(1.5) + 3.6063366$$
$$= -0.9821291638$$

$$\text{Error real} = |f(1.5) - P(1.5)|$$
$$= |-0.9899924966 + 0.9821291638|$$
$$= 7.86333285 \times 10^{-3}$$

Polinomio de Hermite

Se relaciona con las diferencias divididas, con los datos prescritos de la función y sus derivadas.-

Tabla de diferencias divididas para Hermite.

X_0	$f(X_0)$			
X_0	$f(X_0)$	$f'[X_0, X_0]$		
X_1	$f(X_1)$	$f[X_0, X_1]$	$F[X_0, X_0, X_1]$	
X_1	$f(X_1)$	$f'[X_1, X_1]$	$F[X_0, X_1, X_1]$	$F[X_0, X_0, X_1, X_1]$

Donde el polinomio de Hermite de una función f en $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$ es:

$$P(X) = F[X_0] + f'[X_0, X_0](X - X_0) + F[X_0, X_0, X_1](X - X_0)^2(X - X_1)$$
$$+ \ldots + F[X_0, X_0, X_1, X_1, \ldots, X_n, X_n](X - X_0)^2(X - X_1)^2 \cdots (X - X_n)$$

En el caso que una abscisa se repita X_n en K veces, entonces:

$$F[X_1, X_1, \ldots X_n] = \frac{f_p^{K}}{K!}$$

De forma general, y especifico significa:

$X_0 \quad F(X_0)$

$X_0 \quad F(X_0) \quad F'[X_0, X_0] = \frac{f'(x_0)}{1!}$

$X_0 \quad F(X_0) \quad F'[X_0, X_0] \longrightarrow F''[X_0, X_0, X_0] = \frac{f''(x_0)}{2!}$

$X_1 \quad F(X_1) \quad F[X_0, X_1] \longrightarrow F[X_0, X_0, X_1] \quad \ldots$

$X_1 \quad F(X_1) \quad F'[X_1, X_1] = \frac{f'(x_1)}{1!} \longrightarrow F[X_0, X_1, X_1]$

$X_1 \quad F(X_1) \quad F'[X_1, X_1] \longrightarrow F''[X_1, X_1, X_1] = \frac{f''(x_1)}{2!}$

$X_1 \quad F(X_1) \quad F'[X_1, X_1] \longrightarrow F''[X_1, X_1, X_1]$

$X_2 \quad F(X_2) \quad F'[X_1, X_2] \longrightarrow F[X_1, X_1, X_2] \quad \ldots$

$X_2 \quad F(X_2) \quad F'[X_2, X_2] = \frac{f'(x_2)}{1!} \longrightarrow F[X_1, X_2, X_2]$

Las diferencias divididas de Hermite queden como en la siguiente página y aparece las siguientes derivadas:

		Orden 1	Orden 2	Orden 3	Orden 4	Orden 5
x_0	$f(x_0)$					
x_0	$f(x_0)$	$F'[x_0,x_0]$				
x_0	$f(x_0)$	$F'[x_0,x_0]$	$F''[x_0,x_0,x_0]$			
x_1	$f(x_1)$	$F[x_0,x_1]$	$F[x_0,x_0,x_1]$	$F[x_0,x_0,x_0,x_1]$		
x_1	$f(x_1)$	$F'[x_1,x_1]$	$F[x_0,x_1,x_1]$	$F[x_0,x_0,x_1,x_1]$	$F[x_0,x_0,x_0,x_1,x_1]$	
x_1	$f(x_1)$	$F'[x_1,x_1]$	$F''[x_1,x_1,x_1]$	$F[x_0,x_1,x_1,x_1]$	$F[x_0,x_0,x_1,x_1,x_1]$	$F[x_0,x_0,x_0,x_1,x_1,x_1]$
x_1	$f(x_1)$	$F'[x_1,x_1]$	$F''[x_1,x_1,x_1]$	$F'''[x_1,x_1,x_1,x_1]$	$F[x_0,x_1,x_1,x_1,x_1]$	$F[x_0,x_0,x_1,x_1,x_1,x_1]$
x_2	$f(x_2)$	$F[x_1,x_2]$	$F[x_1,x_1,x_2]$	$F[x_1,x_1,x_1,x_2]$	$F[x_1,x_1,x_1,x_1,x_2]$	$F[x_0,x_1,x_1,x_1,x_1,x_2]$
x_2	$f(x_2)$	$F'[x_2,x_2]$	$F[x_1,x_2,x_2]$	$F[x_1,x_1,x_2,x_2]$	$F[x_1,x_1,x_1,x_2,x_2]$	$F[x_1,x_1,x_1,x_1,x_2,x_2]$

Orden 6	Orden 7	Orden 8
$F[x_0,x_0,x_0,x_1,x_1,x_1,x_1]$		
$F[x_0,x_0,x_1,x_1,x_1,x_1,x_2]$	$F[x_0,x_0,x_0,x_1,x_1,x_1,x_1,x_2]$	
$F[x_0,x_1,x_1,x_1,x_1,x_2,x_2]$	$F[x_0,x_0,x_1,x_1,x_1,x_1,x_2]$	$F[x_0,x_0,x_0,x_1,x_1,x_1,x_1,x_1,x_2]$

El polinomio de Hermite debe satisfacer ciertas condiciones

✓ Satisface 2n+2 condiciones, que permitirán calcular 2n+2 incógnitas que serán los coeficientes de un polinomio de grado menor o igual que 2n+1

✓ Hermite genera nodos iguales (repetidos) y se basa en la propiedad de:

$$F[X_0, X_1, \ldots, X_n] = \begin{cases} \dfrac{f^{K}(X_0)}{K!} & ; X_0 = X_K \\ \dfrac{F[X_1, \ldots X_K] - F[X_0, \ldots, X_{K-1}]}{X_K - X_0} & ; X_0 \neq X_K \end{cases}$$

✓ Los espacios del denominador de las diferencias es uno menos que el orden de la diferencia dividida.

✓ El polinomio siempre será de n grados más altos que de lo necesario.

DATO CURIOSO

✓ Su aplicación es para predecir la ubicación de estrellas y planetas conociendo algunos puntos de la orbita y su velocidad en aquellos puntos

Determine el polinomio de Hermite mediante diferencias divididas de la siguiente tabla

X	Y	Y'	Y''
0	-1	-2	
1	0	10	40

Elaborar la tabla de diferencias dividida

0	-1				
0	-1	-2			
1	0	1	3		
1	0	10	9	6	
1	0	10	20	11	5

Polinomio será:

$$P(x) = -1 - 2(x-0) + 3(x-0)^2 + 6(x-0)^2(x-1) + 5(x-0)^2(x-1)^2$$

$$= -1 - 2x + 3x^2 + 6x^2(x-1) + 5x^2(x^2-2x+1)$$

$$= -1 - 2x + \underline{3x^2} + 6x^3 - \underline{6x^2} + 5x^4 - 10x^3 + 5x^2$$

$$= -1 - 2x + 2x^2 - 4x^3 + 5x^4$$