Unidad Número tres

Interpolación y aproximación lineal

Contenido 3.1 Interpolación lineal.

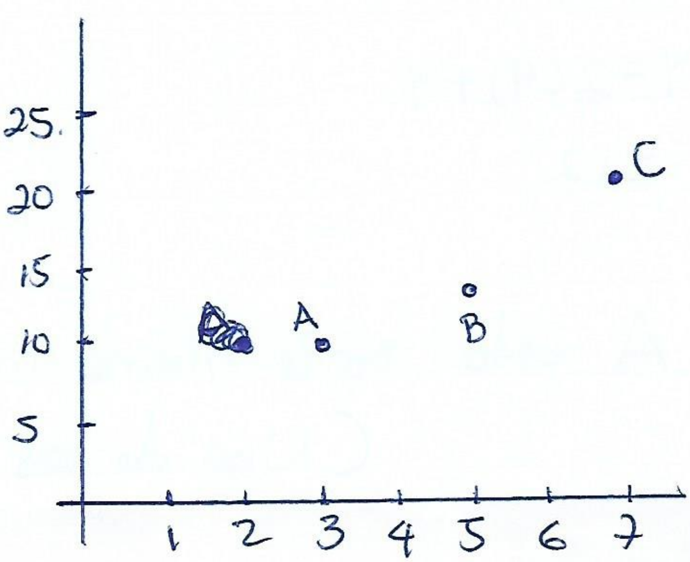
Interpolar: Calcular el valor aproximado de una magnitud en un intervalo cuando se conocen algunos de los valores que toma uno y otro lado de dicho intervalo.

Aproximar: Obtener un resultado tan cercano al exacto. Como sea necesario para un propósito determinado.

Ejemplo

Una empresa en distintos años obtiene unos ingresos cuando realiza los siguientes gastos (Las unidades están en miles de dolares).

Gastos x	3	5	7
Ingresos y	10	14	22



Preguntas:

¿Qué ingresos podemos esperar si realizamos unos gastos de 4 mil dolares? ó ¿ 6 mil dolares?

Solución de matemáticas nos dice determinar la recta de ingresos de AB y BC.

A(3,10) B(5,14)

x_1 y_1 x_2 y_2

B(5,14) C(7,22)

x_1 y_1 x_2 y_2

$$Y - Y_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}(X - X_1)$$

$$Y - 14 = \frac{22-14}{7-5}(X-5)$$

$$Y - 10 = \frac{14-10}{5-3}(X-3)$$

$$Y = 2(X-3)+10$$

$$Y = 2X - 6 + 10$$

$$\boxed{Y = 2X + 4}$$

$$Y = 4(X-5)+14$$

$$= 4X - 20 + 14$$

$$\boxed{Y = 4X - 6}$$

$X = 4$

$Y = 2(4) + 4$

$Y = 12$

$X = 6$

$Y = 4(6) - 6$

$Y = 18.$

A esto se le llama interpolación lineal.

(Una de las maneras de determinarlo)

Calcular la interpolación lineal de forma general que pasa por los puntos del plano. $A(X_0, y_0)$ $B(X_1, Y_1)$ o en forma de tabla:

X_i	X_0	X_1
f_i	f_0	f_1

$$Y - Y_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}(X - X_1)$$

$$Y - f_0 = \frac{f_1 - f_0}{X_1 - X_0}(X - X_0)$$

$$Y = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{X_1 - X_0}(X - X_0)$$

$$P(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{X_1 - X_0}(X - X_0)$$

Ejemplo

El número de bacterias por unidad de volumen existentes en una encubación después de x horas es presentado en la siguiente tabla.- Se desea saber cuál es el volumen de bacterias para el tiempo de 3.5 horas

Horas(x)	0	1	2	3	3,5	4
Volumen de bacterias(Y)	30	48	67	91		135

$X_0 = 3$ $Y_0 = 91$ $X = 3.5$ Y ?? $X_1 = 4$ $Y_1 = 135$

$$P(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{X_1 - X_0}(X - X_0)$$

$$P(3.5) = 91 + \frac{135 - 91}{4 - 3}(3.5 - 3)$$

$$P(3.5) = 113$$

Interpolación cuadrática.

Existeuna estrategia para mejorar la estimación consiste en introducir una curvatura a la linea que une los puntos.- Si se utiliza tres puntos como datos se puede ajustar en un polinomio de segundo grado, de la forma:

$$f_2(x) = b_0 + b_1(X - X_0) + b_2(X - X_0)(X - X_1)$$

donde las constantes b_0, b_1, b_2

$$b_0 = f(X_0)$$

$$b_1 = \frac{f(X_1) - f(X_0)}{X_1 - X_0} \qquad b_2 = \frac{\frac{f(X_2) - f(X_1)}{X_2 - X_1} - \frac{f(X_1) - f(X_0)}{X_1 - X_0}}{X_2 - X_0}$$

Resolver el problema anterior con la interpolación cuadrática tomando 3 puntos: (2,67), (3,91) (4,135)

$$(\underset{X_0}{2}, \underset{f(X_0)}{67}), (\underset{X_1}{3}, \underset{f(X_1)}{91}) (\underset{X_2}{4}, \underset{f(X_2)}{135})$$

$$b_0 = f(x_0) = f(2) = 67.$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(3) - f(2)}{3-2} = \frac{91-67}{1} = \frac{24}{1} = 24$$

$$b_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

$$= \frac{\frac{f(4) - f(3)}{4-3} - \frac{f(3) - f(2)}{3-2}}{4-2}$$

$$= \frac{\frac{135-91}{1} - \frac{91-67}{1}}{2}$$

$$= \frac{44-24}{2}$$

$$= 10.$$

$$X = 3.5$$

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$= 67 + 24(3.5-2) + 10(3.5-2)(3.5-3)$$

$$= 67 + 24(1.5) + 10(1.5)0.5$$

$$= 110.5$$

Guia de ejercicios

entregar: (31 de marzo de 2020)

① Supongamos que queremos aproximar el valor de sen 1 y para ello interpolamos la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el soporte $\{0, \pi/4, \pi/2\}$.

a) Interpolación lineal.

b) Interpolación cuadrática

② Determine el polinomio de interpolación lineal y cuadratico. para $f(x) = \frac{1}{x}$ en los ~~puntos~~ valores de x: $\{2, 2.5, 4\}$

③ Se tiene la función $f(x) = e^x$, de la cual se proveen los siguientes valores, determinar el polinomio ~~de~~ lineal y cuadrático.

X	0	0.5	1	2
Y	1	1.64872	2.71828	7.38906.

④ Determine el Polinomio lineal y cuadrático de la función $f(x) = \cos x$, para los valores de $x = \{\pi/8, \pi/2, 3/4\pi\}$.

Determinar el polinomio de grado uno y dos de la función $f(x) = \ln x$ con valores de $x = \{2, 3, 4\}$.

X	2	3	4
Y	0.6931471806	1.098612289	1.386294361

grado uno:

$$Y - Y_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}(X - X_1)$$

$$Y - f(2) = \frac{1.098612289 - 0.6931471806}{3 - 2}(X - 2)$$

$$Y = 0.4054651084(X-2) + 0.6931471806.$$

$$\underline{Y = 0.4054651084X - 0.1177830362} \ R//$$

grado dos

$$b_0 = f(X_0) = f(2) = 0.6931471806.$$

$$b_1 = \frac{f(X_1) - f(X_0)}{X_1 - X_0} = \frac{1.098612289 - 0.6931471806}{3 - 2}$$

$$= 0.4054651084$$

$$b_2 = \frac{\frac{f(X_2) - f(X_1)}{X_2 - X_1} - \frac{f(X_1) - f(X_0)}{X_1 - X_0.}}{X_2 - X_0}$$

$$= \frac{\frac{-1.098612289 + 1.386294361}{4-3} - \frac{1.098612289 - 0.6931471806}{3-2}}{4 - 2.}$$

$$b_2 = \frac{0.2876820072 - 0.4054651084}{2}$$

$$b_2 = -0.0588917942.$$

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$= 0.6931471806 + 0.4054651084(x-2) + (-0.0588917942)(x-2)(x-3)$$

$$f_2(x) = 0.6931471806 + 0.4054651084x - 0.8109302168 - 0.0588917942(x^2 - 5x + 6)$$

$$= -0.1177830362 + 0.4054651084x - 0.0588917942x^2 + 0.2944585971x - 0.3533503165.$$

$$\boxed{f_2(x) = -0.0588917942x^2 + 0.6999237055x - 0.4711333527}$$

R//.

Por lo tanto para obtener el polinomio de grado uno sólo con 2 puntos, se obtiene.-

No obstante significa que el # de puntos o nodos es "n+1" donde "n" es el grado del polinomio interpolador que se determinará.

¿Cuántos puntos para grado 2? R// 3

¿Cuántos puntos para grado 3? R// 4.

Polinomio de Lagrange.

Supongamos que se tienen n puntos de datos $(X_1, y_1), \ldots, (X_n, y_n)$ y que se desea encontar un polinomio de interpolación. - Existe una fórmula explícita que se detalla para cada caso y al final de manera general.

✓ grado 1

X	X_0	X_1
Y	$f(X_0)$	$f(X_1)$

$$P_1(X) = f(X_0)\frac{X - X_1}{X_0 - X_1} + f(X_1)\frac{X - X_0}{X_1 - X_0}.$$

✓ grado 2

X	X_0	X_1	X_2
Y	$f(X_0)$	$f(X_1)$	$f(X_2)$

$$P_2(X) = f(X_0)\frac{(X-X_1)(X-X_2)}{(X_0-X_1)(X_0-X_2)} + f(X_1)\frac{(X-X_0)(X-X_2)}{(X_1-X_0)(X_1-X_2)}$$

$$+ f(X_2)\frac{(X-X_0)(X-X_1)}{(X_2-X_0)(X_2-X_1)}$$

✓ grado 3.

X	X_0	X_1	X_2	X_3
Y	$f(X_0)$	$f(X_1)$	$f(X_2)$	$f(X_3)$

$$P_3(X) = f(X_0)\frac{(X-X_1)(X-X_2)(X-X_3)}{(X_0-X_1)(X_0-X_2)(X_0-X_3)} + f(X_1)\frac{(X-X_0)(X-X_2)(X-X_3)}{(X_1-X_0)(X_1-X_2)(X_1-X_3)}$$

$$+ f(X_2)\frac{(X-X_0)(X-X_1)(X-X_3)}{(X_2-X_0)(X_2-X_1)(X_2-X_3)} + f(X_3)\frac{(X-X_0)(X-X_1)(X-X_2)}{(X_3-X_0)(X_3-X_1)(X_3-X_2)}$$

Para grado n°.

$$P_n(X) = f(X_0)\,L_0(X) + f(X_1)\,L_1(X) + f(X_2)\,L_2(X) + \cdots$$

$$= \sum_{j=0}^{n} f(X_j) \prod_{\substack{j=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{X-X_i}{X_j-X_i}$$

$$L_0(x) = \frac{(X-X_1)(X-X_2)\cdots(X-X_n)}{(X_0-X_1)(X_0-X_2)\cdots(X_0-X_n)}$$