مرور فصل ۳

- روشی برای توصیف رفتار توابع در حد. ما در حال مطالعه کار آرایی بوسیله مجانب ها asymptotic هستیم.
- توصیف رشد growth توابع
- تمرکز بر روی آنچه مهم است با حذف عبارات مرتبه پایین و عوامل ثابت.
- نحوه نشان دادن زمان‌های اجرای الگوریتم‌ها.
- روشی برای مقایسه "اندازه" توابع:

$$
\begin{array}{ccc}
O & \approx & \leq \\
\Omega & \approx & \geq \\
\Theta & \approx & = \\
o & \approx & < \\
\omega & \approx & >
\end{array}
$$

O-notation، Ω - notation و Θ – notation

O-notation

یک کران بالا برای رفتار مجانبی یک تابع مشخص می‌کند: می‌گوید که یک تابع سریعتر از یک نرخ معین رشد نمی‌کند. این نرخ بر اساس جمله با بالاترین مرتبه است.

برای مثال،

$$f(n) = 7n^3 + 100n^2 - 20n + 6$$

برابر با $O(n^3)$ است، زیرا بالاترین جمله مرتبه $7n^3$ است و بنابراین تابع سریعتر از n^3 رشد نمی‌کند.

تابع $f(n)$ همچنین $O(n^5)$،$O(n^6)$ و $O(n^c)$ برای هر ثابت $c \geq 3$ است.

Ω-notation

یک کران پایین بر رفتار مجانبی یک تابع را مشخص می‌کند: می‌گوید که یک تابع حداقل به اندازه یک نرخ معین رشد می‌کند. در این جا نیز جمله با بالاترین مرتبه در نظر گرفته میشود.

برای مثال،

$$f(n) = 7n^3 + 100n^2 - 20n + 6$$

برابر با $\Omega(n^3)$ است، زیرا بالاترین جمله مرتبه، n^3 ، حداقل به اندازه n^3 رشد می‌کند.

تابع $f(n)$ همچنین $\Omega(n^2)$، $\Omega(n)$ و $\Omega(n^c)$ برای هر ثابت $c \leq 3$ است.

notation-Θ

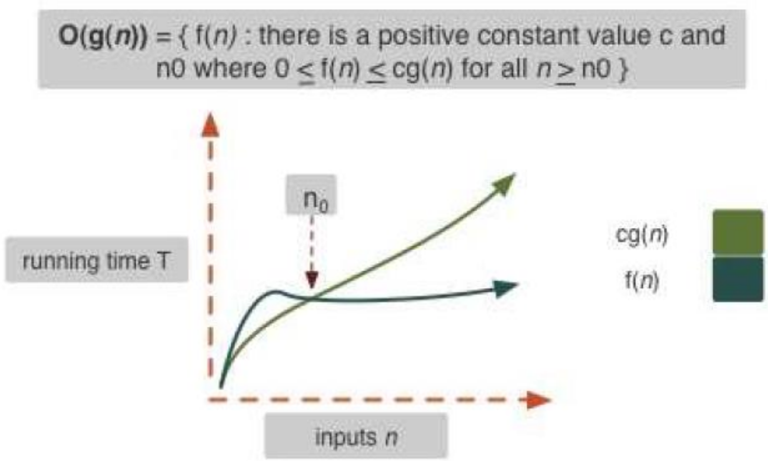
یک کران تنگ بر رفتار مجانبی یک تابع را مشخص می‌کند. مشخص کننده یک حد و مرز نزدیک از رفتار مجانبی سیستم است. این نماد می‌گوید که یک تابع دقیقاً با یک نرخ معین رشد می‌کند، دوباره بر اساس بالاترین جمله مرتبه خواهد بود.

اگر $O(f(n))$ و هم$\Omega(f(n))$ تابع یکسانی باشد، آنگاه آن تابع، $\Theta(f(n))$ نیز خواهد بود.

بیان فرمول برای مجانب ها

نماد O بزرگ

- در صورتی که تابع f(n) و g(n) داده شده باشد، می گوییم که f(n) از مرتبه O(g(n)) است($f(n) = O(g(n))$) اگر ثابت های مثبت c و n_0ای وجود داشته باشد به صورتی که:
- $f(n) \leq cg(n)$ for $n>n_0$



$$2n^2 = O(n^3)$$
$$2n^2 \leq cn^3$$
$(c = 1, n_0 = 2)$

$g(n)$ یک کران بالای مجانبی برای $f(n)$ است. اگر $f(n) \in O(g(n))$،می‌نویسیم

$$f(n) = O(g(n))$$

(به زودی دقیقاً توضیح خواهیم داد که این علامت تساوی به معنی تعلق است).

مثال : چند نمونه از توابع که دارای پیچیدگی $O(n^2)$ هستند

n^2

$n^2 + n$

$n^2 + 1000n$

$1000n^2 + 1000n$

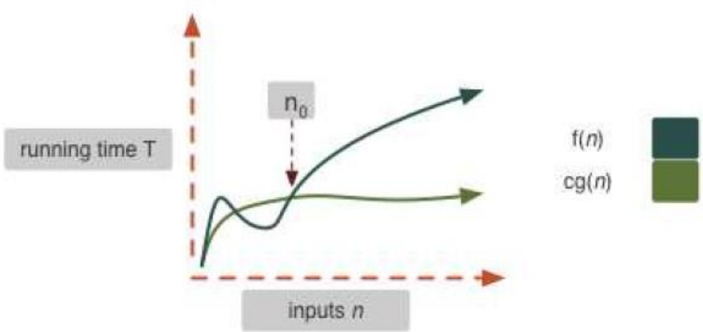
n
$n/1000$
$n^{1.99999}$
$n^2/\lg\lg\lg n$

نماد امگا (Ω)

در صورتی که تابع $f(n)$ و $g(n)$ داده شده باشد، می گوییم که $f(n)$ از مرتبه $\Omega(g(n))$ است($f(n) = \Omega(g(n))$) اگر ثابت های مثبت c و n_0ای وجود داشته باشد به صورتی که:

$$cg(n) \le f(n) \text{ for } n > n_0$$

$\Omega(g(n))$ = { $f(n)$: there is a positive constant value c and n0 where $0 \le cg(n) \le f(n)$ for all $n \ge$ n0 }



$\sqrt{n} = \Omega(\log_2 n)$
$C(\log_2 n) < \sqrt{n}$
$(c = 1, n_0 = 16)$

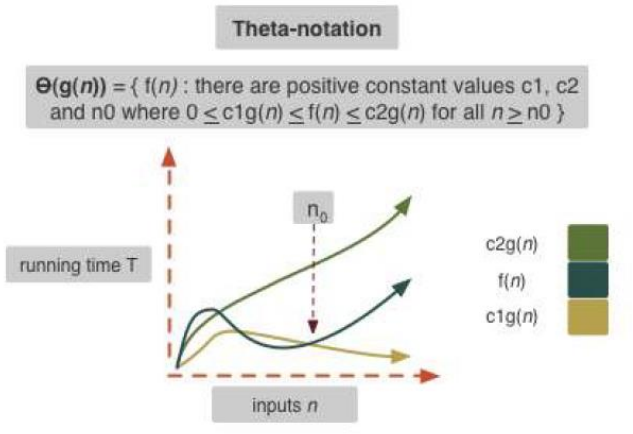
$g(n)$ یک کران پایین مجانبی برای $f(n)$ است

Example
$\sqrt{n} = \Omega(\lg n)$, with $c = 1$ and $n_0 = 16$.
Examples of functions in $\Omega(n^2)$:
n^2
$n^2 + n$
$n^2 - n$
$1000n^2 + 1000n$
$1000n^2 - 1000n$
Also,
n^3
$n^{2.00001}$
$n^2 \lg\lg\lg n$
2^{2^n}

نماد تتا (Θ)

در صورتی که تابع f(n) و g(n) داده شده باشد، می گوییم که f(n) از مرتبه$\Theta(g(n))$ است($f(n) = \Theta(g(n))$) اگر ثابت های مثبت c_1 و c_2 و n_0ای وجود داشته باشد به صورتی که:

$$c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n) \text{ for } n>n_0$$



$$n^2 + 5n + 7 = \Theta(n^2)$$

$C_1 n^2 \le n^2+5n+7 \le C_2 n^2$

$C_1 n^2 \le n^2+5n+7$

$C_1 = 1 , n_0=1$

$n^2+5n+7 \le C_2 n^2$

$C_2= 13$

قضیه

$f(n) = \Theta(g(n))$ اگر و فقط اگر $f = O(g(n))$ و $f = \Omega(g(n))$.

ضرایب پیشرو و عبارات مرتبه پایین مهم نیستند.

قضیه: اگر $f(n) = a_m n^m + \ldots + a_1 n + n_0$ باشد آنگاه $f(n) = O(n^m)$ خواهد بود.

قضیه: اگر $f(n) = a_m n^m + \ldots + a_1 n + n_0$ باشد آنگاه $f(n) = \Omega(n^m)$ خواهد بود.

قضیه: اگر $f(n) = a_m n^m + \ldots + a_1 n + n_0$ باشد آنگاه $f(n) = \Theta(n^m)$ خواهد بود.