مرور فصل ۳

- روشـــی برای توصـــیف رفتار توابع پیچیدگی در بی‌نهایت هســـتیم. ما در حال مطالعه کار آرایی بوســـیله مجلنب ها (asymptotic) هستیم.
- توصیف رشد (growth) توابع
- تمرکز بر روی آنچه مهم است با حذف عبارات مرتبه پایین و عوامل ثابت.
- نحوه نشان دادن زمان‌های اجرای الگوریتم‌ها.
- روشی برای مقایسه اندازه توابع:

$$\begin{array}{ccc} O & \approx & \leq \\ \Omega & \approx & \geq \\ \Theta & \approx & = \\ o & \approx & < \\ \omega & \approx & > \end{array}$$

<u>تابع پیچیدگی یا تابع زمان اجراء</u>، به تابعی گفته شـده برحسـب اندازه مسـئله، زمان اجرای مسـئله (تعداد دسـتورات لازم) را مشخص می‌کند.

$\frac{n(n-1)}{2}$ $\quad$ n^3 $\quad$ n^2

تابع پیچیدگی همواره **<u>مثبت</u>** و **<u>غیرنزولی</u>** است. با توجه به این نکته آیا توابع ریاضی زیر می‌توانند یک تابع پیچیدگی باشند؟

1) $5n^2 -100n$ $\quad$ 2) $3n+7$ $\quad$ 3) $30 - n^3$

پاسخ

۱) برای $n>20$ تابع پیچیدگی است زیرا اگر n کمتر باشد تابع منفی خواهد بود

۲) درست است

۳) چون تابع نزولی است پس تابع پیچیدگی نیست

O-notation، Ω - notation و Θ – notation

O-notation

یک کران بالا برای رفتار مجانبی یک تابع مشخص می‌کند: می‌گوید که یک تابع سریعتر از یک نرخ معین رشد نمی‌کند. این نرخ بر اساس جمله با بالاترین مرتبه است.

۱. مثال عملی: کدام جمله واقعاً اهمیت دارد؟

فرض کنید تابع پیچیدگی یک الگوریتم $f(n) = n^2 + 100n + 5000$ باشد. این تابع می‌تواند نشان‌دهنده تعداد کل عملیات‌ها (مثلاً مقایسه‌ها یا جمع‌ها) باشد که الگوریتم برای ورودی با اندازه n انجام می‌دهد.

- n^2 ممکن است از یک حلقه تودرتو بیاید.
- $100n$ ممکن است از یک حلقه ساده دیگر بیاید.
- 5000 ممکن است هزینه‌های ثابت راه‌اندازی (setup cost) باشد.

حالا بیایید ببینیم وقتی n (اندازه ورودی) بزرگ می‌شود، سهم هر یک از این جملات چقدر است.

اندازه ورودی (n)	جمله n^2	جمله $100n$	جمله 5000	$f(n)$ (مجموع)	درصد سهم n^2
۱۰	۱۰۰	۱,۰۰۰	۵,۰۰۰	۶,۱۰۰	۱.۶٪
۱۰۰	۱۰,۰۰۰	۱۰,۰۰۰	۵,۰۰۰	۲۵,۰۰۰	۴۰٪
۱,۰۰۰	۱,۰۰۰,۰۰۰	۱۰۰,۰۰۰	۵,۰۰۰	۱,۱۰۵,۰۰۰	۹۰.۵٪
۱۰,۰۰۰	۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰	۱,۰۰۰,۰۰۰	۵,۰۰۰	۱۰۱,۰۰۵,۰۰۰	**۹۹.۰٪**
۱۰۰,۰۰۰	۱۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰	۱۰,۰۰۰,۰۰۰	۵,۰۰۰	۱۰,۰۱۰,۰۰۵,۰۰۰	**۹۹.۹٪**

همانطور که می‌بینید، وقتی n کوچک است (مثل ۱۰)، جمله ثابت 5000 و جمله خطی $100n$ بخش بزرگی از کل را تشکیل می دهد اما به محض اینکه n به ۱۰۰۰ یا ۱۰,۰۰۰ می‌رسد، جمله n^2 به تنهایی تقریباً **تمام** زمان اجرا را به خود اختصاص می‌دهد.

این همان چیزی است که در تحلیل مجانبی به دنبال آن هستیم. وقتی $n \to \infty$ (به سمت بی‌نهایت میل می‌کند)، جملات $100n$ و 5000 در مقایسه با n^2 آنقدر ناچیز می‌شوند که می‌توانیم آن‌ها را نادیده بگیریم.

این مشاهده ما را مستقیم به مورد بعدی می‌برد:

برای مثال،

$$f(n) = 7n^3 + 100n^2 - 20n + 6$$

برابر با $O(n^3)$ است، زیرا بالاترین جمله مرتبه $7n^3$ است و بنابراین تابع سریعتر از n^3 رشد نمی‌کند.

تابع $f(n)$ همچنین $O(n^5)$، $O(n^6)$ و $O(n^c)$ برای هر ثابت $c \geq 3$ است.

Ω-notation (امگا بزرگ)

یک کران پایین برای رفتار مجانبی یک تابع را مشخص می‌کند: می‌گوید که یک تابع حداقل به اندازه یک نرخ معین رشد می‌کند. در این جا نیز جمله با بالاترین مرتبه در نظر گرفته می‌شود.

برای مثال،

$$f(n) = 7n^3 + 100n^2 - 20n + 6$$

برابر با $\Omega(n^3)$ است، زیرا بالاترین جمله مرتبه، n^3 ، حداقل به اندازه n^3 رشد می‌کند.

تابع $f(n)$ همچنین $\Omega(n^2)$، $\Omega(n)$ و $\Omega(n^c)$ برای هر ثابت $c \leq 3$ است.

Θ-notation

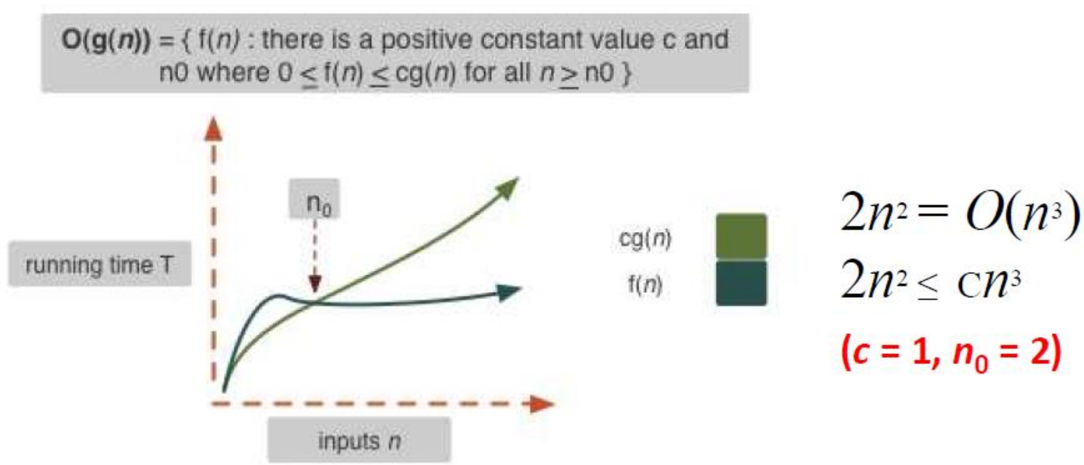
بطور همزمان یک کران بالا و پایین برای رفتار مجانبی یک تابع را مشـخص می‌کند. مشـخص کننده یک حد و مرز نزدیک از رفتار مجانبی سیستم است. این نماد می‌گوید که یک تابع دقیقاً با یک نرخ معین رشد می‌کند، و مانند نمادهای قبلی بر اساس بالاترین جمله مرتبه خواهد بود.

اگر $O(f(n))$ و هم $\Omega(f(n))$ تابع یکسانی باشد، آنگاه آن تابع، $\Theta(f(n))$ نیز خواهد بود.

بیان فرمول برای مجانب‌ها

نماد O بزرگ

- در صورتی که تابع f(n) و g(n) داده شده باشد، می گوییم که f(n) از مرتبه O(g(n)) است($f(n) = O(g(n))$) اگر ثابت های مثبت c و n_0ای وجود داشته باشد به صورتی که:
- $f(n) \leq cg(n)$ for $n > n_0$



$g(n)$ یک کران بالای مجانبی برای $f(n)$ است. اگر $f(n) \in O(g(n))$،می‌نویسیم

$$f(n) = O(g(n))$$

(به زودی دقیقاً توضیح خواهیم داد که این علامت تساوی به معنی تعلق است).

مثال : چند نمونه از توابع که دارای پیچیدگی $O(n^2)$ هستند

n^2

$n^2 + n$

$n^2 + 1000n$

$1000n^2 + 1000n$

n
$n/1000$
$n^{1.99999}$
$n^2/\lg\lg\lg n$

مثال) نشان دهید تابع پیچیدگی زمانی *2n-9* از مرتبه $O(n^2)$ است؟

پاسخ : این کار را در دو مرحله انجام می‌دهیم نخست پیدا کردن n_0 و سپس پیدا یک ثابت C بطوریکه که برای $n \geq n_0$ داشته باشیم $2n - 9 \leq Cn^2$

ما می‌دانیم که تابع *2n-9* باید مثبت باشد بنابراین کمترین مقدار n_0 که می‌توانیم داشته باشیم حداقل *5* است اگر فرض کنیم $n_0=5$ است آن‌گاه با توجه به این که $C \geq \frac{2n-9}{n^2}$ پس می‌توان نتیجه گرفت که C باید بزرگتر از $\frac{1}{25}$ باشد

تمرین) نشان دهید تابع پیچیدگی زمانی $13n^2 + 7n$ از مرتبه $O(n^2)$ است؟

پاسخ : ما می‌توانیم مقدار $n_0=1$ در نظر بگیریم همچنین $13\,n^2 + 7n \leq Cn^2 \;\rightarrow\; 13 + \frac{7}{n} \leq C$ بنابراین مقدار C می‌تواند بزرگتر و مساوی ۲۰ باشد.

تمرین) آیا تابع پیچیدگی زمانی $3n^3 + 7n^2$ از مرتبه $O(n^2)$ است؟

پاسخ)

$$3n^3 + 7n^2 \leq Cn^2$$

$$3n + 7 \leq C$$

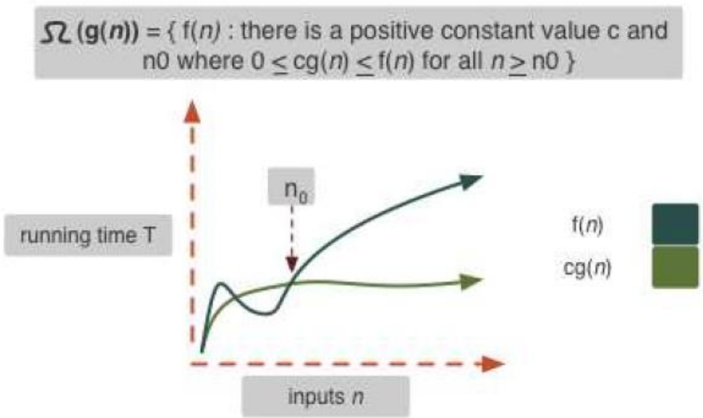
بنابراین ما نمی‌توانیم یک n_0 را طوری پیدا کنیم که برای nهای بزرگتر از n_0 رابطه فوق برقرار باشد.

با توجه به این که مقدار n می‌تواند تا بی‌نهایت ادامه پیدا کند بنابراین ما نمی‌توانیم مقدار ثابتی مانند C پیدا کنیم که رابطه بالا برای آن بر قرار باشد.

نماد امگا (Ω)

در صورتی که تابع $f(n)$ و $g(n)$ داده شده باشد، می گوییم که $f(n)$ از مرتبه $\Omega(g(n))$ است($f(n) = \Omega(g(n))$) اگر ثابت های مثبت c و n_0ای وجود داشته باشد به صورتی که:

$cg(n) \le f(n)$ for $n>n_0$



$\sqrt{n} = \Omega(\log_2 n)$

$C(\log_2 n) < \sqrt{n}$

$(c = 1, n_0 = 16)$

$g(n)$ یک کران پایین مجانبی برای $f(n)$ است

Example

$\sqrt{n} = \Omega(\lg n)$, with $c = 1$ and $n_0 = 16$.

Examples of functions in $\Omega(n^2)$:

n^2
$n^2 + n$
$n^2 - n$
$1000n^2 + 1000n$
$1000n^2 - 1000n$
Also,
n^3
$n^{2.00001}$
$n^2 \lg \lg \lg n$
2^{2^n}

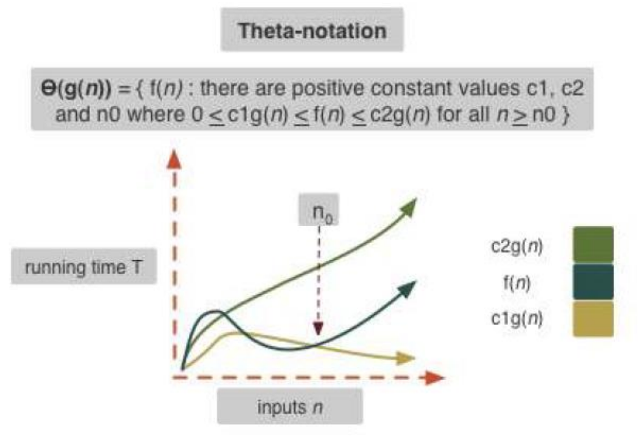
مثال) آیا تابع پیچیدگی زمانی $5n^2 - 11n^2$ از مرتبه Ω (n) است؟

پاسخ) اگر $n_0=1$ باشد، آن‌گاه تابع منفی خواهد شد و این ممکن نیست، بنابراین کوچکترین n_0 که می‌توان در نظر گرفت ۳ است. اگر $n_0=3$ در نظر بگیریم با توجه به این که $C \le 5n - 11$ باشد پس می‌توان گفت که ثابت C باید کوچکتر یا مساوی از ۴ باشد.

نماد تتا (Θ)

در صورتی که تابع $f(n)$ و $g(n)$ داده شده باشد، می گوییم که $f(n)$ از مرتبه$\Theta(g(n))$ است($f(n) = \Theta(g(n))$) اگر ثابت های مثبت c_1 و c_2 و n_0ای وجود داشته باشد به صورتی که:

$$c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n) \text{ for } n>n_0$$



به عبارت دیگر $\Theta(n)$ مجموعه‌ای از توابع پیچیدگی مانند $f(n)$ است که دارای شرایط زیر باشند:

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists\, C_1, C_2, n_0 > 0\ , C_1 g(n) \le\ f(n) \le C_2 g(n)\ \ \forall n \ge n_0\}$$

$$n^2 + 5n + 7 = \Theta(n^2)$$

$C_1 n^2 \le\ n^2+5n+7 \le C_2 n^2$

$C_1 n^2 \le\ n^2+5n+7$

$C_1 = 1\ ,\ n_0=1$

$n^2+5n+7 \le C_2 n^2$

$C_2= 13$

قضیه

$f(n) = \Theta(g(n))$ اگر و فقط اگر $f = O(g(n))$ و $f = \Omega(g(n))$.

ضرایب پیشرو و عبارات مرتبه پایین مهم نیستند.

قضیه: اگر $f(n) = a_m n^m + \ldots + a_1 n + n_0$ باشد آنگاه $f(n) = O(n^m)$ خواهد بود.

قضیه: اگر $f(n) = a_m n^m + \ldots + a_1 n + n_0$ باشد آنگاه $f(n) = \Omega(n^m)$ خواهد بود.

قضیه: اگر $f(n) = a_m n^m + \ldots + a_1 n + n_0$ باشد آنگاه $f(n) = \Theta(n^m)$ خواهد بود.

بررسی خواص هم ارزی روی نمادهای مذکور

خاصیت بازتابی :

$$f(n) \in \Theta(f(n))$$

$$C_1 f(n) \leq f(n) \leq C_2 f(n) \rightarrow C_1 \leq 1 \leq C_2$$

بنابراین تعیین C_1 و C_2 مستقل از n_0 است و می توانیم مثلا $C_1=1$ و C_2 را هر عدد بزرگتر یا مساوی ۱ قرار دهیم.

ب) $f(n) \in O(f(n))$

$f(n) \leq c f(n) \Rightarrow 1 \leq c$ ✓✓

ج) $f(n) \in \Omega(f(n))$

$c f(n) \leq f(n) \Rightarrow c \leq 1$ ✓✓

خاصیت تقارن

$$f(n) \in \theta(g(n)) \Longleftrightarrow g(n) \in \theta(f(n))$$

برای اثبات طرفین را فرض و طرف دیگر را حکم در نظر می گیریم و از فرض به حکم می رسیم

پس فرض می کنیم طرف اول برقرار است پس c_1 ، c_2 ، n_0 وجود دارد به ازای $n \geq n_0$

فرض $\Rightarrow c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$

حال بایستی ثابت کنیم به ازای $n \geq n'_0$ ، c'_1 ، c'_2 ، n'_0 وجود خواهد داشت

حکم $\Rightarrow c'_1 f(n) \leq g(n) \leq c'_2 f(n)$

$1 \Rightarrow g(n) \leq \frac{1}{c_1} f(n) \Rightarrow 1/c_1 = c'_2$

$2 \Rightarrow \frac{1}{c_2} f(n) \leq g(n) \Rightarrow 1/c_2 = c'_1$

تمرین) آیا O و Ω خاصیت تقارنی دارند؟

$n \in O(n^2)$ ولی $n^2 \notin O(n)$

$n^2 \in \Omega(n)$ ولی $n \notin \Omega(n^2)$

پس می توانیم برای رد کردن آن مثال نقض بیاوریم

پس Θ خاصیت تقارن را دارد ولی O و Ω ترایا خاصیت تقارن را ندارند

خاصیت تعدی

خاصیت تعدی)

$$f(n) \in \theta(g(n)) \,,\, g(n) \in \theta(h(n)) \Longrightarrow f(n) \in \theta(h(n))$$

فرض

$$\forall n \geq n_0 : c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

$$\forall n \geq n_0' : \underbrace{c_1' h(n) \leq g(n)}_{1} \underbrace{\leq c_2' h(n)}_{2}$$

حکم $\forall n \geq n_0''$ $c_1'' h(n) \leq f(n) \leq c_2'' h(n)$

$$1 \Rightarrow \times c_1 \Rightarrow c_1 c_1' h(n) \leq c_1 g(n) \,,\, c_1 g(n) \leq f(n) \Rightarrow c_1 c_1' = c_1''$$

$$2 \Rightarrow \times c_2 \Rightarrow c_2 g(n) \leq c_2 c_2' h(n) \,,\, f(n) \leq c_2 g(n) \Rightarrow c_2 c_2' = c_2''$$

فرض

$\Longrightarrow n_0'' = Max\{n_0, n_0'\}$ یا چون با هر دو n_0, n_0' نیز می‌تواند باشد.

اثبات خاصیت تعدی برای O و Ω نیز به راحتی امکان پذیر است.

نکته :

$$\text{if } f(n) \in O(g(n)) \Longleftrightarrow g(n) \in \Omega(f(n))$$

$$\text{if } f(n) \in O(g(n)) \text{ and } f(n) \in \Omega(g(n)) \Longleftrightarrow f(n) \in \theta(g(n))$$