Modelowanie Stochastyczne

Zajęcia 2
Tomasz Serafin

Semestr letni 21/22

Zadanie 1

1. Wygeneruj 1000 elementowe próbki zmiennej losowej $\mathbb{N}(0,1)$ używając zmiennych $\mathbb{U}(0,1)$ oraz
   (a) regułę tuzina ('rule of the dozen'),
   (b) metodę odwrócenia dystrybuanty ('inverse transform'),
   (c) metodę Boxa-Mullera.
   Następnie narysuj (wskazówki w pliku Ogony.pdf):
   i) histogramy,
   ii) empiryczne dystrybuanty w skali liniowej, semi-logarytmicznej, podwójnie-logarytmicznej, oraz porównaj z rozkładem $\mathbb{N}(0,1)$.

Zadanie 1

1. Wygeneruj 1000 elementowe próbki zmiennej losowej $\mathbb{N}(0,1)$ używając zmiennych $\mathbb{U}(0,1)$ oraz
   (a) regułę tuzina ('rule of the dozen')

- $X \sim \mathbb{N}(0,1)$
- $X = (U_1 + \ldots + U_{12}) - 6$
- iteracyjnie lub wektorowo

Zadanie 1

1. Wygeneruj 1000 elementowe próbki zmiennej losowej $\mathbb{N}(0,1)$ używając zmiennych $\mathbb{U}(0,1)$ oraz
   (b) metodę odwrócenia dystrybuanty ('inverse transform')

- $X \sim \mathbb{N}(0,1)$
- $X = F_X^{-1}(U)$
- Python: *scipy.stats.norm.ppf(p)*
- Matlab: norminv(p)
- R: *qnorm(p)*

Zadanie 1

1. Wygeneruj 1000 elementowe próbki zmiennej losowej $\mathbb{N}(0, 1)$ używając zmiennych $\mathbb{U}(0, 1)$ oraz
   (c) metodę Boxa-Mullera

- $\mathrm{X} \sim \mathbb{N}(0, 1)$
- $U_1,\ U_2 \sim \mathbb{U}(0, 1)$
- $Z_1 = \sqrt{-2\log(U_1)}\cos(2\pi U_2)$
- $Z_2 = \sqrt{-2\log(U_1)}\sin(2\pi U_2)$
- $\mathrm{X} = [Z_1, Z_2]$

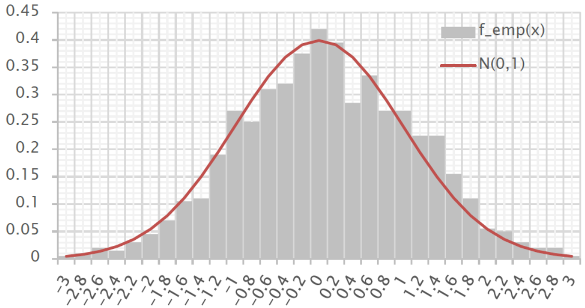
Zadanie 1

1. Następnie narysuj (wskazówki w pliku Ogony.pdf):
   i) histogramy
   oraz porównaj z rozkładem $\mathbb{N}(0, 1)$.

- Histogram należy znormalizować!
- Dzielimy wysokość każdego słupka przez *ilość obserwacji* x *szerokość słupka*
- Na histogramie rysujemy teoretyczną gęstość rozkładu normalnego (w Matlabie: *normcdf()*, w Pythonie: *scipy.stats.norm.pdf()*)

Zadanie 1

1. Następnie narysuj (wskazówki w pliku Ogony.pdf):
i) histogramy
oraz porównaj z rozkładem $\mathbb{N}(0, 1)$.



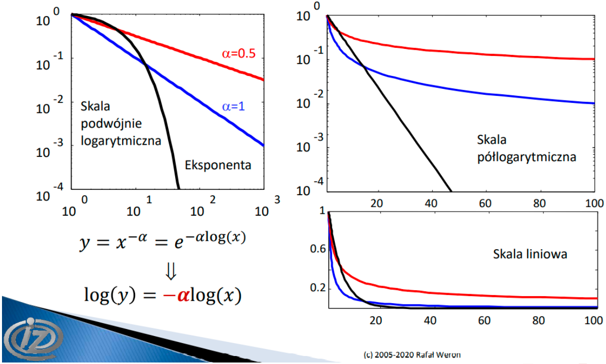
Zadanie 1

1. Następnie narysuj (wskazówki w pliku Ogony.pdf):
   ii) empiryczne dystrybuanty w skali liniowej, semi-logarytmicznej, podwójnie-logarytmicznej, oraz porównaj z rozkładem $\mathbb{N}(0,1)$.

- Dystrybuanta empiryczna:
  - Sortujemy obserwacje $x_1, \ldots, x_n \to x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}$
  - $F_n(x_{(k)}) = \frac{k}{n}$
- Skala liniowa: (X,Y)
- Skala semi-logarytmiczna: (X,log(Y))
- Skala podwójnie-logarytmiczna: (log(X),log(**1-Y**))
- W log-log rysujemy tylko PRAWY ogon rozkładu! ($X > 0$)

Zadanie 1

1. Następnie narysuj (wskazówki w pliku Ogony.pdf):
ii) empiryczne dystrybuanty w skali liniowej, semi-logarytmicznej, podwójnie-logarytmicznej, oraz porównaj z rozkładem $\mathbb{N}(0,1)$.



Zadanie 2

2. Korzystając z 1000 elementowej próbki $\mathbb{U}(0,1)$, wygeneruj 1000 elementowe próbki zmiennych losowych (odwrotną dystrybuantę rozkładu wbudowaną w pakiet Matlab/Python możesz wykorzystać jedynie do generowania rozkładu normalnego):
   (a) lognormalnej,
   (b) Pareto,
   (c) wykładniczej.
   Następnie narysuj:
   i) histogramy,
   ii) empiryczne dystrybuanty w skali liniowej, semi-logarytmicznej, podwójnie-logarytmicznej (dla semi-log i log-log tak na prawdę ogony, tj. 1-F).

Zadanie 2

2. Korzystając z 1000 elementowej próbki $\mathbb{U}(0,1)$, wygeneruj 1000 elementowe próbki zmiennych losowych:
   (a) lognormalnej

- $\mathsf{Y} = \mathrm{e}^{X}$, $X \sim \mathbb{N}(\mu, \sigma^2)$
- $\mathsf{U} \sim \mathbb{U}(0,1) \to \mathsf{X} \sim \mathbb{N}(\mu, \sigma^2) \to \mathsf{Y} \sim \mathit{lognorm}(\mu, \sigma^2)$

Zadanie 2

2. Korzystając z 1000 elementowej próbki $\mathbb{U}(0,1)$, wygeneruj 1000 elementowe próbki zmiennych losowych:
(b) Pareto
   - $Y = \lambda U^{\frac{-1}{\alpha}} \sim \mathit{Pareto}(\lambda, \alpha)$

   (c) wykładniczej
   - $Y = -\frac{1}{\beta}\log(U) \sim \mathit{Exp}(\beta)$

Zadania

4. Wygeneruj 3 niezależne trajektorie arytmetycznego ruchu Browna (ABM): $dX = \mu dt + \sigma dB$. Weź $dt = 1$, $X(0) = 10$, $\mu = 0.04$, $\sigma = 0.4$. Narysuj je na jednym wykresie razem z (deterministycznym) trendem, tj. $dX = \mu dt$.
5. Wygeneruj 3 niezależne trajektorie geometycznego ruchu Browna (GBM): $dX = \mu X dt + \sigma X dB$. Weź $dt = 1$, $X(0) = 10$, $\mu = 0.01$, $\sigma = 0.04$. Narysuj je na jednym wykresie razem z (deterministycznym) trendem, tj. $dX = \mu X dt$.
8. Wygeneruj 3 niezależne trajektorie dyfuzji powracającej do średniej: $dX = \alpha(\beta - X)dt + \sigma dB$. Weź $dt = 1$, $X(0) = 20$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 8$, $\sigma = 0.4$. Jaki jest poziom powracania do średniej? Narysuj je na jednym wykresie razem z (deterministycznym) trendem, tj. $dX = \alpha(\beta - X)dt$.

Zadania

4. Wygeneruj 3 niezależne trajektorie arytmetycznego ruchu Browna (ABM): $dX = \mu dt + \sigma dB$. Weź $dt = 1$, $X(0) = 10$, $\mu = 0.04$, $\sigma = 0.4$. Narysuj je na jednym wykresie razem z (deterministycznym) trendem, tj. $dX = \mu dt$.

- $$\underbrace{dX}_{\text{przyrost procesu}} = \underbrace{\mu dt}_{\text{deterministyczne}} + \underbrace{\sigma dB}_{\text{losowe}}$$
- $$X_t - X_{t-1} = \mu dt + \sigma dB$$
- $$X_t = X_{t-1} + \mu dt + \sigma dB$$

Zadania

4. Wygeneruj 3 niezależne trajektorie arytmetycznego ruchu Browna (ABM): $dX = \mu dt + \sigma dB$. Weź $dt = 1$, $X(0) = 10$, $\mu = 0.04$, $\sigma = 0.4$. Narysuj je na jednym wykresie razem z (deterministycznym) trendem, tj. $dX = \mu dt$.

- $$X_t = X_{t-1} + \mu dt + \sigma \mathbb{N}(0, dt)$$

- $$X_t = X_{t-1} + 0.04 \cdot 1 + 0.4 \cdot \mathbb{N}(0, 1)$$

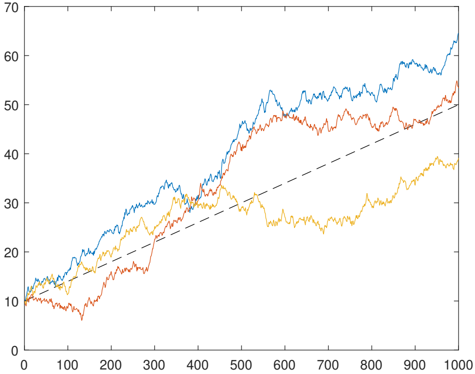
Zadania

4. Wygeneruj 3 niezależne trajektorie arytmetycznego ruchu Browna (ABM): $dX = \mu dt + \sigma dB$. Weź $dt = 1$, $X(0) = 10$, $\mu = 0.04$, $\sigma = 0.4$. Narysuj je na jednym wykresie razem z (deterministycznym) trendem, tj. $dX = \mu dt$.

- $$\underbrace{dX}_{\text{przyrost procesu}} = \underbrace{\mu dt}_{\text{deterministyczne}}$$
- $$X_t - X_{t-1} = \mu dt$$
- $$X_t = X_{t-1} + 0.04 \cdot 1$$

Zadania

4. Wygeneruj 3 niezależne trajektorie arytmetycznego ruchu Browna (ABM): $dX = \mu dt + \sigma dB$. Weź $dt = 1$, $X(0) = 10$, $\mu = 0.04$, $\sigma = 0.4$. Narysuj je na jednym wykresie razem z (deterministycznym) trendem, tj. $dX = \mu dt$.



Zadania

5. Wygeneruj 3 niezależne trajektorie geometycznego ruchu Browna (GBM): $dX = \mu X dt + \sigma X dB$. Weź $dt = 1$, $X(0) = 10$, $\mu = 0.01$, $\sigma = 0.04$. Narysuj je na jednym wykresie razem z (deterministycznym) trendem, tj. $dX = \mu X dt$.

- Metoda dokładna

$$X_t = X_s e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t-s) + \sigma\sqrt{t-s}\ \mathbb{N}(0,1)}$$

- Dla t-s = dt = 1

$$X_1 = X_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2}) + \sigma \mathbb{N}(0,1)}$$

- $$X_n = X_{n-1} e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2}) + \sigma \mathbb{N}(0,1)}$$

Zadania

5. Wygeneruj 3 niezależne trajektorie geometycznego ruchu Browna (GBM): $dX = \mu X dt + \sigma X dB$. Weź $dt = 1$, $X(0) = 10$, $\mu = 0.01$, $\sigma = 0.04$. Narysuj je na jednym wykresie razem z (deterministycznym) trendem, tj. $dX = \mu X dt$.

- Metoda dokładna

$$X_t = X_s e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t-s) + \sigma\sqrt{t-s}\ \mathbb{N}(0,1)}$$

- Dla $\sigma = 0$

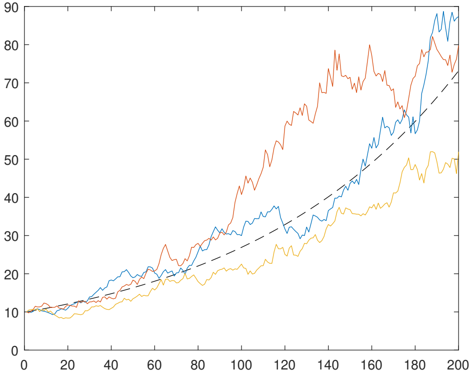
$$X_1 = X_0 e^{\mu}$$

-

$$X_n = X_{n-1} e^{\mu}$$

Zadania

5. Wygeneruj 3 niezależne trajektorie geometycznego ruchu Browna (GBM): $dX = \mu X dt + \sigma X dB$. Weź $dt = 1$, $X(0) = 10$, $\mu = 0.01$, $\sigma = 0.04$. Narysuj je na jednym wykresie razem z (deterministycznym) trendem, tj. $dX = \mu X dt$.



Zadania

8. Wygeneruj 3 niezależne trajektorie dyfuzji powracającej do średniej: $dX = \alpha(\beta - X)dt + \sigma dB$. Weź $dt = 1$, $X(0) = 20$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 8$, $\sigma = 0.4$. Jaki jest poziom powracania do średniej? Narysuj je na jednym wykresie razem z (deterministycznym) trendem, tj. $dX = \alpha(\beta - X)dt$.

-
$$\underbrace{dX}_{\text{przyrost procesu}} = \underbrace{\alpha(\beta - X)dt}_{\text{deterministyczne}} + \underbrace{\sigma dB}_{\text{losowe}}$$

-
$$X_t = X_{t-1} + \alpha(\beta - X_{t-1})dt + \sigma dB$$

Zadania

8. Wygeneruj 3 niezależne trajektorie dyfuzji powracającej do średniej: $dX = \alpha(\beta - X)dt + \sigma dB$. Weź $dt = 1$, $X(0) = 20$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 8$, $\sigma = 0.4$. Jaki jest poziom powracania do średniej? Narysuj je na jednym wykresie razem z (deterministycznym) trendem, tj. $dX = \alpha(\beta - X)dt$.