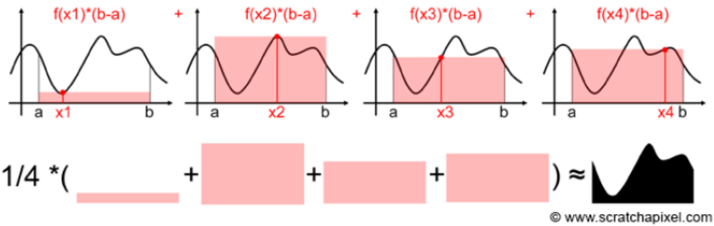
Modelowanie Stochastyczne

Zajęcia 3
Tomasz Serafin

Semestr letni 21/22

Zadania

3. Korzystając z 1000 zmiennych $U(0,1)$ i metody MC policz przybliżoną wartość całki z funkcji $f(x) = x^2 + x$ na przedziale $[1,3]$. Wyznacz 95% przedziały ufności (CI) otrzymanej aproksymacji całki. Jaki jest dokładny wynik całkowania?



Zadania

3. Korzystając z 1000 zmiennych $U(0,1)$ i metody MC policz przybliżoną wartość całki z funkcji $f(x) = x^2 + x$ na przedziale $[1,3]$. Wyznacz 95% przedziały ufności (CI) otrzymanej aproksymacji całki. Jaki jest dokładny wynik całkowania?

- $$\underline{[0,1]} \to [0,1] \cdot 2 = \underline{[0,2]} \to [0,1] \cdot 2 + 1 = \underline{[1,3]}$$
- Krok 1: Generowanie 1000 realizacji U $\sim \mathbb{U}(0,1)$ i przetransformowanie na przedział $[1,3]$

$$X = U \cdot 2 + 1$$

Zadania

3. Korzystając z 1000 zmiennych $U(0,1)$ i metody MC policz przybliżoną wartość całki z funkcji $f(x) = x^2 + x$ na przedziale $[1,3]$. Wyznacz 95% przedziały ufności (CI) otrzymanej aproksymacji całki. Jaki jest dokładny wynik całkowania?

- Krok 2: Przybliżenie wartości całki prostokątami

$$Y = X^2 + X$$

- Krok 3: Policzenie średniej i wariancji estymatora

$$\hat{Y} = mean(Y)$$

$$\hat{\sigma} = std(Y)$$

Zadania

3. Korzystając z 1000 zmiennych $U(0,1)$ i metody MC policz przybliżoną wartość całki z funkcji $f(x) = x^2 + x$ na przedziale $[1,3]$. Wyznacz 95% przedziały ufności (CI) otrzymanej aproksymacji całki. Jaki jest dokładny wynik całkowania?

- Krok 4: Wyznaczenie przedziałów ufności dla estymatora

$$CI = \left[\hat{Y} - 1.96\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{1000}}, \hat{Y} + 1.96\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{1000}}\right]$$

Zadania

6. Dla wartości indeksu DJIA policz zwroty logarytmiczne $z_t = \ln(x_{t+1}/x_t)$. Następnie dla zwrotów narysuj:
   i) histogram,
   ii) empiryczną dystrybuantę w skali liniowej, semi-logarytmicznej, podwójnie-logarytmicznej,
   oraz porównaj z rozkładem normalnym o średniej i wariancji wyestymowanych z danych.

- Otrzymanie z_t z wektora cen x_t:

$$z_1 = \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right), z_2 = \ln\left(\frac{x_3}{x_2}\right), \ldots$$

Zadania

7. Dopasuj ABM do różnic szeregu, tj. $z_t = x_{t+1} - x_t$, i GBM do zwrotów (przyrostów logarytmicznych) indeksu DJIA. Powtórz zad. 4 i 5 dla tak wyestymowanych μ i σ. Przyjmij $dt = 1$. Zilustruj przykładowe realizacje dopasowanych ruchów Browna i porównaj je z historią indeksu DJIA (podobnie jak na slajdach dla indeksu S&P500)

Zadania

7. Dopasuj ABM do różnic szeregu, tj. $z_t = x_{t+1} - x_t$, i GBM do zwrotów (przyrostów logarytmicznych) indeksu DJIA. Powtórz zad. 4 i 5 dla tak wyestymowanych μ i σ. Przyjmij $dt = 1$.

- ABM:
$$dX = \mu dt + \sigma dB$$
-
$$z_t = \mu dt + \sigma dB$$
-
$$z_t = \mu \cdot 1 + \sigma \mathbb{N}(0,1) \sim \mathbb{N}(\mu, \sigma^2)$$

Zadania

7. Dopasuj ABM do różnic szeregu, tj. $z_t = x_{t+1} - x_t$, i GBM do zwrotów (przyrostów logarytmicznych) indeksu DJIA. Powtórz zad. 4 i 5 dla tak wyestymowanych μ i σ. Przyjmij $dt = 1$.

- ABM - estymacja μ i σ:

$$\hat{\mu} = mean(z_t)$$

$$\hat{\sigma} = std(z_t)$$

Zadania

7. Dopasuj ABM do różnic szeregu, tj. $z_t = x_{t+1} - x_t$, i GBM do zwrotów (przyrostów logarytmicznych) indeksu DJIA. Powtórz zad. 4 i 5 dla tak wyestymowanych μ i σ. Przyjmij $dt = 1$.

- GBM - rozwiązanie dokładne:

$$X_{t+1} = X_t e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2}) + \sigma \mathbb{N}(0,1)}$$

Zadania

7. Dopasuj ABM do różnic szeregu, tj. $z_t = x_{t+1} - x_t$, i GBM do zwrotów (przyrostów logarytmicznych) indeksu DJIA. Powtórz zad. 4 i 5 dla tak wyestymowanych μ i σ. Przyjmij $dt = 1$.

- GBM - zwroty:

$$z_t = \ln\left(\frac{x_{t+1}}{x_t}\right) = d\ln\left(X_{t+1}\right)$$

$$z_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma dB_t \sim \mathbb{N}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2\right)$$

Zadania

7. Dopasuj ABM do różnic szeregu, tj. $z_t = x_{t+1} - x_t$, i GBM do zwrotów (przyrostów logarytmicznych) indeksu DJIA. Powtórz zad. 4 i 5 dla tak wyestymowanych μ i σ. Przyjmij $dt = 1$.

- Liczymy średnią i odchylenie standardowe zwrotów:

$$\mu^* = mean(z_t) \ , \ \sigma^* = std(z_t)$$

- Ale musimy pamiętać że:

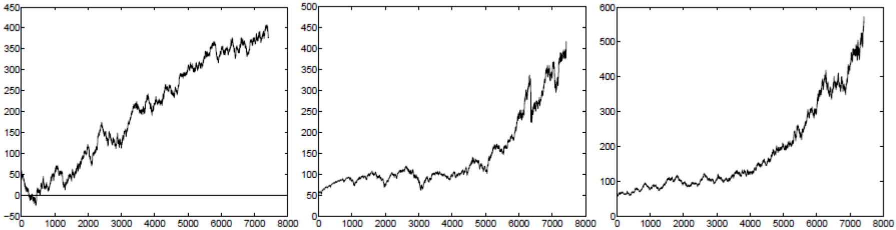
$$z_t \sim \mathbb{N}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2\right)$$

- Więc do generowania GBM (jak w zad 5):

$$\sigma = \sigma^* \ , \ \mu = \mu^* + \frac{\sigma^2}{2}$$

Zadania

7. Dopasuj ABM do różnic szeregu, tj. $z_t = x_{t+1} - x_t$, i GBM do zwrotów (przyrostów logarytmicznych) indeksu DJIA. Powtórz zad. 4 i 5 dla tak wyestymowanych μ i σ. Przyjmij $dt = 1$. Zilustruj przykładowe realizacje dopasowanych ruchów Browna i porównaj je z historią indeksu DJIA (podobnie jak na slajdach dla indeksu S&P500)



ABM ($\mu = 0.0487$, $\sigma = 1.7506$) | S&P500 (1962-91) | GBM ($\mu = 2.71 \cdot 10^{-4}$, $\sigma = 0.009$)

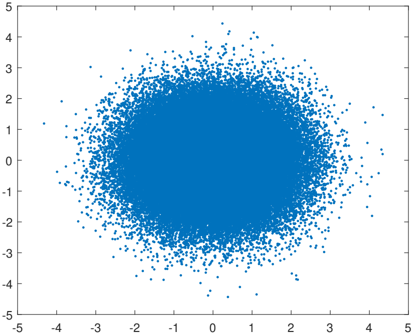
Zadania

9. Wygeneruj 10^5 elementowe skorelowane próbki o dwuwymiarowym rozkładzie normalnym z macierzą kowariancji $\gamma = [1, \rho; \rho, 1]$ dla $\rho = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 0.95$. Narysuj scatterplot, np. w Matlbie **plot(x,y,'.')**. Jaki wpływ na otrzymany kształt ma ρ?

- Macierz kowariancji $\gamma = [1, \rho; \rho, 1]$
- Z - macierz wymiaru $[2, 10^5]$ zawierająca realizacje niezależnych zmiennych losowych z rozkładu $\mathbb{N}(0, 1)$
- C - macierz będąca wynikiem dekompozycji Cholesky'ego macierzy γ
- $M = C' \cdot Z$ - macierz zawierająca realizacje skorelowanych zmiennych losowych z rozkładu $\mathbb{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\gamma})$
- W Pythonie: *scipy.linalg.cholesky*(γ), w R: *chol*(γ)

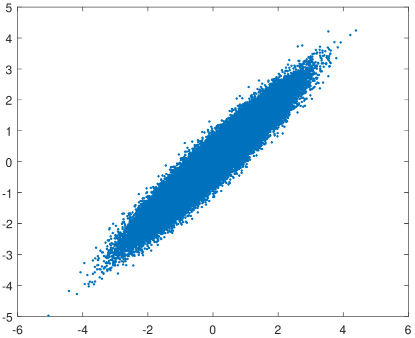
Zadania

9. Wygeneruj 10^5 elementowe skorelowane próbki o dwuwymiarowym rozkładzie normalnym z macierzą kowariancji $\gamma = [1, \rho; \rho, 1]$ dla $\rho = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 0.95$. Narysuj scatterplot, np. w Matlbie **plot(x,y,'.')**. Jaki wpływ na otrzymany kształt ma ρ?



Zadania

9. Wygeneruj 10^5 elementowe skorelowane próbki o dwuwymiarowym rozkładzie normalnym z macierzą kowariancji $\gamma = [1, \rho; \rho, 1]$ dla $\rho = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 0.95$. Narysuj scatterplot, np. w Matlbie **plot(x,y,'.')**. Jaki wpływ na otrzymany kształt ma ρ?



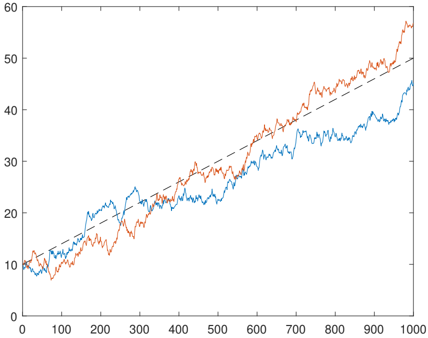
Zadania

10. Wygeneruj 2 zależne trajektorie ABM: $dX = \mu dt + \sigma dB$, z macierzą kowariancji przyrostów dB postaci $\varsigma = [1, \rho; \rho, 1]$. Weź $dt = 1$, $X(0) = 10$, $\mu = 0.04$, $\sigma = 0.4$, $\rho = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 0.95\}$. Narysuj je na jednym wykresie.

- Macierz kowariancji $\gamma = [1, \rho; \rho, 1]$
- $M = C' \cdot Z$ - macierz wymiaru $[2, 10^5]$ zawierająca realizacje skorelowanych zmiennych losowych z rozkładu $\mathbb{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\gamma})$
- $$X_t = X_{t-1} + \mu dt + \sigma dB$$
- Pierwsza trajektoria
$$X_{1,t} = X_{1,t-1} + \mu dt + \sigma M[1, t-1]$$
- Druga trajektoria
$$X_{2,t} = X_{2,t-1} + \mu dt + \sigma M[2, t-1]$$

Zadania

10. Wygeneruj 2 zależne trajektorie ABM: $dX = \mu dt + \sigma dB$, z macierzą kowariancji przyrostów dB postaci $\varsigma = [1, \rho; \rho, 1]$. Weź $dt = 1$, $X(0) = 10$, $\mu = 0.04$, $\sigma = 0.4$, $\rho = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 0.95\}$. Narysuj je na jednym wykresie.



Zadania

10. Wygeneruj 2 zależne trajektorie ABM: $dX = \mu dt + \sigma dB$, z macierzą kowariancji przyrostów dB postaci $\varsigma = [1, \rho; \rho, 1]$. Weź $dt = 1$, $X(0) = 10$, $\mu = 0.04$, $\sigma = 0.4$, $\rho = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 0.95\}$. Narysuj je na jednym wykresie.