# MS21.L01: Od błądzenia losowego do ruchu Browna

**Rafał Weron**

Katedra Badań Operacyjnych i Inteligencji Biznesowej
Politechnika Wrocławska (PWr)
http://kbo.pwr.edu.pl/pracownicy/weron

# Zadania (2 pkt za każde zadanie)

1. Wygeneruj 1000 elementowe próbki zmiennej losowej $N(0,1)$ używając zmiennych $U(0,1)$ oraz
   **(a)** regułę tuzina ('rule of the dozen'),
   **(b)** metodę odwrócenia dystrybuanty ('inverse transform'),
   **(c)** metodę Boxa-Mullera.
   Następnie narysuj (wskazówki w pliku Ogony.pdf):
   **i)** histogramy,
   **ii)** empiryczne dystrybuanty w skali liniowej, semi-logarytmicznej, podwójnie-logarytmicznej,
   oraz porównaj z rozkładem $N(0,1)$.

# Zadania cd.

2. Korzystając z 1000 elementowej próbki $U(0,1)$, wygeneruj 1000 elementowe próbki zmiennych losowych (odwrotną dystrybuantę rozkładu wbudowaną w pakiet Matlab/Python możesz wykorzystać jedynie do generowania rozkładu normalnego):
   **(a)** lognormalnej,
   **(b)** Pareto,
   **(c)** wykładniczej.
   Następnie narysuj:
   **i)** histogramy,
   **ii)** empiryczne dystrybuanty w skali liniowej, semi-logarytmicznej, podwójnie-logarytmicznej.

# Zadania cd.

3. Korzystając z 1000 zmiennych $U(0,1)$ i metody MC policz przybliżoną wartość całki z funkcji $f(x) = x^2 + x$ na przedziale $[1,3]$. Wyznacz 95% przedziały ufności (CI) otrzymanej aproksymacji całki. Jaki jest dokładny wynik całkowania?
4. Wygeneruj 3 niezależne trajektorie arytmetycznego ruchu Browna (ABM): $dX = \mu dt + \sigma dB$. Weź $dt = 1$, $X(0) = 10$, $\mu = 0.04$, $\sigma = 0.4$. Narysuj je na jednym wykresie razem z (deterministycznym) trendem, tj. $dX = \mu dt$.
5. Wygeneruj 3 niezależne trajektorie geometycznego ruchu Browna (GBM): $dX = \mu X dt + \sigma X dB$. Weź $dt = 1$, $X(0) = 10$, $\mu = 0.01$, $\sigma = 0.04$. Narysuj je na jednym wykresie razem z (deterministycznym) trendem, tj. $dX = \mu X dt$.

# Zadania cd.

6. Dla wartości indeksu DJIA policz zwroty logarytmiczne $z_t = \ln(x_{t+1}/x_t)$. Następnie dla zwrotów narysuj:
   **i)** histogram,
   **ii)** empiryczną dystrybuantę w skali liniowej, semi-logarytmicznej, podwójnie-logarytmicznej,
   oraz porównaj z rozkładem normalnym o średniej i wariancji wyestymowanych z danych.
7. Dopasuj ABM do różnic szeregu, tj. $z_t = x_{t+1} - x_t$, i GBM do zwrotów (przyrostów logarytmicznych) indeksu DJIA. Powtórz zad. 4 i 5 dla tak wyestymowanych $\mu$ i $\sigma$. Przyjmij $dt = 1$. Zilustruj przykładowe realizacje dopasowanych ruchów Browna i porównaj je z historią indeksu DJIA (podobnie jak na slajdach dla indeksu S&P500).

# Zadania cd.

8. Wygeneruj 3 niezależne trajektorie dyfuzji powracającej do średniej: $dX = \alpha(\beta - X)dt + \sigma dB$. Weź $dt = 1$, $X(0) = 20$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 8$, $\sigma = 0.4$. Jaki jest poziom powracania do średniej? Narysuj je na jednym wykresie razem z (deterministycznym) trendem, tj. $dX = \alpha(\beta - X)dt$.
9. Wygeneruj $10^5$ elementowe skorelowane próbki o dwuwymiarowym rozkładzie normalnym z macierzą kowariancji $\varsigma = [1, \rho; \rho, 1]$ dla $\rho = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 0.95$. Narysuj scatterplot, np. w Matlbie **plot(x,y,'.')**. Jaki wpływ na otrzymany kształt ma $\rho$?
10. Wygeneruj 2 zależne trajektorie ABM: $dX = \mu dt + \sigma dB$, z macierzą kowariancji przyrostów $dB$ postaci $\varsigma = [1, \rho; \rho, 1]$. Weź $dt = 1$, $X(0) = 10$, $\mu = 0.04$, $\sigma = 0.4$, $\rho = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 0.95\}$. Narysuj je na jednym wykresie.