此練習在於延伸並引導學習至矩陣對數。

1. 考慮$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{X}$，且
$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbf{X}$$
使得下列方程組成立：
$$\begin{cases} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$
   (a) 試以$y = Ax$的形式表以上方程組。
   (b) 現知道
$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$
   ，若表$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{nk} \end{bmatrix}$及$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{bmatrix}$，證明$\mathbf{y}_k = A\mathbf{x}_k$。
   (c) 由此，描述(b)的方程組的幾何意義。

2. 設$A \in \mathbb{M}^{n\times n}$為可對角化矩陣，使得存在可逆矩陣$P$及對角矩陣$D$令$A = P^{-1}DP$成立，並設$f(x) := Ax$，其中$x \in \mathbb{R}^n$。
   (a) 試就以下圖像解釋f的幾何含義：
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \\ Y \arrow[r, "d"] & Y \arrow[u, "g^{-1}"'] \end{tikzcd}$$
   其中$g(x) := Px$及$d(x) := Dx$，X及Y為不同基底的綫性空間。

(b) 證明以下定理：

定理. *若X及Y的維數不同，則不存在可逆矩陣B使得$B : X \leftrightarrow Y$。*

提示：

i. 設X的維數為m及Y的維數為n，且$m > n$，以此建立合適的矩陣$B : X \mapsto Y$。

ii. 證明該矩陣B不可逆。

iii. 同理當$m < n$時，考慮$B : Y \mapsto X$。

(c) 由此，討論‘不可被對角化’的幾何含義。

3. (a) 利用基本原理，證明以下矩陣導數法則：

i. $\dfrac{d}{dt}A = 0;$

ii. $\dfrac{d}{dt}At^n = nAt^{n-1};$

iii. $\dfrac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A;$

(b) 證明以下定律對矩陣導數適用：

i. 乘積法則；

ii. 鎖鏈法則。

(c) 由此，求導$\dfrac{d}{dt}t^A$。

4. 已知矩陣的指數法e^A，現求矩陣的對數法。記矩陣的對數函數為$\log X$使得$e^{\log X} = e^{\log X} = X$。

(a) 證明$|e^A| = e^{|A|}$。由此證明若$\log X$存在，則$|X| > 0$。

(b) 證明若X可對角化成$P^{-1}DP$，則$\log X = P^{-1}(\log D)P$。

(c) 求導$\dfrac{d}{dt}\log{(Xt)}$。