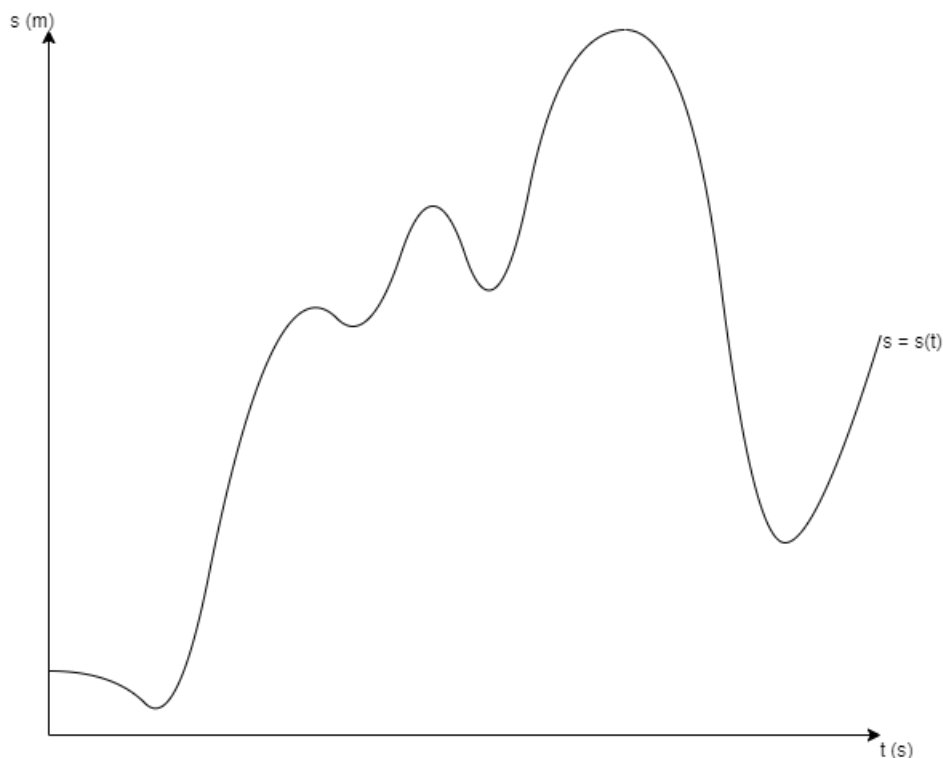


## 積分起源

討論積分起源，我們依然追溯到牛頓與萊布尼茨的時代。當時牛萊之爭除了微分學的發現以外，還有積分學的建立。雖說兩人整得如火如荼，但我們有著漁翁之利，可以坐享其成。

但無論如何，之所以存在積分學，是由於一道最基本的問題：假設一物體移動速度  $v(t) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  可以參數  $t$  量化，則可以下圖表示速度-時間之關係：

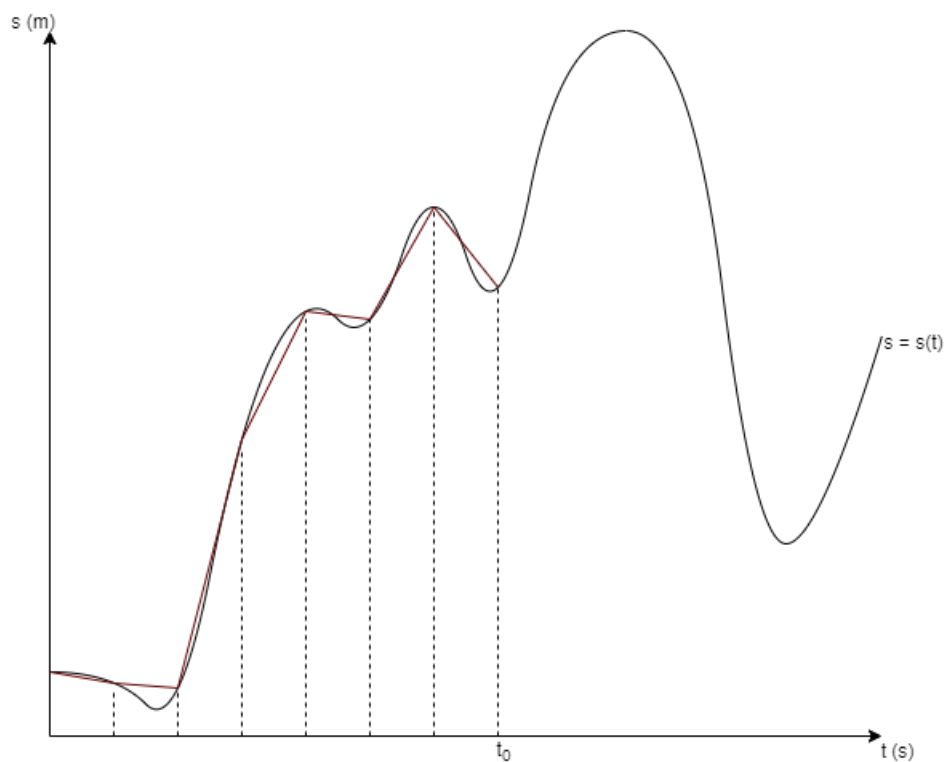


若欲求得任意時間的位移，考慮在極短時間內的瞬間位移相等於瞬時速度乘以時間跨度：設  $s(t) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  為位移函數，則

$$\Delta s(t) = v(t) \Delta t$$

并且總位移應由所有所有瞬間的瞬間位移總和得出，則可考慮將時間均分為  $n$  段瞬間，記  $t = 0$  為初始時間及  $t_f$  為終結時間，并且  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = t_f$ ，並記對其求和：

$$s(t_f) = \sum_{k=0}^{n-1} (s(t_{k+1}) - s(t_k)) = \sum_{k=0}^{n-1} v(t_k)(t_{k+1} - t_k)$$



將  $n \rightarrow \infty$  便可定義

$$s(t_f) = \int_0^{t_f} v(t) dt$$

若視  $t_f$  為變量，則稱其為不定積分；反之，則稱其為定積分。

## 積分的含義

從以上簡介可以看出，積分的目的在於加法；更明確的說法是定積分在於計算面積。與中學教程不同，我們會先觀察定積分，再闡述不定積分（實際上他們只差一步）。