

矩陣的定義

定義 1 (矩陣). 矩陣是代數學中一種特殊的表達形式, 用以同時表達多位元的表格:

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

若元素 $a_{ij} \in S$ 則稱為 S 上的 $m \times n$ 矩陣, 記 $\mathbf{A} \in \mathbb{M}^{m \times n}$ 。

定義 2 (矩陣的加法與乘法定義). 給定 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{M}^{m \times n}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{M}^{n \times t}$, 則

1. 加法: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})$ 。
2. 數乘: $k\mathbf{A} = (ka_{ij})$ 。
3. 矩陣乘法: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj})$ 。

例子. 設 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, 則

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1+2 & 1+1 & 0+0 \\ 1+1 & 0+2 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 。
2. $4\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 。
3. $\mathbf{A} \times \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 1 \times 2 + 0 \times 3 & 1 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 3 \\ 1 \times 2 + 0 \times 2 + 1 \times 3 & 1 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ 。

定義 3 (特殊矩陣). 下列為一些矩陣寫法的共識:

- 零矩陣: $\mathbf{0}_{m \times n} = \mathbf{O}_{m \times n} = (0)_{m \times n}$ 。
- 一矩陣: $\mathbf{1}_{m \times n} = (1)_{m \times n}$ 。
- 單位矩陣: $\mathbf{I}_{m \times n} = (\delta_{ij})_{m \times n}$, 其中 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ 。

設理 (加法與數乘定則). 設 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{M}^{m \times n}$, 則

1. 加法結合律: $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ 。

2. 加法交換律: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ 。

3. $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$ 。

4. $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ 。

5. $a(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 。

6. $(a + b)\mathbf{A} = a\mathbf{A} + b\mathbf{A}$ 。

7. $(ab)\mathbf{A} = a(b\mathbf{A})$

設理 (矩陣乘法定則). 設 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ 為矩陣, 則

1. 乘法結合律: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ 。

2. 分配律 1: $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ 。

3. 分配律 2: $\mathbf{D}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{DA} + \mathbf{DB}$ 。

4. $\alpha\mathbf{AB} = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$ 。

5. $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$ 。

定義 4 (綫性組合). 設 c_1, c_2, \dots, c_ℓ 為常數, $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_\ell \in \mathbb{M}_{m \times n}$, 則稱

$$\sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{A}_k = c_1 \mathbf{A}_1 + c_2 \mathbf{A}_2 + \cdots + c_\ell \mathbf{A}_\ell$$

為綫性組合。

綫性方程組

擴增矩陣

逆矩陣

行列式

矩陣的幾何含義