

References: Introduction to Real Analysis (Bartle & Sherbert), Thomas Calculus 12th Edition

單元導數定義

由牛頓發揚光大的流數法，今時今日變成了以極限定義的導數。

定義 1 (導數定義). 若 f 在 c 可導，則其導數 $f'(c)$ 為

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

定義 2 (現代導數嚴謹定義). L 為 f 在 c 的導數當：對於任意 $\epsilon > 0$, 若存在 $\delta(\epsilon) > 0$ 使得對於 $0 < |x - c| < \delta(\epsilon)$,

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \epsilon$$

則寫 $f'(c) = L$ 。

定理. 若 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $c \in I$ 可微，則 f 在 $c \in I$ 連續。

證明. 導數存在，則

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} (f(x) - f(c)) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \lim_{x \rightarrow c} (x - c) \\ &= f'(c) \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

因此 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ 使得 f 在 $c \in I$ 連續。 □

導數的目的在於處理函數的變化：從算式可見，導數取自 f 的變化除以變量 x 的變化，即可理解為變化的比例，等於變化比率。簡而言之，導數為函數的斜率。

定理 (基本導數定則). 1. 常函數的導數：

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

2. 冪函數的導數：

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

3. 自然指數的導數：

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

4. 自然對數的導數：

$$\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{1}{x}$$

5. 三角函數的導數：

(a)

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

(b)

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

(c)

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

證明. 留做習題。

□

定理 (導數的性質). 導數擁有以下性質：

1. 綫性性：對於可微函數 f, g ，常數 α, β ， $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ 。

2. 乘積法則：對於連續函數 f, g ， $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ 。

3. 除法定則：對於連續函數 f, g ， $(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ 。

證明.

1. 綫性性：從 f, g 的可微性，可得對任意 $\varepsilon > 0$ ，均有 $\delta_f, \delta_g > 0$ 使得對於所有 c ，若 x 符合 $0 < |x - c| < \min\{\delta_f, \delta_g\}$ 時，

$$|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c)| < \frac{\varepsilon}{2\alpha}; |\frac{g(x) - g(c)}{x - c} - g'(c)| < \frac{\varepsilon}{2\beta}$$

則

$$\begin{aligned} & | \frac{(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(c) + \beta g(c))}{x - c} - (\alpha f'(c) + \beta g'(c)) | \\ & < \alpha | \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) | + \beta | \frac{g(x) - g(c)}{x - c} - g'(c) | \\ & < \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{2\alpha} + \beta \cdot \frac{\varepsilon}{2\beta} \\ & = \varepsilon \end{aligned}$$

2. 乘積法則：從 f, g 的可微性，可得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)g(x) - f(c)g(c)}{x - c} &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(c) + f(x)g(c) - f(c)g(c)}{x - c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot g(c) + f(x) \cdot \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right) \\ &= f'(c)g(c) + f(c)g'(c)\end{aligned}$$

3. 除法定則：留作習題

□

衍理. 導數擁有以下性質：

1. 綫性性：對於一系列可微函數 $\{f_k\}_{k=1}^n$ ，及一系列常數 $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ ， $(\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k)' = \sum_{k=1}^n (\alpha_k f_k')$ 。
2. 乘積法則：對於一系列可微函數 $\{f_k\}_{k=1}^n$ ， $(\prod_{k=1}^n f_k)' = \sum_{k=1}^n (f_1 f_2 \cdots f_k' \cdots f_{n-1} f_n)$ 。

定理 (鏈鎖律). 對於複合函數 $h := (g \circ f)$,

$$h' = (g' \circ f) \cdot (f')$$

證明. 留做習題

□

定理 (逆函數). 對於逆函數 $g := f^{-1}$,

$$g' = \frac{1}{f' \circ g}$$

證明. 設 $g(x) = f^{-1}(x)$ ，則 $(f \circ g)(x) = x$ 。利用鏈鎖律，可得

$$\begin{aligned}(f' \circ g)(x) \cdot g'(x) &= 1 \\ g'(x) &= \frac{1}{(f' \circ g)(x)}\end{aligned}$$

□

導數可視為函數於任意點的斜率，換言之，利用直線方程的點斜式，可得出函數 f 於任意點 $(x_0, f(x_0))$ 上的切綫方程為

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

定義 3 (高維導數). 若 f 可微, 則 f' 為 f 的第一導數; 若 f' 可微, 則 f'' 為 f 的第二導數, 並記

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$$

如此類推, 我們稱 $f^{(n)}(x)$ 為 f 的第 n 導數, 記

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}(f(x))$$

均值定理

均值定理為數學分析其中一個重要工具, 亦是導數的重要應用結果。其含義在於將導數與函數值作連接, 將切綫普及化。

定理 (極值定理). 設 $c \in I$ 使得 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 有極值於 c 。若 f 可微, 則 $f'(c) = 0$ 。

證明. 先證明 $f(c)$ 為極大值的情況: 若 $f'(c) > 0$, 則存在 c 的鄰域 $V \subseteq I$ 使得對於 $x \in V$,

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

因此, 若 $x \in V$ 同時 $x > c$, 則

$$f(x) - f(c) = (x - c) \cdot \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

此則違反 $f(c)$ 為極大值的假設, $f'(c) \not> 0$ 。

同理, 證明 $f'(c) \not< 0$ 可運用相似做法, 因此 $f'(c) = 0$ 。 □

衍理. 設 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 為連續函數, 並設 f 在 $c \in I$ 有極值。則 $f'(c)$ 不存在或 $f'(c) = 0$ 。

小記. $f(x) := |x|$ 可作衍理的例證: f 在 $0 \in I := [-1, 1]$ 上存在極小值, 但 $f'(0)$ 並不存在。

定理 (羅爾定理). 設 f 在閉合區間 $[a, b]$ 上連續, 且可微於開放區間 (a, b) , 使得 $f(a) = f(b) = 0$ 。則存在至少一個 $c \in (a, b)$ 使得 $f'(c) = 0$ 。

定理 (基本均值定理). 設 f 在閉合區間 $[a, b]$ 上連續, 且可微於開放區間 (a, b) , 則存在至少一個 $c \in (a, b)$ 使得

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

證明. 設

$$\varphi(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

可見 φ 在閉合區間 $[a, b]$ 上連續, 且可微於開放區間 (a, b) , 而且 $\varphi(b) = \varphi(a) = 0$ 。則可利用羅爾定理引存在 $c \in (a, b)$ 使得

$$0 = \varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

通過簡單移項, 便得

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

□

逆微分的基本原理, 以及第一導數測試, 都是從均值定理發展的一些應用。

定理. 設 f 在閉合區間 $I := [a, b]$ 上連續, 且可微於開放區間 (a, b) , 且 $f'(x) = 0$ 對所有 $x \in (a, b)$, 則 f 為 I 上的常函數。

證明. 利用均值定理, 存在至少一個 $c \in (a, b)$ 使得 $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) = 0$, 則 $f(a) = f(b)$; 並對於所有 $x \in (a, b)$, 均有 $c \in (x, a)$ 使得 $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) = 0$ 。則 $f(x) = f(a)$ 對所有 $x \in [a, b]$ 成立。□

衍理. 設 f, g 在閉合區間 $I := [a, b]$ 上連續, 且均可微於開放區間 (a, b) , 且 $f'(x) = g'(x)$ 對所有 $x \in (a, b)$, 則 $f = g + C$, 其中 C 為常數。

定義 4 (遞升函數). 設 f 為連續函數, 若對於所有 $x_1 < x_2$ 均有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 則稱 f 為遞升函數。

定義 5 (遞降函數). 設 f 為連續函數, 若對於所有 $x_1 < x_2$ 均有 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 則稱 f 為遞降函數。

定理. 設 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ 為可微函數, 則:

1. f 為遞升函數當且僅當所有 $x \in I$ 均有 $f'(x) \geq 0$;
2. f 為遞降函數當且僅當所有 $x \in I$ 均有 $f'(x) \leq 0$ 。

證明. 證明1: 設 $f'(x) \geq 0$ 。若 $x_1 < x_2$, 則根據均值定理存在 $c \in (x_1, x_2)$ 使得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0$$

相對地, 若 f 為遞升函數, 則

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

證明2: 與證明1相似, 留做習題。□

定理 (第一導數測試). 設 f 為 $I := [a, b]$ 上的連續函數，並設 $c \in (a, b)$ 。假定 f 在 (a, c) 及 (b, c) 上可微，則：

1. 若存在 c 的 δ -鄰域 $(c-\delta, c+\delta) \subseteq I$ 使得
$$\begin{cases} f'(x) \geq 0, & c-\delta < x < c; \\ f'(x) \leq 0, & c < x < c+\delta \end{cases}$$
，則 c 為 f 在 I 上的相對極大值；
2. 若存在 c 的 δ -鄰域 $(c-\delta, c+\delta) \cap I \subseteq I$ 使得
$$\begin{cases} f'(x) \leq 0, & c-\delta < x < c; \\ f'(x) \geq 0, & c < x < c+\delta \end{cases}$$
，則 c 為 f 在 I 上的相對極小值。

證明. 對於 $c-\delta < x < c$ 時 $f'(x) \geq 0$ ，則根據均值定理，存在 $c_x \in (x, c)$ 使得

$$f(c) - f(x) = f'(c_x)(c - x) \geq 0$$

則 $f(c) \geq f(x)$ ；同理，對於 $c < x < c+\delta$ 時 $f'(x) \leq 0$ ，則根據均值定理，存在 $c_x \in (c, x)$ 使得

$$f(x) - f(c) = f'(c_x)(x - c) \leq 0$$

則 $f(c) \geq f(x)$ 。因此，對於 $x \in [a, b]$ ， $f(c) \geq f(x)$ ，則 $f(c)$ 為相對極大值。

2的證明與1相似，留做習題。 □

洛必達法則

洛必達法則主要用來處理不能正常求得的極限，舉例如 f, g 均為連續函數，而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ 的狀況，我們不能直接求得極限的值，因：若定義 $f(x) = \alpha x$ 及 $g(x) = x$ ， $\alpha \in \mathbb{R}$ 為任意值，則

$$\frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x}{x} = \alpha$$

但洛必達定理通過求導的方法得到了意想不到的結果。

從最直覺的判斷，我們可以考慮切綫：因為 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 及 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ ，因此根據 f, g 的連續性， $f(0) = 0$ 及 $g(0) = 0$ ，對於足夠小的 $\delta > 0$ ， $x \in (-\delta, \delta)$ ，

$$\begin{cases} f(x) \approx f'(0)x \\ g(x) \approx g'(0)x \end{cases}$$

因此可想像

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(0)x}{g'(0)x} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

而最基礎的推導也是基於導數定義：

定理. 設 f, g 均為 $[a, b]$ 上的函數使得 $f(a) = g(a) = 0$ ，並設 $g(x) \neq 0$ 對於 $x \in (a, b)$ 。若 f, g 在 a 點可微且 $g'(a) \neq 0$ ，則

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

證明.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} \\ &= \frac{f'(a)}{g'(a)} \end{aligned}$$

□

小記. 需注意的是，以上定理只適用於函數在 a 有導數，若 $a = \pm\infty$ ，則需要更多手段。

定理 (柯西均值定理/普適均值定理). 設 f, g 為 $[a, b]$ 上的連續函數，並在 (a, b) 上可微，且 $g'(x) \neq 0$ 對所有 $x \in (a, b)$ 。則存在 $c \in (a, b)$ 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

證明. 設

$$h(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

可見 h 在閉合區間 $[a, b]$ 上連續，且可微於開放區間 (a, b) ，而且 $h(b) = h(a) = 0$ 。則可利用羅爾定理引存在 $c \in (a, b)$ 使得

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c)$$

通過簡單移項，便得

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

□

定理 (洛必達定理I). 設 $-\infty \leq a < b \leq \infty$ 並設 f, g 於 (a, b) 可微使得所有 $x \in (a, b)$ 均使得 $g'(x) \neq 0$ 。假定

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$$

1. 若 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$, 則 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$;

2. 若 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \{-\infty, \infty\}$, 則 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ 。

證明. 設 $a < \alpha < \beta < b$, 根據羅爾定理 $g(\alpha) \neq g(\beta)$ (為何?), 並根據柯西均值定理, 存在 $u \in (\alpha, \beta)$ 使得

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(u)}{g'(u)}$$

其中 $u \in (\alpha, \beta)$ 。

情況1: $L \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, 存在 $c \in (a, b)$ 使得

$$\begin{aligned} L + \varepsilon &< \frac{f'(u)}{g'(u)} < L + \varepsilon & u &\in (a, c) \\ L + \varepsilon &< \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} < L + \varepsilon & a < \alpha < \beta &\leq c \end{aligned}$$

取 $\alpha \rightarrow a^+$, 可得

$$L + \varepsilon \leq \frac{f(\beta)}{g(\beta)} \leq L + \varepsilon \quad \beta \in (a, c]$$

因 $\varepsilon > 0$ 為任意值, 1 證畢。

情況2.1: $L = \infty$, $M > 0$, 存在 $c \in (a, b)$ 使得

$$\begin{aligned} \frac{f'(u)}{g'(u)} &> M & u &\in (a, c) \\ \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} &> M & a < \alpha < \beta &\leq c \end{aligned}$$

取 $\alpha \rightarrow a^+$, 可得

$$\frac{f(\beta)}{g(\beta)} \geq M \quad \beta \in (a, c)$$

因 $M > 0$ 為任意值, 2.1 證畢。

若 $L = -\infty$, 證明與2.1類似。 □

定理 (洛必達定理II). 設 $-\infty \leq a < b \leq \infty$ 並設 f, g 於 (a, b) 可微使得所有 $x \in (a, b)$ 均使得 $g'(x) \neq 0$ 。假定

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$$

1. 若 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$, 則 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$;

2. 若 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \{-\infty, \infty\}$, 則 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ 。

泰勒定理

回想切線的出現，可見對於任意可微函數 f 都存在一種估算

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

而若需要更精確的估算，考慮若 f 存在二階導數，則

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

同理，若 f 存在三階導數、四階導數，可對 f 進行更精確的估算。如此拓展下去，可得以下定義：

定義 6 (泰勒多項式). 設 $n \in \mathbb{N}$ 及 $I := [a, b]$ ，並設 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 f 及其導數 $f', f'', \dots, f^{(n)}$ 均為 (a, b) 上的連續函數，並於 (a, b) 上存在 $(n+1)$ -階導數 $f^{(n+1)}$ ，則對於 $x_0 \in I$ ，設 $V(x_0)$ 為 x_0 的鄰域，可對 $x \in V(x_0)$ 進行以下估算

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \end{aligned}$$

$$\text{我們記 } P_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

定理 (泰勒多項式定理). 設 $n \in \mathbb{N}$ 及 $I := [a, b]$ ，並設 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 f 及其導數 $f', f'', \dots, f^{(n)}$ 均為 (a, b) 上的連續函數，並於 (a, b) 上存在 $(n+1)$ -階導數 $f^{(n+1)}$ ，則對於定點 $x_0 \in I$ ，及任意 $x \in I$ ，存在 c 位於 x 與 x_0 之間使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

證明. 設

$$R_n(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

□

向量函數

偏導數與全導數

方向導數

切面與法綫

二維極值與鞍點