

1. 設 $\frac{(2x-a)^6}{e^{kx}}$ 的 x 變量展開式中 x^2 及 x 的係數分別為 38 及 10。

(a) 證明 $(x-1)$ 是 $6x^5 + 19x^3 - 25 = 0$ 的因式。

(b) 已知 $6a^8 + 6a^6 + 25a^4 + 25a^2 + 25 = 0$ 沒有實數根，求 a 及 k 的值。

2. 假設 $X \sim Po(r)$ ，其中 $r > 0$ 為實變數。

(a) 以 r 表示 $P(X = x)$ 。

(b) 求 $\frac{dP}{dr}$ 及 $\frac{d^2P}{dr^2}$ 。

(c) 若以梯形法則估算 $\int_0^t P(X = x)dr$ 的值，其結果為過高估算還是過低估算？試解釋。

3. 已知在一場射箭比賽中，A 選手在 ℓ 米射程的命中率 ($10 \leq \ell \leq 50$) 如下

命中得分區	靶外 (0分)	5分	6分	7分	8分	9分	10分
過往概率	0.001ℓ	0.1	$3p$	0.4	p	$0.00005(1000 - 2\ell)$	$0.05 - 0.0009\ell$

而 B 選手的命中率從靶外到 10 分區呈二項分佈。現記 A 選手的命中概率分佈為 Z_A ，B 選手的命中概率分佈為 Z_B 。

(a) 求 p 的值。

(b) 以 ℓ 表示 $E[Z_A]$ 及 $E[Z_B]$ 的值。

(c) 根據香港射箭總會本地賽事守則（戶外定距靶）2017 年 11 月修訂版內容 1.13 新秀組計分賽的描述，每個選手需要在 25 米及 18 米各射程射出 36 箭以完成比賽，得分較高者獲勝。

i. 求選手 A 射出的箭全部命中靶面的概率。

ii. 求選手 B 的箭無法全部命中靶面的概率。

iii. 已知選手 A 及 B 在經歷 70 箭後暫時平分，而兩人均未嘗射出靶外。兩人現餘下最後兩回 18 米射程的機會，並且按照兩人的狀態而言，可知選手 A 在餘下兩箭不會射出靶外，而選手 B 至少會失手一箭。求 A 獲勝的概率。

4. 假設某人的作畫速度為平均每小時 4 頁原稿，其作畫頁數跟從泊松分佈。記連續整點（例如 12:00-13:00、14:00-15:00）為一個時段。該人每個工作天作畫 4 個時段。

(a) 求該人於一個時段內作出多於 6 頁原稿的概率。

(b) 求該人於一個工作天內最多僅有一個時段作出多於 6 頁原稿的概率。

(c) 若該人能於一個時段內作出多於6頁原稿，便稱之為心流時段。若該人能在一個工作天內達成兩個或以上心流時段，便稱之為高效率工作天，否則為一般工作天。目前距離截稿日尚餘4個工作天。

i. 求這四個工作天中至少有一天為高效率工作天的概率。

ii. 已知四天中至少有一天為高效率工作天，求四天均為高效率工作天的概率。

iii. 求一般工作天的產出期望值，由此求高效工作天的產出期望值。

iv. 求四天中有一天為高效工作天時，該四天的產出期望值。

5. (a) 求 $\frac{d}{dx}(x^2e^x)$ 及 $\frac{d}{dx}(xe^x)$ 。

(b) 由此，求 $\int x^2e^x dx$ 。