References: Introduction to Real Analysis (Bartle & Sherbert), Thomas Calculus 12th Edition

向量

向量屬於一種特殊的矩陣，通常用以表達**多維坐標**。

定義 1 (向量). 一個n-**維向量**包含n個元素，可視之爲n-**維空間**中的坐標，同時代表從原點指向該坐標的箭頭。

爲方便描述，記V_S為帶有S域的元素的向量集合。

定義 2 (向量加法). 在向量集合V_S中，若$\vec{x} = (x_i)_i = (x_1, x_2, \dots), \vec{y} = (y_i)_i = (y_1, y_2, \dots) \in V_S$，則

$$\vec{x} + \vec{y} := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots) = (x_i + y_i)_i$$

定義 3 (標量乘法). 在向量集合V_S中，若$\vec{x} = (x_i)_i = (x_1, x_2, \dots) \in V_S$，$\alpha \in S$，則

$$\alpha\vec{x} := (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots) = (\alpha x_i)_i$$

定義 4 (向量的量值). 對於任意向量$\vec{v}$，其量值定義爲$|\vec{v}|$，代表其長度。

向量空間

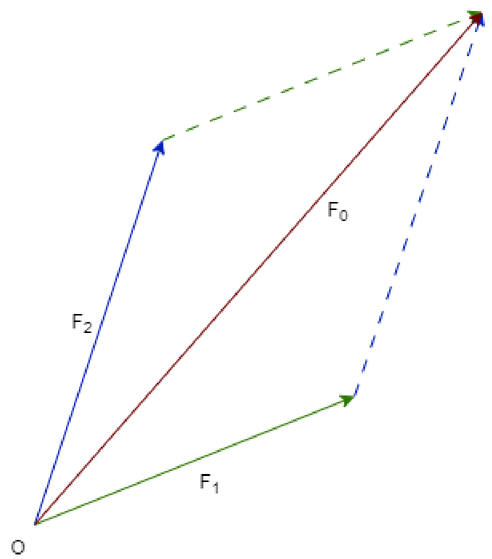
定義 5 (向量空間). 設V_S為向量集合，且$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V_S$， $\alpha, \beta \in S$。若V_S符合以下定理：

- 加法結合律：$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$。
- 加法交換律：$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{z}$。
- 加法單位元：$\vec{0} \in V_S$使得$\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$。
- 加法逆：$\forall \vec{x} \in V_S$, 存在$\vec{y} \in V_S$使得$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x} = \vec{0}$。
- 標乘結合律：$\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$。
- 標乘單位元：$1 \in S$使得$1\vec{x} = \vec{x}$。
- 分配律*1*：$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$。

- 分配律2：$(\alpha+\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{x}$。

示例. $\mathbb{R}$是一個向量空間。而且任何域也是向量空間。

示例. 在牛頓力學中討論力時，我們會以向量表示力的大小與方向。假設目前的討論僅限於平面（二維空間），並記施力點為原點O。



在上圖中可通過改變力量發生的先後次序來實現向量的平移，從而得出

$$\vec{F_0}=\vec{F_1}+\vec{F_2}$$

的關係式。又因二維向量可拆分爲水平向量及鉛垂向量兩個分量，故

$$\vec{F_0}=(|\vec{F_1}|\cos\theta+|\vec{F_2}|\cos\phi)\hat{\imath}+(|\vec{F_1}|\sin\theta+|\vec{F_2}|\sin\phi)\hat{\jmath}$$

其中$\hat{\imath}$和$\hat{\jmath}$分別代表水平單位向量及鉛垂單位向量。

欲考慮作功問題，我們定義以下計算方式

定義 6 (點積/內積). 兩向量$\vec{a},\vec{b}$的內積可定義爲

$$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\equiv\vec{a}\cdot\vec{b}:=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

其中θ為$\vec{a},\vec{b}$之間的夾角。

示例. 根據經典力學定義，作功方程爲

$$W=\vec{F}\cdot\vec{s}$$

其中W為作功純量，$\vec{F}$為施力向量，$\vec{s}$為位移向量。考慮內積定義，作功方程可寫成

$$W = |\vec{F}||\vec{s}|\cos\theta$$

其中θ為向量之間的夾角。

定理 (內積的性質). 對於$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$,

1. $\langle 0, \vec{a}\rangle = \langle \vec{a}, 0\rangle = 0$;
2. $\langle \vec{a}, \vec{a}\rangle \geq 0$，$\langle \vec{a}, \vec{a}\rangle = 0$當且僅當$\vec{a} \equiv 0$;
3. $\langle \vec{a}, x\vec{b} + z\vec{c}\rangle = x\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle + z\langle \vec{a}, \vec{c}\rangle$;
4. 若$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$，則$\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle = \langle \vec{b}, \vec{a}\rangle$。

命題. 向量$\vec{a}, \vec{b}$之間的夾角為

$$\theta = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

另外，若$\vec{a}$正交於$\vec{b}$（在$\mathbb{R}^2$為互相垂直），$\vec{a}, \vec{c}$平行，則根據定義

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 90^\circ = 0$$

及

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}||\vec{c}|\cos 0^\circ = |\vec{a}||\vec{c}|$$

因此

$$|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}|^2} = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a}\rangle}$$

定義 7 (基與正交基與標準正交基). 對於向量空間V_S，若$\{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \ldots, \vec{b_n}\} \subset V_S$為互不平行，即綫性獨立，同時對任意$\vec{v} \in V_S$，都存在$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in S$使得

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{b_k}$$

則稱$\{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \ldots, \vec{b_n}\}$為$V_S$的**基**。

若$\{\vec{\beta_1}, \vec{\beta_2}, \ldots, \vec{\beta_n}\} \subset V_S$為$V_S$的基而且對所有$i \neq j$，均有

$$\langle \vec{\beta_i}, \vec{\beta_j}\rangle = 0$$

則稱$\{\vec{\beta_1}, \vec{\beta_2}, \ldots, \vec{\beta_n}\}$為$V_S$的**正交基**。

若$\{\vec{\gamma_1}, \vec{\gamma_2}, \ldots, \vec{\gamma_n}\} \subset V_S$為$V_S$的正交基而且對所有$i$，均有

$$|\vec{\gamma_i}| = 1$$

則稱$\{\vec{\gamma_1}, \vec{\gamma_2}, \ldots, \vec{\gamma_n}\}$為$V_S$的**標準正交基**。

小記. 對於任何向量空間，標準正交基的構成并非唯一。舉例$\mathbb{R}$作爲$\mathbb{R}$的向量空間，1和-1均可作爲$\mathbb{R}$的標準正交基；$\mathbb{R}^2$作爲$\mathbb{R}$的向量空間，則

$$\{\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix} : \theta \in \mathbb{R}\}$$

均爲$\mathbb{R}^2$的標準正交基。

對於有標準正交基的向量空間，我們的討論會比較簡單：

定理. 設V_S為向量空間，$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$為$V_S$的標準正交基。若$v, u \in V_S$可寫作$v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$及$u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$，則

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

證明.

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle &= \langle\sum_{i=1}^n u_i e_i, \sum_{j=1}^n v_j e_j\rangle = \sum_{i=1}^n u_i \langle e_i, \sum_{j=1}^n v_j e_j\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j \langle e_i, e_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j \delta_{ij} = \sum_{\substack{i=j\\ 1\le i,j\le n}} u_i v_j = \sum_{i=1}^n u_i v_i\end{aligned}$$

□

衍理. 設V_S為向量空間，$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$為$V_S$的標準正交基。若$v \in V_S$可寫作$v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$，則

$$|v| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$$

而且

$$v_i = \langle v, e_i\rangle$$

爲方便描述，接下來會稱V_S的標準正交基為$\mathcal{O}(V_S) := \{e_i\}_{i\in I}$，$I$為索引集。

定理 (餘弦定理)**.** 設$u, v \in V_S$，則

$$|u - v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos\theta$$

其中θ是u, v的夾角。

證明. 設$u = \sum_{i\in I} u_i e_i, v = \sum_{i\in I} v_i e_i$，則

$$\begin{aligned}
|u-v|^2 &= \sum_{i\in I}(u_i - v_i)^2 \\
&= \sum_{i\in I}(u_i^2 + v_i^2 - 2u_i v_i) \\
&= \sum_{i\in I} u_i^2 + \sum_{i\in I} v_i^2 - 2\sum_{i\in I} u_i v_i \\
&= |u|^2 + |v|^2 - 2\langle u, v\rangle \\
&= |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos\theta
\end{aligned}$$

□

在三維空間中，存在外積：

定義 8 (外積). 假設$\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\} \subset \mathbb{R}^3$為$\mathbb{R}^3$的標準正交基，則定義$\times : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$為

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}, \hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}, \hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$$

外積的定義可考慮面積與體積的計算原理：考慮三個單位向量$\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$的乘積為體積及任意兩個向量的乘積為面積，基於$\hat{\imath} \times \hat{\jmath}$為$ij$平面的面積單位，而面積乘以高等於體積，故$V(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}) = (\hat{\imath} \times \hat{\jmath}) \cdot \hat{k}$為標量，使得$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$。

因此，我們可定義

定義 9 (面積與體積). 設$u, v, w \in \mathbb{R}^3$，則

$$A(u,v) := |u \times v| = \left\| \begin{matrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \right\|$$

$$V(u,v,w) := (u \times v)\cdot w = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

事實上，外積的計算無法以向量簡單作結。Kronecker就發現基本的向量無法解釋$i \times j = k$的情況（例如，爲何面積是向量而體積不是？），因此，他提出以**雙向量**(bi-vector)為$\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$下定義：

定義 10. 定義$\hat{i}=e_1e_2,\hat{j}=e_2e_3,\hat{k}=e_1e_3$，且$e_ie_j=-e_je_i$，$e_i^2=1$由此符合

$$\begin{aligned}\hat{i}\hat{j}&=e_1e_2e_2e_3=e_1e_3=\hat{k}\\ \hat{j}\hat{k}&=e_2e_3e_1e_3=-e_2e_3e_3e_1=-e_2e_1=e_1e_2=\hat{i}\\ \hat{k}\hat{i}&=e_1e_3e_1e_2=-e_3e_1e_1e_2=-e_3e_2=e_2e_3=\hat{j}\end{aligned}$$

上述定義可引申至對軸心的旋轉：$\hat{i}$為沿z軸逆時針旋轉90度；$\hat{j}$為沿x軸逆時針旋轉90度；$\hat{k}$為沿y軸逆時針旋轉90度。

事實上，在更高維的空間裏，向量的外積有以下定義

定義 11. 設$u=(u_i)_{i\in I},v=(v_i)_{i\in I}$，則外積為

$$u\wedge v=\begin{bmatrix}u_1v_1 & u_1v_2 & \cdots & u_1v_n\\ u_2v_1 & u_2v_2 & \cdots & u_2v_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ u_nv_1 & u_nv_2 & \cdots & u_nv_n\end{bmatrix}$$

定理. 設$u,v\in\mathbb{R}^n$，則平行四邊形面積爲

$$A(u,v)=|u||v|\sin\theta$$

其中θ為u和v的夾角。因此

$$|u\wedge v|=|u||v|\sin\theta$$

衍理. 設$u,v\in\mathbb{R}^n$，則

$$|u|^2|v|^2=\langle u,v\rangle^2+|u\wedge v|^2$$

外積的應用并不廣汎，因爲在高維空間其實很難定義内外，因此我們通常更集中於内積的運算。其中對於互補空間的探索可謂是將内積運用至極緻。

定義 12 (維度)**.** 若某向量空間V的標準正交基有n項綫性獨立元素，則稱V是一個n維空間。記$\dim V=n$。

定義 13 (補空間)**.** 設$V\subset\mathbb{R}^n$同時$\dim V=k<n$。若存在$V^\perp\subset\mathbb{R}^n$使得

1. $\dim V^\perp=n-k$及;
2. $\forall v\in V,\forall v^\perp\in V^\perp$使得

$$\langle v,v^\perp\rangle=0$$

則稱$V^\perp$為V的補空間。

因此，$V^\perp$通常被定義爲

$$V^\perp:=\{w\in\mathbb{R}^n:\langle w,v\rangle=0,\forall v\in V\}$$

向量函數

偏導數與全導數

方向導數

切面與法綫

二維極值與鞍點