

單元導數定義

由牛頓發揚光大的流數法，今時今日變成了以極限定義的導數。

定義 1 (導數定義). 若 f 在 c 可導，則其導數 $f'(c)$ 為

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

定義 2 (現代導數嚴謹定義). L 為 f 在 c 的導數當：對於任意 $\epsilon > 0$, 若存在 $\delta(\epsilon) > 0$ 使得對於 $0 < |x - c| < \delta(\epsilon)$,

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \epsilon$$

則寫 $f'(c) = L$ 。

定理. 若 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $c \in I$ 可微，則 f 在 $c \in I$ 連續。

證明. 導數存在，則

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} (f(x) - f(c)) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \lim_{x \rightarrow c} (x - c) \\ &= f'(c) \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

因此 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ 使得 f 在 $c \in I$ 連續。 □

導數的目的在於處理函數的變化：從算式可見，導數取自 f 的變化除以變量 x 的變化，即可理解為變化的比例，等於變化比率。簡而言之，導數為函數的斜率。

定理 (導數的性質). 導數擁有以下性質：

1. 綫性性：對於連續函數 f, g ，常數 α, β ， $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ 。
2. 乘積法則：對於連續函數 f, g ， $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ 。
3. 除法定則：對於連續函數 f, g ， $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ 。

定理 (鏈鎖律). 對於複合函數 $h := (g \circ f)$,

$$h' = (g' \circ f) \cdot (f')$$

定理 (逆函數). 對於逆函數 $g := f^{-1}$,

$$g' = \frac{1}{f' \circ g}$$