數集

定義 1 (元素). 設X為數集，則

$$x \in X$$

表示x為數集X的成員；相反，$x \notin X$表示x并非數集X的成員。

例子. 設$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，則$1 \in X$，$0 \notin X$.

定義 2 (數集等價). 設X及Y皆爲數集，其中Y為X重複附帶$x \in X$，則寫$Y = X$.

例子. 設$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$及$Y = \{1, 1, 2, 3, 4, 5\}$，則$X = Y$.

定義 3 (子集). 設X及Y皆爲數集，則

$$X \subset Y$$

表示所有X的成員都是Y的成員。我們稱X為Y的子集。

例子. 設$X = \{1, 2, 3\}$，$Y = \{1, 2, 3, 4\}$，$Z = \{0, 1\}$。則$X \subset Y$ 但$Z \not\subset Y$。

設理. 設X, Y及Z皆爲集合，則以下成立：

1. $X \subset X$。

2. 若$X \subset Y$及$Y \subset Z$，則$X \subset Z$。

3. 若$X \subset Y$及$Y \subset X$，則$X = Y$。

證明.

1. 所有$x \in X$都自然為X的成員。
2. 若$X \subset Y$及$Y \subset Z$，則以下假設成立：
   (a) 所有$x \in X$都是Y的成員。
   (b) 所有$y \in Y$都是Z的成員。

   則$x \in X$令$x \in Y$，則令$x \in Z$。所以 $X \subset Z$.
3. 所有$x \in X$都是Y的成員，因此Y有可能擁有X以外的成員。但$Y \subset X$，所以Y不可能擁有X以外的成員。所以$Y = X$。

□

由於我們需要面對無限集合，因此我們不可能每一次都明確的寫下所有元素。於是有以下一種定義數集的方式：

定義 4. *設X爲數集和判斷式P，則有且僅有一個X的子集令$P(x)$對於所有子集的成員x皆為正確。此子集記爲*

$$\{x \in X | P(x)\} \text{ 或 } \{x \in X : P(x)\}$$

例子. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 = 0\}$等價$\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

定義 5 (空集). *若X沒有成員，我們稱之爲**空集**，記$\emptyset$。*

定義 6 (運算封閉). *設S爲一個非空數集，若對任意$a, b \in S$均有$a + b \in S$，則說S關於加法封閉。同樣可以對減法、乘法、除法定義封閉性。*

定義 7 (數域). *設S為數集，至少包含兩個數，並且關於加、減、乘、除四則運算封閉，則稱S為**數域**。*

例子 (實數域). $\mathbb{R}$為包含所有實數之集合，亦是數域。

函數

定義 8 (映射、定義域、值域). *若f為**映射**，擁有**定義域**D和**值域**R，則以下三種敘述均可描述f：*

- $f : D \to R$;
- $x \in D$, $f(x) \in R$, $x \mapsto f(x)$;
- $f(x) =$以x建立/表述的算式。

代表f爲將D的成員映射至R的方式。

公設 (函數基本性質). *任何可稱爲**函數**的映射$f : D \to R$，必須符合以下性質：*

1. *存在性：若$x \in D$，則$f(x) \in R$；*
2. *唯一性：若$x, y \in D$且$x = y$，則$f(x) = f(y)$。*

定義 9 (實函數). *若$f : D \to R$為函數，值域$R = \mathbb{R}$(或$R \subset \mathbb{R}$)，我們稱之爲**實函數**。*

定義 10 (複函數). *若$f : D \to R$為函數，值域$R = \mathbb{C}$(或$R \subset \mathbb{C}$)，我們稱之爲**複函數**。*

衍理. *任何實函數都是複函數。*