

全卷60分，限時24小時。請將答案以pdf形式提交。

函數基礎

1. (10分) 設 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 為實函數。

- (a) (4分) 證明 $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ 為偶函數； $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ 為奇函數。
- (b) (2分) 證明對於任意實函數，均可拆分為奇函數及偶函數兩部分。
- (c) 現假設對於任意 $x, y \in \mathbb{R}$ ，函數 f 都符合以下函數等式

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

- i. (3分) 證明對於任意 $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$;
- ii. (1分) 由此，證明 f 的偶函數部分必定大於或等於0。

二項式展開

1. (5分) 記 $C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ 。

- (a) (2分) 求 $\sum_{k=0}^n C_k^n$ 。
- (b) (3分) 證明 $\sum_{\text{奇數 } k} C_k^n = \sum_{\text{偶數 } k} C_k^n$ 。

2. (5分) 記 $\binom{n}{x_1, x_2, \dots, x_k} = \frac{n!}{x_1!x_2!\dots x_k!}$ 。

- (a) (3分) 證明若 $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$,

$$\binom{n}{x_1, x_2, \dots, x_k} = C_{x_1}^n C_{x_2}^{n-x_1} \dots C_{x_{k-1}}^{n-x_1-x_2-\dots-x_{k-2}}$$

- (b) (2分) 由此，證明對於任意正整數 n ,

$$(a+b+c)^n = \sum_{\substack{i+j+k=n, \\ i,j,k \text{ 為非負整數}}} \binom{n}{i, j, k} a^i b^j c^k$$

數學歸納法

1. (2分) 利用數學歸納法，證明對於任意正整數 n ， $n! \leq n^n$ 。
2. (3分) 利用數學歸納法，證明對於任意正整數 n 及 $-1 < r < 1$ ，

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k^{m+k-1} r^k = \frac{(-1)^{n-1}}{(1-r)^n}$$

三角函數

1. (7分) 設 $i^2 = -1$ 。證明對於任意整數 n ，

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

2. (8分) 考慮 $\cos(72^\circ) = \cos(108^\circ)$ ，證明 $\cos(18^\circ) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ 。

極限

1. (5分) 設 f, g, h 為實函數，並且 $f(0) = g(0) = h(0) = 0$ 。若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-g(x)}{h(x)} = 9$ ，求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - e^{g(x)}}{\sin(h(x))}$$

微分原理

1. (10分) 設 $f(x) = \sin \pi x$ 。
 - (a) (2分) 求 $f'(0)$;
 - (b) (8分) 設 (g_n) 為函數數列，定義 $g_1(x) = f(x)$ 及 $g_n(x) = f(g_{n-1}(x))$ 。證明對於任意正整數 n ， $g'_n(0) = \pi^n$ 。
2. (5分) 寫出令 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 沒有頂點的條件，已知 a, b, c, d 均為實數及 $a \neq 0$ 。