1. 利用$\epsilon-\delta$定義，證明微分的乘積法則：對於可微實函數f,g,

$$(fg)' = f'g + fg'$$

即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

2. 設$f(x) = \sin\pi x$。設(g_n)為函數數列使得$g_1(x) = f(x)$及$g_n(x) = f(g_{n-1}(x))$。證明對於任意正整數n，$g_n'(0) = \pi^n$。

3. 設$E(x)$為可微實函數，且$\forall x\in\mathbb{R}, E'(x) > 0$。此稱爲單調遞升函數。

   (a) 證明$E(x)$最多只有一個實根。

   (b) 定義單調遞降可微實函數D為$\forall x\in\mathbb{R}, D'(x) < 0$。證明單調遞升實函數與單調遞降實函數只能有最多一個相交點。

4. 設$f(x) = e^{-x^2}$。求$f(x)$及$-f(x)$所包裹的區域內最大圓形與最大正方形的面積之比。

5. 運用數學歸納法，證明$P_n(x) := \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)$的所有根均爲實根，而且均存在於$-1$與$1$之間。

6. 已知對於任意$\delta > 0$, $\forall x\in(-\delta,\delta)$,$-kx+c\leq f(x)\leq kx+c$。證明

$$\lim_{x\to 0} x^{f(x)-c} = 1$$

7. 求下列函數的泰勒展開式至x^5:

   (a) $\sin x$

   (b) $\cos x$

   (c) e^x

8. 利用牛頓分割法，解$xe^x = 1$准確至五位小數。