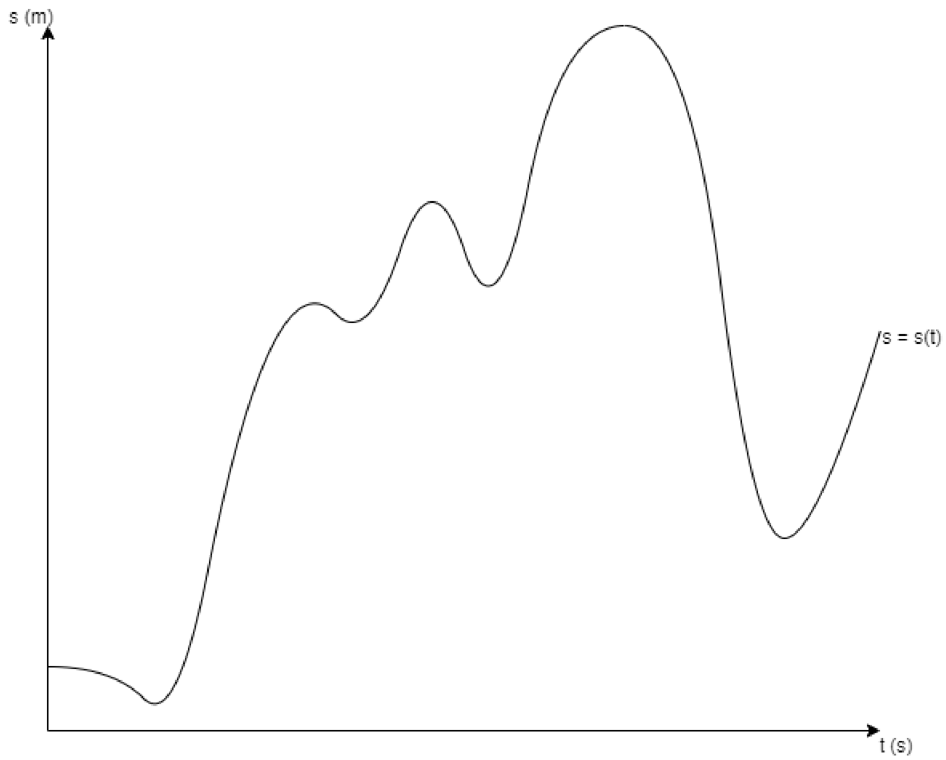
積分起源

討論積分起源，我們依然追溯到牛頓與萊布尼茨的時代。當時牛萊之爭除了微分學的發現以外，還有積分學的建立。雖説兩人整得如火如荼，但我們有著漁翁之利，可以坐享其成。

但無論如何，之所以存在積分學，是由於一道最基本的問題：假設一物體移動速度$v(t) : (0, \infty) \to \mathbb{R}$可以參數$t$量化，則可以下圖表示速度-時間之關係：

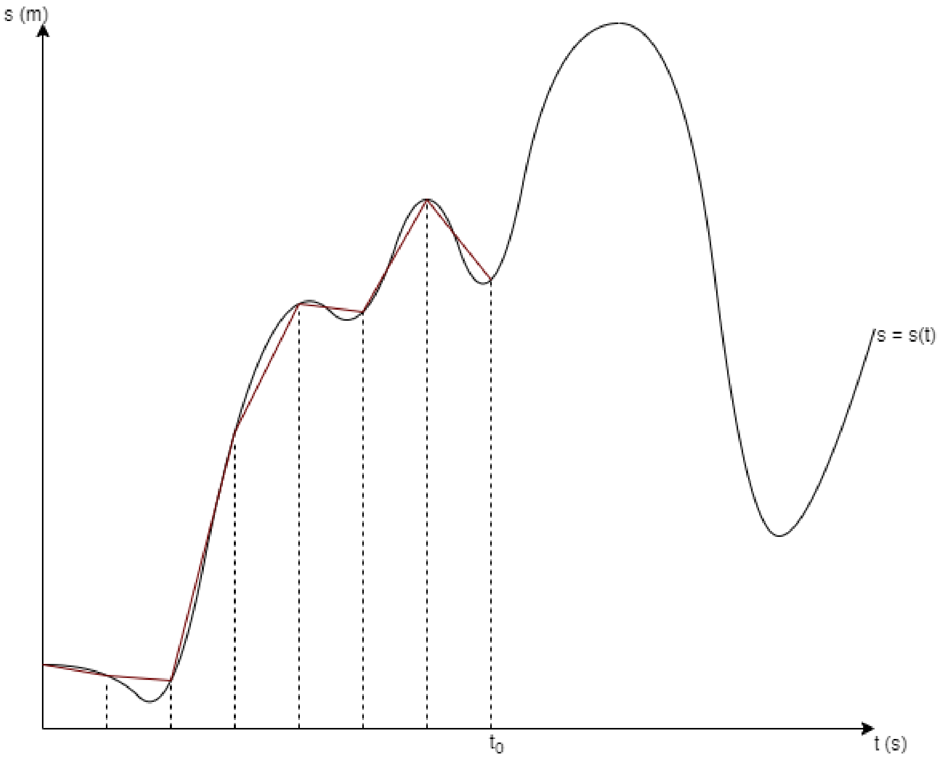


若欲求得任意時間的位移，考慮在極短時間內的瞬間位移相等於瞬時速度乘以時間跨度：設$s(t) : (0, \infty) \to \mathbb{R}$為位移函數，則

$$\Delta s(t) = v(t) \Delta t$$

并且總位移應由所有所有瞬間的瞬間位移總和得出，則可考慮將時間均分爲n段瞬間，記$t = 0$為初始時間及t_f為終結時間，并且$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = t_f$，並記對其求和：

$$s(t_f) = \sum_{k=0}^{n-1} (s(t_{k+1}) - s(t_k)) = \sum_{k=0}^{n-1} v(t_k)(t_{k+1} - t_k)$$



將$n \to \infty$便可定義

$$s(t_f) = \int_0^{t_f} v(t)dt$$

若視t_f為變量，則稱其爲**不定積分**；反之，則稱其爲**定積分**。

積分的含義

從以上簡介可以看出，積分的目的在於加法；更明確的説法是定積分在於計算面積。與中學教程不同，我們會先觀察定積分，再闡述不定積分（實際上他們只差一步）。

黎曼積分法

黎曼對於曲綫下的面積有著相當扎實的幾何見解，他認爲每一條連續曲綫都可以用分割法的方式進行求積，而且**無論分割的方法如何隨機，若分割數量趨向無限，其結果都是恆定的**。

藉著以上見解，黎曼將某區間$[a, b]$拆分爲n個區間，使得$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$並記第$k$個區間為

$$P_k := [a_{k-1}, a_k]$$

因應P_k的有限性及函數f的連續性，隨機於P_k內抽取變量$t_k \in P_k = [a_{k-1}, a_k]$，可得對於$P_k$上的曲綫面積的估算

$$f(t_k)\|P_k\|$$

其中$\|P_k\|$代表區間P_k的寬度。更進一步可定義

$$\|P\| := \max \|P_k\|$$

因此，黎曼給出的積分方法如下

定義 1 (黎曼積分). *設f為$[a, b]$上的連續函數，令存在$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$使得$a =: a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n := b$，並設$P := \{(t_k, P_k) : 1 \le k \le n\}$為**標識區間集**使得$t_k \in P_k = [a_{k-1}, a_k]$，則定義$f$在$[a, b]$上的$P$-**估算面積**為*

$$S(f; P) := \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\|P\|$$

而精確面積為

$$\int_a^b f = S(f) := \lim_{n\to\infty} S(f; P)$$

另外，若存在$L \in \mathbb{R}$使得對於$\varepsilon > 0$，$|\int_a^b f - L| < \varepsilon$，則稱$f$為**黎曼可積**的函數，記爲$f \in \mathcal{R}[a, b]$。

黎曼積分屬於概念上的積分，實際情況還需要確定一種t_k的取值方法。我們先論證黎曼積分的存在性和唯一性，再討論實際應用會如何處理。

定理. *若f為有限區間内的連續函數，則f的黎曼積分有界且唯一。*

證明. 由於

$$\min\{\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\|P\|\} \le \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\|P\| \le \max\{\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\|P\|\}$$
$$\sum_{k=1}^{n} \min\{f(t_k)\}\|P\| \le \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\|P\| \le \sum_{k=1}^{n} \max\{f(t_k)\}\|P\|$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \min\{f(t_k)\}\|P\| \le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\|P\| \le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \max\{f(t_k)\}\|P\|$$

對於$\|P\| \to 0$，可視$\min\{f(t_k)\} = \max\{f(t_k)\}$，因此$\int_a^b f$唯一存在。 □

由於黎曼積分的定義基於幾何分割而定，因此初始的黎曼積分存在許多不確定性。后經過一系列修訂，終於發展一些可用理論。

定理. 若$g \in \mathcal{R}[a,b]$且除了有限點以外$f = g$成立，則$f \in \mathcal{R}[a,b]$而且$\int_a^b f = \int_a^b g$。

證明. 證明可拆分爲兩部分，先證明對於一個不等點理論成立，隨後以歸納法論證。

設$c \in (a,b)$並設$L = \int_a^b g$。設當$x \neq c$時$f(x) = g(x)$。對於任意標識區間集，$S(f;P) = S(f;P)$除了至多兩項，即

$$[\cdot, c], [c, \cdot]$$

因此

$$\begin{aligned}
|S(f;P) - S(g;P)| &= |\sum (f(x_i) - g(x_i))(x_i - x_{i-1})| \\
&= |(f(c) - g(c))(c - x_{k-1}) + (f(c) - g(c))(x_{k+1} - c)| \\
&< 2(|f(c)| + |g(c)|)\|P\|
\end{aligned}$$

由此設$\varepsilon > 0$，$\delta_1 < \frac{\varepsilon}{4(f(|c|)+|g(c)|)}$，以及$\|P\| < \delta_2$使得$|S(g;P) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$。由此設$\delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$可得

$$\begin{aligned}
|S(f;P) - L| &< |S(f;P) - S(g;P)| + |S(g;P) - L| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

因此，$f \in \mathcal{R}[a,b]$。

利用歸納法，不難得出對於有n個不等點的情況，把$[a,b]$拆分爲$[a,c]$及$[c,b]$使得$[a,c]$上有$n-1$個不等點，由此證畢。 □

既然黎曼積分肯定有唯一值，那麼如何計算就成爲了一大問題，畢竟黎曼所提出的概念本就相當抽象，隨機取值雖然可以概括算法，但人類不能將之有效計算。我們給出下列普遍算法，以確定黎曼積分的值。

以下考慮函數$y = x^2$在$[-1,1]$區間的值。

左取值法

對於每一個分區間$[x_i, x_{i+1}]$，取$f(x_i)$作計算值，則寫

$$\int_a^b f = \sum f(x_i)\|P\|$$

例子. 設$f(x)=x^2$，則

$$\begin{aligned}
S(f;P) &= \sum_{i=0}^{2n-1}(x_i^2)\frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n}[(-1)^2+(\frac{1-n}{n})^2+\cdots+(\frac{n-1}{n})^2] \\
&= \frac{1}{n}[0^2+2\cdot(\frac{1}{n})^2+\cdots+2\cdot 1^2-1^2] \\
&= \frac{1}{n^3}[2(1^2+2^2+\cdots+n^2)-n^2] \\
&= \frac{1}{n^3}[2\cdot\frac{1}{6}(n)(n+1)(2n+1)-n^2] \\
&= \frac{2}{3}+\mathcal{O}(\frac{1}{n})
\end{aligned}$$

因此，$\int_{-1}^{1} f = \lim_{n\to\infty} S(f;P) = \frac{2}{3}$.

右取值法

對於每一個分區間$[x_i, x_{i+1}]$，取$f(x_{i+1})$作計算值，則寫

$$\int_a^b f = \sum f(x_{i+1})\|P\|$$

例子. 設$f(x)=x^2$，則

$$\begin{aligned}
S(f;P) &= \sum_{i=0}^{2n-1}(x_{i+1}^2)\frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n}[(\frac{1-n}{n})^2+\cdots+(\frac{n-1}{n})^2+1^2] \\
&= \frac{1}{n}[0^2+2\cdot(\frac{1}{n})^2+\cdots+2\cdot 1^2-1^2] \\
&= \frac{1}{n^3}[2(1^2+2^2+\cdots+n^2)-n^2] \\
&= \frac{1}{n^3}[2\cdot\frac{1}{6}(n)(n+1)(2n+1)-n^2] \\
&= \frac{2}{3}+\mathcal{O}(\frac{1}{n})
\end{aligned}$$

因此，$\int_{-1}^{1} f = \lim_{n\to\infty} S(f;P) = \frac{2}{3}$.

中取值法

對於每一個分區間$[x_i, x_{i+1}]$，取$f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2})$作計算值，則寫

$$\int_a^b f = \sum f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2})\|P\|$$

例子. 設$f(x) = x^2$，則

$$
\begin{aligned}
S(f;P) &= \sum_{i=0}^{2n-1} (\frac{x_i + x_{i+1}}{2})^2 \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n}[(\frac{1-2n}{2n})^2 + (\frac{3-2n}{2n})^2 + \cdots + (\frac{2n-1}{2n})^2] \\
&= \frac{1}{n}[2 \cdot (\frac{1}{2n})^2 + \cdots + 2 \cdot (\frac{2n-1}{2n})^2] \\
&= \frac{1}{2n^3}[(1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2)] \\
&= \frac{1}{2n^3}[\frac{1}{6}(2n)(2n+1)(4n+1) - 4 \cdot \frac{1}{6}(n)(n+1)(2n+1)] \\
&= \frac{1}{12n^3}(2n+1)[(2n)(4n+1) - 4(n)(n+1)] \\
&= \frac{1}{6n^3}(2n+1)(2n-1)(n) \\
&= \frac{2}{3} + \mathcal{O}(\frac{1}{n})
\end{aligned}
$$

因此，$\displaystyle\int_{-1}^{1} f = \lim_{n\to\infty} S(f;P) = \frac{2}{3}.$

梯形法則

對於每一個分區間$[x_i, x_{i+1}]$，取$\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$作計算值，則寫

$$\int_a^b f = \sum \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \|P\|$$

例子. 設$f(x) = x^2$，則

$$
\begin{aligned}
S(f;P) &= \sum_{i=0}^{2n-1} \frac{x_i^2 + x_{i+1}^2}{2} \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{2}(\text{左和} + \text{右和}) \\
&= \frac{1}{2}(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \mathcal{O}(\frac{1}{n})) \\
&= \frac{2}{3} + \mathcal{O}(\frac{1}{n})
\end{aligned}
$$

因此，$\displaystyle\int_{-1}^{1} f = \lim_{n\to\infty} S(f;P) = \frac{2}{3}.$

黎曼積分的限制

1. 黎曼利用矩形進行估算，但若函數存在無限多個未定義點，則不能計算。

2. 對於不定積分的不確定性。

3. 對於瑕積分的收斂問題。

勒貝格積分法

勒貝格考慮到黎曼積分發有許多隱形問題，決定對積分進行重新定義。他首先想到的就是如何去判斷積分的有效區域，以解決黎曼積分第一個限制。

測度理論引論

'不是因爲算得到才需要，而是因爲有需要才計算' - 勒貝格。

對於積分問題，勒貝格與黎曼持有相反的看法。勒貝格認爲，積分并不是幾何原理的產物，而是如同概率一般，屬於純粹算術的產物。

簡單的説明，就是對於圖形的面積，黎曼習慣使用分割法計算，這樣的計算方式局限了他對於有無限空洞的圖形的描述。此時勒貝格問了一句："難道你能確定圖形面積的上限嗎？你怎麼確定圖形的面積真的如你所算呢？"對此黎曼表示無可奉告。但勒貝格說："我用填補法找出了上限，再證明那些空洞有限，可好？"

至此，測度理論成型，并且將"可算"的意義更進一步的討論。其中最值得認識的就是有理數與無理數的多與少。

萊布尼茨法則

由於導數與積分的特性，我們有微積分的基本定理：

定理 (微積分基本定理). 設f為區間$[a,b]$上連續函數。設$x \in [a,b]$，則

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

證明. 令$F' = f$，則

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)dt = f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[F(x) - F(a)] = F'(x) = f(x)$$

□

定理. 設f為$\mathbb{R}$上的連續函數。設$[a(x), b(x)] \subset \mathbb{R}$則

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$$

積分方法

基本積分定則

設理. *1.* $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ 儅$n \neq -1$;

2. $\int x^{-1} dx = \ln|x| + C$;

3. $\int e^x dx = e^x + C$;

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$;

6. $\int \tan x dx = \ln(|\sec x|) + C$;

7. $\int \sec x dx = \ln(|\sec x + \tan x|) + C$;

8. $\int \csc x dx = -\ln(|\csc x + \cot x|) + C$;

9. $\int \cot x dx = \ln(|\sin x|) + C$;

10. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$;

11. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$.

換元代入法

例子. 設$I(x) = \int \frac{2x+1}{x^2+x+2} dx$，代$u = x^2 + x + 2$ 可得 $du = (2x+1)dx$，則

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{2x+1}{x^2+x+2} dx \\ &= \int \frac{1}{u} du \\ &= \ln|u| + C \\ &= \ln|x^2 + x + 2| + C \end{aligned}$$

參數化代入法

例子. 設$I(x)=\int \frac{1}{x^2+a^2}dx$，代$x=a\tan\theta$ 可得 $dx=a\sec^2\theta d\theta$，則

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int \frac{1}{x^2+a^2}dx \\
&= \int \frac{a\sec^2\theta}{a^2\tan^2\theta+a^2}d\theta \\
&= \int \frac{1}{a}d\theta \\
&= \frac{1}{a}\theta+C \\
&= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C
\end{aligned}$$

部分分數法

對於有理函數，我們不妨通過部分分數法完成積分：

例子. 設$I(x)=\int \frac{1}{(x-1)^2(x-2)}dx$，考慮

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)} \equiv \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-2}$$

其中A,B,C為未知常數。求之則得

$$A=-1, B=-1, C=1$$

由此，

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int \frac{1}{(x-1)^2(x-2)}dx \\
&= \int \frac{-1}{x-1}+\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-2}dx \\
&= -\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}+\ln|x-2|+C
\end{aligned}$$

部分積分法

費曼積分法

體積運算

圓盤法

外殼法

多元積分

雙重積分

三重積分

向量函數積分

綫積分

曲面積分