

實域拓展的三角函數

回顧直角三角形及三角函數：

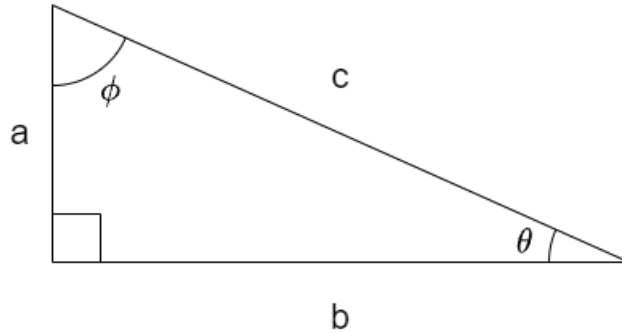


Figure 1: 邊長為 a, b, c 的直角三角形

對以上直角三角形，我們定義 c 為斜邊。

對於 θ ，我們稱 a 為 θ 的對邊， b 為 θ 的鄰邊；對於 ϕ ，我們稱 b 為 ϕ 的對邊， a 為 ϕ 的鄰邊。

定義 1 (三角函數). 參考上述直角三角形，我們定義以下三角函數：

- 正弦函數(*sine*): $\sin \theta = \frac{a}{c}$ 。
- 餘弦函數(*cosine*): $\cos \theta = \frac{b}{c}$ 。
- 正切函數(*tangent*): $\tan \theta = \frac{a}{b}$ 。
- 正割函數(*secant*): $\sec \theta = \frac{c}{b}$ 。
- 餘割函數(*cosecant*): $\csc \theta = \frac{c}{a}$ 。
- 餘切函數(*cotangent*): $\cot \theta = \frac{b}{a}$ 。

小記. 在描述三角函數的正整數次幂時，我們會寫 $\sin^n \theta := (\sin \theta)^n$ 。但留意此寫法只適用於 n 為正整數的情況。一般而言，函數 f 的次幂以 $(f)^n$ 記之。

引理 (畢氏定理). 參考上述直角三角形，則以下等式成立：

$$a^2 + b^2 = c^2$$

設理 (恆等式). 參考上述直角三角形, 有以下恆等式:

1. $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$;
2. $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$;
3. $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$, $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$, $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$;
4. $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$, $\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$;
5. $\sin \theta = \cos \phi$, $\sin \phi = \cos \theta$.

三角函數在圓上的拓展

在代數幾何學中, 一般考慮圓形為圓心與圓周的程差公式: 考慮半徑為 r 的圓並設圓心於原點 $(0, 0)$, 則任何位於圓周上的點 $P(x, y)$, 其與圓心的距離為:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r \implies x^2 + y^2 = r^2$$

若設 $r = 1$, 我們稱其為**單位圓**。留意圓形公式與三角恆等式 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 的相似性, 並參考下圖:

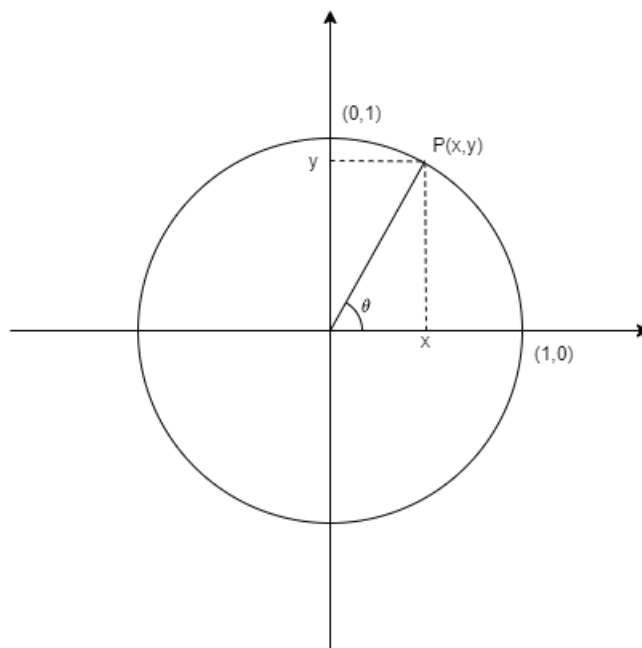


Figure 2: 半徑為1的圓

由此得出, 對於半徑為1的圓, 其坐標 (x, y) 亦可寫作 $(\cos \theta, \sin \theta)$ 。以此為鑒, 將 $\sin \theta$ 與 $\cos \theta$ 的定義域從 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ 拓展至 $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, 則有以下定義:

定義 2 (象限). 按一個圓的角度 θ 分類，給出以下名稱：

- 第一象限(I): $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$;
- 第二象限(II): $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$;
- 第三象限(III): $180^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$;
- 第四象限(IV): $270^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

第一象限為基本三角形的角度象限，至於第二、三、四象限，考慮以下圖像：

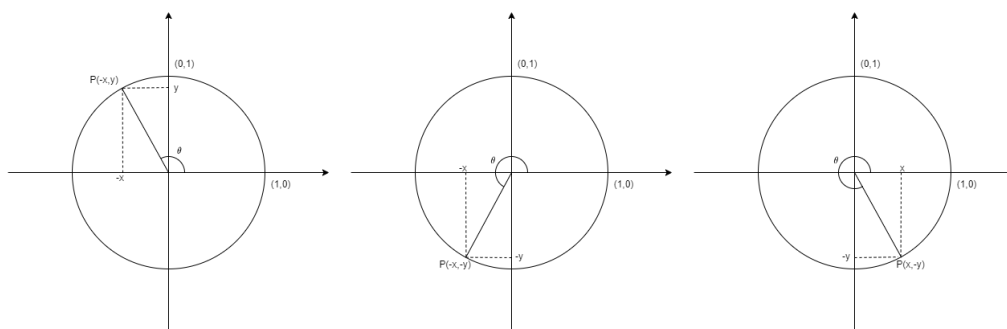


Figure 3: 第二、三、四象限的展現

因此，對於三角函數在圓上的拓展，我們給出以下定義：

定義 3 (圓拓展三角函數). 設 $P(x, y)$ 為單位圓上的一點，而 θ 為 $(1, 0)$ 展至 P 的角度，則

$$x = \cos \theta, y = \sin \theta$$

衍理. 設 $P(x, y)$ 為半徑 r 的圓上的一點，而 θ 為 $(r, 0)$ 展至 P 的角度，則

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

小記. 考慮 $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ 的值，第一象限給出所有(All)函數均為正數，第二象限給出 $\sin \theta$ 為正數，第三象限給出 $\tan \theta$ 為正數，第四象限給出 $\cos \theta$ 為正數。故引稱C-A-S-T圖以便考慮三角函數的符號。

至於如何求出此拓展函數的值，考慮以旋轉求出第二象限的數值：設 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ，則 $90^\circ \leq \theta + 90^\circ \leq 180^\circ$ 。考慮下圖：

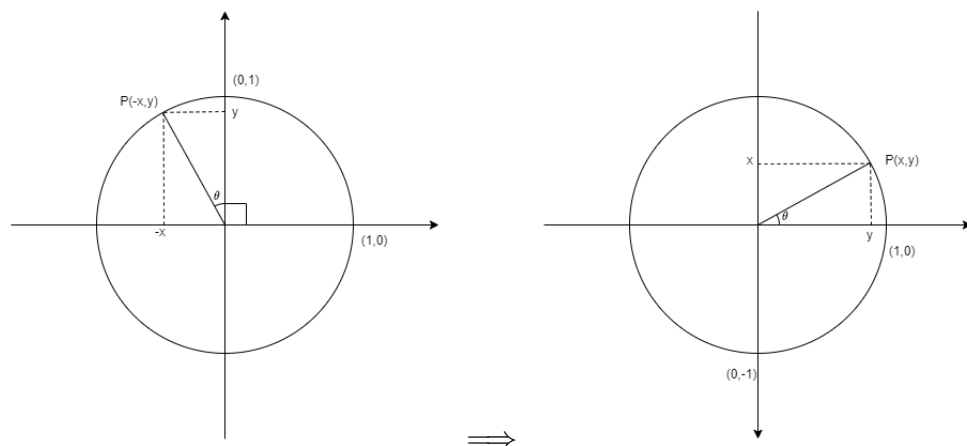


Figure 4: 以順時針方向旋轉 90°

留意 $\sin(\theta + 90^\circ) = y = \cos \theta$, $\cos(\theta + 90^\circ) = -x = -\sin \theta$ 。因此得出

$$\begin{aligned} \sin(\theta + 90^\circ) &= \cos \theta, & \cos(\theta + 90^\circ) &= -\sin \theta, & \tan(\theta + 90^\circ) &= -\cot \theta \\ \sin(\theta + 180^\circ) &= -\sin \theta, & \cos(\theta + 180^\circ) &= -\cos \theta, & \tan(\theta + 180^\circ) &= \tan \theta \\ \sin(\theta + 270^\circ) &= -\cos \theta, & \cos(\theta + 270^\circ) &= \sin \theta, & \tan(\theta + 270^\circ) &= -\cot \theta \end{aligned}$$

因圓形每 360° 為一周期，故可定義：

定義 4 (三角函數的周期性). $\sin(\theta + 360^\circ) = \sin \theta$, $\cos(\theta + 360^\circ) = \cos \theta$

定理. 設 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ 為圓拓展三角函數, $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, 則：

$$\begin{aligned} \sin(\pm\theta) &= \pm \sin \theta, & \cos(\pm\theta) &= \cos \theta, & \tan(\pm\theta) &= \pm \tan \theta \\ \sin(90^\circ \pm \theta) &= \cos \theta, & \cos(90^\circ \pm \theta) &= \mp \sin \theta, & \tan(90^\circ \pm \theta) &= \mp \cot \theta \\ \sin(180^\circ \pm \theta) &= \mp \sin \theta, & \cos(180^\circ \pm \theta) &= -\cos \theta, & \tan(180^\circ \pm \theta) &= \pm \tan \theta \\ \sin(270^\circ \pm \theta) &= -\sin \theta, & \cos(270^\circ \pm \theta) &= \pm \cos \theta, & \tan(270^\circ \pm \theta) &= \mp \tan \theta \end{aligned}$$

衍理. 設 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ 為圓拓展三角函數, θ 為任意角度, 則：

$$\begin{aligned} \sin(\pm\theta) &= \pm \sin \theta, & \cos(\pm\theta) &= \cos \theta, & \tan(\pm\theta) &= \pm \tan \theta \\ \sin(90^\circ \pm \theta) &= \cos \theta, & \cos(90^\circ \pm \theta) &= \mp \sin \theta, & \tan(90^\circ \pm \theta) &= \mp \cot \theta \\ \sin(180^\circ \pm \theta) &= \mp \sin \theta, & \cos(180^\circ \pm \theta) &= -\cos \theta, & \tan(180^\circ \pm \theta) &= \pm \tan \theta \\ \sin(270^\circ \pm \theta) &= -\sin \theta, & \cos(270^\circ \pm \theta) &= \pm \cos \theta, & \tan(270^\circ \pm \theta) &= \mp \tan \theta \end{aligned}$$

定義 5 (弧度). 依照圓周計算, 定義**弧度**為角度對應的單位弧長路徑, 並以 rad 為單位 (使用時可忽略單位不寫)。 π 對應 180° 。

衍理. 設 $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ 為圓拓展三角函數, θ 為任意角度, 則:

$$\begin{aligned} \sin(\pm\theta) &= \pm \sin \theta, & \cos(\pm\theta) &= \cos \theta, & \tan(\pm\theta) &= \pm \tan \theta \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) &= \cos \theta, & \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) &= \mp \sin \theta, & \tan\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) &= \mp \cot \theta \\ \sin(\pi \pm \theta) &= \mp \sin \theta, & \cos(\pi \pm \theta) &= -\cos \theta, & \tan(\pi \pm \theta) &= \tan \theta \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm \theta\right) &= -\sin \theta, & \cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm \theta\right) &= \pm \cos \theta, & \tan\left(\frac{3\pi}{2} \pm \theta\right) &= \mp \cot \theta \end{aligned}$$

逆三角函數

考慮三角函數作為函數的可逆性並不理想 (不符合單射性), 故對於逆三角函數的討論, 雖稱其為逆函數, 卻視之為逆映射。

定義 6 (三角函數的逆函數). 對於逆三角函數, 給出以下定義:

$$\begin{aligned} \arcsin : \{-1 \leq x \leq 1\} &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto \{\theta \in \mathbb{R} : \sin \theta = x\} \\ \arccos : \{-1 \leq x \leq 1\} &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto \{\theta \in \mathbb{R} : \cos \theta = x\} \\ \arctan : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto \{\theta \in \mathbb{R} : \tan \theta = x\} \end{aligned}$$

同理, 對於另外三個三角函數:

$$\begin{aligned} \operatorname{arcsec} : \{-1 \leq x \leq 1\} &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto \{\theta \in \mathbb{R} : \sec \theta = x\} \\ \operatorname{arccsc} : \{-1 \leq x \leq 1\} &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto \{\theta \in \mathbb{R} : \csc \theta = x\} \\ \operatorname{arccot} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto \{\theta \in \mathbb{R} : \cot \theta = x\} \end{aligned}$$

小記. 留意前綴‘*arc*’, 其意義為‘求弧度’。因此意義上與求角度是一樣的, 惟需注意的是因應三角函數的周期性, 符合條件的結果有無窮多項, 因此定義以數集表示。通常所求角度在 0 至 2π 之間, 對應結果有兩項。若限於 0 至 $\pi/2$ 之間, 則可視為逆函數, 亦是常規解釋, 分別記為 $\sin^{-1}, \cos^{-1}, \tan^{-1}, \sec^{-1}, \csc^{-1}, \cot^{-1}$ 。

設理. 對於 $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \arcsin(\sin x) &= \{2n\pi + x, (2n+1)\pi - x : n \text{ 為整數}\} \\ \arccos(\cos x) &= \{2n\pi \pm x : n \text{ 為整數}\} \\ \arctan(\tan x) &= \{n\pi + x : n \text{ 為整數}\} \end{aligned}$$

三角函數的和積互化

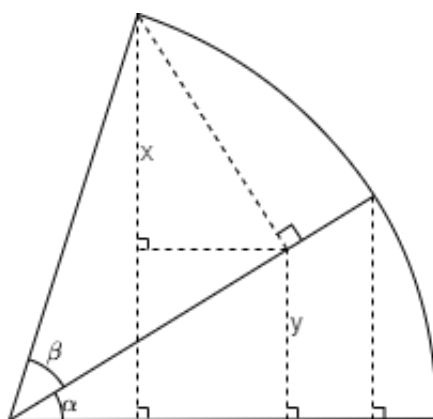
目前已知特殊角度的加減可簡化為單一角度的算式，如此衍伸問題：對於任意角度 α, β ，若寫 $\sin(\alpha + \beta), \cos(\alpha + \beta), \tan(\alpha + \beta)$ ，能否將之簡化為 α 與 β 的三角函數算式呢？即是否有函數 f, g, h 使得

$$\sin(\alpha + \beta) = f(\sin \alpha, \sin \beta, \cos \alpha, \cos \beta, \tan \alpha, \tan \beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = g(\sin \alpha, \sin \beta, \cos \alpha, \cos \beta, \tan \alpha, \tan \beta)$$

$$\tan(\alpha + \beta) = h(\sin \alpha, \sin \beta, \cos \alpha, \cos \beta, \tan \alpha, \tan \beta)$$

從 $\sin(\alpha + \beta)$ 入手，考慮以下扇形



如上圖所示， $\sin(\alpha + \beta) = x + y$ 。又見

$$x = \sin \beta \cos \alpha, y = \cos \beta \sin \alpha$$

則 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$ 。

現求得 $\sin(\alpha + \beta)$ 的變化，則可通過代入求得其餘變化：

$$\begin{aligned}
 \sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \sin(-\beta) \cos \alpha \\
 &= \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha \\
 \cos(\alpha + \beta) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos(-\beta) + \sin(-\beta) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\
 &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\
 \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) \\
 &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\
 \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\
 &= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\
 \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan \alpha \tan(-\beta)} \\
 &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}
 \end{aligned}$$

定理. 設 α, β 為弧度角，則

$$\begin{aligned}
 \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha \\
 \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \\
 \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}
 \end{aligned}$$

由此，可逆推算出以下設理：

設理. 設 α, β 為弧度角，則

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \\
 \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \\
 \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]
 \end{aligned}$$

衍理. 設 α, β 為弧度角，則

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha \pm \sin \beta &= 2 \sin \frac{\beta \pm \alpha}{2} \cos \frac{\beta \mp \alpha}{2} \\
 \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\beta + \alpha}{2} \cos \frac{\beta - \alpha}{2} \\
 \cos \alpha - \cos \beta &= 2 \sin \frac{\beta + \alpha}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}
 \end{aligned}$$

兩倍角公式

從以上和積互化公式可見，若 $\alpha = \beta$ ，則可視為兩倍角公式：

定理. 設 x 為弧度角，則

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

留意 $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ 可化為

$$\begin{aligned} \cos^2 x - \sin^2 x &= (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x \\ &= 1 - 2 \sin^2 x \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} \cos^2 x - \sin^2 x &= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \\ &= 2 \cos^2 x - 1 \end{aligned}$$

故當 $0 < x < \pi$ 時，

$$\sin x = \sqrt{\frac{1 - \cos(2x)}{2}} \implies \sin \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}$$

當 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 時，

$$\cos x = \sqrt{\frac{1 + \cos(2x)}{2}} \implies \cos \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos t}{2}}$$

當 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 時，

$$\cos x = -\sqrt{\frac{1 + \cos(2x)}{2}} \implies \cos \frac{t}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos t}{2}}$$

其中 $t = 2x$ 。此算式稱為半倍角公式。

同時考慮 $t = \tan \frac{x}{2}$ ，則對於所有三角函數，均可以 t 表示。以 $\sin x$ 為例：

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \\ &= \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{\sec^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{2t}{1 + t^2} \end{aligned}$$

對此，以下定理成立：

定理. 設 $x \in \mathbb{R}$ ，若 $t = \tan \frac{x}{2}$ ，則

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1 - t^2}$$

三倍角公式

定理. 設 $x \in \mathbb{R}$, 則

$$\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\tan(3x) = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$$

證明. 重複運用兩倍角公式以推導出 $\sin(3x)$ 和 $\cos(3x)$ 的算式, 並運用 $\tan(3x) = \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)}$ 推導結果。□

輔助角

回顧和積互化公式, 大部分三角學算式都能化作 \sin 與 \cos 的組合, 如此便能讓大部分等式迎刃而解。但亦有例外:

$$2 \sin x + 3 \cos x = 4$$

對於以上等式, 我們無法直接套用任何一條三角形公式以求得答案。如此便需要額外技巧, 稱為**輔助角**。在運用輔助角時需要一定條件, 考慮通用式:

$$a \sin x + b \cos x = c$$

其中 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 。考慮左邊算式與 $\sin(x + y)$ 的展開式的相似性, 便作以下猜想:

主張. 設存在 r 與 α 使得以下等式成立:

$$r \sin(x + \alpha) = a \sin x + b \cos x$$

且 $r \geq |c|$, 則 $a \sin x + b \cos x = c$ 可解。

證明. 直接計算即可。若

$$r \sin(x + \alpha) = a \sin x + b \cos x$$

則

$$r \sin x \cos \alpha + r \cos x \sin \alpha = a \sin x + b \cos x$$

$$\begin{aligned} \implies & \begin{cases} r \cos \alpha = a \\ r \sin \alpha = b \end{cases} \\ \implies & \begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \end{cases} \end{aligned}$$

同時

$$r \sin(x + \alpha) = c \implies \sin(x + \alpha) = \frac{c}{r}$$

由於 $\sin x$ 的值域介乎 -1 與 1 之間，故 $|c|/r \leq 1 \implies |c| \leq r$ 時等式可解。 \square

定理. 設 a, b, c 為常數， $x \in \mathbb{R}$ 。當 $a^2 + b^2 \geq c^2$ 時，則 $a \sin x + b \cos x = c$ 的解為

$$x = \sin^{-1}\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

複域幾何

歐拉公式與多倍角