矩陣的定義

定義 1 (矩陣). **矩陣**是代數學中一種特殊的表達形式，用以同時表達多位元的表格：

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

若**元素**$a_{ij} \in S$則稱爲S**上的**$m \times n$**矩陣**，記$\mathbf{A} \in \mathbb{M}^{m\times n}(S) = \mathbb{M}_S^{m\times n}$。

示例. 以下爲矩陣的例子：

1. $1 =: [1] \in \mathbb{M}^{1\times 1}(\mathbb{R})$。
2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}^{2\times 2}(\mathbb{R})$。
3. $\begin{bmatrix} 1+2i & 3-4i & i \\ -i & 1 & 2-i \end{bmatrix} \in \mathbb{M}^{2\times 3}(\mathbb{C})$。

定義 2 (矩陣的加法與乘法定義). 給定$\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{M}^{m\times n}$，$\mathbf{C} \in \mathbb{M}^{n\times t}$，則

1. 加法：$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})$。
2. 數乘：$k\mathbf{A} = (ka_{ij})$。
3. 矩陣乘法：$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj})$。

示例. 設$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$，則

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1+2 & 1+1 & 0+0 \\ 1+1 & 0+2 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$。
2. $4\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$。
3. $\mathbf{A} \times \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1\times 2 + 1\times 2 + 0\times 3 & 1\times 0 + 1\times 1 + 0\times 3 \\ 1\times 2 + 0\times 2 + 1\times 3 & 1\times 0 + 0\times 1 + 1\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$。

定義 3 (特殊矩陣). 下列為一些矩陣寫法的共識:

- 零矩陣:$\mathbf{0}_{m\times n} = \mathbf{O}_{m\times n} = (0)_{m\times n}$。
- 一矩陣:$\mathbf{1}_{m\times n} = (1)_{m\times n}$。
- 單位矩陣:$\mathbf{I}_{m\times n} = (\delta_{ij})_{m\times n}$,其中$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$。

命題 (加法與數乘定則). 設$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{M}^{m\times n}$,則

1. 加法結合律:$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$。

2. 加法交換律:$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$。

3. $\mathbf{A}+\mathbf{0} = \mathbf{A}$。

4. $\mathbf{A}+(-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$。

5. $a(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = a\mathbf{A}+\mathbf{B}$。

6. $(a+b)\mathbf{A} = a\mathbf{A}+b\mathbf{A}$。

7. $(ab)\mathbf{A} = a(b\mathbf{A})$

命題 (矩陣乘法定則). 設$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$為矩陣,則

1. 乘法結合律:$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$。

2. 分配律*I*:$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$。

3. 分配律*II*:$\mathbf{D}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{DA}+\mathbf{DB}$。

4. $\alpha\mathbf{AB} = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$。

5. $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$。

定義 4 (綫性組合). 設$c_1, c_2, \ldots, c_\ell$為常數,$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_\ell \in \mathbb{M}_{m\times n}$,則稱

$$\sum_{k=1}^{\ell} c_k\mathbf{A}_k = c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2 + \cdots + c_\ell\mathbf{A}_\ell$$

為**綫性組合**。

示例. 設$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，則可寫

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3e_1 + 2e_2 + e_1$$

示例. 設$E_n \in \mathbb{M}^{3\times 3}$，對於$1 \leq n \leq 9$，$E_n = (e_{ij})_{3\times 3}$而且

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & n = 3(i-1)+j \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

，則可寫

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{9} kE_k$$

小記. 以上例子便是矩陣與綫性方程組的關係。

綫性方程組

綫性方程組主要用以表達兩條或多條同時成立的綫性方程，最具代表性的可數初中的聯立方程：

$$\begin{cases} ax+by &= k_1 \\ cx+dy &= k_2 \end{cases}$$

當然，綫性方程組的含義不僅是二元一次方程，更可以拓展到多元一次(綫性)方程：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

示例. 以下是綫性方程組的例子：

1. $\begin{cases} x+y &= 0 \\ 2x-3y &= 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ 2x+3y+4z &= 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-y+z &= 0 \\ 2x+4z &= 0 \\ -2x-4y &= 0 \end{cases}$

解綫性方程組

欲求綫性方程組的解，我們可使**代入法**或**消元法**，其中消元法比代入法的效率更高，因此普遍數學家都會使用消元法解方程。同時此辦法也衍生出矩陣的各項命題。

示例. 求解綫性方程組$\begin{cases} 2x+3y &= 8 \\ 6x-2y &= 9 \end{cases}$

1. 運用代入法求解：從$2x+3y=8$可得$x=\dfrac{8-3y}{2}$，代入$6x-2y=9$得

$$\begin{aligned} 6(\frac{8-3y}{2})-2y &= 9 \\ 3(8-3y)-2y &= 9 \\ 24-9y-2y &= 9 \\ 11y &= 15 \\ y &= \frac{15}{11} \end{aligned}$$

再代$y=\dfrac{15}{11}$入$x=\dfrac{8-3y}{2}$得

$$\begin{aligned} x &= \frac{8-3(\frac{15}{11})}{2} \\ &= \frac{43}{22} \end{aligned}$$

因此綫性方程組的解為$(\dfrac{43}{22},\dfrac{15}{11})$。

2. 運用消元法求解：從$2x+3y=8$三倍後可得$6x+9y=24$，則上式減去下式可得

$$\begin{array}{lr} (1)\times 3: & 6x+9y=24 \\ -)(2): & 6x-2y=9 \\ \hline (1)\times 3-(2): & 11y=15 \\ & y=\dfrac{15}{11} \\ & 6x-2(\dfrac{15}{11})=9 \\ & x=\dfrac{43}{22} \end{array}$$

示例. 求解綫性方程組$\begin{cases} 2x+3y+4z &= 1 \\ 3x-y+3z &= 0 \\ x+y+z &= 1 \end{cases}$

1. 運用代入法求解：先從$3x-y+3z=0$得出$y=3x+3z$，代入其餘兩式可得

$$\begin{cases} 2x+3(3x+3z)+4z &= 1 \\ x+(3x+3z)+z &= 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 11x+13z &= 1 \\ 4x+4z &= 1 \end{cases}$$

再從$4x+4z=1$得$z=\dfrac{1-4x}{4}$，代入$11x+13z=1$得

$$\begin{aligned}11x+13(\frac{1-4x}{4})&=1\\44x+13-52x&=4\\-8x&=-9\\x&=\frac{9}{8}\end{aligned}$$

由此可得：

$$\begin{aligned}z&=\frac{1-4(\frac{9}{8})}{4}\\&=-\frac{7}{8}\\y&=3(\frac{11}{4})+3(-\frac{5}{2})\\&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

2. 運用消元法求解：

$$\begin{array}{ll}
(1): & 2x+3y+4z=1\\
(2): & 3x-y+3z=0\\
(3): & x+y+z=1\\
\hline
(1)-(3)\times 2: & y+2z=-1\\
(2)-(3)\times 3: & -4y=-3\\
\hline
 & y=\frac{3}{4}\\
 & z=-\frac{7}{8}\\
 & x=\frac{9}{8}
\end{array}$$

我們亦容許綫性方程組**沒有解**或**有無限解**。若要理解沒有解或有無限多個解，可參考直綫的特性：

定義 5 (平行綫). 設L_1和L_2為兩條直綫，並分別以m_1和m_2代表其斜率。若$L_1//L_2$，則$m_1=m_2$。

定理 (平行綫的交點數). 設L_1和L_2為一對（歐幾里得幾何）平行綫，則L_1和L_2的交點數只能為0或∞。

證明. 設m爲L_1及L_2的斜率，及c_1和c_2分別爲L_1及L_2的縱軸截距，則

$$L_1 : y = mx + c_1,\ L_2 : y = mx + c_2$$

若$c_1 = c_2$，則$\forall x$, 若 $(x, y_1) \in L_1, (x, y_2) \in L_2$,

$$y_1 = mx + c_1 = mx + c_2 = y_2$$

由於對任意x均成立，此爲無限多交點。

若$c_1 \neq c_2 \implies c_1 - c_2 \neq 0$，則$\forall x$, 若 $(x, y_1) \in L_1, (x, y_2) \in L_2$,

$$y_2 - y_1 = (mx + c_1) - (mx + c_2) = c_1 - c_2 \neq 0 \implies y_1 \neq y_2$$

因此沒有交點。 □

衍理. 任何一對歐幾里得二維直綫可有0,1或∞交點。

示例. 以下爲綫性方程組無限多解的例子:

1. 考慮$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -3x - y = -2 \end{cases}$，由於任何符合$3x + y = 2$的點均符合$-3x - y = -2$，因此此方程組有無限多解。解集為

$$\{(t, 2 - 3t) : t \in \mathbb{R}\}$$

2. 考慮$\begin{cases} 3x + y + 2z = 0 \\ x + y + 7z = 0 \\ 2x - 5z = 0 \end{cases}$，由於上式減中式等於下式，因此此方程組無法解下去，有無限多解。解集為

$$\{(5t, -19t, 2t) : t \in \mathbb{R}\}$$

以下爲綫性方程組沒有解的例子:

1. 考慮$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -3x - y = 0 \end{cases}$，由於任何符合$3x + y = 2$的點均不符合$-3x - y = 0$，因此此方程組有無限多解。解集為

$$\emptyset$$

綫性方程組的可解性I

現記綫性方程組的通常式為

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

定理 (綫性方程組的可解性I). 對於m行n列綫性方程組S，若$m \leq n$，則S有解。

證明. 當m=1時，$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + x_{1n}x_n = b_1$，則存在綫性函數$f$使得$x_1 = f(x_2, x_3, \ldots, x_n)$令$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + x_{1n}x_n = b_1$成立。

當$1 < m < n$時，已知有函數$f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{m-1}$使得

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(x_{m+1}, \ldots, x_n) \\ x_2 &= f_2(x_{m+1}, \ldots, x_n) \\ \vdots &= \vdots \\ x_m &= f_m(x_{m+1}, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

令$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$成立。

則$m + 1 \leq n$時，存在綫性函數f_{m+1}使得

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= f_{m+1}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m, x_{m+2}, \ldots, x_n) \\ &= f_{m+1}(f_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_{m+1}, \ldots, x_n), x_{m+2}, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

則存在綫性函數F和g_{m+1}使得

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= F(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n) \\ &= g_{m+1}(x_{m+2}, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

因此可見存在綫性函數$g_1, g_2, \ldots, g_m$(若$m+2>n$視所有g_k為常函數)

$$
\begin{aligned}
x_1 &= f_1(g_{m+1}(x_{m+2}, \ldots, x_n), x_{m+2}, \ldots, x_n) \\
&= g_1(x_{m+2}, \ldots, x_n) \\
x_2 &= f_2(g_{m+1}(x_{m+2}, \ldots, x_n), x_{m+2}, \ldots, x_n) \\
&= g_2(x_{m+2}, \ldots, x_n) \\
\vdots &= \vdots \\
\vdots &= \vdots \\
x_m &= f_m(g_{m+1}(x_{m+2}, \ldots, x_n), x_{m+2}, \ldots, x_n) \\
&= g_m(x_{m+2}, \ldots, x_n)
\end{aligned}
$$

此證畢方程解的存在性。 $\square$

目前只有存在性能證明，因爲：

1. 未能確定是否有多於一個解；
2. 當$m>n$時，未知是否有解。

下一節會解決上述問題，判斷解的唯一性。

擴增矩陣

爲了使方程組的觀察更方便及易於處理，在此階段引入**擴增矩陣**的概念。

考慮以下綫性方程組：

$$(S):\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n &= b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n &= b_2\\ \vdots & \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

考慮$\mathbf{A}:=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\in\mathbb{M}^{m\times n}$為**係數矩陣**及$\mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m \end{bmatrix}$為**水平向量**，則可將$(S)$作以下簡化表達：

$$(S):[\mathbf{A}|\mathbf{b}]=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

以上$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$稱爲**擴增矩陣**。擴增矩陣的概念在於簡化方程組的表達，因此方程組的運作均可在擴增矩陣中實現。如此引入以下概念：

定義 6 (列階梯形矩陣)**.** *設$A\in\mathbb{M}^{m\times n}$，若$A$符合以下條件，則稱$A$為**列階梯形矩陣**:*

- *若某列有非零元素，則必在所有全零列之上；*
- *某列最左邊的非零元素稱爲**首項係數**。某列的首項係數必定比上一列的首項係數更靠右。*

示例. 列階梯形矩陣的例子：

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} & b_1\\ 0 & 2 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} & b_2\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{3n} & b_3\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

定義 7 (還原列梯矩陣)**.** *設$A\in\mathbb{M}^{m\times n}$，若$A$符合以下條件，則稱$A$為**還原列梯矩陣**:*

- **A**為列階梯形矩陣，并且；
- **A**的所有首項係數均爲*1*；
- **A**中所有首項係數的對應行僅有一個非零數字。

示例. 還原列梯矩陣的例子：

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \cdots & a_{1(n-1)} & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

逆矩陣

行列式

矩陣的幾何含義

博弈論簡介