數集

定義 1 (元素). 設X為數集，則

$$x \in X$$

表示x為數集X的成員；相反，$x \notin X$表示x并非數集X的成員。

例子. 設$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，則$1 \in X$，$0 \notin X$.

定義 2 (數集等價). 設X及Y皆爲數集，其中Y為X重複附帶$x \in X$，則寫$Y = X$.

例子. 設$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$及$Y = \{1, 1, 2, 3, 4, 5\}$，則$X = Y$.

定義 3 (子集). 設X及Y皆爲數集，則

$$X \subset Y$$

表示所有X的成員都是Y的成員。我們稱X為Y的子集。

例子. 設$X = \{1, 2, 3\}$，$Y = \{1, 2, 3, 4\}$，$Z = \{0, 1\}$。則$X \subset Y$ 但$Z \not\subset Y$。

設理. 設X, Y及Z皆爲集合，則以下成立：

1. $X \subset X$。

2. 若$X \subset Y$及$Y \subset Z$，則$X \subset Z$。

3. 若$X \subset Y$及$Y \subset X$，則$X = Y$。

證明.

1. 所有$x \in X$都自然為X的成員。

2. 若$X \subset Y$及$Y \subset Z$，則以下假設成立：

   (a) 所有$x \in X$都是Y的成員。

   (b) 所有$y \in Y$都是Z的成員。

   則$x \in X$令$x \in Y$，則令$x \in Z$。所以 $X \subset Z$.

3. 所有$x \in X$都是Y的成員，因此Y有可能擁有X以外的成員。但$Y \subset X$，所以Y不可能擁有X以外的成員。所以$Y = X$。

□

由於我們需要面對無限集合，因此我們不可能每一次都明確的寫下所有元素。於是有以下一種定義數集的方式：

定義 4. 設X爲數集和判斷式P，則有且僅有一個X的子集令$P(x)$對於所有子集的成員x皆為正確。此子集記爲

$$\{x \in X | P(x)\} \text{ 或 } \{x \in X : P(x)\}$$

例子. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 = 0\}$等價$\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

定義 5 (空集). 若X沒有成員，我們稱之爲**空集**，記$\emptyset$。

定義 6 (運算封閉). 設S爲一個非空數集，若對任意$a, b \in S$均有$a + b \in S$，則說S關於加法封閉。同樣可以對減法、乘法、除法定義封閉性。

定義 7 (數域). 設S為數集，至少包含兩個數，並且關於加、減、乘、除四則運算封閉，則稱S為**數域**。

例子 (實數域). $\mathbb{R}$為包含所有實數之集合，亦是數域。

函數

定義 8 (映射、定義域、值域). 若f為**映射**，擁有**定義域**D和**值域**R，則以下三種敘述均可描述f：

- $f : D \to R$;
- $x \in D$, $f(x) \in R$, $x \mapsto f(x)$;
- $f(x) =$以x建立/表述的算式。

代表f爲將D的成員映射至R的方式。

公設 (函數基本性質). 任何可稱爲**函數**的映射$f : D \to R$，必須符合以下性質：

1. 存在性：若$x \in D$，則$f(x) \in R$;
2. 唯一性：若$x, y \in D$且$x = y$，則$f(x) = f(y)$。

定義 9 (實函數). 若$f : D \to R$為函數，值域$R = \mathbb{R}$(或$R \subset \mathbb{R}$)，我們稱之爲**實函數**。

定義 10 (複函數). *若$f : D \to R$為函數，值域$R = \mathbb{C}$(或$R \subset \mathbb{C}$)，我們稱之爲***複函數**。

衍理. *任何實函數都是複函數。*

由於逆函數的存在性並非必然，故需要作出新的猜想以求其存在條件。實際上，若逆函數存在，則必然牽涉其作爲函數的基本性質。

於是我們給出以下條件：

若f的逆函數g存在，則下列條件成立：

1. 存在性：若$y \in R$，則$g(y) \in D$；

2. 唯一性：若$x, y \in R$且$x = y$，則$g(x) = g(y)$。

並且$f(g(y)) = y, g(f(x)) = x$。

於是，從f的角度定義：

定義 11 (單射性). *設$f : D \to R$為函數。若當$f(x) = f(y)$時，可令$x = y$，則稱f為***單射函數**。

定義 12 (滿射性). *設$f : D \to R$為函數。若當$y \in R$時，存在至少一個$x \in D$符合$y = f(x)$，則稱f為***滿射函數**。

以上定義分別對應逆函數的唯一性與存在性。因此若定義：

定義 13 (雙射性). *函數f若同時滿足單射性與滿射性，則稱其爲***雙射函數**。

定理. *函數f的逆函數存在當且僅當f為雙射函數。*

對於擁有逆函數的函數f，我們稱f是**可逆的**，並記其逆函數作f^{-1}。

例子. *證明$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$且$x \mapsto x^{2n+1}$為可逆函數，其中$n$為非負整數，並求出$f^{-1}$。*

解. 證明f的單射性：

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \\ x^{2n+1} &= y^{2n+1} \\ x^{2n+1} - y^{2n+1} &= 0 \\ (x-y)\sum_{i=0}^{2n} x^i y^{2n-i} &= 0 \end{aligned}$$

考慮$f(x)=f(y)$則$sgn(x)=sgn(y)$，其中$sgn(x):=\begin{cases}+1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$。故$sgn(x^iy^{2n-i})=(\pm1)^{2n}=+1$。因此$\sum_{i=0}^{2n}x^iy^{2n-i}\neq 0$，則$x=y$。

證明f的滿射性：對於任意y，存在$x=y^{\frac{1}{2n+1}}$滿足$x^{2n+1}=y$。

因此，f是雙射的，擁有逆函數f^{-1}。$(f^{-1}(y))^{2n+1}=y$，故$f^{-1}(y)=y^{\frac{1}{2n+1}}$。 ■

奇偶函數

定義 14 (奇偶函數)**.** 設$f:D\to R$為函數。

- 若對於所有$x\in D$，均使$f(-x)=-f(x)$成立，則f為**奇函數**；
- 若對於所有$x\in D$，均使$f(-x)=f(x)$成立，則f為**偶函數**。

例子.

1. $f(x)=x$時，f為奇函數；
2. 對於整數n，$f(x)=x^{2n+1}$時，f為奇函數；
3. $f(x)=x^2$時，f為偶函數；
4. 對於整數n，$f(x)=x^{2n}$時，f為偶函數；
5. $\sin x,\tan x,\csc x,\cot x$均爲奇函數；
6. $\cos x,\sec x$均爲偶函數。

設理. 設f_1,f_2為奇函數，g_1,g_2為偶函數。則以下成立：

- $f_1\circ f_2$是奇函數；
- $f_1\circ g_1$是偶函數；
- $g_1\circ f_2$是偶函數；
- $g_1\circ g_2$是偶函數。

證明. 設f_1,f_2為奇函數，g_1,g_2為偶函數。則

- $f_1(-x)=-f_1(x)$;

- $f_2(-x) = -f_2(x)$;
- $g_1(-x) = g_1(x)$;
- $g_2(-x) = g_2(x)$。

由此可得

- $(f_1 \circ f_2)(-x) = f_1(f_2(-x)) = f_1(-f_2(x)) = -f_1(f_2(x)) = -(f_1 \circ f_2)(x)$;
- $(f_1 \circ g_2)(-x) = f_1(g_2(-x)) = f_1(g_2(x)) = (f_1 \circ g_2)(x)$;
- $(g_1 \circ f_2)(-x) = g_1(f_2(-x)) = g_1(-f_2(x)) = g_1(f_2(x)) = (g_1 \circ f_2)(x)$;
- $(g_1 \circ g_2)(-x) = g_1(g_2(-x)) = g_1(g_2(x)) = (g_1 \circ g_2)(x)$。

□