數集

定義 1 (元素). 設X為數集，則

$$x \in X$$

表示x為數集X的成員；相反，$x \notin X$表示x并非數集X的成員。

例子. 設$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，則$1 \in X$，$0 \notin X$.

定義 2 (數集等價). 設X及Y皆爲數集，其中Y為X重複附帶$x \in X$，則寫$Y = X$.

例子. 設$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$及$Y = \{1, 1, 2, 3, 4, 5\}$，則$X = Y$.

定義 3 (子集). 設X及Y皆爲數集，則

$$X \subset Y$$

表示所有X的成員都是Y的成員。我們稱X為Y的子集。

例子. 設$X = \{1, 2, 3\}$，$Y = \{1, 2, 3, 4\}$，$Z = \{0, 1\}$。則$X \subset Y$ 但$Z \not\subset Y$。

設理. 設X, Y及Z皆爲集合，則以下成立：

1. $X \subset X$。

2. 若$X \subset Y$及$Y \subset Z$，則$X \subset Z$。

3. 若$X \subset Y$及$Y \subset X$，則$X = Y$。

證明.

1. 所有$x \in X$都自然為X的成員。
2. 若$X \subset Y$及$Y \subset Z$，則以下假設成立：
   (a) 所有$x \in X$都是Y的成員。
   (b) 所有$y \in Y$都是Z的成員。

   則$x \in X$令$x \in Y$，則令$x \in Z$。所以 $X \subset Z$.
3. 所有$x \in X$都是Y的成員，因此Y有可能擁有X以外的成員。但$Y \subset X$，所以Y不可能擁有X以外的成員。所以$Y = X$。

□

由於我們需要面對無限集合，因此我們不可能每一次都明確的寫下所有元素。於是有以下一種定義數集的方式：

定義 4. 設X爲數集和判斷式P，則有且僅有一個X的子集令$P(x)$對於所有子集的成員x皆為正確。此子集記爲

$$\{x \in X | P(x)\} \text{ 或 } \{x \in X : P(x)\}$$

例子. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 = 0\}$等價$\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

定義 5 (空集). 若X沒有成員，我們稱之爲**空集**，記$\emptyset$。

定義 6 (運算封閉). 設S爲一個非空數集，若對任意$a, b \in S$均有$a + b \in S$，則說S關於加法封閉。同樣可以對減法、乘法、除法定義封閉性。

定義 7 (數域). 設S為數集，至少包含兩個數，並且關於加、減、乘、除四則運算封閉，則稱S為**數域**。

例子 (實數域). $\mathbb{R}$為包含所有實數之集合，亦是數域。

函數

定義 8 (映射、定義域、值域). 若f為**映射**，擁有**定義域**D和**值域**R，則以下三種敘述均可描述f：

- $f : D \to R$;
- $x \in D$, $f(x) \in R$, $x \mapsto f(x)$;
- $f(x) =$以x建立/表述的算式。

代表f爲將D的成員映射至R的方式。

公設 (函數基本性質). 任何可稱爲**函數**的映射$f : D \to R$，必須符合以下性質：

1. 存在性：若$x \in D$，則$f(x) \in R$;
2. 唯一性：若$x, y \in D$且$x = y$，則$f(x) = f(y)$。

定義 9 (實函數). 若$f : D \to R$為函數，值域$R = \mathbb{R}$(或$R \subset \mathbb{R}$)，我們稱之爲**實函數**。

定義 10 (複函數). 若$f : D \to R$為函數，值域$R = \mathbb{C}$(或$R \subset \mathbb{C}$)，我們稱之爲**複函數**。

衍理. 任何實函數都是複函數。

由於逆函數的存在性並非必然，故需要作出新的猜想以求其存在條件。實際上，若逆函數存在，則必然牽涉其作爲函數的基本性質。

於是我們給出以下條件：

若f的逆函數g存在，則下列條件成立：

1. 存在性：若$y \in R$，則$g(y) \in D$；

2. 唯一性：若$x, y \in R$且$x = y$，則$g(x) = g(y)$。

並且$f(g(y)) = y, g(f(x)) = x$。

於是，從f的角度定義：

定義 11 (單射性). 設$f : D \to R$為函數。若當$f(x) = f(y)$時，可令$x = y$，則稱f為**單射函數**。

定義 12 (滿射性). 設$f : D \to R$為函數。若當$y \in R$時，存在至少一個$x \in D$符合$y = f(x)$，則稱f為**滿射函數**。

以上定義分別對應逆函數的唯一性與存在性。因此若定義：

定義 13 (雙射性). 函數f若同時滿足單射性與滿射性，則稱其爲**雙射函數**。

定理. 函數f的逆函數存在當且僅當f為雙射函數。

對於擁有逆函數的函數f，我們稱f是**可逆的**，並記其逆函數作f^{-1}。

例子. 證明$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$且$x \mapsto x^{2n+1}$為可逆函數，其中$n$為非負整數，並求出$f^{-1}$。

解. 證明f的單射性：

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \\ x^{2n+1} &= y^{2n+1} \\ x^{2n+1} - y^{2n+1} &= 0 \\ (x-y)\sum_{i=0}^{2n} x^i y^{2n-i} &= 0 \end{aligned}$$

考慮$f(x)=f(y)$則$sgn(x)=sgn(y)$，其中$sgn(x):=\begin{cases}+1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$。故$sgn(x^iy^{2n-i})=(\pm1)^{2n}=+1$。因此$\sum_{i=0}^{2n}x^iy^{2n-i}\neq 0$，則$x=y$。

證明f的滿射性：對於任意y，存在$x=y^{\frac{1}{2n+1}}$滿足$x^{2n+1}=y$。

因此，f是雙射的，擁有逆函數f^{-1}。$(f^{-1}(y))^{2n+1}=y$，故$f^{-1}(y)=y^{\frac{1}{2n+1}}$。 ■

奇偶函數

定義 14 (奇偶函數)**.** 設$f:D\to R$為函數。

- 若對於所有$x\in D$，均使$f(-x)=-f(x)$成立，則f為**奇函數**；
- 若對於所有$x\in D$，均使$f(-x)=f(x)$成立，則f為**偶函數**。

例子.

1. $f(x)=x$時，f為奇函數；

   解.

   $$f(-x)=-x=-f(x)$$

   ■

2. 對於整數n，$f(x)=x^{2n+1}$時，f為奇函數；

   解.

   $$f(-x)=(-x)^{2n+1}=-x^{2n+1}=-f(x)$$

   ■

3. $f(x)=x^2$時，f為偶函數；

   解.

   $$f(-x)=x=f(x)$$

   ■

4. 對於整數n，$f(x)=x^{2n}$時，f為偶函數；

解.

$$f(-x)=(-x)^{2n}=x^{2n}=f(x)$$

■

5. $\sin x, \tan x, \csc x, \cot x$均爲奇函數；

6. $\cos x, \sec x$均爲偶函數。

設理. 設f_1, f_2為奇函數，g_1, g_2為偶函數。則以下成立：

- $f_1\circ f_2$是奇函數；
- $f_1\circ g_1$是偶函數；
- $g_1\circ f_2$是偶函數；
- $g_1\circ g_2$是偶函數。

證明. 設f_1, f_2為奇函數，g_1, g_2為偶函數。則

- $f_1(-x)=-f_1(x)$;
- $f_2(-x)=-f_2(x)$;
- $g_1(-x)=g_1(x)$;
- $g_2(-x)=g_2(x)$。

由此可得

- $(f_1\circ f_2)(-x)=f_1(f_2(-x))=f_1(-f_2(x))=-f_1(f_2(x))=-(f_1\circ f_2)(x)$;
- $(f_1\circ g_2)(-x)=f_1(g_2(-x))=f_1(g_2(x))=(f_1\circ g_2)(x)$;
- $(g_1\circ f_2)(-x)=g_1(f_2(-x))=g_1(-f_2(x))=g_1(f_2(x))=(g_1\circ f_2)(x)$;
- $(g_1\circ g_2)(-x)=g_1(g_2(-x))=g_1(g_2(x))=(g_1\circ g_2)(x)$。

□

小記. 奇偶函數在微積分有重大作用，應熟練並一眼看穿。

習題

1. 設$\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$為包含所有正整數的集合，並設$S \subset X$，證明以下成立：

   (a) 若$x \in S$，則$x \in X$。

   (b) 若$x, y \in X$，則$x + y \in X$。

   (c) 若$x \in S$令$x + 1 \in S$，且$1 \in S$，則$S = X$。

   (d) 若$x + 1 \in S$令$x \in S$，則$S = \emptyset$。

2. 證明有理數集$\mathbb{Q} - \{0\}$為數域。

3. 證明空集$\emptyset$為數域。

4. 證明若定義$\frac{0}{0} = 0$時，單集$\{0\}$為數域。

5. 判斷以下函數的可逆性：

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$。

   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$。

   (c) $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}, x \mapsto 1/x$。

   (d) $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto x^n$。

   (e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{2n}$。

   (f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto x + i$。

   (g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto x + xi$。

   (h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^x$。

6. 設$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$為實函數。

   (a) 證明$\frac{f(x)+f(-x)}{2}$為偶函數；$\frac{f(x)-f(-x)}{2}$為奇函數。

   (b) 證明對於任意實函數，均可拆分為奇函數及偶函數兩部分。

   (c) 現假設對於任意$x, y \in \mathbb{R}$，函數f都符合以下函數等式

   $$f(x + y) = f(x)f(y)$$

      i. 證明對於任意$x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$；

ii. 由此，證明f的偶函數部分必定大於或等於0。

7. 設$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$為實函數。

(a) 證明若$f(ix) = if(x)$，則f為奇函數。

(b) 設$F(x) = f(x) + if(-x)$，而且$F(x + y) = F(x) + F(y)$。

i. 求$f(0)$。

ii. 證明f為奇函數。

8. 判斷下列結果為何種函數：

(a) 奇函數相加；

(b) 偶函數相加；

(c) 奇函數相乘；

(d) 偶函數相乘。

9. 設O為奇函數集，E為偶函數集。現記$E + O = O + E = \{f + g : f \in O, g \in E\}$及$OE = EO = \{fg : f \in O, g \in E\}$。

(a) 證明$O \subset E + O$及$E \subset E + O$。

(b) 證明$EO \subset E$。

(c) 證明$EO \subset E + O$。

(d) 若$X^n = \{(f)^n : f \in X\}$，而$(f)^n := f \cdot f \cdot f \cdot f \cdots f$，其中$\cdot$以一般乘法定義。

i. 證明$O^n \subset E + O$及$E^n \subset E + O$。

ii. 證明$(E + O)^n \subset E + O$。

iii. 證明$E + O$可定義為函數域。