

參考答案/提示

1. 從定義，考慮 $f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) \equiv f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)$ 並運用三角不等式及考慮 $|g(x)| < |g(x_0)| + \epsilon_g$ 。
2. 運用數學歸納法。
3. (a) 設 $E(x)$ 有兩個相異實根 $\alpha < \beta$ ，則 $E(\alpha) = E(\beta)$ 。但此違反 E 作為單調遞升函數的定義(均值定理)。因此只能擁有不多於一個實根。(b) 設 F, G 分別為單調遞升及單調遞降函數，設 $H := F - G \implies H' = F' - G' > 0$ 。
4. $\max r = \min \sqrt{x^2 + [f(x)]^2}$ 。Ans: $\pi(1 + \ln 2) : 4$ 。
5. 考慮 $f_n^{(n)}(x) := (x^2 - 1)^n$ ，並以均值定理及MI證明 $f_n^{(n)}(x)$ 於 $[-1, 1]$ 有 n 個零點。
6. 夾擠定理。
7. 根據定義。Ans:
 - (a) $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.
 - (b) $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.
 - (c) $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$.
8. 考慮 $f(x) = xe^x - 1$ 的零點，運用牛頓分割法。Ans: 0.56714.