

1. 利用 $\epsilon - \delta$ 定義，證明微分的乘積法則：

$$(fg)' = f'g + fg'$$

2. 設 $f(x) = \sin \pi x$ 。設 (g_n) 為函數數列使得 $g_1(x) = f(x)$ 及 $g_n(x) = f(g_{n-1}(x))$ 。證明對於任意正整數 n ， $g'_n(0) = \pi^n$ 。

3. 設 $E(x)$ 為可微實函數，且 $\forall x \in \mathbb{R}, E'(x) > 0$ 。此稱為嚴格遞升函數。

(a) 證明 $E(x)$ 最多只有一個實根。

(b) 證明嚴格遞升實函數與嚴格遞降實函數只能有最多一個相交點。

4. 設 $f(x) = e^{-x^2}$ 。求 $f(x)$ 及 $-f(x)$ 所包裹的區域內最大圓形與最大正方形的面積之比。

5. 運用數學歸納法，證明 $P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n)$ 的所有根均為實根，而且均存在於 -1 與 1 之間。

6. 已知對於任意 $\delta > 0$ ， $\forall x \in (-\delta, \delta), -kx + c \leq f(x) \leq kx + c$ 。證明

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{f(x)-c} = 1$$

7. 求下列函數的泰勒展開式至 x^5 ：

(a) $\sin x$

(b) $\cos x$

(c) e^x

8. 利用牛頓分割法，解 $xe^x = 1$ 準確至五位小數。