單元導數定義

由牛頓發揚光大的流數法，今時今日變成了以極限定義的導數。

定義 1 (導數定義). *若f在c可導，則其導數$f'(c)$為*

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

定義 2 (現代導數嚴謹定義). *L為f在c的導數當：對於任意$\epsilon > 0$,若存在$\delta(\epsilon) > 0$使得對於$0 < |x - c| < \delta(\epsilon)$,*

$$|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L| < \epsilon$$

則寫$f'(c) = L$。

定理. *若$f : I \to \mathbb{R}$在$c \in I$可微，則f在$c \in I$連續。*

證明. 導數存在，則

$$\begin{aligned}\lim_{x \to c}(f(x) - f(c)) &= \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \lim_{x \to c}(x - c) \\ &= f'(c) \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

因此$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$使得$f$在$c \in I$連續。 □

導數的目的在於處理函數的變化：從算式可見，導數取自f的變化除以變量x的變化，即可理解爲變化的比例，等於變化比率。簡而言之，導數為函數的斜率。

定理 (導數的性質). *導數擁有以下性質：*

1. *綫性性：對於連續函數f, g，常數α, β，$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$。*

2. *乘積法則：對於連續函數f, g，$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$。*

3. *除法定則：對於連續函數f, g，$(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$。*

定理 (連鎖律). *對於複合函數$h := (g \circ f)$,*

$$h' = (g' \circ f) \cdot (f')$$

定理 (逆函數). *對於逆函數$g := f^{-1}$,*

$$g' = \frac{1}{f' \circ g}$$