

References: Introduction to Real Analysis (Bartle & Sherbert), Thomas Calculus 12th Edition

向量

向量屬於一種特殊的矩陣，通常用以表達多維坐標。

定義 1 (向量). 一個 n -維向量包含 n 個元素，可視之為 n -維空間中的坐標，同時代表從原點指向該坐標的箭頭。

為方便描述，記 V_S 為帶有 S 域的元素向量集合。

定義 2 (向量加法). 在向量集合 V_S 中，若 $\vec{x} = (x_i)_i = (x_1, x_2, \dots)$, $\vec{y} = (y_i)_i = (y_1, y_2, \dots) \in V_S$ ，則

$$\vec{x} + \vec{y} := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots) = (x_i + y_i)_i$$

定義 3 (標量乘法). 在向量集合 V_S 中，若 $\vec{x} = (x_i)_i = (x_1, x_2, \dots) \in V_S$, $\alpha \in S$ ，則

$$\alpha \vec{x} := (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots) = (\alpha x_i)_i$$

定義 4 (向量的量值). 對於任意向量 \vec{v} ，其量值定義為 $|\vec{v}|$ ，代表其長度。

向量空間

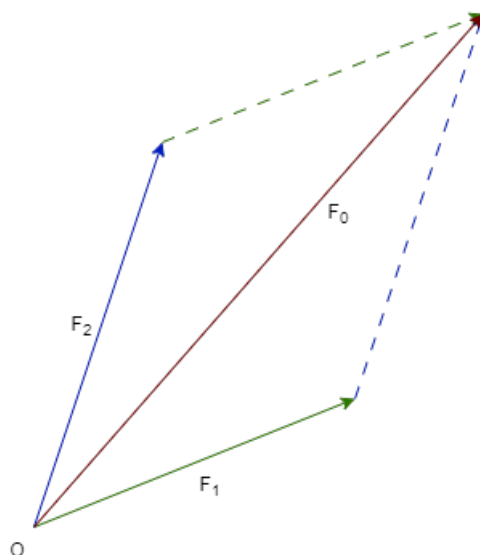
定義 5 (向量空間). 設 V_S 為向量集合，且 $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V_S$, $\alpha, \beta \in S$ 。若 V_S 符合以下定理：

- 加法結合律： $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ 。
- 加法交換律： $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ 。
- 加法單位元： $\vec{0} \in V_S$ 使得 $\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$ 。
- 加法逆： $\forall \vec{x} \in V_S$ ，存在 $\vec{y} \in V_S$ 使得 $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x} = \vec{0}$ 。
- 標乘結合律： $\alpha(\beta \vec{x}) = (\alpha\beta) \vec{x}$ 。
- 標乘單位元： $1 \in S$ 使得 $1 \vec{x} = \vec{x}$ 。
- 分配律1： $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \vec{x} + \alpha \vec{y}$ 。

- 分配律2: $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$ 。

示例. \mathbb{R} 是一個向量空間。而且任何域也是向量空間。

示例. 在牛頓力學中討論力時，我們會以向量表示力的大小與方向。假設目前的討論僅限於平面（二維空間），並記施力點為原點 O 。



在上圖中可通過改變力量發生的先後次序來實現向量的平移，從而得出

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

的關係式。又因二維向量可拆分爲水平向量及鉛垂向量兩個分量，故

$$\vec{F}_0 = (|\vec{F}_1| \cos \theta + |\vec{F}_2| \cos \phi)\hat{i} + (|\vec{F}_1| \sin \theta + |\vec{F}_2| \sin \phi)\hat{j}$$

其中 \hat{i} 和 \hat{j} 分別代表水平單位向量及鉛垂單位向量。

欲考慮作功問題，我們定義以下計算方式

定義 6 (點積/內積). 兩向量 \vec{a}, \vec{b} 的內積可定義爲

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \equiv \vec{a} \cdot \vec{b} := |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

其中 θ 為 \vec{a}, \vec{b} 之間的夾角。

示例. 根據經典力學定義，作功方程爲

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

其中 W 為作功純量， \vec{F} 為施力向量， \vec{s} 為位移向量。考慮內積定義，作功方程可寫成

$$W = |\vec{F}||\vec{s}| \cos \theta$$

其中 θ 為向量之間的夾角。

定理 (內積的性質). 對於 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$,

1. $\langle 0, \vec{a} \rangle = \langle \vec{a}, 0 \rangle = 0$;
2. $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \geq 0$, $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0$ 當且僅當 $\vec{a} \equiv 0$;
3. $\langle \vec{a}, x\vec{b} + z\vec{c} \rangle = x\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + z\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$;
4. 若 $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, 則 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$ 。

命題. 向量 \vec{a}, \vec{b} 之間的夾角為

$$\theta = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

另外，若 \vec{a} 正交於 \vec{b} （在 \mathbb{R}^2 為互相垂直）， \vec{a}, \vec{c} 平行，則根據定義

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$

及

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}||\vec{c}| \cos 0^\circ = |\vec{a}||\vec{c}|$$

因此

$$|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}|^2} = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$$

定義 7 (基與正交基與標準正交基). 對於向量空間 V_S ，若 $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\} \subset V_S$ 為互不平行，即綫性獨立，同時對任意 $\vec{v} \in V_S$ ，都存在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in S$ 使得

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{b}_k$$

則稱 $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ 為 V_S 的基。

若 $\{\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_n\} \subset V_S$ 為 V_S 的基而且對所有 $i \neq j$ ，均有

$$\langle \vec{\beta}_i, \vec{\beta}_j \rangle = 0$$

則稱 $\{\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_n\}$ 為 V_S 的正交基。

若 $\{\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \dots, \vec{\gamma}_n\} \subset V_S$ 為 V_S 的正交基而且對所有 i ，均有

$$|\vec{\gamma}_i| = 1$$

則稱 $\{\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \dots, \vec{\gamma}_n\}$ 為 V_S 的標準正交基。

小記. 對於任何向量空間，標準正交基的構成并非唯一。舉例 \mathbb{R} 作為 \mathbb{R} 的向量空間，1和-1均可作為 \mathbb{R} 的標準正交基； \mathbb{R}^2 作為 \mathbb{R} 的向量空間，則

$$\left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

均為 \mathbb{R}^2 的標準正交基。

對於有標準正交基的向量空間，我們的討論會比較簡單：

定理. 設 V_S 為向量空間， $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 為 V_S 的標準正交基。若 $v, u \in V_S$ 可寫作 $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ 及 $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$ ，則

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

證明.

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n u_i e_i, \sum_{j=1}^n v_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n u_i \langle e_i, \sum_{j=1}^n v_j e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j \delta_{ij} = \sum_{\substack{i=j \\ 1 \leq i, j \leq n}} u_i v_j = \sum_{i=1}^n u_i v_i \end{aligned}$$

□

定理. 設 V_S 為向量空間， $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 為 V_S 的標準正交基。若 $v \in V_S$ 可寫作 $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ ，則

$$|v| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$$

為方便描述，接下來會稱 V_S 的標準正交基為 $\mathcal{O}(V_S) := \{e_i\}_{i \in I}$ ， I 為索引集。

定理 (餘弦定理). 設 $u, v \in V_S$ ，則

$$|u - v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| \cos \theta$$

其中 θ 是 u, v 的夾角。

證明. 設 $u = \sum_{i \in I} u_i e_i, v = \sum_{i \in I} v_i e_i$, 則

$$\begin{aligned} |u - v|^2 &= \sum_{i \in I} (u_i - v_i)^2 \\ &= \sum_{i \in I} (u_i^2 + v_i^2 - 2u_i v_i) \\ &= \sum_{i \in I} u_i^2 + \sum_{i \in I} v_i^2 - 2 \sum_{i \in I} u_i v_i \\ &= |u|^2 + |v|^2 - 2\langle u, v \rangle \\ &= |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| \cos \theta \end{aligned}$$

□

在三維空間中, 存在外積:

定義 8 (外積). 假設 $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\} \subset \mathbb{R}^3$ 為 \mathbb{R}^3 的標準正交基, 則定義 $\times : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 為

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

外積的定義可考慮面積與體積的計算原理: 考慮三個單位向量 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 的乘積為體積及任意兩個向量的乘積為面積, 基於 $\hat{i} \times \hat{j}$ 為 ij 平面的面積單位, 而面積乘以高等於體積, 故 $V(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}) = (\hat{i} \times \hat{j}) \cdot \hat{k}$ 為標量, 使得 $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$ 。

因此, 我們可定義

定義 9 (面積與體積). 設 $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, 則

$$\begin{aligned} A(u, v) &:= |u \times v| = \left| \begin{array}{ccc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \right| \\ V(u, v, w) &:= (u \times v) \cdot w = \left| \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \right| \end{aligned}$$

事實上, 外積的計算無法以向量簡單作結。Kronecker就發現基本的向量無法解釋 $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$ 的情況 (例如, 為何面積是向量而體積不是?), 因此, 他提出以**雙向量**(bi-vector)為 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 下定義:

定義 10. 定義 $\hat{i} = e_1 e_2, \hat{j} = e_2 e_3, \hat{k} = e_1 e_3$, 且 $e_i e_j = -e_j e_i, e_i^2 = 1$ 由此符合

$$\begin{aligned}\hat{i}\hat{j} &= e_1 e_2 e_2 e_3 = e_1 e_3 = \hat{k} \\ \hat{j}\hat{k} &= e_2 e_3 e_1 e_3 = -e_2 e_3 e_3 e_1 = -e_2 e_1 = e_1 e_2 = \hat{i} \\ \hat{k}\hat{i} &= e_1 e_3 e_1 e_2 = -e_3 e_1 e_1 e_2 = -e_3 e_2 = e_2 e_3 = \hat{j}\end{aligned}$$

上述定義可引申至對軸心的旋轉： \hat{i} 為沿 z 軸逆時針旋轉90度； \hat{j} 為沿 x 軸逆時針旋轉90度； \hat{k} 為沿 y 軸逆時針旋轉90度。

事實上，在更高維的空間裏，向量的外積有以下定義

定義 11. 設 $u = (u_i)_{i \in I}, v = (v_i)_{i \in I}$, 則外積為

$$u \wedge v = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \cdots & u_1 v_n \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & \cdots & u_2 v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n v_1 & u_n v_2 & \cdots & u_n v_n \end{bmatrix}$$

定理. 設 $u, v \in \mathbb{R}^n$, 則平行四邊形面積為

$$A(u, v) = |u||v| \sin \theta$$

其中 θ 為 u 和 v 的夾角。因此

$$|u \wedge v| = |u||v| \sin \theta$$

衍理.

$$|u|^2 |v|^2 = \langle u, v \rangle^2 + |u \wedge v|^2$$

向量函數

偏導數與全導數

方向導數

切面與法綫

二維極值與鞍點