

求和記法

求和記法的作用：避免混淆

定義 1 (求和號). 設 a_1, a_2, \dots, a_n 是一組數，他們的和記為 $\sum_{i=1}^n a_i$ ，即

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

$\sum_{i=1}^n a_i$ 也可寫作 $\sum_{1 \leq i \leq n} a_i$ 或 $\sum_{i \in S} a_i$ ，其中 $S = \{1, 2, \dots, n\}$ ；此為條件式求和，即將符合條件的項加總。

當 i 的範圍不言自明（或無須定義）時，還可簡記為 $\sum_i a_i$ 或 $\sum a_i$ 。

小記 (啞變量). 求和變量 i 也可用 j, k 等其他代數表示，就像函數的自變量除了用 x 表示也可用 u, t 等代數表示一樣。因此，

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{s=1}^n a_s = \sum_{X=1}^n a_X = \dots$$

定義 2 (雙重求和號). 若 a_{ij} 是同時由 i, j 定義的一組數，即若

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

為一陣列數，則

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{i=1}^m A_i$$

其中 $A_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ 。

雙重求和的順序由內而外，表示先對 j 進行求和，再對 i 進行求和。

設理 (求和號的性質). 求和號有以下性質：

$$1. \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i);$$

$$2. \quad c \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n ca_i;$$

$$3. \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{j=1}^m b_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j;$$

$$4. \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_i b_j.$$

證明. 留作習題, 利用數學歸納法證明。 □

求積記法

定義 3 (求積號). 設 a_1, a_2, \dots, a_n 是一組數, 他們的積記為 $\prod_{i=1}^n a_i$, 即

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

與求和號相同, $\prod_{i=1}^n a_i$ 也可寫作 $\prod_{1 \leq i \leq n} a_i$ 或 $\prod_{i \in S} a_i$, 其中 $S = \{1, 2, \dots, n\}$; 此為條件式求積, 即將符合條件的項乘積。

當 i 的範圍不言自明 (或無須定義) 時, 還可簡記為 $\prod_i a_i$ 或 $\prod a_i$ 。

定義 4 (雙重求積號). 若 a_{ij} 是同時由 i, j 定義的一組數, 即若

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

為一陣列數, 則

$$\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n a_{ij} = \prod_{i=1}^m A_i$$

其中 $A_i = \prod_{j=1}^n a_{ij}$ 。

設理 (求積號的性質). 求積號有以下性質:

$$1. \quad c^n \prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i=1}^n ca_i;$$

$$2. \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) \left(\prod_{j=1}^m b_j \right) = \prod_{i=1}^{n+m} c_i, \text{ 其中 } c_i = \begin{cases} a_i & i \leq n; \\ b_{i-n} & i > n \end{cases};$$

$$3. \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m a_i b_j = \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^n a_i b_j.$$

證明. 留作習題, 利用數學歸納法證明。

□

數學歸納法原理

定義 5 (數學陳述). **數學陳述**是一種有關數學, 並且能分辨對錯的句子。

例子. $1 = 2$ 是一種錯誤的數學陳述。

例子. $1 + 2 = 3$ 是一種正確的數學陳述。

定義 6 (判斷式). **判斷式**是一種牽涉變量, 有待判斷對錯的數學句子。若闡明變量的值, 則判斷式可有特定結果, 並成為數學陳述。

例子. $P(x)$ 為包含變量 x 的判斷式。

例子. $P(x, y)$ 為包含變量 x, y 的判斷式。

公設 (數學歸納法基本原理). 設 $P(n)$ 為對於整數 $n \geq 1$ 的判斷式。若以下條件同時成立:

- $P(1)$ 成立;
- 若 $P(n)$ 對某 $n \geq 1$ 成立, 則 $P(n+1)$ 成立。

則 $P(n)$ 對所有整數 $n \geq 1$ 成立。

例子. 設 $P(n)$ 代表對假設 $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ 的值。

$P(1): \sum_{i=1}^1 i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ 成立。

假定 $P(k)$ 對某正整數 k 成立, 則對於 $P(k+1)$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = (k+1) + \sum_{i=1}^k i = (k+1) + \frac{k(k+1)}{2} = (k+1) \left(1 + \frac{k}{2} \right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

\therefore 根據基本原理, $P(n)$ 對於所有正整數 n 成立。

若歸納起點並非 $n = 1$ ，則可拓展至以下原理：

公設 (數學歸納法第二原理). 設 $P(n)$ 為對於整數 $n \geq n_0$ 的判斷式。若以下條件同時成立：

- 基： $P(n_0)$ 成立；
- 渡： 若 $P(n)$ 對某 $n \geq n_0$ 成立，則 $P(n+1)$ 成立。

則 $P(n)$ 對所有整數 $n \geq n_0$ 成立。

衍理 (強歸納法原理). 設 $P(n)$ 為對於整數 $n \geq 1$ 的判斷式。若以下條件同時成立：

- 基： $P(1)$ 成立；
- 渡： 若 $P(k)$ 對某 $1 \leq k \leq n$ 成立，則 $P(n+1)$ 成立。

則 $P(n)$ 對所有整數 $n \geq n_0$ 成立。

小記. 強歸納法原理等價於數學歸納法基本原理。

習題

1. 證明求和號的性質：

$$(a) \quad \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i);$$

$$(b) \quad c \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n ca_i;$$

$$(c) \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^m b_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j;$$

$$(d) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_i b_j.$$

2. 證明求積號的性質：

$$(a) \quad c^n \prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i=1}^n ca_i;$$

$$(b) \quad \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) \left(\prod_{j=1}^m b_j \right) = \prod_{i=1}^{n+m} c_i, \quad \text{其中 } c_i = \begin{cases} a_i & i \leq n \\ b_{i-n} & i > n \end{cases};$$

$$(c) \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m a_i b_j = \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^n a_i b_j.$$

3. 證明以下等式：

$$(a) \left(\sum_{i=1}^m a_i c^i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i c^i \right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) c^k;$$

$$(b) a^n - b^n = (a - b) \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} b^i;$$

$$(c) \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \right) \left(\sum_{i=0}^{n+1} a_i \right) = \left(\sum_{i=0}^n a_i \right)^2 - a^n;$$

$$(d) (a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_m=n} \frac{n!}{i_1! i_2! \cdots i_m!} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_m^{i_m}.$$

$$4. (a) \text{ 證明對於所有正整數 } n, \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

(b) 由此，求

$$i. 101^2 + 102^2 + 103^2 + \cdots + 200^2;$$

$$ii. 20^2 + 22^2 + 24^2 + \cdots + 40^2;$$

$$iii. 3^2 + 5^2 + 7^2 + \cdots + 31^2.$$

$$5. (a) \text{ 證明對於所有正整數 } n, \sum_{i=0}^n 3^i = \frac{3^n - 1}{2};$$

$$(b) \text{ 證明對於所有正整數 } n, \sum_{i=1}^n i 3^i = \frac{3^{n+1}(2n-1) + 3}{4};$$

(c) 由此，求 $1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 3^2 + 4 \times 3^3 + \cdots + (n+1) \times 3^n$ 的公式。

$$6. \text{ 證明對於所有正整數 } n, \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(6n-1)(6n+2)} = \frac{n}{6n+2}.$$

7. 證明對於任意正整數 n , $n! \leq n^n$ 。

8. 證明對於任意正整數 n 及 $-1 < r < 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k^{n+k-1} r^k = \frac{1}{(1-r)^n}$$