

此練習在於延伸並引導學習至矩陣對數。

1. 考慮 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{X}$, 且

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{X}$$

使得下列方程組成立：

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

(a) 試以 $y = Ax$ 的形式表以上方程組。

(b) 現知道

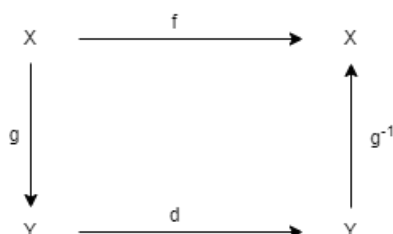
$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

, 若表 $\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{nk} \end{bmatrix}$ 及 $\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{bmatrix}$, 證明 $\mathbf{y}_k = A\mathbf{x}_k$ 。

(c) 由此, 描述(b)的方程組的幾何意義。

2. 設 $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$ 為可對角化矩陣, 使得存在可逆矩陣 P 及對角矩陣 D 令 $A = P^{-1}DP$ 成立, 並設 $f(x) := Ax$, 其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 。

(a) 試就以下圖像解釋 f 的幾何含義：



其中 $g(x) := Px$ 及 $d(x) := Dx$, X 及 Y 為不同基底的線性空間。

(b) 證明以下定理：

定理. 若 X 及 Y 的維數不同，則不存在可逆矩陣 B 使得 $B : X \leftrightarrow Y$ 。

提示：

- i. 設 X 的維數為 m 及 Y 的維數為 n ，且 $m > n$ ，以此建立合適的矩陣 $B : X \mapsto Y$ 。
- ii. 證明該矩陣 B 不可逆。
- iii. 同理當 $m < n$ 時，考慮 $B : Y \mapsto X$ 。

(c) 由此，討論‘不可被對角化’的幾何含義。

3. (a) 利用基本原理，證明以下矩陣導數法則：

- i. $\frac{d}{dt} A = 0$;
- ii. $\frac{d}{dt} At^n = nAt^{n-1}$;
- iii. $\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$;

(b) 證明以下定律對矩陣導數適用：

- i. 乘積法則；
- ii. 鎖鏈法則。

(c) 由此，求導 $\frac{d}{dt} t^A$ 。

4. 已知矩陣的指數法 e^A ，現求矩陣的對數法。記矩陣的對數函數為 $\log X$ 使得 $e^{\log X} = e^{\log X} = X$ 。

(a) 證明 $|e^A| = e^{|A|}$ 。由此證明若 $\log X$ 存在，則 $|X| > 0$ 。

(b) 證明若 X 可對角化成 $P^{-1}DP$ ，則 $\log X = P^{-1}(\log D)P$ 。

(c) 求導 $\frac{d}{dt} \log(Xt)$ 。