References: Introduction to Real Analysis (Bartle & Sherbert), Thomas Calculus 12th Edition

單元導數定義

由牛頓發揚光大的流數法，今時今日變成了以極限定義的導數。

定義 1 (導數定義). *若f在c可導，則其導數$f'(c)$為*

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

定義 2 (現代導數嚴謹定義). *L為f在c的導數當：對於任意$\epsilon > 0$,若存在$\delta(\epsilon) > 0$使得對於$0 < |x - c| < \delta(\epsilon)$,*

$$|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L| < \epsilon$$

則寫$f'(c) = L$。

定理. *若$f : I \to \mathbb{R}$在$c \in I$可微，則f在$c \in I$連續。*

證明. 導數存在，則

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}(f(x) - f(c)) &= \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \lim_{x\to c}(x - c) \\ &= f'(c) \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

因此$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$使得$f$在$c \in I$連續。 □

導數的目的在於處理函數的變化：從算式可見，導數取自f的變化除以變量x的變化，即可理解爲變化的比例，等於變化比率。簡而言之，導數為函數的斜率。

定理 (基本導數定則). *1. 常函數的導數：*

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

2. 冪函數的導數：

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

3. 自然指數的導數：

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

4. 自然對數的導數：
$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$$

5. 三角函數的導數：

   (a)
   $$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

   (b)
   $$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

   (c)
   $$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

證明. 留做習題。 □

定理 (導數的性質). 導數擁有以下性質：

1. 綫性性：對於可微函數f, g，常數α, β，$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$。
2. 乘積法則：對於連續函數f, g，$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$。
3. 除法定則：對於連續函數f, g，$(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$。

證明.

1. 綫性性：從f, g的可微性，可得對任意$\varepsilon > 0$，均有$\delta_f, \delta_g > 0$使得對於所有c，若x符合$0 < |x - c| < \min\{\delta_f, \delta_g\}$時，
$$|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c)| < \frac{\varepsilon}{2\alpha}; |\frac{g(x) - g(c)}{x - c} - g'(c)| < \frac{\varepsilon}{2\beta}$$
則
$$\begin{aligned} &|\frac{(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(c) + \beta g(c))}{x - c} - (\alpha f'(c) + \beta g'(c))| \\ &< \alpha|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c)| + \beta|\frac{g(x) - g(c)}{x - c} - g'(c)| \\ &< \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{2\alpha} + \beta \cdot \frac{\varepsilon}{2\beta} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

2. 乘積法則：從f,g的可微性，可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}\frac{f(x)g(x)-f(c)g(c)}{x-c} &= \lim_{x\to c}\frac{f(x)g(x)-f(x)g(c)+f(x)g(c)-f(c)g(c)}{x-c} \\ &= \lim_{x\to c}(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\cdot g(c)+f(x)\cdot\frac{g(x)-g(c)}{x-c}) \\ &= f'(c)g(c)+f(c)g'(c)\end{aligned}$$

3. 除法定則：留作習題

□

衍理. *導數擁有以下性質：*

1. 綫性性：對於一系列可微函數$\{f_k\}_{k=1}^n$，及一系列常數$\{\alpha_k\}_{k=1}^n$，$(\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k)' = \sum_{k=1}^n(\alpha_k f_k')$。

2. 乘積法則：對於一系列可微函數$\{f_k\}_{k=1}^n$，$(\prod_{k=1}^n f_k)' = \sum_{k=1}^n(f_1f_2\cdots f_k'\cdots f_{n-1}f_n)$。

定理 (鏈鎖律)**.** *對於複合函數$h := (g\circ f)$，*

$$h' = (g'\circ f)\cdot(f')$$

證明. 留做習題 □

定理 (逆函數)**.** *對於逆函數$g := f^{-1}$，*

$$g' = \frac{1}{f'\circ g}$$

證明. 設$g(x)=f^{-1}(x)$，則$(f\circ g)(x)=x$。利用鏈鎖律，可得

$$\begin{aligned}(f'\circ g)(x)\cdot g'(x) &= 1 \\ g'(x) &= \frac{1}{(f'\circ g)(x)}\end{aligned}$$

□

導數可視爲函數於任意點的斜率，換言之，利用直綫方程的點斜式，可得出函數f於任意點$(x_0, f(x_0))$上的切綫方程為

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$$

定義 3 (高維導數). 若f可微，則f'為f的第一導數；若f'可微，則f''為f的第二導數，並記

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$$

如此類推，我們稱$f^{(n)}(x)$為f的第n導數，記

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}(f(x))$$

均值定理

均值定理為數學分析其中一個重要工具，亦是導數的重要應用結果。其含義在於將導數與函數值作連接，將切綫普及化。

定理 (極值定理). 設$c \in I$使得$f : I \to \mathbb{R}$有極值於c。若f可微，則$f'(c) = 0$。

證明. 先證明$f(c)$為極大值的情況：若$f'(c) > 0$，則存在c的鄰域$V \subseteq I$使得對於$x \in V$，

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

因此，若$x \in V$同時$x > c$，則

$$f(x) - f(c) = (x - c) \cdot \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

此則違反$f(c)$為極大值的假設，$f'(c) \not> 0$。

同理，證明$f'(c) \not< 0$可運用相似做法，因此$f'(c) = 0$。 □

衍理. 設$f : I \to \mathbb{R}$為連續函數，並設f在$c \in I$有極值。則$f'(c)$不存在或$f'(c) = 0$。

小記. $f(x) := |x|$可作衍理的例證：f在$0 \in I := [-1, 1]$上存在極小值，但$f'(0)$並不存在。

定理 (羅爾定理). 設f在閉合區間$[a, b]$上連續，且可微於開放區間(a, b)，使得$f(a) = f(b) = 0$。則存在至少一個$c \in (a, b)$使得$f'(c) = 0$。

定理 (基本均值定理). 設f在閉合區間$[a, b]$上連續，且可微於開放區間(a, b)，則存在至少一個$c \in (a, b)$使得

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

證明. 設

$$\varphi(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

可見φ在閉合區間$[a, b]$上連續，且可微於開放區間(a, b)，而且$\varphi(b) = \varphi(a) = 0$。則可利用羅爾定理引存在$c \in (a, b)$使得

$$0 = \varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

通過簡單移項，便得

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

□

逆微分的基本原理，以及導數第一測試，都是從均值定理發展的一些應用。

定理. *設f在閉合區間$I := [a, b]$上連續，且可微於開放區間(a, b)，且$f'(x) = 0$對所有$x \in (a, b)$，則f為I上的常函數。*

證明. 利用均值定理，存在至少一個$c \in (a, b)$使得$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) = 0$，則$f(a) = f(b)$；並對於所有$x \in (a, b)$，均有$c \in (x, a)$使得$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) = 0$。則$f(x) = f(a)$對所有$x \in [a, b]$成立。 □

衍理. *設f, g在閉合區間$I := [a, b]$上連續，且均可微於開放區間(a, b)，且$f'(x) = g'(x)$對所有$x \in (a, b)$，則$f = g + C$，其中C為常數。*

洛必達法則

泰勒定理

向量函數

偏導數與全導數

方向導數

切面與法綫

二維極值與鞍點