

1. (a) 按升幂求 $e^{-2x}$ 的展開式至 $x^6$ 。  
 (b) 求 $e^{-2x}(x - \frac{3}{x})^6$ 的展開式的常數項。
2. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$   
 (a) 從基本原理求 $\frac{d}{dx} \sqrt{e^x - x^2}$ , 其中 $x \geq 0$ 。  
 (b) 設 $f(x) := \frac{\ln x}{x}$ , 從基本原理求 $f'(1)$ 的值。
3. 設 $f(x) = (\frac{x}{2-x})^{\frac{1}{2}}$ , 其中 $0 \leq x \leq 1$ 。  
 (a) 求 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 。  
 (b) 假定 $J = \int_0^{0.5} f(x)dx$ 及 $K = \int_{0.5}^1 f(x)dx$ 。  
 i. 利用5區間梯形法則, 估算 $J$ 的值。  
 ii. 利用事實 $\int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi - 2}{2}$ 及(b)(i)的結果, 估算 $K$ 的值。  
 iii. 某人宣稱 $\frac{J}{K} < 0.44$ , 你是否同意? 試解釋你的答案。
4. 現有一水缸用以儲存雨水。在某一場大雨中, 雨水流進缸中的時長為7分鐘。設缸中雨水的體積為 $V \text{ m}^3$ 。已知
 
$$\frac{dV}{dt} = \sqrt{t+1} \sqrt{3 - \sqrt{t+1}} \quad (0 \leq t \leq 7),$$
 其中 $t$ 是雨水流進缸中的時長, 以分鐘計算。在 $t = 0$ 時, 水缸為中空的, 並且在 $t = T$ 時雨水體積的變率達到極大值。  
 (a) 求 $T$ 。  
 (b) 求當 $t = T$ 時 $V$ 的真確值。  
 (c) 現知水缸為一個高為1 m及底半徑為6 m的倒立正圓錐體容器。水缸直立放置。假設水深為 $h \text{ m}$ , 求  
 i. 常數 $Q$ 使得 $\frac{dV}{dt} = Qh^2 \frac{dh}{dt}$ ;  
 ii.  $\left. \frac{dh}{dt} \right|_{t=T}$ 。