

單元導數定義

由牛頓發揚光大的流數法，今時今日變成了以極限定義的導數。

定義 1 (導數定義). 若 f 在 c 可導，則其導數 $f'(c)$ 為

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

定義 2 (現代導數嚴謹定義). L 為 f 在 c 的導數當：對於任意 $\epsilon > 0$, 若存在 $\delta(\epsilon) > 0$ 使得對於 $0 < |x - c| < \delta(\epsilon)$,

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \epsilon$$

則寫 $f'(c) = L$ 。

定理. 若 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $c \in I$ 可微，則 f 在 $c \in I$ 連續。

證明. 導數存在，則

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} (f(x) - f(c)) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \lim_{x \rightarrow c} (x - c) \\ &= f'(c) \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

因此 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ 使得 f 在 $c \in I$ 連續。 □

導數的目的在於處理函數的變化：從算式可見，導數取自 f 的變化除以變量 x 的變化，即可理解為變化的比例，等於變化比率。簡而言之，導數為函數的斜率。

定理 (基本導數定則). 1. 常函數的導數：

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

2. 冪函數的導數：

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

3. 自然指數的導數：

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

4. 自然對數的導數：

$$\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{1}{x}$$

5. 三角函數的導數：

(a)

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

(b)

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

(c)

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

證明. 留做習題。

□

定理 (導數的性質). 導數擁有以下性質:

1. 綫性性: 對於可微函數 f, g , 常數 α, β , $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.
2. 乘積法則: 對於連續函數 f, g , $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.
3. 除法定則: 對於連續函數 f, g , $(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$.

證明.

1. 綫性性: 從 f, g 的可微性, 可得對任意 $\varepsilon > 0$, 均有 $\delta_f, \delta_g > 0$ 使得對於所有 c , 若 x 符合 $0 < |x - c| < \min\{\delta_f, \delta_g\}$ 時,

$$|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c)| < \frac{\varepsilon}{2\alpha}; |\frac{g(x) - g(c)}{x - c} - g'(c)| < \frac{\varepsilon}{2\beta}$$

則

$$\begin{aligned} & | \frac{(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(c) + \beta g(c))}{x - c} - (\alpha f'(c) + \beta g'(c)) | \\ & < \alpha | \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) | + \beta | \frac{g(x) - g(c)}{x - c} - g'(c) | \\ & < \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{2\alpha} + \beta \cdot \frac{\varepsilon}{2\beta} \\ & = \varepsilon \end{aligned}$$

2. 乘積法則: 從 f, g 的可微性, 可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)g(x) - f(c)g(c)}{x - c} &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(c) + f(x)g(c) - f(c)g(c)}{x - c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot g(c) + f(x) \cdot \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right) \\ &= f'(c)g(c) + f(c)g'(c) \end{aligned}$$

3. 除法定則：留作習題

□

衍理. 導數擁有以下性質：

$$1. \text{ 綫性性：對於一系列可微函數 } \{f_k\}_{k=1}^n, \text{ 及一系列常數 } \{\alpha_k\}_{k=1}^n, \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k\right)' = \sum_{k=1}^n (\alpha_k f_k').$$

$$2. \text{ 乘積法則：對於一系列可微函數 } \{f_k\}_{k=1}^n, \left(\prod_{k=1}^n f_k\right)' = \sum_{k=1}^n (f_1 f_2 \cdots f_k' \cdots f_{n-1} f_n).$$

定理 (連鎖律). 對於複合函數 $h := (g \circ f)$,

$$h' = (g' \circ f) \cdot (f')$$

證明. 留做習題

□

定理 (逆函數). 對於逆函數 $g := f^{-1}$,

$$g' = \frac{1}{f' \circ g}$$

證明. 設 $g(x) = f^{-1}(x)$, 則 $(f \circ g)(x) = x$. 利用連鎖律, 可得

$$(f' \circ g)(x) \cdot g'(x) = 1$$

$$g'(x) = \frac{1}{(f' \circ g)(x)}$$

□

導數可視為函數於任意點的斜率, 換言之, 利用直線方程的點斜式, 可得出函數 f 於任意點 $(x_0, f(x_0))$ 上的切綫方程為

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

定義 3 (高維導數). 若 f 可微, 則 f' 為 f 的第一導數; 若 f' 可微, 則 f'' 為 f 的第二導數, 並記

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$$

如此類推, 我們稱 $f^{(n)}(x)$ 為 f 的第 n 導數, 記

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}(f(x))$$

均值定理

洛必達法則

泰勒定理

向量函數

偏導數與全導數

方向導數

切面與法綫

二維極值與鞍點