

Reference from Introduction to Real Analysis, by R. Bartle and D. Sherbert.

無窮小量與無窮大量

在高等數學，對於無窮的討論，一般從無窮小量開始。何為無窮小量？即一個非常接近0的變量不斷向零靠近，而永遠無法到達0，即為無窮小量。

我們可以考慮數列 $\{a_n\}$ ，其中對於任意整數 n ， $a_n = \frac{1}{10^n}$ 。則當 n 越大時， a_n 越靠近0。對此，記

$$a_n \rightarrow 0$$

考慮對任意 n ，均有 $\varepsilon > 0$ 使得 $0 < \varepsilon < a_n$ ，則稱變量 ε 為無窮小量。記 $\varepsilon \rightarrow 0$ 。

相對的，考慮數列 $\{A_n\}$ ，其中對於任意整數 n ， $A_n = 10^n$ 。則當 n 越大時， A_n 越靠近 ∞ 。對此，記

$$A_n \rightarrow \infty$$

考慮對任意 n ，均有 $N > 0$ 使得 $A_n < N$ ，則稱變量 N 為無窮大量。記 $N \rightarrow \infty$ 。

由此發現，無窮小量與無窮大量互相關聯：

公設. 若 $a_n = \frac{1}{A_n}$ ，則

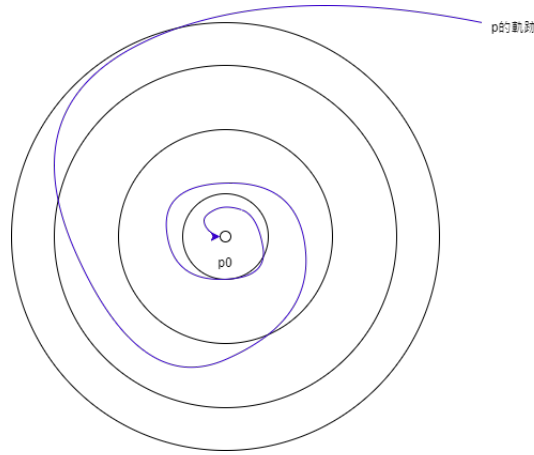
$$\lim_{A_n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

以上亦可簡記為 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ 。

極限的幾何概念

想象一個漩渦，然後有一個點 p 在漩渦裏漂浮，其結果就是 p 會不斷沿著漩渦中心繞圈，無限接近漩渦中心，但永遠不會到達中心。此刻，我們稱 p 所走的路綫為 p 的軌跡，記 $p(t)$ 並以 $t > 0$ 作時間變數，而漩渦中心 p_0 則為 p 的軌跡的極限，記

$$p_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} p(t)$$



留意上圖， p 的軌跡從外圍開始，不斷趨近於 p_0 。可見對於任何圓心為 p_0 且半徑為 $r > 0$ 的圓形，均有 $p(t)$ 位於圓形內。我們稱 $p(t)$ 的極限**收斂**；反之，若 $p(t)$ 沒有唯一極限（甚至沒有極限），我們稱之為**發散**。

那麼，該如何證明極限收斂性成為了微分數學一個重要命題。對此，幾何學家定名了一個數學模型，稱為**賦距空間**，指一個數學空間中，擁有計算距離的函數：

定義 1 (距離函數). 對於一個數集 S ，若函數 $d: S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ 符合以下條件：

- (正定性)對於任何 $x, y \in S$ ，均有 $d(x, y) \geq 0$ ； $d(x, y) = 0$ 當且僅當 $x = y$ 。
- (對稱性)對於任何 $x, y \in S$ ， $d(x, y) = d(y, x)$ 。
- (三角不等式)對於任何 $x, y, z \in S$ ， $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ 。

則稱 d 為 S 的距離函數。

定義 2 (賦距空間). 設 d 為數集 S 的距離函數，則稱 (S, d) 為賦距空間。

例子. 若 $d(x, y) = \sqrt{(x - y)^2}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ，則 (\mathbb{R}, d) 為賦距空間。

證明. 證明函數 d 符合距離公式條件：

1. 正定性： $d(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} \geq \sqrt{0} = 0$ 。同時

$$d(x, y) = 0 \iff (x - y)^2 = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$$

2. 對稱性： $d(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} = \sqrt{(y - x)^2} = d(y, x)$ 。

3. 三角不等式:

$$\begin{aligned}
 [d(x, z)]^2 &= (x - z)^2 \\
 &= (x - y + y - z)^2 \\
 &= (x - y)^2 + 2(x - y)(y - z) + (y - z)^2 \\
 &\leq [d(x, y)]^2 + 2[d(x, y)][d(y, z)] + [d(y, z)]^2 \\
 &= [d(x, y) + d(y, z)]^2
 \end{aligned}$$

因此, d 為 \mathbb{R} 上的距離公式, (\mathbb{R}, d) 為賦距空間。 □

小記. 此距離為絕對值函數 $|\cdot|$ 。

例子. 設 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ 。若 $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, 則 (\mathbb{R}^2, d) 為賦距空間。

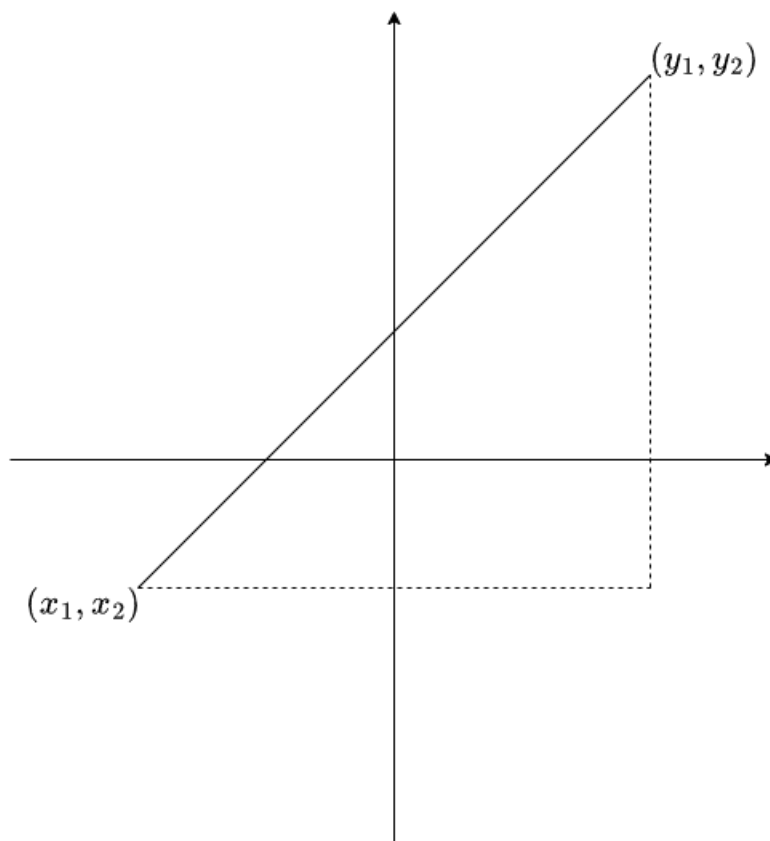


Figure 1: 歐氏幾何: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 即 xy 坐標平面

證明. 證明函數 d 符合距離公式條件:

1. 正定性: $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \geq \sqrt{0} = 0$ 。同時

$$d(x, y) = 0 \iff (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = 0 \iff \begin{cases} x_1 - y_1 = 0 \\ x_2 - y_2 = 0 \end{cases} \iff x = y$$

2. 對稱性: $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} = d(y, x)$ 。

3. 三角不等式: 證明留作習題。

因此, d 為 \mathbb{R}^2 上的距離公式, (\mathbb{R}^2, d) 為賦距空間。 \square

小記. 此距離為歐式距離函數, 亦稱通常距離。

在正規數學當中, 無論是在一維、二維、三維, 還是更高維的賦距空間, 我們都希望擁有極限收斂。利用距離公式定義收斂性, 可讓我們對收斂性有更直觀的判斷。現定義於賦距空間 (S, d) 上 p 點的 ε -鄰域為

$$U_\varepsilon(p) := \{q \in S : d(p, q) < \varepsilon\}$$

定義 3 (聚點). 設 $x(t)$ 為軌跡, 若有 x_0 令任何 $\varepsilon > 0$, 均有 $x(t) \in U_\varepsilon(x_0)$, 則 x_0 為 $x(t)$ 的聚點。

定義 4 (聚點(2)). 設 (x_n) 為一系列點, 若有 x_0 令任何 $\varepsilon > 0$, 均有 $x_n \in U_\varepsilon(x_0)$, 則 x_0 為 x_n 的聚點。

定義 5 (極限收斂). 設 x_0 為 (x_n) 的聚點, 而且對於任何 $n > 0$, 均有 $\varepsilon > 0$ 使得所有 $m > n$ 都有 $x_m \in U_\varepsilon(x_0)$, 則稱 x_0 為 (x_n) 的極限, 或 (x_n) 收斂於 x_0 。

例子. 設 $x_n := \frac{1}{n}$, 則 (x_n) 在 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ 收斂於 0, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 。

證明. 對於任意 $n > 0$, 均可設 $\varepsilon = \frac{1}{n}$ 使得當 $m > n$ 時

$$d(x_m, 0) = \frac{1}{m} < \frac{1}{n} = \varepsilon$$

\square

$\varepsilon - \delta$ 定義-於無窮小的極限

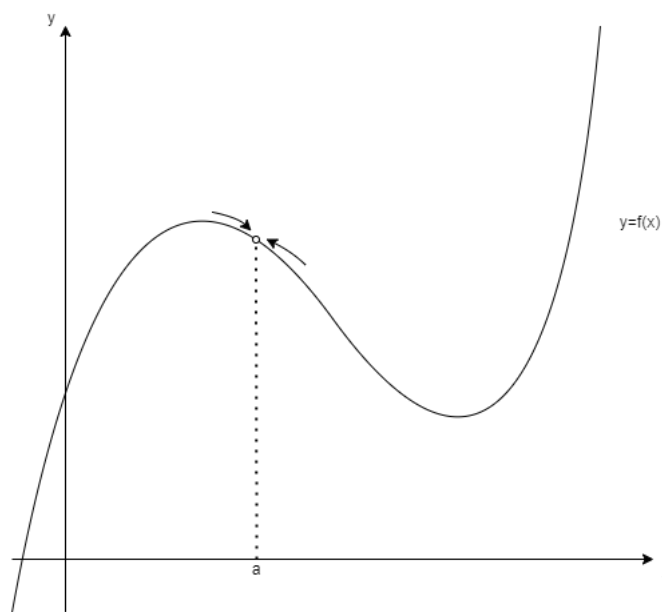
當討論與函數相關時, 我們必須將原有的幾何看法濃縮至代數看法, 以方便計算。作為入門理解, 目前以 $C(\mathbb{R})$ 作討論範圍 (即所有函數 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$), 這裏以 \mathbb{R} 指代賦距空間 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ 。

\mathbb{R} 的定義如下:

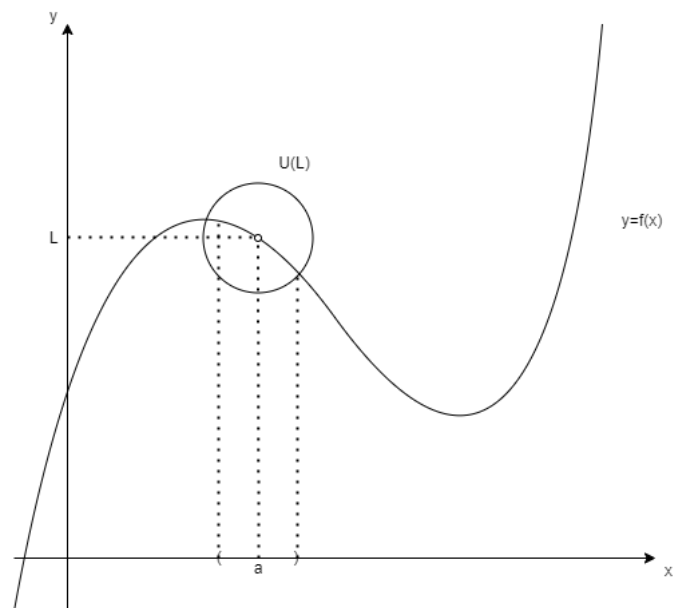
定義 6 (拓展實域). $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, 同時定義:

- $a + \infty = +\infty + a = +\infty$, 當 $a \neq -\infty$;
- $a - \infty = -\infty + a = -\infty$, 當 $a \neq +\infty$;
- $a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot a = \pm\infty$, 當 $a > 0$;
- $a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot a = \mp\infty$, 當 $a < 0$;
- $\frac{a}{\pm\infty} = 0$, 當 $a \in \mathbb{R}$;
- $\frac{\pm\infty}{a} = \pm\infty$, 當 $a > 0$;
- $\frac{\pm\infty}{a} = \mp\infty$, 當 $a < 0$ 。

討論函數的極限, 我們考慮下圖:



如上圖, 我們希望求得 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 的值, 故以幾何角度觀看, 這等同於對任意 $\varepsilon > 0$, 當 $f(x) \in U_\varepsilon(L)$ 時, 存在 $\delta > 0$ 使得 $x \in U_\delta(a)$, 其中 $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 。



故此，以 $|\cdot|$ 作為距離函數， $x \in U_\delta(a)$ 等價於 $|x - a| < \delta$ ， $y \in U_\epsilon(L)$ 等價於 $|y - L| < \epsilon$ ，可得以下極限定理：

定理. 設 f 為函數， f 在 a 存在極限當且僅當對於任意 $\epsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ 使得所有 x 符合 $0 < |x - a| < \delta$ 時，

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

此則寫 $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 。

例子. 證明 $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ 。

證明. 設 $\epsilon > 0$ 及 $\delta < \epsilon$ 。

若 $0 < |x - a| < \delta$ ，則

$$\begin{aligned} |x - a| &< \delta \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

□

例子. 證明 $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$ ， $n > 1$ 為整數。

證明. 設 $\epsilon > 0$ 及 $\delta < \frac{\epsilon}{nM^{n-1}}$ ，其中 $M := \max\{|a - \delta|, |a + \delta|\}$ 。

若 $0 < |x - a| < \delta$, 則

$$\begin{aligned}
 |x^n - a^n| &= |x - a| \left| \sum_{i=0}^{n-1} x^i a^{n-i-1} \right| \\
 &\leq |x - a| \sum_{i=0}^{n-1} |x^i a^{n-i-1}| \\
 &\leq |x - a| \sum_{i=0}^{n-1} M^i M^{n-i-1} \\
 &= |x - a| n M^{n-1} \\
 &< \delta \cdot n M^{n-1} \\
 &< \varepsilon
 \end{aligned}$$

□

從定義及定理不難發現，極限的求值無關 $x = a$ ，說明 $x = a$ 是一個可排除不理的點。我們稱之為**可移去點**(point of removable discontinuity)。

有鑒於可移去點的概念，我們求得更多難以想象、非必然但可以理解的極限的值。

例子. 證明 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{x - a} = (n+1)a^n$, $n \geq 0$ 為整數。

證明. 設 $\varepsilon > 0$ 及 $\delta < \frac{2\varepsilon}{n(n+1)M^{n-1}}$, 其中 $M := \max\{|a - \delta|, |a + \delta|\}$ 。

若 $0 < |x - a| < \delta$, 則

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{x - a} - (n+1)a^n \right| &= \left| \sum_{i=0}^n x^i a^{n-i} - (n+1)a^n \right| \\
 &\leq \sum_{i=0}^n |x^i a^{n-i} - a^n| \\
 &= \sum_{i=1}^n |a^{n-i}| |x^i - a^i| \\
 &\leq |x - a| \sum_{i=1}^n |a^{n-i}| \sum_{k=0}^{i-1} |x^k a^{i-1-k}| \\
 &\leq |x - a| \sum_{i=1}^n M^{n-i} \sum_{k=0}^{i-1} M^k M^{i-1-k} \\
 &< \delta \cdot \sum_{i=1}^n i M^{n-1} \\
 &= \delta \cdot \frac{n(n+1)}{2} M^{n-1} \\
 &< \varepsilon
 \end{aligned}$$

□

上例證得 $x = a$ 為可移去點。

對極限的討論，除了需要求得極限的值，還需要確定極限的唯一性，如此才能體現極限的價值。

定理 (唯一性). 若 $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ 且 c 是 A 的聚點，則 f 在 c 點上只有一個極限。

證明. 設 L, L' 均為 $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ 的值，則對於任意 $\varepsilon > 0$ ，均有：

$$\begin{aligned}
 |L - L'| &= |L - f(x) + f(x) - L'| \\
 &\leq |L - f(x)| + |L' - f(x)| \\
 &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\
 &= \varepsilon
 \end{aligned}$$

□

極限的性質

理解了極限的唯一性，現在可以更進一步探討極限的性質，包括其運算原理和重要定理。

定義 7 (運算符). 設 f, g 為實函數, 則定義以下函數運算:

- 定義加法為 $f + g$, 並理解為 $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ 。
- 定義減法為 $f - g$, 並理解為 $(f - g)(x) := f(x) - g(x)$ 。
- 定義乘法為 fg , 並理解為 $(fg)(x) := f(x)g(x)$ 。
- 若 $g(x) \neq 0$, 定義除法為 $\frac{f}{g}$, 並理解為 $(\frac{f}{g})(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ 。

定理. 若 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ 及 $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$, 則:

- $\lim_{x \rightarrow c} (f + g) = L + M$;
- $\lim_{x \rightarrow c} (f - g) = L - M$;
- $\lim_{x \rightarrow c} (fg) = LM$;
- 若 $M \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow c} (f/g) = L/M$ 。

證明. 加法: 對於任意 $\varepsilon > 0$, 均有:

$$\begin{aligned} |(f + g) - (L + M)| &= |L - f(x) + g(x) - M| \\ &\leq |L - f(x)| + |M - g(x)| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

減法: 對於任意 $\varepsilon > 0$, 均有:

$$\begin{aligned} |(f - g) - (L - M)| &= |f(x) - L + M - g(x)| \\ &\leq |L - f(x)| + |M - g(x)| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

乘法: 對於任意 $\varepsilon > 0$, 均有:

$$\begin{aligned} |(fg) - (LM)| &= |f(x)g(x) - Lg(x) + Lg(x) - LM| \\ &\leq |g(x)||L - f(x)| + |L||M - g(x)| \\ &< (|M| + \varepsilon)\varepsilon/(2|M| + \varepsilon) + |L|\varepsilon/2|L| \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

除法：對於任意 $\varepsilon > 0$ ，均有：

$$\begin{aligned} |(f/g) - (L/M)| &= |Mf(x) - LM + LM - Lg(x)|/|LM| \\ &\leq |L - f(x)|/|L| + |M - g(x)|/|M| \\ &< |L|\varepsilon/2|L| + |M|\varepsilon/2|M| \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

□

以上定理其實就是極限的分配律：

- $\lim_{x \rightarrow c} (f + g) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$;
- $\lim_{x \rightarrow c} (f - g) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$;
- $\lim_{x \rightarrow c} (fg) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \lim_{x \rightarrow c} g(x)$;
- 若 $M \neq 0$ ， $\lim_{x \rightarrow c} (f/g) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) / \lim_{x \rightarrow c} g(x)$ 。

設理. 設 f, g, h 為函數，並且對於所有 $x \in \mathbb{R}$ 符合 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ，若 $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x)$ ，則

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x)$$

證明. 設 $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$ ，則

$$-\varepsilon \leq g(x) - L \leq f(x) - L \leq h(x) - L \leq \varepsilon$$

因此， $|f(x) - L| \leq \varepsilon$ 。

□

以上定理汎用性極高，如下列例子：

例子. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}$ 。

因 $-1 \leq \sin x \leq 1$,

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

特殊的極限

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

由於證明以上極限需使用泰勒展開式，故目前不做證明。（或以切綫解釋：需要導數基礎）

連續函數

定義 8 (連續函數). 設 f 為函數, f 在 a 存在連續性當且僅當對於任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得所有 x 符合 $0 < |x - a| < \delta$ 時,

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

若 f 不符合以上條件, 則稱 f 在 a 不連續。

定義 9. 設 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ 為函數, 若 f 對所有 $a \in D$ 均存在連續性, 則稱 f 為 D 上的連續函數。

例子. 1. 常函數 $f(x) := b$ 是 \mathbb{R} 上的連續函數。

2. 函數 $f(x) := x$ 是 \mathbb{R} 上的連續函數。

3. 函數 $f(x) := x^2$ 是 \mathbb{R} 上的連續函數。

4. 函數 $f(x) := \frac{1}{x}$ 是 $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ 上的連續函數。

5. 函數 $f(x) := \frac{1}{x}$ 不是 \mathbb{R} 上的連續函數。

6. 函數 $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{若 } x \text{ 為有理數} \\ 0 & \text{若 } x \text{ 為無理數} \end{cases}$ 是 \mathbb{R} 上的連續函數。

小記. 若 f 不在 c 上連續, 但在 c 上存在極限, 則可得

$$g(x) := \begin{cases} \lim_{x \rightarrow c} f(x) & x = c \\ f(x) & x \neq c \end{cases}$$

為連續函數。此概念多見於拓展函數。

連續函數的性質

與極限相似, 連續性亦擁有綫性性。

定理. 若 f, g 為連續函數, 則:

- $f \pm g, fg$ 均為連續函數;
- 若 $g \neq 0$, f/g 為連續函數。

證明. 證明只需引用連續函數之定義即可。 \square

例子. 1. 多項式函數: $p(x) := a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ 。

2. 有理函數: $r(x) := \frac{p(x)}{q(x)}$, 而 $x \notin \{\alpha_i : q(\alpha_i) = 0\}$ 。

3. (基本) 三角函數: $\sin x$ 和 $\cos x$ 。

證明. 基於 $|\sin x| \leq |x|$ 和 $|\cos x| \leq 1$ (同理, 對於 $\cos x$), 可得

$$|\sin x - \sin c| = 2 \left| \sin \left[\frac{1}{2}(x - c) \right] \right| \left| \cos \left[\frac{1}{2}(x + c) \right] \right| \leq 2 \cdot \frac{1}{2} |x - c| = |x - c|$$

\square

4. 三角函數: $\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ 。證明從有理函數可得。

定理 (複合函數的延續性). 若 $f : A \rightarrow B, g : C \rightarrow D$ 均為連續函數, 且 $B \subset C$, 則

$$h(x) := (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

亦為連續函數。

證明. 留做習題。 \square

區間上的連續函數

定義 10 (有界性). 函數 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ 被稱為在 A 上有界若存在 $M > 0$ 使得對於任意 $x \in D$, 均有 $|f(x)| \leq M$ 。

換言之, 有界性的定義在於 f 是一個值域受限的函數, 以便討論極大極小值。反之, 成為無界。

定理. 設 $I := [a, b]$ 為閉合區間, 並設 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ 為連續函數, 則 f 在 I 上有界。

定義 11 (絕對極值). 設 $A \subset \mathbb{R}$ 及 $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ 。

- 若存在 $x^* \in A$ 使得對於所有 $x \in A$ 均有

$$f(x^*) \geq f(x)$$

則稱 f 有絕對峰值, x^* 為峰點。

- 若存在 $x_* \in A$ 使得對於所有 $x \in A$ 均有

$$f(x_*) \leq f(x)$$

則稱 f 有絕對谷值, x_* 為谷點。