階乘

階乘為一種特別的乘積，定義如下：

定義 1 (階乘)**.** *對任意正整數n，定義*

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$$

並定義$0! = 1$.

例子. $1! = 1.$

例子. $2! = 2 \cdot 1! = 2.$

例子. $3! = 3 \cdot 2! = 6.$

例子. $4! = 4 \cdot 3! = 24.$

例子. *對於0!的定義，可以如此理解：$n! = n(n-1)!$，則$(n-1)! = \frac{n!}{n}$。因此，*

$$0! = (1-1)! = \frac{1!}{1} = 1$$

小記. *階乘的運用只限非負整數；若需要對階乘進行拓展，可參考伽馬函數:*

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$$

組合

定義 2 (組合數)**.** *對於從n項物品中隨機抽取r項物品的組合數，定義爲*

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

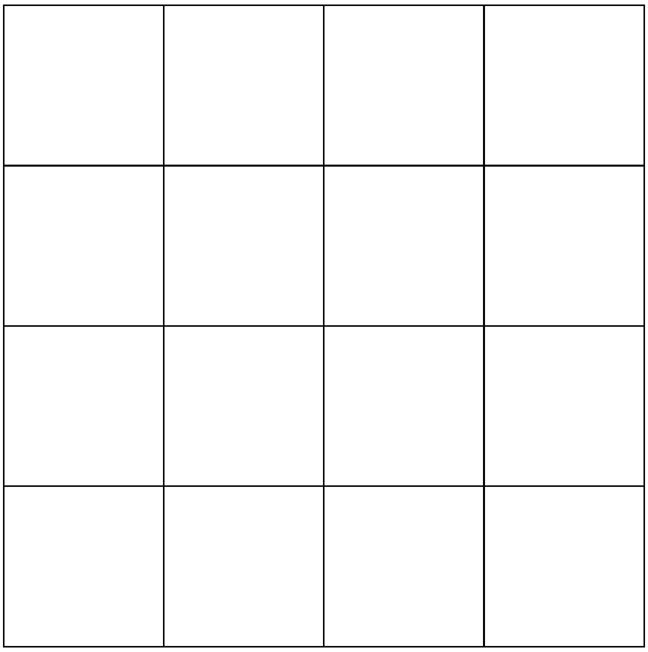
例子 (HKDSE MA 2019 I-15)**.** *設一班有21男與11女，若從班裏抽取5人成爲班會成員，並有至少1男，則有多少種不同的班會組合？*

解. 至少有1男，則全部組合方式排除沒有男生的組合方式：

$$C_5^{21+11} - C_5^{11} = 200914$$

■

例子. 數出下圖中純長方形與正方形的數量。



解. 數出正方形數量，則相當於相同長度的直綫與橫綫組合：

$$\sum_{k=1}^{4} k^2 = \frac{1}{6}(4)(4+1)(2\times 4+1) = 30$$

數出任意長方形數量，則相當於任意兩條直綫與任意兩條橫綫組合：

$$(C_2^5)^2 = 100$$

數出純長方形數量，則相當於任意長方形的數量減去正方形的數量：

$$100 - 30 = 70$$

■

定理. 設n,k為正整數，$0 \le k \le n$，則

$$C_k^n = C_{n-k}^n$$

證明.

$$\begin{aligned} C_k^n &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{[n-(n-k)]!(n-k)!} \\ &= C_{n-k}^n \end{aligned}$$

□

定理. 設n, k為正整數，$0 \leq k < n$，則

$$C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}$$

證明.

$$\begin{aligned}
C_k^n + C_{k+1}^n &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{(k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{(n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!} \\
&= C_{k+1}^{n+1}
\end{aligned}$$

□

二項式定理

一般而言，面對二項式展開，會提及**帕斯卡三角**：

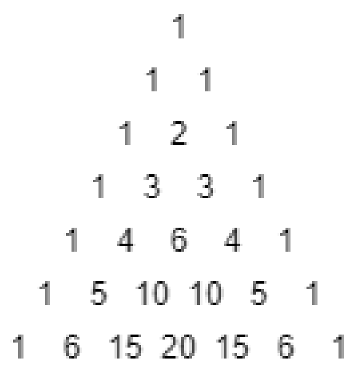


Figure 1: Pascal Triangle 帕斯卡三角

對於二項式展開的係數，除了以帕斯卡三角為入門設想，我們亦可考慮

$$\prod_{i=1}^{n}(a+b) = (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} ka^i b^{n-i}$$

已知展開式中任意一項的表達式必爲$ka^x b^y$，其中$x + y = n$及k為常數。現求對應的k的值，考慮

$$a^x b^y = (\prod_{i=1}^{x} a)(\prod_{j=1}^{y} b)$$

換言之，我們需從n個括號中取x個a相乘，取y個b相乘，其組合數為$C_x^n C_y^{n-x} = C_x^n$。

定理 (二項式定理). 設a,b為複數，n為正整數，則

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n a^k b^{n-k}$$

從二項式定理延伸，可得以下多項式定理：

定義 3 (多項式係數). 定義多項式係數為

$$\binom{n}{x_1, x_2, \ldots, x_k} = \frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_k!}$$

小記. 對於二項式，若將其視爲多項式的特殊情況，則可簡記$\binom{n}{x_1, x_2}$為$\binom{n}{x_1} = C_{x_1}^n$。

定理 (多項式定理). 設$a_1, a_2, \ldots, a_m$為一組數，n為正整數，則

$$(a_1+a_2+\cdots+a_m)^n = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_m=n} \binom{n}{i_1, i_2, \ldots, i_m} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_m^{i_m}$$

證明. 詳見習題11。 □

習題

1. 求$(3x^2 - \frac{7}{x})^6$的常數項及x^2的係數。
2. 設$(2+5x)^n - (2-3x)^n$中x^2的係數為10752，求x^3的係數。
3. 已知$(1+kx^3)^n = 1 - 8x^3 + 24x^6 + \cdots$，求$k$和$n$的值，其中$n$為正整數。
4. 已知$(1-2x)^m(1+x)^n = 1 - 8x + 18x^2 + \cdots$，求$m$和$n$的值，其中$m,n$均為正整數。
5. 求$(x+\frac{1}{x})^4(1-\frac{1}{x})^6$的常數項。
6. 證明若n,k為正整數，$0 \le k < n$，則$C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}$。
7. (a) 求$\sum_{k=0}^{n} C_k^n$。[HINT:考慮$(1+1)^n$的展開式。]

(b) 證明$\sum_{\text{奇數}k}^{n} C_k^n = \sum_{\text{偶數}k}^{n} C_k^n$。[HINT:考慮$(1-1)^n$的展開式。]

8. 設n為正整數。

   (a) 設r為介乎1與n之間的正整數。證明$\frac{C_{r+1}^{n+1}}{C_r^{n+1}} = \frac{n+1-r}{r+1}$。

   (b) 由此，證明一下等式：

   i. $$\sum_{k=0}^{n}(k+1)\cdot\frac{C_{k+1}^{n+1}}{C_k^{n+1}} = \frac{An^2+Bn+C}{2};$$

   ii. $$\prod_{k=0}^{n}(C_{k+1}^{n+1}+C_k^{n+1}) = \frac{(n+D)^{n+E}}{[(n+F)!]}\cdot(\prod_{k=0}^{n}C_k^{n+1}).$$

   其中A, B, C, D, E, F為常數，並須在結論時明確指出其值。

9. 證明范德蒙定理：

   定理. 設p, q, r為非負整數。若$r \le p+q$，則$\sum_{k=0}^{r} C_k^p C_{r-k}^q = C_r^{p+q}$。

   [HINT:考慮$(1+x)^{p+q} = (1+x)^p(1+x)^q$]

10. 求以下算式的值，並以n表示：

    (a) $\sum_{k=0}^{n}(C_k^n)^2$。

    (b) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(C_k^n)^2$

    (c) $\sum_{k=0}^{n} k(C_k^n)^2$。

    [HINT:考慮$C_k^n = C_{n-k}^n$]

11. 記$\begin{pmatrix} n \\ x_1, x_2, \ldots, x_k \end{pmatrix} = \frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_k!}$。

    (a) 證明對於任意正整數n及$k \ge 2$，若$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$，則

    $$\begin{pmatrix} n \\ x_1, x_2, \ldots, x_k \end{pmatrix} = C_{x_1}^n C_{x_2}^{n-x_1} \cdots C_{x_{k-1}}^{n-x_1-x_2-\cdots-x_{k-2}}$$

    (b) 由此，證明多項式定理。

12. 已知當$-1 < r < 1$時，

    $$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} r^k$$

證明對於任意正整數n及$-1 < r < 1$，

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k^{n+k-1} r^k = \frac{1}{(1-r)^n}$$

[HINT:習題1。]

13. 設p為實數且$0 < p < 1$。設n為正整數。對k介乎1與n之間，定義$a_k = C_k^n p^k (1-p)^{n-k}$。

   (a) 證明$\sum_{k=0}^{n} a_k = 1$。

   (b) 證明對於任意k介乎1與n之間，$0 < a_k < 1$。

   (c) 定義$\mu = \sum_{r=0}^{n} r a_r$。證明$\mu = np$。

   (d) 再定義$\sigma = \sqrt{\sum_{r=0}^{n} (r-\mu)^2 a_r}$。

      i. 證明$\sigma^2 = \sum_{r=0}^{n} r^2 a_r - \mu^2$。

      ii. 證明$\sum_{r=0}^{n} r(r-1) a_r = n(n-1)p^2$，由此證明$\sigma^2 = np(1-p)$。