全卷100分，限時48小時。請將答案以pdf形式提交。

函數基礎

1. （10分）設$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$為實函數。

   (a) （4分）證明$\frac{f(x)+f(-x)}{2}$為偶函數；$\frac{f(x)-f(-x)}{2}$為奇函數。

   (b) （2分）證明對於任意實函數，均可拆分為奇函數及偶函數兩部分。

   (c) 現假設對於任意$x, y \in \mathbb{R}$，函數f都符合以下函數等式

   $$f(x+y) = f(x)f(y)$$

   i. （3分）證明對於任意$x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$；

   ii. （1分）由此，證明f的偶函數部分必定大於或等於0。

2. （10分）設$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$為實函數。

   (a) （3分）證明若$f(ix) = if(x)$，則f為奇函數。

   (b) （7分）設$F(x) = f(x) + if(-x)$，而且$F(x+y) = F(x) + F(y)$。

   i. （3分）求$f(0)$。

   ii. （4分）證明f為奇函數。

二項式展開

1. （6分）記$C^n_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$。

   (a) （3分）求$\sum_{k=0}^{n} C^n_k$。

   (b) （3分）證明$\sum_{奇數k}^{n} C^n_k = \sum_{偶數k}^{n} C^n_k$。

2. （14分）記$\begin{pmatrix} n \\ x_1, x_2, \ldots, x_k \end{pmatrix} = \frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_k!}$。

   (a) （9分）證明對於任意正整數n及$k \geq 2$，若$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$，

   $$\begin{pmatrix} n \\ x_1, x_2, \ldots, x_k \end{pmatrix} = C^n_{x_1} C^{n-x_1}_{x_2} \cdots C^{n-x_1-x_2-\cdots-x_{k-2}}_{x_{k-1}}$$

(b) （5分）由此，證明對於任意正整數n，

$$(a+b+c)^n = \sum_{\substack{i+j+k=n,\\ i,j,k\text{為非負整數}}} \binom{n}{i,j,k} a^i b^j c^k$$

數學歸納法

1. （3分）利用數學歸納法，證明對於任意正整數n，$n! \leq n^n$。
2. （7分）利用數學歸納法，證明對於任意正整數n及$-1 < r < 1$，

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k^{n+k-1} r^k = \frac{1}{(1-r)^n}$$

三角函數

1. （7分）設$i^2 = -1$。證明對於任意整數n，

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

2. （8分）考慮$\sin(36°) = \cos(54°)$，證明$\sin(18°) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$。

極限

1. （5分）設f, g, h為實函數，并且$f(0) = g(0) = h(0) = 0$。若$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-g(x)}{h(x)} = 9$，求

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{f(x)} - e^{g(x)}}{\sin(h(x))}$$

2. （15分）設$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$為實函數，定義

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(a) （3分）求$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$，並證明$f$為連續函數。

(b) （4分）求$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$及$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$。

(c) （8分）設$g(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$，證明$\lim_{x\to 0} g(x)$無法被定義。

微分原理

1. （10分）設$f(x) = \sin \pi x$。

   (a) （2分）求$f'(0)$;

   (b) （8分）設(g_n)為函數數列，定義$g_1(x) = f(x)$及$g_n(x) = f(g_{n-1}(x))$。證明對於任意正整數n，$g_n'(0) = \pi^n$。

2. （5分）寫出令$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$沒有頂點的條件，已知$a, b, c, d$均爲實數及$a \neq 0$。