

References: Introduction to Real Analysis (Bartle & Sherbert), Thomas Calculus 12th Edition

## 向量

向量屬於一種特殊的矩陣，通常用以表達多維坐標。

**定義 1 (向量).** 一個 $n$ -維向量包含 $n$ 個元素，可視之為 $n$ -維空間中的坐標，同時代表從原點指向該坐標的箭頭。

為方便描述，記 $V_S$ 為帶有 $S$ 域的元素向量集合。

**定義 2 (向量加法).** 在向量集合 $V_S$ 中，若 $\vec{x} = (x_i)_i = (x_1, x_2, \dots)$ ,  $\vec{y} = (y_i)_i = (y_1, y_2, \dots) \in V_S$ ，則

$$\vec{x} + \vec{y} := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots) = (x_i + y_i)_i$$

**即時練習.** 求以下向量和：

1.  $(1, 2) + (3, 4)$ ;
2.  $(1, 2, 3, 4) + (1, 3, 4, 5)$ ;
3.  $(1, -1, -1, 1, 1, 1) + (-1, 1, 1, -1, -1, -1)$ .

**定義 3 (標量乘法).** 在向量集合 $V_S$ 中，若 $\vec{x} = (x_i)_i = (x_1, x_2, \dots) \in V_S$ ， $\alpha \in S$ ，則

$$\alpha \vec{x} := (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots) = (\alpha x_i)_i$$

**即時練習.** 求以下標量積：

1.  $3(1, 2)$ ;
2.  $-7(1, 3, 4, 5)$ ;
3.  $-1(-1, 1, 1, -1, -1, -1)$ .

**定義 4 (向量的量值).** 對於任意向量 $\vec{v}$ ，其量值定義為 $|\vec{v}|$ ，代表其長度。

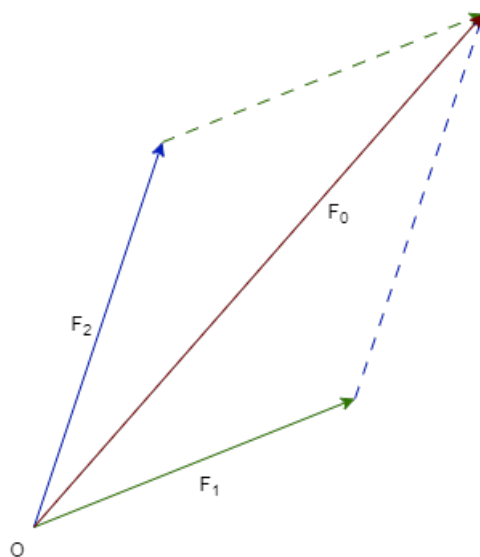
## 向量空間

**定義 5** (向量空間). 設  $V_S$  為向量集合, 且  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V_S$ ,  $\alpha, \beta \in S$ . 若  $V_S$  符合以下定理:

- 加法結合律:  $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ .
- 加法交換律:  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ .
- 加法單位元:  $\vec{0} \in V_S$  使得  $\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$ .
- 加法逆:  $\forall \vec{x} \in V_S$ , 存在  $\vec{y} \in V_S$  使得  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x} = \vec{0}$ .
- 標乘結合律:  $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$ .
- 標乘單位元:  $1 \in S$  使得  $1\vec{x} = \vec{x}$ .
- 分配律 1:  $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$ .
- 分配律 2:  $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$ .

**示例.**  $\mathbb{R}$  是一個向量空間。而且任何域也是向量空間。

**示例.** 在牛頓力學中討論力時, 我們會以向量表示力的大小與方向。假設目前的討論僅限於平面 (二維空間), 並記施力點為原點  $O$ 。



在上圖中可通過改變力量發生的先後次序來實現向量的平移, 從而得出

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

的關係式。又因二維向量可拆分為水平向量及鉛垂向量兩個分量，故

$$\vec{F}_0 = (|\vec{F}_1| \cos \theta + |\vec{F}_2| \cos \phi) \hat{i} + (|\vec{F}_1| \sin \theta + |\vec{F}_2| \sin \phi) \hat{j}$$

其中 $\hat{i}$ 和 $\hat{j}$ 分別代表水平單位向量及鉛垂單位向量。

欲考慮作功問題，我們定義以下計算方式

**定義 6** (點積/內積). 兩向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的內積可定義為

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \equiv \vec{a} \cdot \vec{b} := |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

其中 $\theta$ 為 $\vec{a}, \vec{b}$ 之間的夾角。

**示例.** 根據經典力學定義，作功方程為

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

其中 $W$ 為作功純量， $\vec{F}$ 為施力向量， $\vec{s}$ 為位移向量。考慮內積定義，作功方程可寫成

$$W = |\vec{F}| |\vec{s}| \cos \theta$$

其中 $\theta$ 為向量之間的夾角。

**定理** (內積的性質). 對於 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ,

1.  $\langle 0, \vec{a} \rangle = \langle \vec{a}, 0 \rangle = 0$ ;
2.  $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \geq 0$ ,  $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0$ 當且僅當 $\vec{a} \equiv 0$ ;
3.  $\langle \vec{a}, x\vec{b} + z\vec{c} \rangle = x\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + z\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$ ;
4. 若 $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ , 則 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$ 。

**命題.** 向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 之間的夾角為

$$\theta = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

另外，若 $\vec{a}$ 正交於 $\vec{b}$ （在 $\mathbb{R}^2$ 為互相垂直）， $\vec{a}, \vec{c}$ 平行，則根據定義

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$

及

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| |\vec{c}| \cos 0^\circ = |\vec{a}| |\vec{c}|$$

因此

$$|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}|^2} = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$$

**定義 7** (基與正交基與標準正交基). 對於向量空間 $V_S$ , 若 $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\} \subset V_S$ 為互不平行, 即綫性獨立, 同時對任意 $\vec{v} \in V_S$ , 都存在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in S$ 使得

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{b}_k$$

則稱 $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ 為 $V_S$ 的**基**。

若 $\{\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_n\} \subset V_S$ 為 $V_S$ 的基而且對所有 $i \neq j$ , 均有

$$\langle \vec{\beta}_i, \vec{\beta}_j \rangle = 0$$

則稱 $\{\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_n\}$ 為 $V_S$ 的**正交基**。

若 $\{\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \dots, \vec{\gamma}_n\} \subset V_S$ 為 $V_S$ 的正交基而且對所有 $i$ , 均有

$$|\vec{\gamma}_i| = 1$$

則稱 $\{\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \dots, \vec{\gamma}_n\}$ 為 $V_S$ 的**標準正交基**。

**小記.** 對於任何向量空間, 標準正交基的構成并非唯一。舉例 $\mathbb{R}$ 作為 $\mathbb{R}$ 的向量空間, 1和-1均可作為 $\mathbb{R}$ 的標準正交基;  $\mathbb{R}^2$ 作為 $\mathbb{R}$ 的向量空間, 則

$$\left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

均為 $\mathbb{R}^2$ 的標準正交基。

對於有標準正交基的向量空間, 我們的討論會比較簡單:

**定理.** 設 $V_S$ 為向量空間,  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 為 $V_S$ 的標準正交基。若 $v, u \in V_S$ 可寫作 $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ 及 $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$ , 則

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

**證明.**

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n u_i e_i, \sum_{j=1}^n v_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n u_i \left\langle e_i, \sum_{j=1}^n v_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j \delta_{ij} = \sum_{\substack{i=j \\ 1 \leq i, j \leq n}} u_i v_j = \sum_{i=1}^n u_i v_i \end{aligned}$$

□

衍理. 設  $V_S$  為向量空間,  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  為  $V_S$  的標準正交基。若  $v \in V_S$  可寫作  $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ , 則

$$|v| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$$

而且

$$v_i = \langle v, e_i \rangle$$

為方便描述, 接下來會稱  $V_S$  的標準正交基為  $\mathcal{O}(V_S) := \{e_i\}_{i \in I}$ ,  $I$  為索引集。

定理 (餘弦定理). 設  $u, v \in V_S$ , 則

$$|u - v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| \cos \theta$$

其中  $\theta$  是  $u, v$  的夾角。

證明. 設  $u = \sum_{i \in I} u_i e_i, v = \sum_{i \in I} v_i e_i$ , 則

$$\begin{aligned} |u - v|^2 &= \sum_{i \in I} (u_i - v_i)^2 \\ &= \sum_{i \in I} (u_i^2 + v_i^2 - 2u_i v_i) \\ &= \sum_{i \in I} u_i^2 + \sum_{i \in I} v_i^2 - 2 \sum_{i \in I} u_i v_i \\ &= |u|^2 + |v|^2 - 2\langle u, v \rangle \\ &= |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| \cos \theta \end{aligned}$$

□

在三維空間中, 存在叉積:

定義 8 (叉積). 假設  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\} \subset \mathbb{R}^3$  為  $\mathbb{R}^3$  的標準正交基, 則定義  $\times : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  為

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

叉積的定義可考慮面積與體積的計算原理: 考慮三個單位向量  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  的乘積為體積及任意兩個向量的乘積為面積, 基於  $\hat{i} \times \hat{j}$  為  $ij$  平面的面積單位, 而面積乘以高等於體積, 故  $V(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}) = (\hat{i} \times \hat{j}) \cdot \hat{k}$  為標量, 使得  $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$ 。

因此, 我們可定義

**定義 9** (面積與體積). 設  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ , 則

$$A(u, v) := |u \times v| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$V(u, v, w) := (u \times v) \cdot w = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

事實上，叉積的計算無法以向量簡單作結。Kronecker就發現基本的向量無法解釋  $i \times j = k$  的情況（例如，為何面積是向量而體積不是？），因此，他提出以**雙向量**(bi-vector)為  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  下定義：

**定義 10.** 定義  $\hat{i} = e_1 e_2, \hat{j} = e_2 e_3, \hat{k} = e_1 e_3$ , 且  $e_i e_j = -e_j e_i$ ,  $e_i^2 = 1$  由此符合

$$\begin{aligned} \hat{i}\hat{j} &= e_1 e_2 e_2 e_3 = e_1 e_3 = \hat{k} \\ \hat{j}\hat{k} &= e_2 e_3 e_1 e_3 = -e_2 e_3 e_3 e_1 = -e_2 e_1 = e_1 e_2 = \hat{i} \\ \hat{k}\hat{i} &= e_1 e_3 e_1 e_2 = -e_3 e_1 e_1 e_2 = -e_3 e_2 = e_2 e_3 = \hat{j} \end{aligned}$$

上述定義可引申至對軸心的旋轉： $\hat{i}$ 為沿 $z$ 軸逆時針旋轉90度； $\hat{j}$ 為沿 $x$ 軸逆時針旋轉90度； $\hat{k}$ 為沿 $y$ 軸逆時針旋轉90度。

而我對於向量積的理解，可作以下判斷：

1. 其實向量乘法無需分辨點積與叉積：當所有討論都建基於向量時，我們可以進一步討論單向量、雙向量，甚至三向量的關係。設  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  分別代表互相垂直的三軸單位向量，則可視單向量  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  為**尺度向量**，代表該軸的長度單位（如  $m$ ）；而雙向量  $\hat{i}\hat{j}, \hat{j}\hat{k}, \hat{k}\hat{i}$  則為**面積向量**，代表互相垂直的方向所得的長度單位乘積（如  $m^2$ ）；至於三向量  $\hat{i}\hat{j}\hat{k}$  則為**體積向量**，代表三個方向長度單位相乘的結果（如  $m^3$ ）。
2.  $\hat{i}^2, \hat{j}^2, \hat{k}^2$  作為相同方向的乘積，不存在面積向量。考慮歐幾里得長度算法  $|\hat{i} + \hat{j}| := \sqrt{\hat{i}^2 + \hat{j}^2}$  為標量，可認定  $\hat{i}^2, \hat{j}^2$ （及  $\hat{k}^2$ ）同為標量，即無視方向而得比較量。因此  $\hat{i}^2 = \hat{j}^2 = \hat{k}^2 = 1$ 。
3. 考慮面積向量的等效性，我們需要  $|\hat{i}\hat{j}| = |\hat{j}\hat{i}|$ ，但  $\hat{i}\hat{j}$  是否等價於  $\hat{j}\hat{i}$  則值得探究：事實上，考慮  $\hat{i} + \hat{j}$  及  $\hat{i} - \hat{j}$  為平面上互相垂直的向量，則  $(\hat{i} + \hat{j})(\hat{i} - \hat{j}) = \hat{j}\hat{i} - \hat{i}\hat{j} > 0\hat{i}\hat{j}$ 。此則說明  $\hat{i}\hat{j} \neq \hat{j}\hat{i}$ ，因此  $\hat{i}\hat{j} = -\hat{j}\hat{i}$ （同理可得  $\hat{j}\hat{k} = -\hat{k}\hat{j}$  及  $\hat{k}\hat{i} = -\hat{i}\hat{k}$ ）。

4. 由此衍生關係式： $\hat{i}\hat{j}\hat{k} = -\hat{j}\hat{i}\hat{k} = \hat{j}\hat{k}\hat{i} = -\hat{k}\hat{j}\hat{i} = \hat{k}\hat{i}\hat{j} = -\hat{i}\hat{k}\hat{j}$ 。
5. 因此在我的理解下，任意向量相乘會衍生多重向量，並且同時符合內積與外積的存在性：

(a) 若  $x := (x_1, x_2, x_3)$  及  $y := (y_1, y_2, y_3)$  相乘，可得

$$\begin{aligned} xy &= W(x, y) + A_1(x, y)\hat{i}\hat{j} + A_2(x, y)\hat{j}\hat{k} + A_3(x, y)\hat{k}\hat{i} \\ &=: \langle x, y \rangle + (x \times y) \end{aligned}$$

其中  $x, y$  所組成的平行四邊形的面積為

$$A(x, y) := |x \times y| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

(b) 若  $x := (x_1, x_2, x_3)$ 、 $y := (y_1, y_2, y_3)$  及  $z = (z_1, z_2, z_3)$  相乘，可得

$$\begin{aligned} xyz &= \langle x, y \rangle z + (x \times y)z \\ &= \langle x, y \rangle z + (x \times y) \times z + \langle x \times y, z \rangle \end{aligned}$$

其中  $x, y, z$  所組成的六面體的面積為

$$V(x, y, z) := \langle x \times y, z \rangle$$

至於餘向量會代表其他物理量，此處暫時不提。此稱為幾何代數。

事實上，在更高維的空間裏，向量的外積有以下定義

**定義 11** (外積 (Outer product))。設  $u = (u_i)_{i \in I}, v = (v_i)_{i \in I}$ ，則外積為

$$u \wedge v = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \cdots & u_1 v_n \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & \cdots & u_2 v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n v_1 & u_n v_2 & \cdots & u_n v_n \end{bmatrix}$$

**定義 12** (外代數 (Exterior product))。設  $u = (u_i)_{i \in I}, v = (v_i)_{i \in I}$ ，則外代數為

$$u \wedge v = \begin{bmatrix} 0 & u_1 v_2 & \cdots & u_1 v_n \\ u_2 v_1 & 0 & \cdots & u_2 v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n v_1 & u_n v_2 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

外代數則對應一般幾何上的叉積。

**定理.** 設  $u, v \in \mathbb{R}^n$ ，則平行四邊形面積為

$$A(u, v) = |u||v| \sin \theta$$

其中  $\theta$  為  $u$  和  $v$  的夾角。因此

$$|u \wedge v| = |u||v| \sin \theta$$

**衍理.** 設  $u, v \in \mathbb{R}^n$ ，則

$$|u|^2|v|^2 = \langle u, v \rangle^2 + |u \wedge v|^2$$

外積的應用並不廣汎，因為在高維空間其實很難定義內外，因此我們通常更集中於內積的運算。其中對於互補空間的探索可謂是將內積運用至極緻。

**定義 13 (維度).** 若某向量空間  $V$  的標準正交基有  $n$  項綫性獨立元素，則稱  $V$  是一個  $n$  維空間。記  $\dim V = n$ 。

**定義 14 (補空間).** 設  $V \subset \mathbb{R}^n$  同時  $\dim V = k < n$ 。若存在  $V^\perp \subset \mathbb{R}^n$  使得

$$1. \dim V^\perp = n - k \text{ 及;}$$

$$2. \forall v \in V, \forall v^\perp \in V^\perp \text{ 使得}$$

$$\langle v, v^\perp \rangle = 0$$

則稱  $V^\perp$  為  $V$  的補空間。

因此， $V^\perp$  通常被定義為

$$V^\perp := \{w \in \mathbb{R}^n : \langle w, v \rangle = 0, \forall v \in V\}$$

**示例.** 在  $\mathbb{R}^2$  上，下列情況均為互補空間：

$$1. \mathbf{X} := \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\} \text{ 及 } \mathbf{Y} := \{(0, y) \in \mathbb{R}^2\};$$

$$2. \forall u, v \in \mathbb{R}^2, \text{ 若 } \langle u, v \rangle = 0, \text{ 則 } \mathbf{U} := \{ku : k \in \mathbb{R}\} \text{ 及 } \mathbf{V} := \{hv : h \in \mathbb{R}\} \text{ 為互補空間。}$$

考慮  $u, v \in \mathbb{R}^n$  使得  $u \wedge v \neq 0$ ，令  $w := u - \frac{\langle u, v \rangle}{|v|^2} v$  則

$$\langle u, w \rangle = 0$$

由此，我們可得以下命題：



**命題 (正交化).** 設  $u, v \in \mathbb{R}^n$  且  $u \in U \subset \mathbb{R}^n$ , 則  $u - \frac{\langle u, v \rangle}{|v|^2} v \in U^\perp$ 。

證明. 留做習題。 □

**定理 (格林-史密特正交化).** 若  $B_V = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  為向量空間  $V$  的基, 並且  $b_i \wedge b_j \neq 0$ 。令  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$  為另一基集使得

$$\beta_n := b_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\langle \beta_k, b_n \rangle}{|\beta_k|^2} \beta_k$$

則  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$  為  $V$  的正交基。

證明. 利用命題, 可證明  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$  為  $V$  的正交集; 又因  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$  的元素為  $B_V$  的綫性組合,  $B_V$  亦可寫成  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$  的綫性組合, 因此  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$  為  $V$  的基。 □

**示例.** 求以  $\{(1, 2, 3), (1, 3, 5), (1, 0, 1)\}$  為基的向量空間的一組標準正交基。

$$\begin{aligned} \beta'_1 &= (1, 0, 1) \\ \beta_1 &= \frac{\beta'_1}{|\beta'_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) \\ \beta'_2 &= (1, 2, 3) - \frac{4}{2}(1, 0, 1) \\ &= (-1, 2, 1) \\ \beta_2 &= \frac{\beta'_2}{|\beta'_2|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1) \\ \beta'_3 &= (1, 3, 5) - \frac{6}{2}(1, 0, 1) - \frac{10}{6}(-1, 2, 1) \\ &= \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ \beta_3 &= \frac{\beta'_3}{|\beta'_3|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1) \end{aligned}$$

因此,  $V$  的其中一組標準正交基為  $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1)\}$

## 向量函數

向量函數顧名思義在於將函數從一個向量空間映射向另一個向量空間, 其形式可以看成

**定義 15** (向量函數). 給定  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , 設  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  及  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , 若

$$y = f(x)$$

則對於所有  $1 \leq k \leq n$ , 存在獨特的  $f_k : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  使得

$$y_k = f_k(x)$$

示例. 以下為向量函數的例子:

1.  $f(x) := x^2 + 3x + 1$ ;
2.  $f(x, y, z) := xy + xz + 3y - 2z$ ;
3.  $f(x) := (x, x^2, x^2 + x)$ ;
4.  $f(x, y) := (x^2y, xy^2, x^3 - y^3)$ .

由於向量函數相較實函數有更多偏差發生, 例如

$$f(x, y) := \left( \frac{1}{x-y}, x^2 + y^2 \right)$$

并不能在  $x = y$  的情況下連續, 因此我們又需要調出那個萬用的極限。

**定義 16** (向量函數的極限). 設  $y = f(x)$ , 其中  $y \in \mathbb{R}^n$ . 若存在  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  使得對於任意  $\epsilon > 0$ , 都有  $\delta > 0$  使得  $|x - x_0| < \delta$  時  $|f(x) - y_0| < \epsilon$ , 則稱  $y_0$  為  $f(x)$  在  $x_0$  的極限, 記  $y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 。

示例. 求  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x - y}$ 。

解. 0

證明. 設  $\epsilon > 0$ ,  $\delta = \epsilon/2$ , 若  $|(x, y) - (0, 0)| < \delta$ , 則

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^2 - y^2}{x - y} \right| &= |x + y| \\ &\leq 2\sqrt{x^2 + y^2} \\ &< 2\delta \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

因此可見,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x - y} = 0$ 。

□

■

若考慮極坐標系統，則對於任意 $n$ 維空間的向量 $\vec{v}$ ，均可定義 $r := |\vec{v}|, \vec{\theta} = \arg \vec{v}$ 。

**定理** (有理函數極限的存在). 設 $f, g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ 為多項式函數，則存在 $r$ 的多項式函數 $p, q : \mathbb{R} \times [0, 2\pi]^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$ 使得

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(r; \theta)}{q(r; \theta)}$$

並且稱 $p_0 := p(a; \theta), q_0 := q(a; \theta)$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(r; \theta)}{q(r; \theta)} = \begin{cases} 0 & , \deg_r p > \deg_r q \\ \frac{p_0}{q_0} & , \deg_r p = \deg_r q \end{cases}$$

若 $\frac{p_0}{q_0}$ 獨立於 $\theta$ ，則稱為極限收斂；反之發散。

**定義 17** (向量函數的連續性). 若 $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ，則稱 $f$ 在 $x_0$ 上連續。

## 偏導數與全導數

此後的函數均預設為連續函數。

**定義 18** (偏導數). 設 $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ，而 $(x_1, x_2, \dots, x_m) \xrightarrow{f} (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 。若只求 $f$ 對於單一變量 $x_k$ 的變化，則

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_k + h, \dots, x_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_m)}{h}$$

考慮 $f = (f^1, f^2, \dots, f^n)$ 的記法，可將之寫成

$$\left( \frac{\partial f^1}{\partial x_k}, \frac{\partial f^2}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial f^n}{\partial x_k} \right)$$

小記. 偏導數的記法通常以 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 表示，也有寫 $\partial_x f$ 或 $f_x$ 簡便記之。

示例. 求 $f(x, y, z) := xyz$ 的所有偏導數。

$$\partial_x f = \partial_x(x)yz + x\partial_x(y)z + xy\partial_x(z) = yz$$

$$\partial_y f = \partial_y(x)yz + x\partial_y(y)z + xy\partial_y(z) = xz$$

$$\partial_z f = \partial_z(x)yz + x\partial_z(y)z + xy\partial_z(z) = xy$$

示例. 求  $f(x, y) := (x^2, xy, xy^2)$  的所有偏導數。

$$\partial_x f = (\partial_x(x^2), \partial_x(xy), \partial_x(xy^2)) = (2x, y, y^2)$$

$$\partial_y f = (\partial_y(x^2), \partial_y(xy), \partial_y(xy^2)) = (0, x, 2xy)$$

定義 19 (二階偏導數). 若  $f$  為二階可偏導, 則對於  $x$  及  $y$  的偏導數, 可寫

$$\partial_{xy} := \partial_x \partial_y f$$

示例. 設  $(x, y, z) \xrightarrow{f} xyz$ , 則

$$f_x = yz$$

$$f_{yx} = z$$

$$f_y = xz$$

$$f_{xy} = z$$

示例. 設  $(x, y) \xrightarrow{f} yx^y$ , 則

$$f_x = y^2 x^{y-1}$$

$$f_{yx} = 2yx^{y-1} + y^2 x^y \ln x$$

$$f_y = x^y + yx^y \ln x$$

$$f_{xy} = yx^{y-1} + y^2 x^{y-1} \ln x + yx^{y-1}$$

定義 20 (導數法). 設  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , 而  $(x_1, x_2, \dots, x_m) \xrightarrow{f} (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 。則

$$\frac{df}{dx} := \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_m + h_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\|\vec{h}\|}$$

定理. 設  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , 而  $(x_1, x_2, \dots, x_m) \xrightarrow{f} (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 。則  $f$  的全導數為

$$df := \sum_{k=1}^n \partial_{x_k} f dx_k = \begin{bmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} & \cdots & f_{x_m} \end{bmatrix} d(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

證明. 考慮基本原理, 若  $f$  為連續函數, 則

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &:= \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_m + h_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\|\vec{h}\|} \\ &= \sum_{i=1}^m \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + h_i, \dots, x_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m)}{h_i} \\ &= \sum_{i=1}^m f_{x_i} \end{aligned}$$

并且, 因  $f_{x_i} dx_j = df \frac{dx_j}{dx_i} = 0$ ,

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^m f_{x_i} \right) dx &= \sum_{i=1}^m (f_{x_i} dx_i) \\ &= \begin{bmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} & \cdots & f_{x_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} & \cdots & f_{x_m} \end{bmatrix} d(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{aligned}$$

□

衍理. 若  $f$  可導, 則對於任意  $k$ ,  $\partial_{x_k} f$  均存在。

衍理. 若  $f$  二階可導, 則對於任意  $i, j$ ,  $\partial_{x_i x_j} f$  均存在。

情況一:  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

示例. 設  $\vec{v} = (x, y, z)$  並考慮  $f(x, y, z) = xyz$ ,

$$\begin{aligned} df &= \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k} f dx_k \\ &= \partial_x f dx + \partial_y f dy + \partial_z f dz \\ &= yz dx + xz dy + xy dz \\ &= \begin{bmatrix} yz & xz & xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z \end{bmatrix} d\vec{v} \end{aligned}$$

情況二:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

示例. 考慮  $\vec{f}(t) = (t, t^2, t^3)$ ,

$$\begin{aligned} d\vec{f} &= \partial_t f dt \\ &= (1, 2t, 3t^2) dt \\ &= \vec{f}_t dt \end{aligned}$$

情況三： $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 

示例. 設  $\vec{v} = (x, y, z)$  並考慮  $f(x, y, z) = (x + y^2 + z^3, x^3 + y + z^2, x^2 + y^3 + z)$ ,

$$\begin{aligned} df &= \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k} f dx_k \\ &= \partial_x f dx + \partial_y f dy + \partial_z f dz \\ &= (1, 3x^2, 2x)dx + (2y, 1, 3y^2)dy + (3z^2, 2z, 1)dz \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2y & 3z^2 \\ 3x^2 & 1 & 2z \\ 2x & 3y^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \vec{f}_x & \vec{f}_y & \vec{f}_z \end{bmatrix} d\vec{v} \end{aligned}$$

定義 21 (全導數). 設  $(x_1, x_2, \dots, x_m) \xrightarrow{f} (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , 記

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

則  $df = \nabla f dx$ 。我們稱  $\nabla f$  為  $f$  的第一階全導數。

小記. 由於  $df = \nabla f dx$ , 故

$$\nabla f = \frac{df}{dx} = \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(x + \vec{h}) - f(x)}{\|\vec{h}\|}$$

示例. 估算  $(3.001)^{5.001}$  的值。

解. 設  $f(x, y) = x^y$ , 則

$$\begin{aligned} df &= \nabla f dx \\ &= \begin{bmatrix} yx^{y-1} & x^y \ln x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \\ &= yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy \end{aligned}$$

因此對  $(3.001)^{5.001}$  作估算：

$$\begin{aligned} (3.001)^{5.001} &\approx 3^5 + 5 \cdot 3^4(0.001) + 3^5 \ln 3(0.001) \\ &= 243.405 + 0.243 \ln 3 \\ &= 243.672 \end{aligned}$$

■

更進一步，我們可以討論二階導數：

定理 (二階導數). 設  $(x_1, x_2, \dots, x_m) \xrightarrow{f} (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , 記

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{bmatrix}$$

則  $d^2 f = \nabla^2 f dx^2$ 。我們稱  $\nabla f$  為  $f$  的**第二階全導數**。

證明. 根據第一階全導數，

$$\begin{aligned} df &= \sum_{i=1}^m f_{x_i} dx_i \\ d^2 f &= \sum_{i=1}^m (df_{x_i}) dx_i \\ &= \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^m f_{x_i x_j} dx_j \right) dx_i \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f_{x_i x_j} dx_i dx_j \\ &= \begin{bmatrix} dx_1 & dx_2 & \cdots & dx_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_m \end{bmatrix} \\ &= (dx)^T (\nabla^2 f) (dx) \end{aligned}$$

□

示例. 設  $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}$  並定義  $f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2}$ , 求  $\nabla^2 f$ 。

解.

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{8x^2 z}{(x^2 + y^2)^3} & \frac{8xyz}{(x^2 + y^2)^3} & \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{8xyz}{(x^2 + y^2)^3} & \frac{8y^2 z}{(x^2 + y^2)^3} & \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■

## 方向導數

方向導數屬於偏導數的普適版，但其存在對於微分幾何影響重大。

**定義 22** (方向導數). 設  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ，而  $x \xrightarrow{f} y$ 。則  $f$  在  $x$  上向  $\vec{v}$  的方向導數為

$$\nabla_{\vec{v}} f := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{v}) - f(\vec{x})}{\|h\vec{v}\|}$$

**定理.** 設  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ，而  $x \xrightarrow{f} y$ 。則

$$\nabla_{\vec{v}} f = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \langle \nabla f | \vec{v} \rangle$$

證明. 從定義，

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{v}} f &:= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{v}) - f(\vec{x})}{\|h\vec{v}\|} \\ &= \frac{1}{\|\vec{v}\|} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{v}) - f(\vec{x})}{h} \\ &= \frac{1}{\|\vec{v}\|} \sum_{i=1}^m \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + hv_i, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m)}{h} \\ &= \frac{1}{\|\vec{v}\|} \sum_{i=1}^m \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + hv_i, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m)}{hv_i} v_i \\ &= \frac{1}{\|\vec{v}\|} \sum_{i=1}^m f_{x_i} v_i \\ &= \frac{1}{\|\vec{v}\|} \langle \nabla f | \vec{v} \rangle \end{aligned}$$

□

**命題** (方向導數的性質). 設  $f, g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ， $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ， $u, v \in \mathbb{R}^m$ ，則

• 函數線性性： $\nabla_{\vec{v}}(\lambda f + \mu g) = \lambda \nabla_{\vec{v}} f + \mu \nabla_{\vec{v}} g$ ；

• 乘積法則：

$$1. \nabla_{\vec{v}} \langle f | g \rangle = \langle \nabla_{\vec{v}} f | g \rangle + \langle f | \nabla_{\vec{v}} g \rangle;$$

$$2. \nabla_{\vec{v}}(f \wedge g) = (\nabla_{\vec{v}} f) \wedge g + f \wedge (\nabla_{\vec{v}} g);$$

• 鎖鏈法則：設  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ ， $\nabla_{\vec{v}}(h \circ g) = (\nabla_{\nabla_{\vec{v}} g} h \circ g) \otimes \nabla_{\vec{v}} g$ 。



## 切面與法綫

考慮平面上的曲線的切綫，為 $y - f(x_0) = \frac{dy}{dx}|_{x=x_0} \cdot (x - x_0)$ ；若考慮向量的表達式，由於 $y = f(x)$ ，得任何圖上坐標為 $(x, f(x))$ ，則 $\vec{v} := (1, f'(x))$ 為其導向量，則切綫為以下集合

$$T(f) := \{(x, f(x)) + \alpha(1, f'(x)) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

**定義 23** (綫性生成空間). 設 $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$  為 $\mathbb{R}^n$ 內的一組綫性獨立向量，則稱

$$\left\{ \sum_{k=1}^m \alpha_k \vec{v}_k : \forall k \in \{1, 2, \dots, m\}, \alpha_k \in \mathbb{R} \right\}$$

為由 $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ 生成的綫性空間，記作 $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ 。

示例.  $\mathbb{R} = \text{span}(1)$ .

示例.  $\mathbb{R}^2 = \text{span}(\{(0, 1), (1, 0)\})$ .

示例.  $\mathbb{R}^2 = \text{span}(\{(\sin \theta, \cos \theta), (\cos \theta, -\sin \theta) : \theta \in \mathbb{R}\})$ .

**定理.** 設 $G(f) := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ 為 $y = f(x)$ 的圖像。若 $T_p(f)$ 為 $G$ 在 $p = (x_0, y_0)$ 的切綫，則

$$T_p(f) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{bmatrix}\right)$$

**衍理.** 設 $G(f) := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ 為 $y = f(x)$ 的圖像。則 $T(f)$ 為 $G$ 在任意點 $(x, y)$ 的切綫集合，則

$$T(f) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ f'(x) \end{bmatrix}\right) : (x, y) \in G \right\}$$

我們稱 $T(f)$ 為切綫叢。

相似地，若在二維函數討論導數，則該點所產生的切綫集合，我們稱其為切面。

**定理.** 設 $G(f) := \{(x, y, f(x, y)) : x \in \mathbb{R}\}$ 為 $z = f(x, y)$ 的圖像。若 $T_p(f)$ 為 $G$ 在 $p = (x_0, y_0, z_0)$ 的切面，則

$$T_p(f) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}\right)$$

小記. 切面亦可視為在 $p$ 點的切綫空間。

衍理. 設  $G(f) := \{(x, y, f(x, y)) : x, y \in \mathbb{R}\}$  為  $z = f(x, y)$  的圖像。若  $T(f)$  為  $G$  在任意點  $(x, y, z)$  的切面集合，則

$$T(f) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \text{span} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x, y) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x, y) \end{bmatrix} \right) : (x, y, z) \in G \right\}$$

我們稱  $T(f)$  為切面叢。

對於高維空間的切空間的集合，簡稱為切叢。

定義 24 (法綫). 設  $G(f) := \{(x, y, f(x, y)) : x, y \in \mathbb{R}\}$  為  $z = f(x, y)$  的圖像。若  $N_p(f)$  為  $G$  在  $p = (x_0, y_0, z_0)$  的法綫，則

$$N_p(f) := \{\vec{n} \in \mathbb{R}^3 : \langle \vec{n}, \vec{t} \rangle = 0, \vec{t} \in T_p(f), p \in G(f)\}$$

小記.  $N_p(f)$  可視為  $T_p(f)$  的補空間。

定理. 設  $G(f) := \{(x, y, f(x, y)) : x, y \in \mathbb{R}\}$  為  $z = f(x, y)$  的圖像。若  $N_p(f)$  為  $G$  在  $p = (x_0, y_0, z_0)$  的法綫，則

$$N_p(f) = \left\{ \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \text{span} \left( \begin{bmatrix} -f_x(x_0, y_0) \\ -f_y(x_0, y_0) \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right\}$$

證明. 設  $\vec{t} := \begin{bmatrix} x_0 + \alpha \\ y_0 + \beta \\ z_0 + \alpha f_x(x_0, y_0) + \beta f_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}$ ，則

$$\langle \vec{n} - p, \vec{t} - p \rangle = 0$$

$$\vec{n} - p = k \begin{bmatrix} -f_x(x_0, y_0) \\ -f_y(x_0, y_0) \\ 1 \end{bmatrix} \quad k \in \mathbb{R}$$

因此

$$N_p(f) = \left\{ \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \text{span} \left( \begin{bmatrix} -f_x(x_0, y_0) \\ -f_y(x_0, y_0) \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right\}$$

□

## 二維極值與鞍點