Contents

1 二項式定理

1. (a) i. 展開$(x+y+z)^2$。
   ii. 求$(x+y+z)^4$的展開式中x^3y，x^3z，xy^3，y^3z，xz^3，yz^3的係數。
   (b) 若從一個裝有紅色杯子、藍色杯子及綠色杯子的箱子中隨機抽取一個杯子，則抽到紅色杯子、藍色杯子及綠色杯子的概率分別爲p, q及r。若從中抽取4個杯子，每次抽取後均可把杯子放回箱子內，試以p, q, r表示
   i. 抽到至少2個不同顏色的杯子的概率；
   ii. 抽到剛好3個相同顏色的杯子的概率。

2. 假設$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+ax+bx^2+cx^3+$更高次冪的項。
   (a) 藉考慮$(1+x) = [(1+x)^{\frac{1}{2}}]^2$，求$a$及$b$的值。
   (b) 按x的升冪展開e^{-2x}至x^3的項。
   (c) 由此，按x的升冪展開$\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{e^{2x}}$至$x^3$的項。

3. 設$(1+ax)^8 = \displaystyle\sum_{k=0}^{8} \lambda_k x^k$及$(b+x)^9 = \displaystyle\sum_{k=0}^{9} \mu_k x^k$，其中$a, b$為實常數。已知$\lambda_2 : \mu_7 = 7:4$及$\lambda_1 + \mu_8 + 6 = 0$。求$a$的值。

2 指數函數與對數函數

1. 按x的升冪展開e^{e^x}至x^2的項。

2. 設$y = \dfrac{1-e^{4x}}{1+e^{8x}}$。
   (a) 求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$的值。
   (b) 設$(z^2+1)e^{3z} = e^{\alpha+\beta x}$，其中$\alpha, \beta$為常數。
   i. 試表$\ln(z^2+1)+3z$為x的綫性函數。
   ii. 已知(b)(i)的函數圖像通過原點并且斜率為2。求α和β的值。
   iii. 利用(b)(ii)所得的α和β的值，求$\left.\dfrac{dy}{dz}\right|_{z=0}$。

3. 某研究員正在研究某城市的人口增長與電力消耗。已知該城市的人口P可以下式模擬
$$P = \frac{ke^{-\lambda t}}{t^2}, 0 < t < 6,$$
   其中k和λ為常數，t則為從研究開始算起所經歷的時間。

(a) i. 試表$\ln P + 2\ln t$為t的綫性函數。

ii. 已知(a)(i)的函數圖像的水平截距與垂直截距分別爲-1.15及2.3，求k和λ的值，答案准確至最接近的整數。

iii. 由此，求該城市的人口的最少值，準確至最接近的百位。

(b) 該城市的年度電力消耗E(兆焦耳每年)可以下式模擬

$$\frac{dE}{dt} = hte^{ht} - 1.2e^{ht} + 4.214, t \geq 0,$$

其中h為非零常數，t則為從研究開始算起所經歷的時間。已知當$t = t_0$時，該城市的人口與年度電力消耗的變率同時達到最少值，而$t = 0$時，$E = 1$。

i. 求h的值。

ii. 藉考慮$\dfrac{d}{dt}(te^{ht})$，求$\int te^{ht}dt$。

iii. 由此，求該城市在$t = t_0$時的年度電力消耗，準確至最接近的兆焦耳每年。

iv. 某環保運動在$t = t_0$後立即推行以減少年度電力消耗。新的年度電力消耗F(兆焦耳每年)可以下式模擬

$$F = \frac{6}{1 - 5e^{rt} + 3e^{2rt}} + 2, t \geq t_0.$$

A. 若新的年度電力消耗在$t = t_0$時與原本的年度電力消耗相同，求r的值。

B. 新的年度電力消耗會否在某個t_0以後的時間上升？

3 微積分

1. 考慮曲綫$C_1 : y = e^{2x} - e^4$及$C_2 : e^{x+3}e^{x+1}$。求C_1及C_2的相交點。

2. 求以下積分：

(a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{t+2}{t^2+4t+11}dt$；

(b) $\displaystyle\int_1^3 \frac{t^2+3t+9}{t^2+4t+11}dt$。

3. 一個大缸中的水的體積的變率可以表為

$$f(t) = \frac{500}{(t+2)^2e^t},$$

其中$t(\geq 0)$為以分鐘量度的時間。

(a) 利用5個區間的梯形法則，估算從$t = 1$至$t = 11$期間流進缸中的水的總量。

(b) 求$\dfrac{d^2f(x)}{dt^2}$。

(c) 判斷(a)題的估算為過高估算還是過低估算。

4. 某單位正方形標靶的四個頂點分別位於$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$. 該標靶以曲綫$y=\sqrt{x}$及$y=x^3$劃分爲三個區域，從左上而右下分別爲II區、I區和III區。若飛鏢砸中I區、II區或III區，則分別可得10分、20分和30分。

   (a) 求該三區的面積。

   (b) 假設某小孩隨機扔出兩道飛鏢而且均命中標靶，求小孩獲得總共40分的概率。

5. (a) 按x的遞升序展開$e^{\frac{-x^2}{2}}$至x^6的項。

   (b) 由此，估算$\displaystyle\int_0^1 e^{\frac{-x^2}{2}}dx$的值。

   (c) 已知標準常態分佈在$z=0$至$z=a$之間的曲綫下面積為$\displaystyle\int_0^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-z^2}{2}}dz$。利用(a)的結果與常態分佈圖表估算$\pi$的值，準確至3位小數。

6. 某店鋪經理欲推行計劃A或B以提高利潤。設R和Q（以百萬爲單位）分別爲計劃A和B推行後的纍計每周盈餘。已知

$$\frac{dR}{dt}=\begin{cases}\ln(2t+1) & 0\le t\le 6\\ 0 & t>6\end{cases},$$

及

$$\frac{dQ}{dt}=\begin{cases}45t(1-t)+\frac{1.58}{t+1} & 0\le t\le 1\\ \frac{30e^{-t}}{(3+2e^{-t})^2} & t>1\end{cases},$$

其中t為計劃推行後所經過的周數。

   (a) 假設執行了A計劃。

      i. 利用6區間的梯形法則，估算計劃開始後首6周的盈餘。

      ii. 請問(a)(i)的估算屬於過低估算還是過高估算？試加以解釋。

   (b) 假設執行了B計劃。

      i. 求計劃開始後首周的盈餘。

      ii. 藉代入$u=3+2e^{-t}$，或其他方法，求計劃執行後首n周的盈餘，其中$n>1$。答案以n表示。

   (c) 哪個計劃的長期盈餘更多？試加以解釋。

4 概率

1. 設A和B為兩個事件。設$P(A) = 0.75$及$P(B) = 0.8$，且$P(A \cap B) = k$。

   (a) 以k表示$P(A \cup B)$。

   (b) i. 證明$0.55 \leq k \leq 1$；

   ii. 令A'及B'分別爲A及B的補事件。利用(b)(i)及$A' \cup B'$為$A \cap B$的補事件這一事實，或利用其它方法，證明$0 \leq P(A' \cup B') \leq 0.45$，並證明$0.25 \leq P(A' \cup B') \leq 0.45$。

   (c) 由此，求$P(A \cup B)$的值的範圍。

2. 設A和B為兩個事件。假設$P(A|B') = \dfrac{5}{12}, P(B|A') = \dfrac{8}{15}$及$P(B) = \dfrac{2}{5}$，其中$A'$及$B'$分別爲$A$及$B$的補事件。設$P(A) = a$，其中$0 < a < 1$。

   (a) 求$P(A \cap B')$。

   (b) 以a表示$P(A' \cap B)$。

   (c) 利用$A' \cup B$為$A \cap B'$的補事件這一事實，或以其他方式，求a的值。

   (d) A及B是否爲互斥事件？

3. 設A及B為兩事件。假設$P(A|B) = 0.5, P(B|A) = 0.4$及$P(A \cup B) = 0.84$。設$P(A) = a$，其中$a > 0$。

   (a) 以a表示$P(A \cap B)$及$P(B)$。

   (b) 利用(a)的結果，求a的值。

   (c) A及B是否互相獨立？

4. 某公司從A商跟B商購入了相同箱數的保險絲，每一箱各有100枚。該公司將從每一箱保險絲中抽取兩條做檢查，如兩條樣本均合格則收貨。已知A商及B商的保險絲分別有4%及1%的概率損壞。假設他們的損壞概率互相獨立。

   (a) 求收貨的概率。

   (b) 求收貨的保險絲屬於A商的概率。

5. 某限額為$3000的信用卡在推廣期内，若持卡人的最高消費多於$400，則會成爲會員並可參加"點·得分"網上抽獎游戲。下表列了游戲規則：

消費($\$x$)	會員級別	可點擊次數
$400 < x \leq 800$	銀	1
$800 < x \leq 1000$	金	2
$1000 < x \leq 3000$	鉑	3

每次點擊可獲得1分、2分、3分及4分的概率分別爲0。4、0.3、0.2及0.1。每場游戲的總得分可根據下表獲取相應的現金回贈：

總分	現金回贈
1至3	\$20
4至9	\$50
10至12	\$200

已知在所有會員中，有25%銀級，60%金級，15%鉑級。

(a) 在某場完整游戲內，求

 i. 金級會員取得剛好3分的概率；

 ii. 任意會員取得剛好3分的概率；

 iii. 已知該會員取得剛好3分，其爲金級會員的概率。

(b) 求某會員在一場完整游戲中取得剛好\$20現金回贈的概率。

(c) 在某場完整游戲中，求某會員

 i. 取得剛好10分的概率；

 ii. 剛好\$200現金回贈的概率。

(d) 研究發現70%的會員會完成游戲。一名卡公司的管理層提議將游戲改爲直接提供4%現金回贈。然而，高級管理層溫妮認爲此建議將會令公司的預期支出高於進行游戲。

 i. 你是否同意溫妮的說法？

 ii. 另一名高級管理層約翰認爲提供2%現金回贈將比進行游戲的預期支出低。你是否同意約翰的說法？

5 分佈