矩陣的定義

定義 1 (矩陣). **矩陣**是代數學中一種特殊的表達形式，用以同時表達多位元的表格：

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

若**元素**$a_{ij} \in S$則稱爲S**上的**$m \times n$**矩陣**，記$\mathbf{A} \in \mathbb{M}^{m\times n}(S) = \mathbb{M}_S^{m\times n}$。

示例. 以下爲矩陣的例子：

1. $1 =: [1] \in \mathbb{M}^{1\times 1}(\mathbb{R})$。
2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}^{2\times 2}(\mathbb{R})$。
3. $\begin{bmatrix} 1+2i & 3-4i & i \\ -i & 1 & 2-i \end{bmatrix} \in \mathbb{M}^{2\times 3}(\mathbb{C})$。

定義 2 (矩陣的加法與乘法定義). 給定$\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{M}^{m\times n}$，$\mathbf{C} \in \mathbb{M}^{n\times t}$，則

1. 加法：$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})$。
2. 數乘：$k\mathbf{A} = (ka_{ij})$。
3. 矩陣乘法：$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj})$。

示例. 設$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$，則

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1+2 & 1+1 & 0+0 \\ 1+1 & 0+2 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$。
2. $4\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$。
3. $\mathbf{A} \times \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1\times 2 + 1\times 2 + 0\times 3 & 1\times 0 + 1\times 1 + 0\times 3 \\ 1\times 2 + 0\times 2 + 1\times 3 & 1\times 0 + 0\times 1 + 1\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$。

定義 3 (特殊矩陣). 下列為一些矩陣寫法的共識:

- 零矩陣:$\mathbf{0}_{m\times n} = \mathbf{O}_{m\times n} = (0)_{m\times n}$。
- 一矩陣:$\mathbf{1}_{m\times n} = (1)_{m\times n}$。
- 單位矩陣:$\mathbf{I}_{m\times n} = (\delta_{ij})_{m\times n}$,其中$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$。
- 向量:
  - 行向量:$\mathbf{x}^T = \vec{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{M}^{1\times n}$。
  - 列向量:$\mathbf{y} = \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{M}^{m\times 1}$

命題 (加法與數乘定則). 設$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{M}^{m\times n}$,則

1. 加法結合律:$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$。
2. 加法交換律:$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$。
3. $\mathbf{A}+\mathbf{0} = \mathbf{A}$。
4. $\mathbf{A}+(-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$。
5. $a(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = a\mathbf{A}+\mathbf{B}$。
6. $(a+b)\mathbf{A} = a\mathbf{A}+b\mathbf{A}$。
7. $(ab)\mathbf{A} = a(b\mathbf{A})$

命題 (矩陣乘法定則). 設$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$為矩陣,則

1. 乘法結合律:$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$。
2. 分配律*I*:$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$。
3. 分配律*II*:$\mathbf{D}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{DA}+\mathbf{DB}$。
4. $\alpha\mathbf{AB} = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$。

5. $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$。

定義 4 (矩陣的轉置). 設$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，則定義**$\mathbf{A}$的轉置**為

$$\mathbf{A}^T = (a_{ji})_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

示例. 設$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$，則$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$。

定義 5 (矩陣的跡). 設$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，則定義**$\mathbf{A}$的跡**為

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{k}^{\min(m,n)} a_{kk} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{ll}$$

其中$l = \min(m, n)$。

命題. $\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \operatorname{tr}\big(\mathbf{A}^T\big)$。

證明. 留做習題。 □

定義 6 (綫性組合). 設$c_1, c_2, \ldots, c_\ell$為常數，$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_\ell \in \mathbb{M}_{m\times n}$，則稱

$$\sum_{k=1}^{\ell} c_k\mathbf{A}_k = c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2 + \cdots + c_\ell\mathbf{A}_\ell$$

為**綫性組合**。

示例. 設$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，則可寫

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3e_1 + 2e_2 + e_1$$

示例. 設$E_n \in \mathbb{M}^{3\times 3}$，對於$1 \le n \le 9$，$E_n = (e_{ij})_{3\times 3}$而且

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & n = 3(i-1)+j \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

，則可寫

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{9} kE_k$$

小記. 以上例子便是矩陣與綫性方程組的關係。

命題. 設$c_1, c_2, \ldots, c_\ell$為常數，$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_\ell \in \mathbb{M}_{m\times n}$，則

- $\operatorname{tr}\Big(\sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{A}_k\Big) = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \operatorname{tr}(\mathbf{A}_k)$;
- $\Big(\sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{A}_k\Big)^T = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{A}_k^T$;
- $\operatorname{tr}\Big(\sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{A}_k^T\Big) = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \operatorname{tr}(\mathbf{A}_k)$。

證明. 留作習題。 □

綫性方程組

綫性方程組主要用以表達兩條或多條同時成立的綫性方程，最具代表性的可數初中的聯立方程：

$$\begin{cases} ax + by & = k_1 \\ cx + dy & = k_2 \end{cases}$$

當然，綫性方程組的含義不僅是二元一次方程，更可以拓展到多元一次(綫性)方程：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

示例. 以下是綫性方程組的例子：

1. $\begin{cases} x + y & = 0 \\ 2x - 3y & = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y + z & = 0 \\ 2x + 3y + 4z & = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x - y + z & = 0 \\ 2x + 4z & = 0 \\ -2x - 4y & = 0 \end{cases}$

解綫性方程組

欲求綫性方程組的解，我們可使**代入法**或**消元法**，其中消元法比代入法的效率更高，因此普遍數學家都會使用消元法解方程。同時此辦法也衍生出矩陣的各項命題。

示例. 求解綫性方程組 $\begin{cases} 2x + 3y & = 8 \\ 6x - 2y & = 9 \end{cases}$

1. 運用代入法求解：從$2x+3y=8$可得$x=\dfrac{8-3y}{2}$，代入$6x-2y=9$得

$$\begin{aligned}6(\frac{8-3y}{2})-2y&=9\\3(8-3y)-2y&=9\\24-9y-2y&=9\\11y&=15\\y&=\frac{15}{11}\end{aligned}$$

再代$y=\dfrac{15}{11}$入$x=\dfrac{8-3y}{2}$得

$$\begin{aligned}x&=\frac{8-3(\frac{15}{11})}{2}\\&=\frac{43}{22}\end{aligned}$$

因此綫性方程組的解為$(\dfrac{43}{22},\dfrac{15}{11})$。

2. 運用消元法求解：從$2x+3y=8$三倍後可得$6x+9y=24$，則上式減去下式可得

$$\begin{array}{lr}(1)\times 3: & 6x+9y=24\\ -)(2): & 6x-2y=9\\ \hline (1)\times 3-(2): & 11y=15\\ & y=\frac{15}{11}\\ & 6x-2(\frac{15}{11})=9\\ & x=\frac{43}{22}\end{array}$$

示例. 求解綫性方程組$\begin{cases}2x+3y+4z&=1\\3x-y+3z&=0\\x+y+z&=1\end{cases}$

1. 運用代入法求解：先從$3x-y+3z=0$得出$y=3x+3z$，代入其餘兩式可得

$$\begin{cases}2x+3(3x+3z)+4z&=1\\x+(3x+3z)+z&=1\end{cases}\implies\begin{cases}11x+13z&=1\\4x+4z&=1\end{cases}$$

再從$4x+4z=1$得$z=\dfrac{1-4x}{4}$，代入$11x+13z=1$得

$$\begin{aligned}11x+13(\frac{1-4x}{4})&=1\\44x+13-52x&=4\\-8x&=-9\\x&=\frac{9}{8}\end{aligned}$$

由此可得：

$$\begin{aligned}z&=\frac{1-4(\frac{9}{8})}{4}\\&=-\frac{7}{8}\\y&=3(\frac{11}{4})+3(-\frac{5}{2})\\&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

2. 運用消元法求解：

$$\begin{array}{lr}(1): & 2x+3y+4z=1\\(2): & 3x-y+3z=0\\(3): & x+y+z=1\\\hline(1)-(3)\times 2: & y+2z=-1\\(2)-(3)\times 3: & -4y=-3\\\hline & y=\frac{3}{4}\\ & z=-\frac{7}{8}\\ & x=\frac{9}{8}\end{array}$$

我們亦容許綫性方程組**沒有解**或**有無限解**。若要理解沒有解或有無限多個解，可參考直綫的特性：

定義 7 (平行綫). 設L_1和L_2為兩條直綫，並分別以m_1和m_2代表其斜率。若$L_1//L_2$，則$m_1=m_2$。

定理 (平行綫的交點數). 設L_1和L_2為一對（歐幾里得幾何）平行綫，則L_1和L_2的交點數只能為0或∞。

證明. 設m爲L_1及L_2的斜率，及c_1和c_2分別爲L_1及L_2的縱軸截距，則

$$L_1 : y = mx + c_1,\ L_2 : y = mx + c_2$$

若$c_1 = c_2$，則$\forall x$, 若 $(x, y_1) \in L_1, (x, y_2) \in L_2$,

$$y_1 = mx + c_1 = mx + c_2 = y_2$$

由於對任意x均成立，此爲無限多交點。

若$c_1 \neq c_2 \implies c_1 - c_2 \neq 0$，則$\forall x$, 若 $(x, y_1) \in L_1, (x, y_2) \in L_2$,

$$y_2 - y_1 = (mx + c_1) - (mx + c_2) = c_1 - c_2 \neq 0 \implies y_1 \neq y_2$$

因此沒有交點。 □

衍理. 任何一對歐幾里得二維直綫可有0,1或∞交點。

因此，綫性方程組可有0,1或無限多解。同時，綫性方程組若有兩個解，則會有無限多解。

定理. 設$A \in \mathbb{M}^{m\times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{M}^{m\times 1}$使得$(S) : [\mathbf{A}|\mathbf{b}]$為一綫性方程組，並設$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{M}^{m\times 1}$為相異解，則

$$I := \{t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} : t \in \mathbb{R}\}$$

為方程組的解集。

證明. 對於任意$1 \leq k \leq m$,

$$\begin{aligned}
&a_{k1}[tx_1 + (1-t)y_1] + \cdots + a_{kn}[tx_n + (1-t)y_n] \\
&= t[a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n] + (1-t)[a_{k1}y_1 + \cdots + a_{kn}y_n] \\
&= tb_k + (1-t)b_k \\
&= b_k
\end{aligned}$$

□

我們稱擁有無限多解的方程組的解集為**通解**。

示例. 以下爲綫性方程組無限多解的例子:

1. 考慮$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -3x - y = -2 \end{cases}$，由於任何符合$3x + y = 2$的點均符合$-3x - y = -2$，因此此方程組有無限多解。解集為

$$\{(t, 2-3t) : t \in \mathbb{R}\}$$

2. 考慮$\begin{cases} 3x+y+2z=0 \\ x+y+7z=0 \\ 2x-5z=0 \end{cases}$，由於上式減中式等於下式，因此此方程組無法解下去，有無限多解。解集為

$$\{(5t,-19t,2t):t\in\mathbb{R}\}$$

以下爲綫性方程組沒有解的例子：

1. 考慮$\begin{cases} 3x+y=2 \\ -3x-y=0 \end{cases}$，由於任何符合$3x+y=2$的點均不符合$-3x-y=0$，因此此方程組沒有解。解集為

$$\emptyset$$

綫性方程組的可解性I

現記綫性方程組的通常式為

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & =b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & =b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & =b_m \end{cases}$$

定理 (綫性方程組的可解性I)**.** 對於m行n列綫性方程組S，若$m\leq n$，則S有解。

證明. 當m=1時，$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+x_{1n}x_n=b_1$，則存在綫性函數$f$使得$x_1=f(x_2,x_3,\ldots,x_n)$令$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+x_{1n}x_n=b_1$成立。

當$1<m<n$時，已知有函數$f_1,f_2,f_3,\ldots,f_{m-1}$使得

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(x_{m+1},\ldots,x_n) \\ x_2 &= f_2(x_{m+1},\ldots,x_n) \\ \vdots &= \vdots \\ x_m &= f_m(x_{m+1},\ldots,x_n) \end{aligned}$$

令$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$成立。

則$m+1 \leq n$時，存在綫性函數f_{m+1}使得

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= f_{m+1}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m, x_{m+2}, \ldots, x_n) \\ &= f_{m+1}(f_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_{m+1}, \ldots, x_n), x_{m+2}, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

則存在綫性函數F和g_{m+1}使得

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= F(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n) \\ &= g_{m+1}(x_{m+2}, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

因此可見存在綫性函數$g_1, g_2, \ldots, g_m$(若$m+2 > n$視所有g_k為常函數)

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(g_{m+1}(x_{m+2}, \ldots, x_n), x_{m+2}, \ldots, x_n) \\ &= g_1(x_{m+2}, \ldots, x_n) \\ x_2 &= f_2(g_{m+1}(x_{m+2}, \ldots, x_n), x_{m+2}, \ldots, x_n) \\ &= g_2(x_{m+2}, \ldots, x_n) \\ \vdots &= \vdots \\ \vdots &= \vdots \\ x_m &= f_m(g_{m+1}(x_{m+2}, \ldots, x_n), x_{m+2}, \ldots, x_n) \\ &= g_m(x_{m+2}, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

此證畢方程解的存在性。 □

目前只有存在性能證明，因爲：

1. 未能確定是否有多於一個解；
2. 當$m > n$時，未知是否有解。

下一節會解決上述問題，判斷解的唯一性。

增廣矩陣

爲了使方程組的觀察更方便及易於處理，在此階段引入**增廣矩陣**的概念。

考慮以下綫性方程組：

$$(S):\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n &= b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n &= b_2\\ \vdots & \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

考慮$\mathbf{A}:=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\in\mathbb{M}^{m\times n}$為**係數矩陣**及$\mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$為**水平向量**，則可將$(S)$作以下簡化表達：

$$(S):[\mathbf{A}|\mathbf{b}]=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{array}\right]$$

以上$[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$稱爲**增廣矩陣**。增廣矩陣的概念在於簡化方程組的表達，因此方程組的運作均可在擴增矩陣中實現。如此引入以下概念：

定義 8 (列階梯形矩陣)**.** 設$A\in\mathbb{M}^{m\times n}$，若$A$符合以下條件，則稱$A$為**列階梯形矩陣**:

- 若某列有非零元素，則必在所有全零列之上；
- 某列最左邊的非零元素稱爲**首項係數**。某列的首項係數必定比上一列的首項係數更靠右。

示例. 列階梯形矩陣的例子：

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} & b_1\\ 0 & 2 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} & b_2\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{3n} & b_3\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

定義 9 (還原列梯矩陣)**.** 設$A\in\mathbb{M}^{m\times n}$，若$A$符合以下條件，則稱$A$為**還原列梯矩陣**:

- $\mathbf{A}$為列階梯形矩陣，并且；
- $\mathbf{A}$的所有首項係數均爲*1*；
- $\mathbf{A}$中所有首項係數的對應行僅有一個非零數字。

示例. 還原列梯矩陣的例子：

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \cdots & a_{1(n-1)} & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

已知綫性方程組能通過消元法求解，由此可見還原列梯矩陣正是消元法所形成的結果。我們給出以下定義：

定義 10 (初等行(列)變換)**.** 下列三種對矩陣的變換稱爲矩陣的**初等行（列）變換**：

1. 把第i行（列）和第j行（列）互換位置，記爲$r_i \leftrightarrow r_j$（$c_i \leftrightarrow c_j$）；
2. 用非零數α乘以第i行（列），記爲αr_i（αc_i）；
3. 把第i行（列）的α倍加到第j行（列），記爲$\alpha r_i + r_j$（$\alpha c_i + c_j$）。

定義 11. 設$\mathbf{A}, \mathbf{A}' \in \mathbb{M}^{m\times n}$。

我們稱$\mathbf{A}$和$\mathbf{A}'$是**等價**的若$\mathbf{A}$可通過列運算達成$\mathbf{A}'$，記$\mathbf{A} \sim \mathbf{A}'$；若$\mathbf{A}'$為還原列階矩陣而且$\mathbf{A} \sim \mathbf{A}'$，則稱$\mathbf{A}'$為$\mathbf{A}$的還原式，記$\mathbf{A}' = \mathrm{RREF}(\mathbf{A})$。

示例. 設$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 6 & 9 & 3 & 3 & 9 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 7 & 3 & 2 & 6 & 6 \\ 8 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 9 & 2 \\ 7 & 5 & 6 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$，求$\mathrm{RREF}(\mathbf{A})$。

先將第一行的首項係數求出，由於第二行的首項係數為*1*，因此我們可以通過簡單的行變換造出適當的等價矩陣。

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 6 & 9 & 3 & 3 & 9 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 7 & 3 & 2 & 6 & 6 \\ 8 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 9 & 2 \\ 7 & 5 & 6 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \frac{1}{3}r_1 \\ r_1 \leftrightarrow r_2 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & 4 & 0 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 2 & 6 & 6 \\ 8 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 9 & 2 \\ 7 & 5 & 6 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} -2r_1 + r_2 \\ -8r_1 + r_4 \\ -7r_1 + r_6 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & 4 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & -7 & -7 & 1 & 1 & -17 \\ 0 & 7 & 3 & 2 & 6 & 6 \\ 0 & -39 & -31 & 2 & -5 & -68 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 9 & 2 \\ 0 & -30 & -22 & 0 & -7 & -61 \end{array}\right]$$

隨後將第二及其餘行的首項係數求出:

$$\begin{array}{c} r_3 + r_2 \\ 20r_5 + r_4 \\ 15r_5 + r_6 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & 4 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 7 & -11 \\ 0 & 7 & 3 & 2 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 109 & 62 & 175 & -28 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 83 & 45 & 128 & -31 \end{array}\right] \begin{array}{c} -5r_4 + r_1 \\ -7r_4 + r_3 \\ -2r_4 + r_5 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -541 & -310 & -874 & 149 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 7 & -11 \\ 0 & 0 & -760 & -432 & -1219 & 174 \\ 0 & 1 & 109 & 62 & 175 & -28 \\ 0 & 0 & -211 & -121 & -341 & 58 \\ 0 & 0 & 83 & 45 & 128 & -31 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} -r_2 \\ r_2 \leftrightarrow r_4 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -541 & -310 & -874 & 149 \\ 0 & 1 & 109 & 62 & 175 & -28 \\ 0 & 0 & -760 & -432 & -1219 & 174 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -211 & -121 & -341 & 58 \\ 0 & 0 & 83 & 45 & 128 & -31 \end{array}\right] \begin{array}{c} 135r_4 + r_1 \\ -27r_4 + r_2 \\ 190r_4 + r_2 \\ 53r_4 + r_5 \\ -20r_4 + r_6 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -715 & -1819 & 1634 \\ 0 & 1 & 1 & 143 & 364 & -325 \\ 0 & 0 & 0 & -1002 & -2549 & 2264 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -280 & -712 & 641 \\ 0 & 0 & 3 & 105 & 268 & -251 \end{array}\right]$$

$$\sim \cdots \begin{array}{c} r_5 + r_1 \\ -r_5 + r_2 \\ -4r_5 + r_4 \\ -3r_5 + r_6 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{148}{551} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{717}{551} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{895}{551} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3975}{551} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2058}{551} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6817}{551} \end{array}\right]$$

詳細步驟參考*RREF calculator: https://www.emathhelp.net/en/calculators/linear-algebra/reduced-row-echelon-form-rref-calculator/*

小記. 上例可見最後一行的左方為零行，但右方為非零數字，得到$0 = 1$的結論。此情形我們稱方程組無解。

重新考慮綫性方程組的樣式，因應矩陣乘法的特性，我們可以將$S = [\mathbf{A}|\mathbf{b}]$寫作

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

若存在$\mathbf{x_0} \in \mathbb{M}^{n\times 1}$使得$\mathbf{Ax_0} = \mathbf{b}$成立，則稱$\mathbf{x_0}$為$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$的一個解。

定理. 綫性方程組$S = [\mathbf{A}|\mathbf{b}]$有解當且僅當$\mathrm{RREF}(S) = [\mathbf{A}'|\mathbf{b}']$有解；並且$S$與$\mathrm{RREF}(S)$同解。

證明. 由於S與$\mathrm{RREF}(S)$等價，故存在若干行變換及對應的變換矩陣$\mathbf{P}$使得

$$\mathbf{Ax_0} = \mathbf{b} \iff \mathbf{PAx_0} = \mathbf{Pb} \iff \mathbf{A}'\mathbf{x_0} = \mathbf{b}'$$

□

故本節以下列定理總結：

定理 (綫性方程組的可解性II)**.** 對於m行n列綫性方程組S，若$\mathrm{RREF}(S)$中係數矩陣的非零行數$\leq n$同時大於或等於水平向量的非零行數，則S有解。

行列式

行列式為矩陣運算中一種重要的工具，其概念起源於解二元一次方程組：

$$\begin{cases} ax+by=\alpha \\ cx+dy=\beta \end{cases} \implies \begin{cases} x=\frac{\alpha d-\beta b}{ad-bc} \\ y=\frac{\alpha c-\beta a}{bc-ad} \end{cases}$$

從上可見$ad-bc$的值會完全影響方程的可解性，由此可定義係數矩陣$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}^{2\times 2}$時，$\mathbf{A}$的行列式$\det \mathbf{A}=|\mathbf{A}|=ad-bc$。

命題. 設$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathbb{M}^{3\times 3}$，則$|A|=aei+bfg+cdh-ceg-bdi-afh.$

定義 12 (分塊矩陣)**.** 任何矩陣$\mathbf{A}\in\mathbb{M}^{m\times n}$，都有$\mathbf{A}_1\in\mathbb{M}^{s\times t}, \mathbf{A}_2\in\mathbb{M}^{s\times(n-t)}, \mathbf{A}_3\in\mathbb{M}^{(m-s)\times t}, \mathbf{A}_4\in\mathbb{M}^{(m-s)\times(n-t)}$使得

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix}$$

定理. $\begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a} & \mathbf{A} \end{vmatrix}=|\mathbf{A}|.$

證明. 基於行變換可得出$\begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{vmatrix}$。對任意

$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{b}_2 \end{array}\right]$$

由此可見，解的存在性基於$|\mathbf{A}|$變化。 □

定理. $|\mathbf{A}^T|=|\mathbf{A}|.$

證明. 證明太難，暫且不提。 □

定理. $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+c_{i1} & \cdots & a_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}.$

定理. $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l}+c_{1l} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{ml}+c_{ml} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{ml} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & c_{1l} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & c_{ml} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}.$

定理. $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \cdots & \alpha a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}.$

定理. $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \alpha a_{1l} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \alpha a_{ml} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{ml} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}.$

行列式亦可作相應的行列變換，因此有以下定理：

定理. *若行列式有兩行（或列）元素對應相等，則行列式等於0。*

衍理. *若行列式有兩行（或列）元素對應成比例，則行列式等於0。*

衍理. *行列式經過行列變換時，其值不變。*

定理 (Laplace定理)**.** $\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|.$

Cramer法則

設

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_2 \\ & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

則稱由係數構成的行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

為方程組的係數行列式。

定理 (Cramer法則)**.** 設綫性方程組的係數行列式$D \neq 0$，則方程組有唯一一組解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\, x_2=\frac{D_2}{D},\, \cdots,\, x_n=\frac{D_n}{D},$$

其中D_k是把D的第k列元素依次換成常數項$b_1, b_2, \ldots, b_n$而得到的行列式

$$D_k=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中$1 \leq k \leq n$。

證明. 證明分爲兩部分。

1. 先證明$x_1=\frac{D_1}{D}$, $x_2=\frac{D_2}{D}$, $\cdots$, $x_n=\frac{D_n}{D}$為方程解。設$1 \leq i \leq n$，并有A_{ij}為a_{ij}的餘子式，

$$\begin{aligned} L.H.S. &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\frac{D_k}{D} = \frac{1}{D}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}D_k \\ &= \frac{1}{D}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\sum_{j=1}^{n} b_jA_{jk} = \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n} b_j\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} \\ &= \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n} b_j\delta_{ij}D \\ &= b_i = R.H.S. \end{aligned}$$

2. 再證明此乃唯一解。設$x_k = c_k$, $k = 1, 2, \ldots$，則

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}c_k & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}c_k & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}c_k & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1k}c_k & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2k}c_k & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{nk}c_k & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c_k D$$

因此$c_k = \dfrac{D_k}{D}$。

$\square$

逆矩陣

設$\mathbf{A} \in \mathbb{M}^{m\times n}, \mathbf{x} \in \mathbb{M}^{n\times 1}, \mathbf{b} \in \mathbb{M}^{m\times 1}$，設

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

若$\mathrm{RREF}(\mathbf{A}) = \mathbf{I}$，則存在$\mathbf{B} \in \mathbb{M}^{m\times n}$令

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}] \sim [\mathbf{I}|\mathbf{B}]$$

對符合條件的矩陣$\mathbf{B}$，我們稱其爲$\mathbf{A}$**的逆矩陣**，記$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$。

定理 (可逆矩陣)**.** 若$\mathbf{A} \in \mathbb{M}^{m\times n}$符合上述情況，則稱$\mathbf{A}$為**可逆矩陣**。

衍理. 若$\mathbf{A} \in \mathbb{M}^{m\times n}$可逆，則必有方陣$\mathbf{B}$使得

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

示例. 設$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，則

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A}|\mathbf{I}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{cc|cc} ac & bc & c & 0 \\ ac & ad & 0 & a \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{cc|cc} ac & bc & c & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1+\frac{bc}{ad-bc} & \frac{-ab}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right]
\end{aligned}$$

因此，$\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$

定義 13 (伴隨矩陣)**.** 設$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$，則$\mathbf{A}$的**伴隨矩陣** adj$\mathbf{A}$被定義爲

$$\mathrm{adj}\mathbf{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,j-1} & a_{m,j+1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

示例 (2×2矩陣的伴隨矩陣)**.** 設$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，則

$$\mathrm{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \det[d] & -\det[c] \\ -\det[b] & \det[a] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

由此可見,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\{\mathbf{A}\}}(\mathrm{adj}\mathbf{A})^T$$

巧合的是，不僅二維方陣如此。

示例 (3×3矩陣的伴隨矩陣)**.** 設$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，則

$$\mathrm{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\ -\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\ \det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

由此可見,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\{\mathbf{A}\}}(\mathrm{adj}\mathbf{A})^T$$

因此，對於高維方陣而言，其中一個有效求逆矩陣的方法是伴隨矩陣法：

定理 (伴隨矩陣法)**.** 設$\mathbf{A} \in \mathbb{M}^{n\times n}$，則

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\{\mathbf{A}\}}(\mathrm{adj}\mathbf{A})^T$$

根據本節提及的逆矩陣的概念，我們可以以下方法解綫性方程組：已知綫性方程組$S : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$有唯一解，則

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

矩陣的幾何含義

博弈論簡介