References: Introduction to Real Analysis (Bartle & Sherbert), Thomas Calculus 12th Edition

向量

向量屬於一種特殊的矩陣，通常用以表達**多維坐標**。

定義 1 (向量). 一個n**-維向量**包含n個元素，可視之爲n**-維空間**中的坐標，同時代表從原點指向該坐標的箭頭。

爲方便描述，記V_S為帶有S域的元素的向量集合。

定義 2 (向量加法). 在向量集合V_S中，若$\vec{x} = (x_i)_i = (x_1, x_2, \dots), \vec{y} = (y_i)_i = (y_1, y_2, \dots) \in V_S$，則

$$\vec{x} + \vec{y} := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots) = (x_i + y_i)_i$$

定義 3 (標量乘法). 在向量集合V_S中，若$\vec{x} = (x_i)_i = (x_1, x_2, \dots) \in V_S$，$\alpha \in S$，則

$$\alpha\vec{x} := (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots) = (\alpha x_i)_i$$

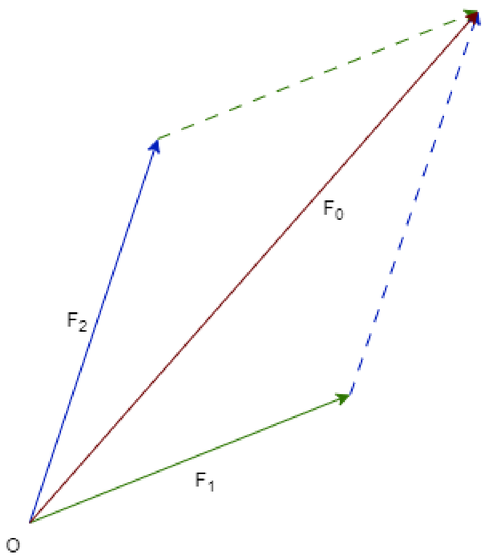
向量空間

定義 4 (向量空間). 設V_S為向量集合，且$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V_S$， $\alpha, \beta \in S$。若V_S符合以下定理：

- 加法結合律：$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$。
- 加法交換律：$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{z}$。
- 加法單位元：$\vec{0} \in V_S$使得$\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$。
- 加法逆：$\forall \vec{x} \in V_S$, 存在$\vec{y} \in V_S$使得$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x} = \vec{0}$。
- 標乘結合律：$\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$。
- 標乘單位元：$1 \in S$使得$1\vec{x} = \vec{x}$。
- 分配律*1*：$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$。
- 分配律*2*：$(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$。

示例. $\mathbb{R}$是一個向量空間。而且任何域也是一維向量空間。

示例. 在牛頓力學中討論力時，我們會以向量表示力的大小與方向。假設目前的討論僅限於平面（二維空間），並記施力點為原點O。



在上圖中可通過改變力量發生的先後次序來實現向量的平移，從而得出

$$F_0 = F_1 + F_2$$

的關係式。

向量函數

偏導數與全導數

方向導數

切面與法綫

二維極值與鞍點