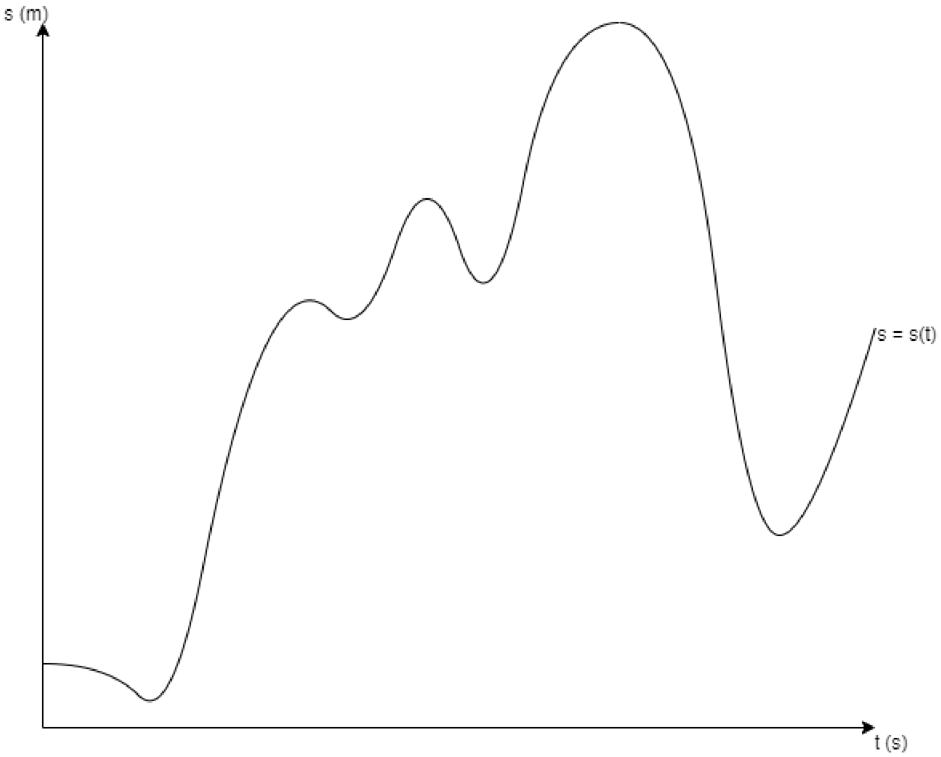
積分起源

討論積分起源，我們依然追溯到牛頓與萊布尼茨的時代。當時牛萊之爭除了微分學的發現以外，還有積分學的建立。雖說兩人整得如火如荼，但我們有著漁翁之利，可以坐享其成。

但無論如何，之所以存在積分學，是由於一道最基本的問題：假設一物體移動速度$v(t) : (0, \infty) \to \mathbb{R}$可以參數$t$量化，則可以下圖表示速度-時間之關係：

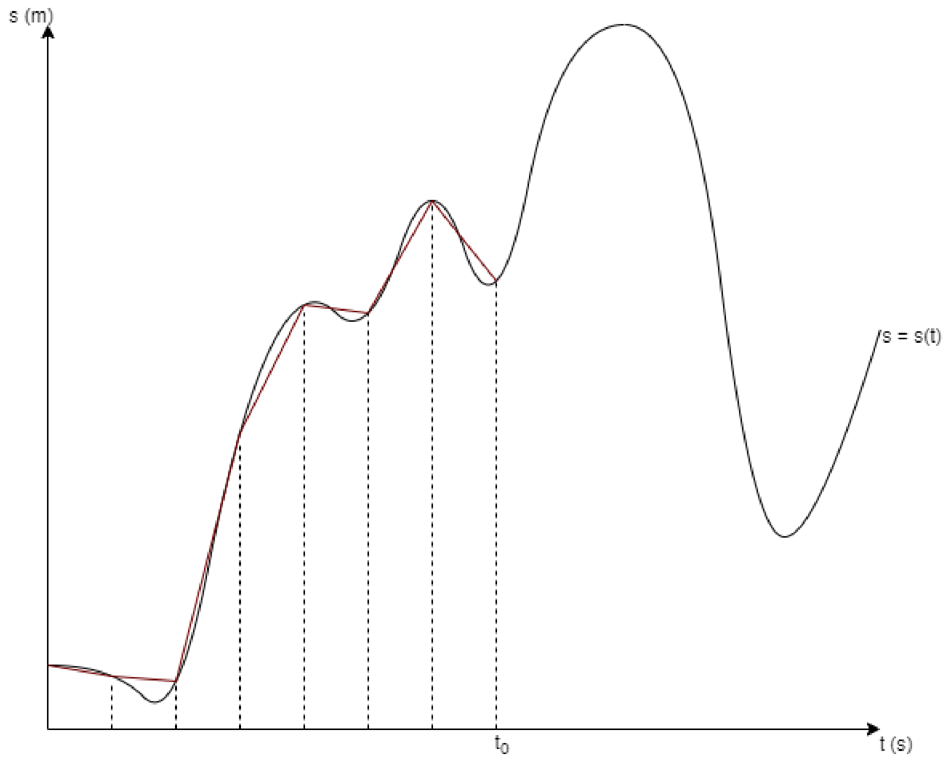


若欲求得任意時間的位移，考慮在極短時間內的瞬間位移相等於瞬時速度乘以時間跨度：設$s(t) : (0, \infty) \to \mathbb{R}$為位移函數，則

$$\Delta s(t) = v(t)\Delta t$$

并且總位移應由所有所有瞬間的瞬間位移總和得出，則可考慮將時間均分爲n段瞬間，記$t = 0$為初始時間及t_f為終結時間，并且$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = t_f$，並記對其求和：

$$s(t_f) = \sum_{k=0}^{n-1}(s(t_{k+1}) - s(t_k)) = \sum_{k=0}^{n-1} v(t_k)(t_{k+1} - t_k)$$



將$n \to \infty$便可定義

$$s(t_f) = \int_0^{t_f} v(t)dt$$

若視t_f為變量，則稱其爲**不定積分**；反之，則稱其爲**定積分**。

積分的含義

從以上簡介可以看出，積分的目的在於加法；更明確的說法是定積分在於計算面積。與中學教程不同，我們會先觀察定積分，再闡述不定積分（實際上他們只差一步）。

黎曼積分法

黎曼對於曲綫下的面積有著相當扎實的幾何見解，他認爲每一條連續曲綫都可以用分割法的方式進行求積，而且**無論分割的方法如何隨機，若分割數量趨向無限，其結果都是恆定的**。

藉著以上見解，黎曼將某區間$[a, b]$拆分爲n個區間，使得$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$並記第$k$個區間為

$$P_k := [a_{k-1}, a_k]$$

因應P_k的有限性及函數f的連續性，隨機於P_k內抽取變量$t_k \in P_k = [a_{k-1}, a_k]$，可得對於$P_k$上的曲綫面積的估算

$$f(t_k)\|P_k\|$$

其中$\|P_k\|$代表區間P_k的寬度。更進一步可定義

$$\|P\| := \max \|P_k\|$$

因此，黎曼給出的積分方法如下

定義 1 (黎曼積分). 設f為$[a, b]$上的連續函數，令存在$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$使得$a =: a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n := b$，並設$P := \{(t_k, P_k) : 1 \leq k \leq n\}$為**標識區間集**使得$t_k \in P_k = [a_{k-1}, a_k]$，則定義$f$在$[a, b]$上的$P$**-估算面積**為

$$S(f; P) := \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\|P_k\|$$

而精確面積為

$$\int_a^b f = S(f) := \lim_{n\to\infty} S(f; P)$$

另外，若存在$L \in \mathbb{R}$使得對於$\varepsilon > 0$，$|\int_a^b f - L| < \varepsilon$，則稱$f$為**黎曼可積**的函數，記爲$f \in \mathcal{R}[a, b]$。

黎曼積分屬於概念上的積分，實際情況還需要確定一種t_k的取值方法。我們先論證黎曼積分的存在性和唯一性，再討論實際應用會如何處理。

定理. 若f為有限區間內的連續函數，則f的黎曼積分有界且唯一。

證明. 由於

$$\min\{\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\|P_k\|\} \leq \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\|P_k\| \leq \max\{\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\|P_k\|\}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \min\{f(t_k)\}\|P_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\|P_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} \max\{f(t_k)\}\|P_k\|$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \min\{f(t_k)\}\|P_k\| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\|P_k\| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \max\{f(t_k)\}\|P_k\|$$

對於$\|P_k\| \to 0$，可視$\min\{f(t_k)\} = \max\{f(t_k)\}$，因此$\int_a^b f$唯一存在。 □

由於黎曼積分的定義基於幾何分割而定，因此初始的黎曼積分存在許多不確定性。后經過一系列修訂，終於發展一些可用理論。

定理. 若$g \in \mathcal{R}[a,b]$且除了有限點以外$f = g$成立，則$f \in \mathcal{R}[a,b]$而且$\int_a^b f = \int_a^b g$。

證明. 證明可拆分爲兩部分，先證明對於一個不等點理論成立，隨後以歸納法論證。

設$c \in (a,b)$並設$L = \int_a^b g$。設當$x \neq c$時$f(x) = g(x)$。對於任意標識區間集，$S(f;P) = S(f;P)$除了至多兩項，即

$$[\cdot, c], [c, \cdot]$$

因此

$$\begin{aligned}
|S(f;P) - S(g;P)| &= |\sum (f(x_i) - g(x_i))(x_i - x_{i-1})| \\
&= |(f(c) - g(c))(c - x_{k-1}) + (f(c) - g(c))(x_{k+1} - c)| \\
&< 2(|f(c)| + |g(c)|)\|P\|
\end{aligned}$$

由此設$\varepsilon > 0$，$\delta_1 < \frac{\varepsilon}{4(f(|c|)+|g(c)|)}$，以及$\|P\| < \delta_2$使得$|S(g;P) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$。由此設$\delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$可得

$$\begin{aligned}
|S(f;P) - L| &< |S(f;P) - S(g;P)| + |S(g;P) - L| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

因此，$f \in \mathcal{R}[a,b]$。

利用歸納法，不難得出對於有n個不等點的情況，把$[a,b]$拆分爲$[a,c]$及$[c,b]$使得$[a,c]$上有$n-1$個不等點，由此證畢。 □

勒貝格積分法

萊布尼茨法則

積分方法

基本積分定則

換元代入法

參數化代入法

部分積分法

費曼積分法

體積運算

圓盤法

外殼法

多元積分

雙重積分

三重積分

向量函數積分

綫積分

曲面積分