Contents

1 二項式定理

1. (a) i. 展開$(x+y+z)^2$。

 ii. 求$(x+y+z)^4$的展開式中x^3y，x^3z，xy^3，y^3z，xz^3，yz^3的係數。

 (b) 若從一個裝有紅色杯子、藍色杯子及綠色杯子的箱子中隨機抽取一個杯子，則抽到紅色杯子、藍色杯子及綠色杯子的概率分別爲p,q及r。若從中抽取4個杯子，每次抽取後均可把杯子放回箱子內，試以p,q,r表示

 i. 抽到至少2個不同顏色的杯子的概率；

 ii. 抽到剛好3個相同顏色的杯子的概率。

2. 假設$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+ax+bx^2+cx^3+$更高次冪的項。

 (a) 藉考慮$(1+x)=[(1+x)^{\frac{1}{2}}]^2$，求$a$及$b$的值。

 (b) 按x的升冪展開e^{-2x}至x^3的項。

 (c) 由此，按x的升冪展開$\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{e^{2x}}$至$x^3$的項。

3. 設$(1+ax)^8=\sum_{k=0}^{8}\lambda_k x^k$及$(b+x)^9=\sum_{k=0}^{9}\mu_k x^k$，其中$a,b$為實常數。已知$\lambda_2:\mu_7=7:4$及$\lambda_1+\mu_8+6=0$。求$a$的值。

2 指數函數與對數函數

1. 按x的升冪展開e^{e^x}至x^2的項。

2. 設$y=\dfrac{1-e^{4x}}{1+e^{8x}}$。

 (a) 求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$的值。

 (b) 設$(z^2+1)e^{3z}=e^{\alpha+\beta x}$，其中$\alpha,\beta$為常數。

 i. 試表$\ln(z^2+1)+3z$為x的綫性函數。

 ii. 已知(b)(i)的函數圖像通過原點并且斜率為2。求α和β的值。

 iii. 利用(b)(ii)所得的α和β的值，求$\left.\dfrac{dy}{dz}\right|_{z=0}$。

3. 某研究員正在研究某城市的人口增長與電力消耗。已知該城市的人口P可以下式模擬

$$P=\frac{ke^{-\lambda t}}{t^2},0<t<6,$$

 其中k和λ為常數，t則為從研究開始算起所經歷的時間。

(a) i. 試表$\ln P + 2\ln t$為t的綫性函數。

ii. 已知(a)(i)的函數圖像的水平截距與垂直截距分別爲-1.15及2.3，求k和λ的值，答案准確至最接近的整數。

iii. 由此，求該城市的人口的最少值，準確至最接近的百位。

(b) 該城市的年度電力消耗E(兆焦耳每年)可以下式模擬

$$\frac{dE}{dt} = hte^{ht} - 1.2e^{ht} + 4.214, t \geq 0,$$

其中h為非零常數，t則為從研究開始算起所經歷的時間。已知當$t = t_0$時，該城市的人口與年度電力消耗同時達到最少值，而$t = 0$時，$E = 1$。

i. 求h的值。

ii. 藉考慮$\dfrac{d}{dt}(te^{ht})$，求$\int te^{ht}dt$。

iii. 由此，求該城市在$t = t_0$時的年度電力消耗，準確至最接近的兆焦耳每年。

iv. 某環保運動在$t = t_0$後立即推行以減少年度電力消耗。新的年度電力消耗F(兆焦耳每年)可以下式模擬

$$F = \frac{6}{1 - 5e^{rt} + 3e^{2rt}} + 2, t \geq t_0.$$

A. 若新的年度電力消耗在$t = t_0$時與原本的年度電力消耗相同，求r的值。

B. 新的年度電力消耗會否在某個t_0以後的時間上升？

3 微積分

1. 考慮曲綫$C_1 : y = e^{2x} - e^4$及$C_2 : e^{x+3}e^{x+1}$。求C_1及C_2的相交點。

2. 求以下積分：

(a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{t+2}{t^2+4t+11}dt$；

(b) $\displaystyle\int_1^3 \frac{t^2+3t+9}{t^2+4t+11}dt$。

3. 一個大缸中的水的體積的變率可以表為

$$f(t) = \frac{500}{(t+2)^2e^t},$$

其中$t(\geq 0)$為以分鐘量度的時間。

(a) 利用5個區間的梯形法則，估算從$t = 1$至$t = 11$期間流進缸中的水的總量。

(b) 求$\dfrac{d^2f(x)}{dt^2}$。

(c) 判斷(a)題的估算為過高估算還是過低估算。

4. 某單位正方形標靶的四個頂點分別位於$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$. 該標靶以曲綫$y=\sqrt{x}$及$y=x^3$劃分爲三個區域，從左上而右下分別爲II區、I區和III區。若飛鏢砸中I區、II區或III區，則分別可得10分、20分和30分。

(a) 求該三區的面積。

(b) 假設某小孩隨機扔出兩道飛鏢而且均命中標靶，求小孩獲得總共40分的概率。

5. (a) 按x的遞升序展開$e^{\frac{-x^2}{2}}$至x^6的項。

(b) 由此，估算$\displaystyle\int_0^1 e^{\frac{-x^2}{2}}dx$的值。

(c) 已知標準常態分佈在$z=0$至$z=a$之間的曲綫下面積為$\displaystyle\int_0^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-z^2}{2}}dz$。利用(a)的結果與常態分佈圖表估算$\pi$的值，準確至3位小數。

6. 某店鋪經理欲推行計劃A或B以提高利潤。設R和Q（以百萬爲單位）分別爲計劃A和B推行後的纍計每周盈餘。已知

$$\frac{dR}{dt}=\begin{cases}\ln(2t+1) & 0\le t\le 6\\ 0 & t>6\end{cases},$$

及

$$\frac{dQ}{dt}=\begin{cases}45t(1-t)+\frac{1.58}{t+1} & 0\le t\le 1\\ \frac{30e^{-t}}{(3+2e^{-t})^2} & t>1\end{cases},$$

其中t為計劃推行後所經過的周數。

(a) 假設執行了A計劃。

i. 利用6區間的梯形法則，估算計劃開始後首6周的盈餘。

ii. 請問(a)(i)的估算屬於過低估算還是過高估算？試加以解釋。

(b) 假設執行了B計劃。

i. 求計劃開始後首周的盈餘。

ii. 藉代入$u=3+2e^{-t}$，或其他方法，求計劃執行後首n周的盈餘，其中$n>1$。答案以n表示。

(c) 哪個計劃的長期盈餘更多？試加以解釋。