

無窮小量與無窮大量

在高等數學，對於無窮的討論，一般從無窮小量開始。何為無窮小量？即一個非常接近0的變量不斷向零靠近，而永遠無法到達0，即為無窮小量。

我們可以考慮數列 $\{a_n\}$ ，其中對於任意整數 n ， $a_n = \frac{1}{10^n}$ 。則當 n 越大時， a_n 越靠近0。對此，記

$$a_n \rightarrow 0$$

考慮對任意 n ，均有 $\varepsilon > 0$ 使得 $0 < \varepsilon < a_n$ ，則稱變量 ε 為無窮小量。記 $\varepsilon \rightarrow 0$ 。

相對的，考慮數列 $\{A_n\}$ ，其中對於任意整數 n ， $A_n = 10^n$ 。則當 n 越大時， A_n 越靠近 ∞ 。對此，記

$$A_n \rightarrow \infty$$

考慮對任意 n ，均有 $N > 0$ 使得 $A_n < N$ ，則稱變量 N 為無窮大量。記 $N \rightarrow \infty$ 。

由此發現，無窮小量與無窮大量互相關聯：

公設. 若 $a_n = \frac{1}{A_n}$ ，則

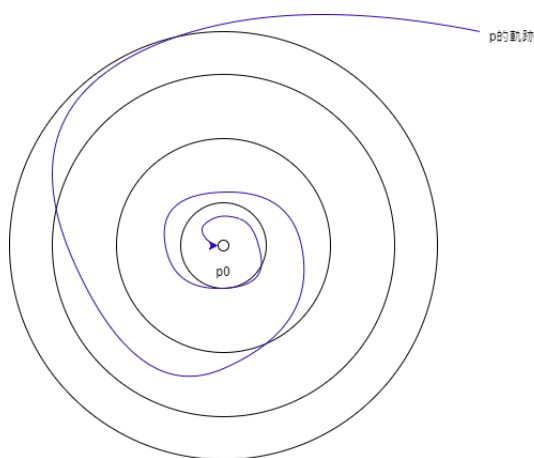
$$\lim_{A_n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

以上亦可簡記為 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ 。

極限的幾何概念

想象一個漩渦，然後有一個點 p 在漩渦裏漂浮，其結果就是 p 會不斷沿著漩渦中心繞圈，無限接近漩渦中心，但永遠不會到達中心。此刻，我們稱 p 所走的路綫為 p 的軌跡，記 $p(t)$ 並以 $t > 0$ 作時間變數，而漩渦中心 p_0 則為 p 的軌跡的極限，記

$$p_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} p(t)$$



留意上圖， p 的軌跡從外圍開始，不斷趨近於 p_0 。可見對於任何圓心為 p_0 且半徑為 $r > 0$ 的圓形，均有 $p(t)$ 位於圓形內。我們稱 $p(t)$ 的極限**收斂**；反之，若 $p(t)$ 沒有唯一極限（甚至沒有極限），我們稱之為**發散**。

那麼，該如何證明極限收斂性成為了微分數學一個重要命題。對此，幾何學家定名了一個數學模型，稱為**賦距空間**，指一個數學空間中，擁有計算距離的函數：

定義 1 (距離函數). 對於一個數集 S ，若函數 $d: S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ 符合以下條件：

- (正定性) 對於任何 $x, y \in S$ ，均有 $d(x, y) \geq 0$ ； $d(x, y) = 0$ 當且僅當 $x = y$ 。
- (對稱性) 對於任何 $x, y \in S$ ， $d(x, y) = d(y, x)$ 。
- (三角不等式) 對於任何 $x, y, z \in S$ ， $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ 。

則稱 d 為 S 的距離函數。

定義 2 (賦距空間). 設 d 為數集 S 的距離函數，則稱 (S, d) 為賦距空間。

例子. 若 $d(x, y) = \sqrt{(x - y)^2}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ，則 (\mathbb{R}, d) 為賦距空間。

證明. 證明函數 d 符合距離公式條件：

1. 正定性: $d(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} \geq \sqrt{0} = 0$ 。同時

$$d(x, y) = 0 \iff (x - y)^2 = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$$

2. 對稱性: $d(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} = \sqrt{(y - x)^2} = d(y, x)$ 。

3. 三角不等式:

$$\begin{aligned} [d(x, z)]^2 &= (x - z)^2 \\ &= (x - y + y - z)^2 \\ &= (x - y)^2 + 2(x - y)(y - z) + (y - z)^2 \\ &\leq [d(x, y)]^2 + 2[d(x, y)][d(y, z)] + [d(y, z)]^2 \\ &= [d(x, y) + d(y, z)]^2 \end{aligned}$$

因此， d 為 \mathbb{R} 上的距離公式， (\mathbb{R}, d) 為賦距空間。 □

在正規數學當中，無論是在一維、二維、三維，還是更高維的賦距空間，我們都希望擁有極限收斂。利用距離公式定義收斂性，可讓我們對收斂性有更直觀的判斷。現定義於賦距空間 (S, d) 上 p 點的 ε -鄰域為

$$U_\varepsilon(p) := \{q \in S : d(p, q) < \varepsilon\}$$

定義 3 (聚點). 設 $x(t)$ 為軌跡, 若有 x_0 令任何 $\varepsilon > 0$, 均有 $x(t) \in U_\varepsilon(x_0)$, 則 x_0 為 $x(t)$ 的聚點。

定義 4 (聚點(2)). 設 (x_n) 為一系列點, 若有 x_0 令任何 $\varepsilon > 0$, 均有 $x_n \in U_\varepsilon(x_0)$, 則 x_0 為 x_n 的聚點。

定義 5 (極限收斂). 設 x_0 為 (x_n) 的聚點, 而且對於任何 $n > 0$, 均有 $\varepsilon > 0$ 使得所有 $m \geq n$ 都有 $x_m \in U_\varepsilon(x_0)$, 則稱 x_0 為 (x_n) 的極限, 或 (x_n) 收斂於 x_0 。

$\varepsilon - \delta$ 定義-於無窮小的極限

極限的性質

特殊的極限

於無窮大的極限

連續函數

連續函數的性質

介值定理

單調函數與逆函數