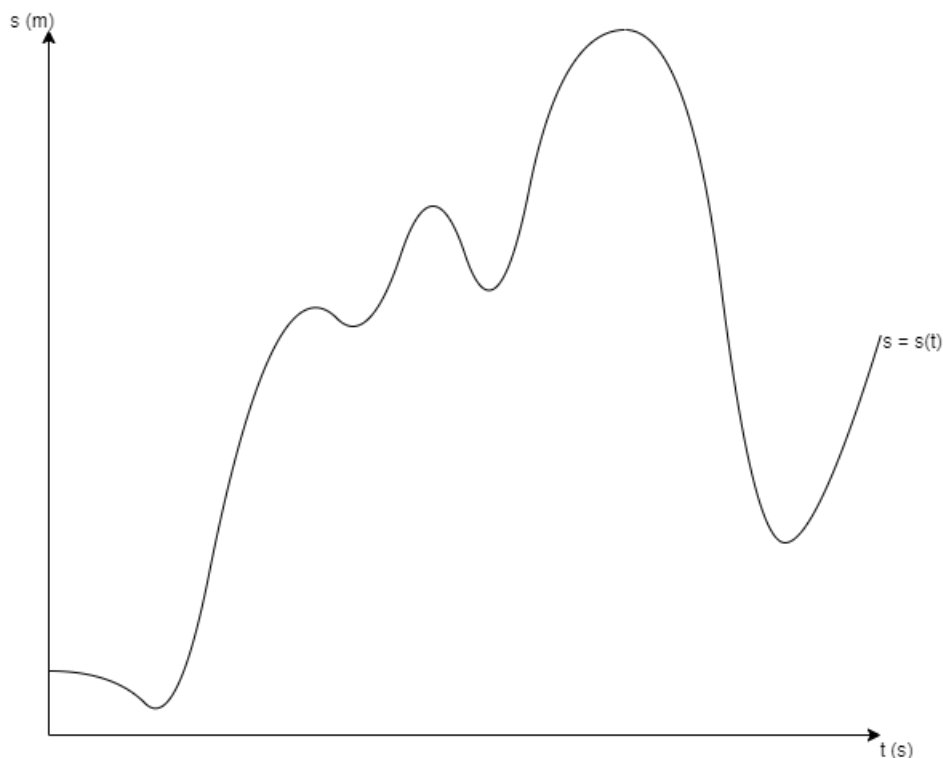


積分起源

討論積分起源，我們依然追溯到牛頓與萊布尼茨的時代。當時牛萊之爭除了微分學的發現以外，還有積分學的建立。雖說兩人整得如火如荼，但我們有著漁翁之利，可以坐享其成。

但無論如何，之所以存在積分學，是由於一道最基本的問題：假設一物體移動速度 $v(t) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 可以參數 t 量化，則可以下圖表示速度-時間之關係：

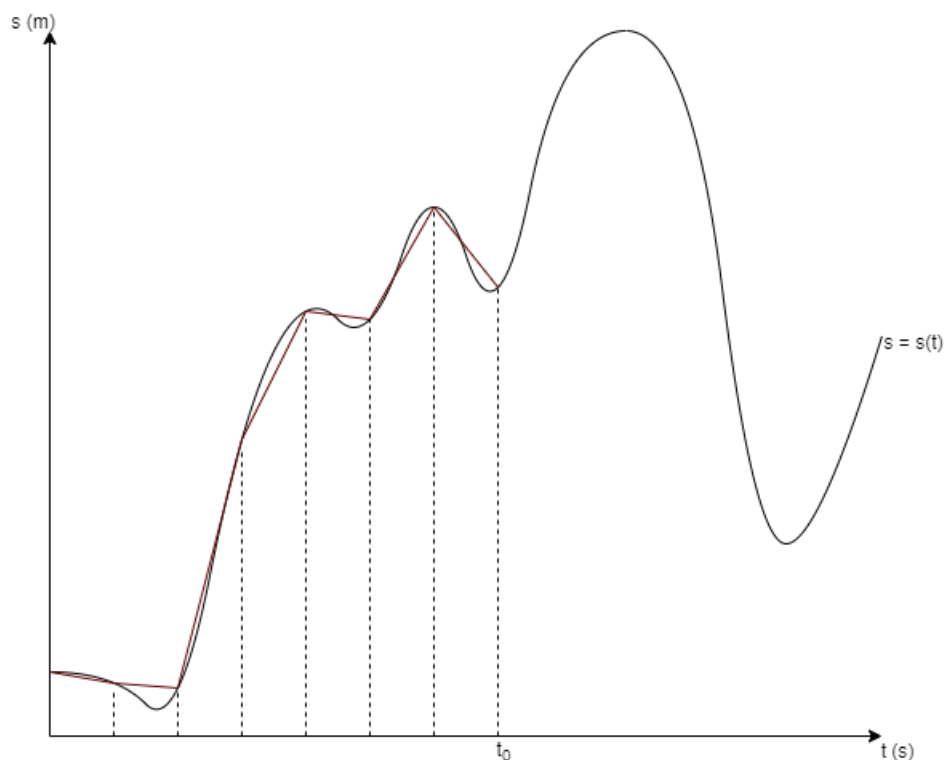


若欲求得任意時間的位移，考慮在極短時間內的瞬間位移相等於瞬時速度乘以時間跨度：設 $s(t) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 為位移函數，則

$$\Delta s(t) = v(t) \Delta t$$

并且總位移應由所有所有瞬間的瞬間位移總和得出，則可考慮將時間均分為 n 段瞬間，記 $t = 0$ 為初始時間及 t_f 為終結時間，并且 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = t_f$ ，並記對其求和：

$$s(t_f) = \sum_{k=0}^{n-1} (s(t_{k+1}) - s(t_k)) = \sum_{k=0}^{n-1} v(t_k)(t_{k+1} - t_k)$$



將 $n \rightarrow \infty$ 便可定義

$$s(t_f) = \int_0^{t_f} v(t) dt$$

若視 t_f 為變量，則稱其為不定積分；反之，則稱其為定積分。

積分的含義

從以上簡介可以看出，積分的目的在於加法；更明確的說法是定積分在於計算面積。與中學教程不同，我們會先觀察定積分，再闡述不定積分（實際上他們只差一步）。

黎曼積分法

黎曼對於曲線下的面積有著相當扎實的幾何見解，他認為每一條連續曲線都可以用分割法的方式進行求積，而且無論分割的方法如何隨機，若分割數量趨向無限，其結果都是恆定的。

藉著以上見解，黎曼將某區間 $[a, b]$ 拆分為 n 個區間，使得 $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$ 並記第 k 個區間為

$$P_k := [a_{k-1}, a_k]$$

因應 P_k 的有限性及函數 f 的連續性，隨機於 P_k 內抽取變量 $t_k \in P_k = [a_{k-1}, a_k]$ ，可得對於 P_k 上的曲線面積的估算

$$f(t_k)\|P_k\|$$

其中 $\|P_k\|$ 代表區間 P_k 的寬度。更進一步可定義

$$\|P\| := \max \|P_k\|$$

因此，黎曼給出的積分方法如下

定義 1 (黎曼積分). 設 f 為 $[a, b]$ 上的連續函數，令存在 a_1, a_2, \dots, a_{n-1} 使得 $a =: a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n := b$ ，並設 $P := \{(t_k, P_k) : 1 \leq k \leq n\}$ 為標識區間集使得 $t_k \in P_k = [a_{k-1}, a_k]$ ，則定義 f 在 $[a, b]$ 上的 P -估算面積為

$$S(f; P) := \sum_{k=1}^n f(t_k)\|P_k\|$$

而精確面積為

$$\int_a^b f = S(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} S(f; P)$$

另外，若存在 $L \in \mathbb{R}$ 使得對於 $\varepsilon > 0$ ， $|\int_a^b f - L| < \varepsilon$ ，則稱 f 為黎曼可積的函數，記為 $f \in \mathcal{R}[a, b]$ 。

黎曼積分屬於概念上的積分，實際情況還需要確定一種 t_k 的取值方法。我們先論證黎曼積分的存在性和唯一性，再討論實際應用會如何處理。

定理. 若 f 為有限區間內的連續函數，則 f 的黎曼積分有界且唯一。

證明. 由於

$$\begin{aligned} \min\left\{\sum_{k=1}^n f(t_k)\|P_k\|\right\} &\leq \sum_{k=1}^n f(t_k)\|P_k\| \leq \max\left\{\sum_{k=1}^n f(t_k)\|P_k\|\right\} \\ \sum_{k=1}^n \min\{f(t_k)\}\|P_k\| &\leq \sum_{k=1}^n f(t_k)\|P_k\| \leq \sum_{k=1}^n \max\{f(t_k)\}\|P_k\| \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \min\{f(t_k)\}\|P_k\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(t_k)\|P_k\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \max\{f(t_k)\}\|P_k\|$$

對於 $\|P\| \rightarrow 0$ ，可視 $\min\{f(t_k)\} = \max\{f(t_k)\}$ ，因此 $\int_a^b f$ 唯一存在。□

由於黎曼積分的定義基於幾何分割而定，因此初始的黎曼積分存在許多不確定性。后經過一系列修訂，終於發展一些可用理論。

定理. 若 $g \in \mathcal{R}[a, b]$ 且除了有限點以外 $f = g$ 成立，則 $f \in \mathcal{R}[a, b]$ 而且 $\int_a^b f = \int_a^b g$ 。

證明. 證明可拆分為兩部分，先證明對於一個不等點理論成立，隨後以歸納法論證。

設 $c \in (a, b)$ 並設 $L = \int_a^b g$ 。設當 $x \neq c$ 時 $f(x) = g(x)$ 。對於任意標識區間集， $S(f; P) = S(f; P)$ 除了至多兩項，即

$$[\cdot, c], [c, \cdot]$$

因此

$$\begin{aligned} |S(f; P) - S(g; P)| &= \left| \sum (f(x_i) - g(x_i))(x_i - x_{i-1}) \right| \\ &= |(f(c) - g(c))(c - x_{k-1}) + (f(c) - g(c))(x_{k+1} - c)| \\ &< 2(|f(c)| + |g(c)|)\|P\| \end{aligned}$$

由此設 $\varepsilon > 0$ ， $\delta_1 < \frac{\varepsilon}{4(|f(c)| + |g(c)|)}$ ，以及 $\|P\| < \delta_2$ 使得 $|S(g; P) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ 。由此設 $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 可得

$$\begin{aligned} |S(f; P) - L| &< |S(f; P) - S(g; P)| + |S(g; P) - L| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

因此， $f \in \mathcal{R}[a, b]$ 。

利用歸納法，不難得出對於有 n 個不等點的情況，把 $[a, b]$ 拆分為 $[a, c]$ 及 $[c, b]$ 使得 $[a, c]$ 上有 $n - 1$ 個不等點，由此證畢。□

既然黎曼積分肯定有唯一值，那麼如何計算就成為了一大問題，畢竟黎曼所提出的概念本就相當抽象，隨機取值雖然可以概括算法，但人類不能將之有效計算。我們給出下列普遍算法，以確定黎曼積分的值。

以下考慮函數 $y = x^2$ 在 $[-1, 1]$ 區間的值。

左取值法

對於每一個分區間 $[x_i, x_{i+1}]$ ，取 $f(x_i)$ 作計算值，則寫

$$\int_a^b f = \sum f(x_i)\|P\|$$

例子. 設 $f(x) = x^2$, 則

$$\begin{aligned}
 S(f; P) &= \sum_{i=0}^{2n-1} (x_i^2) \frac{1}{n} \\
 &= \frac{1}{n} [(-1)^2 + (\frac{1-n}{n})^2 + \cdots + (\frac{n-1}{n})^2] \\
 &= \frac{1}{n} [0^2 + 2 \cdot (\frac{1}{n})^2 + \cdots + 2 \cdot 1^2 - 1^2] \\
 &= \frac{1}{n^3} [2(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) - n^2] \\
 &= \frac{1}{n^3} [2 \cdot \frac{1}{6}(n)(n+1)(2n+1) - n^2] \\
 &= \frac{2}{3} + \mathcal{O}(\frac{1}{n})
 \end{aligned}$$

因此, $\int_{-1}^1 f = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f; P) = \frac{2}{3}$.

右取值法

對於每一個分區間 $[x_i, x_{i+1}]$, 取 $f(x_{i+1})$ 作計算值, 則寫

$$\int_a^b f = \sum f(x_{i+1}) \|P\|$$

例子. 設 $f(x) = x^2$, 則

$$\begin{aligned}
 S(f; P) &= \sum_{i=0}^{2n-1} (x_{i+1}^2) \frac{1}{n} \\
 &= \frac{1}{n} [(\frac{1-n}{n})^2 + \cdots + (\frac{n-1}{n})^2 + 1^2] \\
 &= \frac{1}{n} [0^2 + 2 \cdot (\frac{1}{n})^2 + \cdots + 2 \cdot 1^2 - 1^2] \\
 &= \frac{1}{n^3} [2(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) - n^2] \\
 &= \frac{1}{n^3} [2 \cdot \frac{1}{6}(n)(n+1)(2n+1) - n^2] \\
 &= \frac{2}{3} + \mathcal{O}(\frac{1}{n})
 \end{aligned}$$

因此, $\int_{-1}^1 f = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f; P) = \frac{2}{3}$.

中取值法

對於每一個分區間 $[x_i, x_{i+1}]$, 取 $f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2})$ 作計算值, 則寫

$$\int_a^b f = \sum f(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}) \|P\|$$

例子. 設 $f(x) = x^2$, 則

$$\begin{aligned}
 S(f; P) &= \sum_{i=0}^{2n-1} \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right)^2 \frac{1}{n} \\
 &= \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1-2n}{2n} \right)^2 + \left(\frac{3-2n}{2n} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{n} \left[2 \cdot \left(\frac{1}{2n} \right)^2 + \cdots + 2 \cdot \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2n^3} [1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2] \\
 &= \frac{1}{2n^3} \left[\frac{1}{6} (2n)(2n+1)(4n+1) - 4 \cdot \frac{1}{6} (n)(n+1)(2n+1) \right] \\
 &= \frac{1}{12n^3} (2n+1) [(2n)(4n+1) - 4(n)(n+1)] \\
 &= \frac{1}{6n^3} (2n+1)(2n-1)(n) \\
 &= \frac{2}{3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)
 \end{aligned}$$

因此, $\int_{-1}^1 f = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f; P) = \frac{2}{3}$.

梯形法則

對於每一個分區間 $[x_i, x_{i+1}]$, 取 $\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$ 作計算值, 則寫

$$\int_a^b f = \sum \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \|P\|$$

例子. 設 $f(x) = x^2$, 則

$$\begin{aligned}
 S(f; P) &= \sum_{i=0}^{2n-1} \frac{x_i^2 + x_{i+1}^2}{2} \frac{1}{n} \\
 &= \frac{1}{2} (\text{左和} + \text{右和}) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\
 &= \frac{2}{3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)
 \end{aligned}$$

因此, $\int_{-1}^1 f = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f; P) = \frac{2}{3}$.

黎曼積分的限制

1. 黎曼利用矩形進行估算, 但若函數存在無限多個未定義點, 則不能計算。

2. 對於不定積分的不確定性。
3. 對於瑕積分的收斂問題。

勒貝格積分法

勒貝格考慮到黎曼積分發有許多隱形問題，決定對積分進行重新定義。他首先想到的就是如何去判斷積分的有效區域，以解決黎曼積分第一個限制。

測度理論引論

‘把該算的算進去，而非隨機尋找哪裏可算’

對於積分問題，勒貝格與黎曼持有相反的看法。勒貝格認為，積分並不是幾何原理的產物，而是如同概率一般，屬於純粹算術的產物。

簡單的說明，就是對於圖形的面積，黎曼習慣使用分割法計算，這樣的計算方式局限了他對於有無限空洞的圖形的描述。此時勒貝格問了一句：“難道你能確定圖形面積的上限嗎？你怎麼確定圖形的面積真的如你所算呢？”對此黎曼表示無可奉告。但勒貝格說：“我用填補法找出了上限，再證明那些空洞有限，可好？”

至此，測度理論成型，並且將“可算”的意義更進一步的討論。其中最值得認識的就是有理數與無理數的多與少。

萊布尼茨法則

由於導數與積分的特性，我們有微積分的基本定理：

定理 (微積分基本定理). 設 f 為區間 $[a, b]$ 上連續函數。設 $x \in [a, b]$ ，則

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

證明. 令 $F' = f$ ，則

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) = \frac{d}{dx} [F(x) - F(a)] = F'(x) = f(x)$$

□

定理. 設 f 為 \mathbb{R} 上的連續函數。設 $[a(x), b(x)] \subset \mathbb{R}$ 則

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$$

積分方法

基本積分定則

設理. 1. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ 當 $n \neq -1$;

$$2. \int x^{-1} dx = \ln|x| + C;$$

$$3. \int e^x dx = e^x + C;$$

$$4. \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$5. \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$6. \int \tan x dx = \ln(|\sec x|) + C;$$

$$7. \int \sec x dx = \ln(|\sec x + \tan x|) + C;$$

$$8. \int \csc x dx = -\ln(|\csc x + \cot x|) + C;$$

$$9. \int \cot x dx = \ln(|\sin x|) + C;$$

$$10. \int \sec^2 x dx = \tan x + C;$$

$$11. \int \csc^2 x dx = -\cot x + C.$$

換元代入法

例子. 設 $I(x) = \int \frac{2x+1}{x^2+x+2} dx$, 代 $u = x^2 + x + 2$ 可得 $du = (2x+1)dx$, 則

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{2x+1}{x^2+x+2} dx \\ &= \int \frac{1}{u} du \\ &= \ln|u| + C \\ &= \ln|x^2+x+2| + C \end{aligned}$$

參數化代入法

例子. 設 $I(x) = \int \frac{1}{x^2+a^2} dx$, 代 $x = a \tan \theta$ 可得 $dx = a \sec^2 \theta d\theta$, 則

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{1}{x^2+a^2} dx \\ &= \int \frac{a \sec^2 \theta}{a^2 \tan^2 \theta + a^2} d\theta \\ &= \int \frac{1}{a} d\theta \\ &= \frac{1}{a} \theta + C \\ &= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \end{aligned}$$

部分分數法

對於有理函數, 我們不妨通過部分分數法完成積分:

例子. 設 $I(x) = \int \frac{1}{(x-1)^2(x-2)} dx$, 考慮

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2}$$

其中 A, B, C 為未知常數. 求之則得

$$A = -1, B = -1, C = 1$$

由此,

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{1}{(x-1)^2(x-2)} dx \\ &= \int \frac{-1}{x-1} + \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-2} dx \\ &= -\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + \ln|x-2| + C \end{aligned}$$

部分積分法

$$\int u dv = uv - \int v du$$

例子. 設 $I(x) = \int e^x \sin x dx$

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \sin x d(e^x) \\ &= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \\ &= e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx \\ 2I(x) &= e^x (\sin x - \cos x) \\ I(x) &= \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} \end{aligned}$$

費曼積分法

通常費曼法會用在定積分上:

$$\int f(x) dx \mapsto \int F(x, t) dx = \int \int \partial_t F(x, t) dx dt$$

例子. 設 $I := \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$, 通過令 $I(t) := \int_0^\infty \frac{e^{-tx} \sin x}{x} dx$, 求

$$\begin{aligned} I'(t) &= \int_0^\infty -e^{-tx} \sin x dx \\ &= e^{-tx} \cos x \Big|_0^\infty - t \int_0^\infty e^{-tx} \cos x dx \\ &= -\frac{1}{1+t^2} \\ I(t) &= -\arctan t + C \\ I(\infty) = 0 &\implies C = \frac{\pi}{2} \\ I = I(0) &= \arctan 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

體積運算

圓盤法

外殼法

多元積分

雙重積分

三重積分

向量函數積分

綫積分

曲面積分