二元極限

對於多元極限，我們可從二元極限出發：

$$\lim_{x\to 0, y\to 0} f(x,y)$$

為符合極限的唯一性，我們需作$(x,y)\mapsto(r,\theta)$的置換。參考圓形，可得

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

則$\lim\limits_{x\to 0, y\to 0} f(x,y)$存在當且僅當$\lim\limits_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$存在。

定理. *若$\lim\limits_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$存在，則*

$$\lim_{x\to 0, y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$$

證明. 若$\lim\limits_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$存在，則極限受$r$控制，並符合極限唯一性。故從任何方向推演極限必然得到相同結果。故以任何方式求得極限，結果必然相同。
□

多元極限

面對更高維度的極限時，可作二元分立。設$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,$y \in \mathbb{R}$，對於

$$\lim_{\mathbf{x}\to 0, y\to 0} f(\mathbf{x},y)$$

作$(\mathbf{x},y)\mapsto(r,\theta)$的置換，可得如二元極限的變化：

$$\begin{cases} r^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + y^2 \\ \|\mathbf{x}\| = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

其中$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$。重複步驟可得多元極限結果。