References: Introduction to Real Analysis (Bartle & Sherbert), Thomas Calculus 12th Edition

單元導數定義

由牛頓發揚光大的流數法，今時今日變成了以極限定義的導數。

定義 1 (導數定義). 若f在c可導，則其導數$f'(c)$為

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

定義 2 (現代導數嚴謹定義). L為f在c的導數當：對於任意$\epsilon > 0$,若存在$\delta(\epsilon) > 0$使得對於$0 < |x - c| < \delta(\epsilon)$,

$$\left|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L\right| < \epsilon$$

則寫$f'(c) = L$。

定理. 若$f : I \to \mathbb{R}$在$c \in I$可微，則f在$c \in I$連續。

證明. 導數存在，則

$$\begin{aligned}\lim_{x \to c}(f(x) - f(c)) &= \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \lim_{x \to c}(x - c) \\ &= f'(c) \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

因此$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$使得$f$在$c \in I$連續。 □

導數的目的在於處理函數的變化：從算式可見，導數取自f的變化除以變量x的變化，即可理解爲變化的比例，等於變化比率。簡而言之，導數為函數的斜率。

定理 (基本導數定則).

1. 常函數的導數：

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

2. 冪函數的導數：

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

3. 自然指數的導數：

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

4. 自然對數的導數：
$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$$

5. 三角函數的導數：

(a)
$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

(b)
$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

(c)
$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

證明. 留做習題。 □

定理 (導數的性質). 導數擁有以下性質：

1. 綫性性：對於可微函數f, g，常數α, β，$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$。

2. 乘積法則：對於連續函數f, g，$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$。

3. 除法定則：對於連續函數f, g，$(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$。

證明.

1. 綫性性：從f, g的可微性，可得對任意$\varepsilon > 0$，均有$\delta_f, \delta_g > 0$使得對於所有c，若x符合$0 < |x - c| < \min\{\delta_f, \delta_g\}$時，
$$|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c)| < \frac{\varepsilon}{2\alpha}; |\frac{g(x) - g(c)}{x - c} - g'(c)| < \frac{\varepsilon}{2\beta}$$
則
$$\begin{aligned}
&|\frac{(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(c) + \beta g(c))}{x - c} - (\alpha f'(c) + \beta g'(c))| \\
&< \alpha|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c)| + \beta|\frac{g(x) - g(c)}{x - c} - g'(c)| \\
&< \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{2\alpha} + \beta \cdot \frac{\varepsilon}{2\beta} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

2. 乘積法則：從f, g的可微性，可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}\frac{f(x)g(x)-f(c)g(c)}{x-c} &= \lim_{x\to c}\frac{f(x)g(x)-f(x)g(c)+f(x)g(c)-f(c)g(c)}{x-c}\\ &= \lim_{x\to c}(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\cdot g(c)+f(x)\cdot\frac{g(x)-g(c)}{x-c})\\ &= f'(c)g(c)+f(c)g'(c)\end{aligned}$$

3. 除法定則：留作習題

□

衍理. *導數擁有以下性質：*

1. *綫性性：對於一系列可微函數*$\{f_k\}_{k=1}^n$*，及一系列常數*$\{\alpha_k\}_{k=1}^n$*，*$(\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k)' = \sum_{k=1}^n(\alpha_k f_k')$*。*

2. *乘積法則：對於一系列可微函數*$\{f_k\}_{k=1}^n$*，*$(\prod_{k=1}^n f_k)' = \sum_{k=1}^n(f_1f_2\cdots f_k'\cdots f_{n-1}f_n)$*。*

定理 (鏈鎖律). *對於複合函數*$h := (g\circ f)$*，*

$$h' = (g'\circ f)\cdot(f')$$

證明以上定理需引用一下引理：

引理. *設*$f : I\to\mathbb{R}$*，*$c\in I$*。則*f*可微當且僅當存在函數*φ*在*I*上定義且於*c*點連續使得對於所有*$x\in I$*均有*

$$f(x)-f(c) = \varphi(x)(x-c)$$

則寫$\varphi(c) = f'(c)$*。*

證明.[引理] 若$f'(c)$存在，即

$$\varphi(x) := \begin{cases}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}, & x\neq c\\ f'(c), & x = c\end{cases}$$

為連續函數，使得$\varphi(c) = f'(c)$。

若φ為連續函數符合

$$f(x)-f(c) = \varphi(x)(x-c)$$

則

$$\varphi(c) = \lim_{x \to c} \varphi(x) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$$

□

證明.[鏈鎖律]

□

定理 (逆函數)**.** 對於逆函數$g := f^{-1}$，

$$g' = \frac{1}{f' \circ g}$$

證明. 設$g(x) = f^{-1}(x)$，則$(f \circ g)(x) = x$。利用鏈鎖律，可得

$$(f' \circ g)(x) \cdot g'(x) = 1$$
$$g'(x) = \frac{1}{(f' \circ g)(x)}$$

□

導數可視爲函數於任意點的斜率，換言之，利用直綫方程的點斜式，可得出函數f於任意點$(x_0, f(x_0))$上的切綫方程為

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

定義 3 (高維導數)**.** 若f可微，則f'為f的第一導數；若f'可微，則f''為f的第二導數，並記

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$$

如此類推，我們稱$f^{(n)}(x)$為f的第n導數，記

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}(f(x))$$

均值定理

均值定理為數學分析其中一個重要工具，亦是導數的重要應用結果。其含義在於將導數與函數值作連接，將切綫普及化。

定理 (極值定理)**.** 設$c \in I$使得$f : I \to \mathbb{R}$有極值於c。若f可微，則$f'(c) = 0$。

證明. 先證明$f(c)$為極大值的情況：若$f'(c) > 0$，則存在c的鄰域$V \subseteq I$使得對於$x \in V$，

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

因此，若$x \in V$同時$x > c$，則

$$f(x) - f(c) = (x-c) \cdot \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

此則違反$f(c)$為極大值的假設，$f'(c) \not> 0$。

同理，證明$f'(c) \not< 0$可運用相似做法，因此$f'(c) = 0$。 □

衍理. 設$f : I \to \mathbb{R}$為連續函數，並設f在$c \in I$有極值。則$f'(c)$不存在或$f'(c) = 0$。

小記. $f(x) := |x|$可作衍理的例證：f在$0 \in I := [-1, 1]$上存在極小值，但$f'(0)$並不存在。

定理 (羅爾定理)**.** 設f在閉合區間$[a, b]$上連續，且可微於開放區間(a, b)，使得$f(a) = f(b) = 0$。則存在至少一個$c \in (a, b)$使得$f'(c) = 0$。

定理 (基本均值定理)**.** 設f在閉合區間$[a, b]$上連續，且可微於開放區間(a, b)，則存在至少一個$c \in (a, b)$使得

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

證明. 設

$$\varphi(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

可見φ在閉合區間$[a, b]$上連續，且可微於開放區間(a, b)，而且$\varphi(b) = \varphi(a) = 0$。則可利用羅爾定理引存在$c \in (a, b)$使得

$$0 = \varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

通過簡單移項，便得

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

□

逆微分的基本原理，以及第一導數測試，都是從均值定理發展的一些應用。

定理. 設f在閉合區間$I := [a, b]$上連續，且可微於開放區間(a, b)，且$f'(x) = 0$對所有$x \in (a, b)$，則f為I上的常函數。

證明. 利用均值定理，存在至少一個$c \in (a, b)$使得$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) = 0$，則$f(a) = f(b)$；並對於所有$x \in (a, b)$，均有$c \in (x, a)$使得$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) = 0$。則$f(x) = f(a)$對所有$x \in [a, b]$成立。 □

衍理. 設f, g在閉合區間$I := [a, b]$上連續，且均可微於開放區間(a, b)，且$f'(x) = g'(x)$對所有$x \in (a, b)$，則$f = g + C$，其中C為常數。

定義 4 (遞升函數). 設f為連續函數，若對於所有$x_1 < x_2$均有$f(x_1) \leq f(x_2)$，則稱f為遞升函數。

定義 5 (遞降函數). 設f為連續函數，若對於所有$x_1 < x_2$均有$f(x_1) \geq f(x_2)$，則稱f為遞降函數。

定理. 設$f : I \to \mathbb{R}$為可微函數，則：

1. f為遞升函數當且僅當所有$x \in I$均有$f'(x) \geq 0$；
2. f為遞降函數當且僅當所有$x \in I$均有$f'(x) \leq 0$。

證明. 證明1：設$f'(x) \geq 0$。若$x_1 < x_2$，則根據均值定理存在$c \in (x_1, x_2)$使得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0$$

相對地，若f為遞升函數，則

$$f'(x) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

證明2：與證明1相似，留做習題。 □

定理 (第一導數測試). 設f為$I := [a, b]$上的連續函數，並設$c \in (a, b)$。假定f在(a, c)及(b, c)上可微，則：

1. 若存在c的δ-鄰域$(c-\delta, c+\delta) \subseteq I$使得$\begin{cases} f'(x) \geq 0, & c - \delta < x < c; \\ f'(x) \leq 0, & c < x < c + \delta \end{cases}$，則$c$為$f$在$I$上的相對極大值；
2. 若存在c的δ-鄰域$(c-\delta, c+\delta) \cap I \subseteq I$使得$\begin{cases} f'(x) \leq 0, & c - \delta < x < c; \\ f'(x) \geq 0, & c < x < c + \delta \end{cases}$，則$c$為$f$在$I$上的相對極小值。

證明. 對於$c - \delta < x < c$時$f'(x) \geq 0$，則根據均值定理，存在$c_x \in (x, c)$使得

$$f(c) - f(x) = f'(c_x)(c - x) \geq 0$$

則$f(c) \geq f(x)$；同理，對於$c < x < c + \delta$時$f'(x) \leq 0$，則根據均值定理，存在$c_x \in (c, x)$使得

$$f(x) - f(c) = f'(c_x)(x - c) \leq 0$$

則$f(c) \geq f(x)$。因此，對於$x \in [a, b]$，$f(c) \geq f(x)$，則$f(c)$為相對極大值。

2的證明與1相似，留做習題。 □

洛必達法則

洛必達法則主要用來處理不能正常求得的極限，舉例如f, g均爲連續函數，而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$的狀況，我們不能直接求得極限的值，因：若定義$f(x) = \alpha x$及$g(x) = x$，$\alpha \in \mathbb{R}$為任意值，則

$$\frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\alpha x}{x} = \alpha$$

但洛必達定理通過求導的方法得到了意想不到的結果。

從最直覺的判斷，我們可以考慮切綫：因爲$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$及$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$，因此根據f, g的連續性，$f(0) = 0$及$g(0) = 0$，對於足夠小的$\delta > 0$，$x \in (-\delta, \delta)$，

$$\begin{cases} f(x) \approx f'(0)x \\ g(x) \approx g'(0)x \end{cases}$$

因此可想像

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(0)x}{g'(0)x} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

而最基礎的推導也是基於導數定義：

定理. *設f, g均爲$[a, b]$上的函數使得$f(a) = g(a) = 0$，並設$g(x) \neq 0$對於$x \in (a, b)$。若f, g在a點可微且$g'(a) \neq 0$，則*

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

證明.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \\ &= \lim_{x\to a^+}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \\ &= \frac{f'(a)}{g'(a)}\end{aligned}$$

□

小記. 需注意的是，以上定理只適用於函數在a有導數，若$a = \pm\infty$，則需要更多手段。

定理 (柯西均值定理/普適均值定理)**.** *設f, g為$[a, b]$上的連續函數，並在(a, b)上可微，且$g'(x) \neq 0$對所有$x \in (a, b)$。則存在$c \in (a, b)$使得*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

證明. 設

$$h(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

可見h在閉合區間$[a, b]$上連續，且可微於開放區間(a, b)，而且$h(b) = h(a) = 0$。則可利用羅爾定理引存在$c \in (a, b)$使得

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c)$$

通過簡單移項，便得

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

□

定理 (洛必達定理I). 設$-\infty \leq a < b \leq \infty$並設$f, g$於$(a, b)$可微使得所有$x \in (a, b)$均使得$g'(x) \neq 0$。假定

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 0 = \lim_{x \to a^+} g(x)$$

1. 若$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$，則$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$；
2. 若$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \{-\infty, \infty\}$，則$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$。

證明. 設$a < \alpha < \beta < b$，根據羅爾定理$g(\alpha) \neq g(\beta)$（爲何？），並根據柯西均值定理，存在$u \in (\alpha, \beta)$使得

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(u)}{g'(u)}$$

其中$u \in (\alpha, \beta)$。

情況1：$L \in \mathbb{R}$，$\varepsilon > 0$，存在$c \in (a, b)$使得

$$L + \varepsilon < \frac{f'(u)}{g'(u)} < L + \varepsilon \qquad u \in (a, c)$$

$$L + \varepsilon < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} < L + \varepsilon \qquad a < \alpha < \beta \leq c$$

取$\alpha \to a^+$，可得

$$L + \varepsilon \leq \frac{f(\beta)}{g(\beta)} \leq L + \varepsilon \qquad \beta \in (a, c]$$

因$\varepsilon > 0$為任意值，1證畢。

情況2.1：$L = \infty$，$M > 0$，存在$c \in (a,b)$使得

$$\frac{f'(u)}{g'(u)} > M \qquad u \in (a,c)$$

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} > M \qquad a < \alpha < \beta \leq c$$

取$\alpha \to a^+$，可得

$$\frac{f(\beta)}{g(\beta)} \geq M \qquad \beta \in (a,c)$$

因$M > 0$為任意值，2.1證畢。

若$L = -\infty$，證明與2.1類似。 □

定理 (洛必達定理II). 設$-\infty \leq a < b \leq \infty$並設$f, g$於$(a,b)$可微使得所有$x \in (a,b)$均使得$g'(x) \neq 0$。假定

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty = \lim_{x \to a^+} g(x)$$

1. 若$\displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$，則$\displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$；

2. 若$\displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \{-\infty, \infty\}$，則$\displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$。

泰勒定理

回想切綫的出現，可見對於任意可微函數f都存在一種估算

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

而若需要更精確的估算，考慮若f存在二階導數，則

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

同理，若f存在三階導數、四階導數，可對f進行更精確的估算。如此拓展下去，可得以下定義：

定義 6 (泰勒多項式). 設$n \in \mathbb{N}$及$I := [a,b]$，並設$f : I \to \mathbb{R}$使得f及其導數$f', f'', \ldots, f^{(n)}$均為(a,b)上的連續函數，並於(a,b)上存在$(n+1)$-階導數$f^{(n+1)}$，則對於$x_0 \in I$，設$V(x_0)$為x_0的鄰域，可對$x \in V(x_0)$進行以下估算

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \end{aligned}$$

我們記$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$。

定理 (泰勒多項式定理)**.** 設$n\in\mathbb{N}$及$I:=[a,b]$，並設$f:I\to\mathbb{R}$使得f及其導數$f',f'',\ldots,f^{(n)}$均為(a,b)上的連續函數，並於(a,b)上存在$(n+1)$-階導數$f^{(n+1)}$，則對於定點$x_0\in I$，及任意$x\in I$，存在c位於x與x_0之間使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

證明. 設

$$F(t):=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-t)^k}{k!}f^{(k)}(t)$$

則

$$\begin{aligned}F'(t)&=-f'(t)-\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(t)+\frac{(x-t)^k}{k!}f^{(k+1)}(t)\right)\\&=-f'(t)-(-f'(t)+\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t))\\&=-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\end{aligned}$$

又設$G(t):=F(t)-\left(\frac{x-t}{x-x_0}\right)^{n+1}F(x_0)$，則見$G(x)=G(x_0)=0$。根據羅爾定理，存在$c$位於$x$和$x_0$之間使得

$$0=G'(c)=F'(c)+(n+1)\frac{(x-c)^n}{(x-x_0)^{n+1}}F(x_0)$$

則

$$\begin{aligned}F(x_0)&=-\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)(x-c)^n}F'(c)\\&=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)(x-c)^n}\frac{(x-c)^n}{n!}f^{(n+1)}(c)\\&=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\end{aligned}$$

□

泰勒定理對相對極值有很大的貢獻。回顧二階導數對極值的影響：

定理. 設$f:[x_0-\delta,x_0+\delta]\to\mathbb{R}$使得$f$及其導數$f'$均為$(x_0-\delta,x_0+\delta)$上的連續函數，並於$(x_0-\delta,x_0+\delta)$上存在二階導數$f''$使得$f'(x_0)=0$而$f''(x_0)\neq 0$，則

1. 若$f''(x_0) > 0$，$f(x_0)$為相對極小值；

2. 若$f''(x_0) < 0$，$f(x_0)$為相對極大值。

證明. 證明1：根據泰勒定理，存在$c \in (x_0, x_0 + \delta)$使得所有$c' \in (x_0, c)$均有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(c')}{2}(x - x_0)^2 \geq f(x_0)$$

同理，存在$d \in (x_0 - \delta, x_0)$使得所有$d' \in (d, x_0)$均有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(d')}{2}(x - x_0)^2 \geq f(x_0)$$

則$f(x_0)$為x_0鄰域上的相對極小值。

證明2的情況相似，留做習題。 □

因此利用泰勒定理，可將上述極值的定理拓展至高階導數版本：

定理. 設$f : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$使得$f$及其導數$f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$均為$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$上的連續函數，並於$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$上存在$n$階導數$f^{(n)}$使得$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$而$f^{(n)}(x_0) \neq 0$，則

1. 若n為偶數而$f^{(n)}(x_0) > 0$，$f(x_0)$為相對極小值；

2. 若n為偶數而$f^{(n)}(x_0) < 0$，$f(x_0)$為相對極大值；

3. 若n為奇數，則$f(x_0)$並非極值。

證明. 證明留做習題。 □

另外還有一種導數的應用，在於尋找函數的根。我們以往可以利用分割法進行推演，但效率實在太低；因此牛頓發明了更快捷的做法，我們稱其爲牛頓分割法。

此方法利用切綫做切入，加速靠近根點。因此，通過數列的創造，可不斷接近根點。考慮

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

代$y = 0$可得x軸切點，則爲數列的新一項：

$$-f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \implies x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

定理 (牛頓分割法)**.** 設$I := [a, b]$並設$f : I \to \mathbb{R}$為二階可微函數。假定$f(a)f(b) < 0$並存在$m, M > 0$使得所有$x \in I$均符合$|f'(x)| \geq m > 0$及$|f''(x)| \leq M$。設$K := M/2m$。則存在$r \in I' \subset I$使得$f(r) = 0$，同時有數列(x_n)定義爲

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

使得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = r$，而且$|x_{n+1} - r| < K|x_n - r|^2$。

向量函數

偏導數與全導數

方向導數

切面與法綫

二維極值與鞍點