References: Introduction to Real Analysis (Bartle & Sherbert), Thomas Calculus 12th Edition

單元導數定義

由牛頓發揚光大的流數法，今時今日變成了以極限定義的導數。

定義 1 (導數定義)**.** *若f在c可導，則其導數$f'(c)$為*

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

定義 2 (現代導數嚴謹定義)**.** *L為f在c的導數當：對於任意$\epsilon > 0$,若存在$\delta(\epsilon) > 0$使得對於$0 < |x-c| < \delta(\epsilon)$,*

$$|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - L| < \epsilon$$

則寫$f'(c) = L$。

定理. *若$f : I \to \mathbb{R}$在$c \in I$可微，則f在$c \in I$連續。*

證明. 導數存在，則

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}(f(x)-f(c)) &= \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \cdot \lim_{x\to c}(x-c)\\ &= f'(c)\cdot 0\\ &= 0\end{aligned}$$

因此$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$使得$f$在$c \in I$連續。 □

導數的目的在於處理函數的變化：從算式可見，導數取自f的變化除以變量x的變化，即可理解爲變化的比例，等於變化比率。簡而言之，導數為函數的斜率。

定理 (基本導數定則)**.** *1. 常函數的導數：*

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

2. 冪函數的導數：

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

3. 自然指數的導數：

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

4. 自然對數的導數：

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$$

5. 三角函數的導數：

   (a)
   $$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

   (b)
   $$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

   (c)
   $$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

證明. 留做習題。 □

定理 (導數的性質). 導數擁有以下性質：

1. 綫性性：對於可微函數f, g，常數α, β，$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$。

2. 乘積法則：對於連續函數f, g，$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$。

3. 除法定則：對於連續函數f, g，$(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$。

證明.

1. 綫性性：從f, g的可微性，可得對任意$\varepsilon > 0$，均有$\delta_f, \delta_g > 0$使得對於所有c，若x符合$0 < |x - c| < \min\{\delta_f, \delta_g\}$時，

$$|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c)| < \frac{\varepsilon}{2\alpha}; |\frac{g(x) - g(c)}{x - c} - g'(c)| < \frac{\varepsilon}{2\beta}$$

則

$$\begin{aligned}
&|\frac{(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(c) + \beta g(c))}{x - c} - (\alpha f'(c) + \beta g'(c))| \\
&< \alpha|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c)| + \beta|\frac{g(x) - g(c)}{x - c} - g'(c)| \\
&< \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{2\alpha} + \beta \cdot \frac{\varepsilon}{2\beta} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

2. 乘積法則：從f,g的可微性，可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}\frac{f(x)g(x)-f(c)g(c)}{x-c} &= \lim_{x\to c}\frac{f(x)g(x)-f(x)g(c)+f(x)g(c)-f(c)g(c)}{x-c}\\ &= \lim_{x\to c}(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\cdot g(c)+f(x)\cdot\frac{g(x)-g(c)}{x-c})\\ &= f'(c)g(c)+f(c)g'(c)\end{aligned}$$

3. 除法定則：留作習題

$\square$

衍理. *導數擁有以下性質：*

1. *綫性性：對於一系列可微函數*$\{f_k\}_{k=1}^n$，*及一系列常數*$\{\alpha_k\}_{k=1}^n$，$(\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k)' = \sum_{k=1}^n (\alpha_k f_k')$。

2. *乘積法則：對於一系列可微函數*$\{f_k\}_{k=1}^n$，$(\prod_{k=1}^n f_k)' = \sum_{k=1}^n (f_1 f_2\cdots f_k'\cdots f_{n-1}f_n)$。

定理 (鏈鎖律)**.** *對於複合函數*$h := (g\circ f)$，

$$h' = (g'\circ f)\cdot(f')$$

證明. 留做習題 $\square$

定理 (逆函數)**.** *對於逆函數*$g := f^{-1}$，

$$g' = \frac{1}{f'\circ g}$$

證明. 設$g(x)=f^{-1}(x)$，則$(f\circ g)(x)=x$。利用鏈鎖律，可得

$$\begin{aligned}(f'\circ g)(x)\cdot g'(x) &= 1\\ g'(x) &= \frac{1}{(f'\circ g)(x)}\end{aligned}$$

$\square$

導數可視爲函數於任意點的斜率，換言之，利用直綫方程的點斜式，可得出函數f於任意點$(x_0,f(x_0))$上的切綫方程為

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

定義 3 (高維導數). 若f可微，則f'為f的第一導數；若f'可微，則f''為f的第二導數，並記

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$$

如此類推，我們稱$f^{(n)}(x)$為f的第n導數，記

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}(f(x))$$

均值定理

均值定理為數學分析其中一個重要工具，亦是導數的重要應用結果。其含義在於將導數與函數值作連接，將切綫普及化。

定理 (極值定理). 設$c \in I$使得$f : I \to \mathbb{R}$有極值於c。若f可微，則$f'(c) = 0$。

證明. 先證明$f(c)$為極大值的情況：若$f'(c) > 0$，則存在c的鄰域$V \subseteq I$使得對於$x \in V$，

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

因此，若$x \in V$同時$x > c$，則

$$f(x) - f(c) = (x - c) \cdot \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

此則違反$f(c)$為極大值的假設，$f'(c) \not> 0$。

同理，證明$f'(c) \not< 0$可運用相似做法，因此$f'(c) = 0$。 □

衍理. 設$f : I \to \mathbb{R}$為連續函數，並設f在$c \in I$有極值。則$f'(c)$不存在或$f'(c) = 0$。

小記. $f(x) := |x|$可作衍理的例證：f在$0 \in I := [-1, 1]$上存在極小值，但$f'(0)$並不存在。

定理 (羅爾定理). 設f在閉合區間$[a, b]$上連續，且可微於開放區間(a, b)，使得$f(a) = f(b) = 0$。則存在至少一個$c \in (a, b)$使得$f'(c) = 0$。

定理 (基本均值定理). 設f在閉合區間$[a, b]$上連續，且可微於開放區間(a, b)，則存在至少一個$c \in (a, b)$使得

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

證明. 設

$$\varphi(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

可見φ在閉合區間$[a, b]$上連續，且可微於開放區間(a, b)，而且$\varphi(b) = \varphi(a) = 0$。則可利用羅爾定理引存在$c \in (a, b)$使得

$$0 = \varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

通過簡單移項，便得

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

□

逆微分的基本原理，以及第一導數測試，都是從均值定理發展的一些應用。

定理. *設f在閉合區間$I := [a, b]$上連續，且可微於開放區間(a, b)，且$f'(x) = 0$對所有$x \in (a, b)$，則f為I上的常函數。*

證明. 利用均值定理，存在至少一個$c \in (a, b)$使得$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) = 0$，則$f(a) = f(b)$；並對於所有$x \in (a, b)$，均有$c \in (x, a)$使得$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) = 0$。則$f(x) = f(a)$對所有$x \in [a, b]$成立。 □

衍理. *設f, g在閉合區間$I := [a, b]$上連續，且均可微於開放區間(a, b)，且$f'(x) = g'(x)$對所有$x \in (a, b)$，則$f = g + C$，其中C為常數。*

定義 4 (遞升函數). *設f為連續函數，若對於所有$x_1 < x_2$均有$f(x_1) \leq f(x_2)$，則稱f為遞升函數。*

定義 5 (遞降函數). *設f為連續函數，若對於所有$x_1 < x_2$均有$f(x_1) \geq f(x_2)$，則稱f為遞降函數。*

定理. *設$f : I \to \mathbb{R}$為可微函數，則：*

1. *f為遞升函數當且僅當所有$x \in I$均有$f'(x) \geq 0$；*
2. *f為遞降函數當且僅當所有$x \in I$均有$f'(x) \leq 0$。*

證明. 證明1：設$f'(x) \geq 0$。若$x_1 < x_2$，則根據均值定理存在$c \in (x_1, x_2)$使得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0$$

相對地，若f為遞升函數，則

$$f'(x) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

證明2：與證明1相似，留做習題。 □

定理 (第一導數測試). 設f為$I := [a,b]$上的連續函數，並設$c \in (a,b)$。假定f在(a,c)及(b,c)上可微，則：

1. 若存在c的δ-鄰域$(c-\delta, c+\delta) \subseteq I$使得$\begin{cases} f'(x) \geq 0, & c-\delta < x < c; \\ f'(x) \leq 0, & c < x < c+\delta \end{cases}$，則$c$為$f$在$I$上的相對極大值；

2. 若存在c的δ-鄰域$(c-\delta, c+\delta) \cap I \subseteq I$使得$\begin{cases} f'(x) \leq 0, & c-\delta < x < c; \\ f'(x) \geq 0, & c < x < c+\delta \end{cases}$，則$c$為$f$在$I$上的相對極小值。

證明. 對於$c-\delta < x < c$時$f'(x) \geq 0$，則根據均值定理，存在$c_x \in (x,c)$使得

$$f(c) - f(x) = f'(c_x)(c-x) \geq 0$$

則$f(c) \geq f(x)$；同理，對於$c < x < c+\delta$時$f'(x) \leq 0$，則根據均值定理，存在$c_x \in (c,x)$使得

$$f(x) - f(c) = f'(c_x)(x-c) \leq 0$$

則$f(c) \geq f(x)$。因此，對於$x \in [a,b]$，$f(c) \geq f(x)$，則$f(c)$為相對極大值。

2的證明與1相似，留做習題。 □

洛必達法則

洛必達法則主要用來處理不能正常求得的極限，舉例如f,g均爲連續函數，而$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$的狀況，我們不能直接求得極限的值，因：若定義$f(x) = \alpha x$及$g(x) = x$，$\alpha \in \mathbb{R}$為任意值，則

$$\frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha x}{x} = \alpha$$

但洛必達定理通過求導的方法得到了意想不到的結果。

從最直覺的判斷，我們可以考慮切綫：因爲$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$及$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$，因此根據f,g的連續性，$f(0) = 0$及$g(0) = 0$，對於足夠小的$\delta > 0$，$x \in (-\delta, \delta)$，

$$\begin{cases} f(x) \approx f'(0)x \\ g(x) \approx g'(0)x \end{cases}$$

因此可想像

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(0)x}{g'(0)x} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

而最基礎的推導也是基於導數定義：

定理. 設f, g均爲$[a, b]$上的函數使得$f(a) = g(a) = 0$，並設$g(x) \neq 0$對於$x \in (a, b)$。若f, g在a點可微且$g'(a) \neq 0$，則

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

證明.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \\ &= \lim_{x \to a^+} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} \\ &= \frac{f'(a)}{g'(a)} \end{aligned}$$

□

小記. 需注意的是，以上定理只適用於函數在a有導數，若$a = \pm\infty$，則需要更多手段。

定理 (柯西均值定理/普適均值定理)**.** 設f, g為$[a, b]$上的連續函數，並在(a, b)上可微，且$g'(x) \neq 0$對所有$x \in (a, b)$。則存在$c \in (a, b)$使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

證明. 設

$$h(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

可見h在閉合區間$[a, b]$上連續，且可微於開放區間(a, b)，而且$h(b) = h(a) = 0$。則可利用羅爾定理引存在$c \in (a, b)$使得

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c)$$

通過簡單移項，便得

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

□

定理 (洛必達定理I)**.** 設$-\infty \leq a < b \leq \infty$並設$f, g$於$(a, b)$可微使得所有$x \in (a, b)$均使得$g'(x) \neq 0$。假定

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 0 = \lim_{x \to a^+} g(x)$$

1. 若$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L\in\mathbb{R}$，則$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$；

2. 若$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L\in\{-\infty,\infty\}$，則$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$。

證明. 設$a<\alpha<\beta<b$，根據羅爾定理$g(\alpha)\neq g(\beta)$（爲何？），並根據柯西均值定理，存在$u\in(\alpha,\beta)$使得

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}=\frac{f'(u)}{g'(u)}$$

其中$u\in(\alpha,\beta)$。

情況1：$L\in\mathbb{R}$，$\varepsilon>0$，存在$c\in(a,b)$使得

$$L+\varepsilon<\frac{f'(u)}{g'(u)}<L+\varepsilon \qquad u\in(a,c)$$

$$L+\varepsilon<\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}<L+\varepsilon \qquad a<\alpha<\beta\leq c$$

取$\alpha\to a^+$，可得

$$L+\varepsilon\leq\frac{f(\beta)}{g(\beta)}\leq L+\varepsilon \qquad \beta\in(a,c]$$

因$\varepsilon>0$為任意值，1證畢。

情況2.1：$L=\infty$，$M>0$，存在$c\in(a,b)$使得

$$\frac{f'(u)}{g'(u)}>M \qquad u\in(a,c)$$

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}>M \qquad a<\alpha<\beta\leq c$$

取$\alpha\to a^+$，可得

$$\frac{f(\beta)}{g(\beta)}\geq M \qquad \beta\in(a,c)$$

因$M>0$為任意值，2.1證畢。

若$L=-\infty$，證明與2.1類似。 □

定理 (洛必達定理II). 設$-\infty\leq a<b\leq\infty$並設$f,g$於$(a,b)$可微使得所有$x\in(a,b)$均使得$g'(x)\neq 0$。假定

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty=\lim_{x\to a^+}g(x)$$

1. 若$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L\in\mathbb{R}$，則$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$；

2. 若$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L\in\{-\infty,\infty\}$，則$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$。

泰勒定理

回想切綫的出現，可見對於任意可微函數f都存在一種估算

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

而若需要更精確的估算，考慮若f存在二階導數，則

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

同理，若f存在三階導數、四階導數，可對f進行更精確的估算。如此拓展下去，可得以下定義：

定義 6 (泰勒多項式)**.** 設$n \in \mathbb{N}$及$I := [a, b]$，並設$f : I \to \mathbb{R}$使得f及其導數$f', f'', \ldots, f^{(n)}$均為(a, b)上的連續函數，並於(a, b)上存在$(n+1)$-階導數$f^{(n+1)}$，則對於$x_0 \in I$，設$V(x_0)$為x_0的鄰域，可對$x \in V(x_0)$進行以下估算

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \end{aligned}$$

定理 (泰勒多項式定理)**.** 設$n \in \mathbb{N}$及$I := [a, b]$，並設$f : I \to \mathbb{R}$使得f及其導數$f', f'', \ldots, f^{(n)}$均為(a, b)上的連續函數，並於(a, b)上存在$(n+1)$-階導數$f^{(n+1)}$，則對於定點$x_0 \in I$，及任意$x \in I$，存在c位於x與x_0之間使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

向量函數

偏導數與全導數

方向導數

切面與法綫

二維極值與鞍點