

## 矩陣的定義

**定義 1** (矩陣). 矩陣是代數學中一種特殊的表達形式, 用以同時表達多位元的表格:

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

若元素  $a_{ij} \in S$  則稱為  $S$  上的  $m \times n$  矩陣, 記  $\mathbf{A} \in \mathbb{M}^{m \times n}(S) = \mathbb{M}_S^{m \times n}$ 。

示例. 以下為矩陣的例子:

1.  $1 =: [1] \in \mathbb{M}^{1 \times 1}(\mathbb{R})$ 。

2.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}^{2 \times 2}(\mathbb{R})$ 。

3.  $\begin{bmatrix} 1+2i & 3-4i & i \\ -i & 1 & 2-i \end{bmatrix} \in \mathbb{M}^{2 \times 3}(\mathbb{C})$ 。

**定義 2** (矩陣的加法與乘法定義). 給定  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{M}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{M}^{n \times t}$ , 則

1. 加法:  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})$ 。

2. 數乘:  $k\mathbf{A} = (ka_{ij})$ 。

3. 矩陣乘法:  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj})$ 。

示例. 設  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ , 則

1.  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1+2 & 1+1 & 0+0 \\ 1+1 & 0+2 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 。

2.  $4\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 。

3.  $\mathbf{A} \times \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 1 \times 2 + 0 \times 3 & 1 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 3 \\ 1 \times 2 + 0 \times 2 + 1 \times 3 & 1 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ 。

**定義 3** (特殊矩陣). 下列為一些矩陣寫法的共識:

- 零矩陣:  $\mathbf{0}_{m \times n} = \mathbf{O}_{m \times n} = (0)_{m \times n}$ .
- 一矩陣:  $\mathbf{1}_{m \times n} = (1)_{m \times n}$ .
- 單位矩陣:  $\mathbf{I}_{m \times n} = (\delta_{ij})_{m \times n}$ , 其中  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ .
- 向量:

– 行向量:  $\mathbf{x}^T = \vec{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{M}^{1 \times n}$ .

– 列向量:  $\mathbf{y} = \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{M}^{m \times 1}$

**命題** (加法與數乘定則). 設  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{M}^{m \times n}$ , 則

1. 加法結合律:  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ .
2. 加法交換律:  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ .
3.  $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$ .
4.  $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ .
5.  $a(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a\mathbf{A} + \mathbf{B}$ .
6.  $(a + b)\mathbf{A} = a\mathbf{A} + b\mathbf{A}$ .
7.  $(ab)\mathbf{A} = a(b\mathbf{A})$

**命題** (矩陣乘法定則). 設  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  為矩陣, 則

1. 乘法結合律:  $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ .
2. 分配律 I:  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ .
3. 分配律 II:  $\mathbf{D}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{DA} + \mathbf{DB}$ .
4.  $\alpha\mathbf{AB} = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$ .

5.  $\mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{I}\mathbf{A} = \mathbf{A}$ 。

定義 4 (矩陣的轉置). 設  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ , 則定義  $\mathbf{A}$  的轉置為

$$\mathbf{A}^T = (a_{ji})_{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

示例. 設  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ , 則  $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ 。

定義 5 (矩陣的跡). 設  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ , 則定義  $\mathbf{A}$  的跡為

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_k^{\min(m,n)} a_{kk} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{ll}$$

其中  $l = \min(m, n)$ 。

命題.  $\text{tr}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A}^T)$ 。

證明. 留做習題。 □

定義 6 (綫性組合). 設  $c_1, c_2, \dots, c_\ell$  為常數,  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_\ell \in \mathbb{M}_{m \times n}$ , 則稱

$$\sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{A}_k = c_1 \mathbf{A}_1 + c_2 \mathbf{A}_2 + \cdots + c_\ell \mathbf{A}_\ell$$

為綫性組合。

示例. 設  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 則可寫

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3e_1 + 2e_2 + e_3$$

示例. 設  $E_n \in \mathbb{M}^{3 \times 3}$ , 對於  $1 \leq n \leq 9$ ,  $E_n = (e_{ij})_{3 \times 3}$  而且

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & n = 3(i-1) + j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

, 則可寫

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^9 k E_k$$

小記. 以上例子便是矩陣與綫性方程組的關係。

命題. 設  $c_1, c_2, \dots, c_\ell$  為常數,  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_\ell \in \mathbb{M}_{m \times n}$ , 則

- $\text{tr}\left(\sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{A}_k\right) = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \text{tr}(\mathbf{A}_k);$
- $\left(\sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{A}_k\right)^T = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{A}_k^T;$
- $\text{tr}\left(\sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{A}_k^T\right) = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \text{tr}(\mathbf{A}_k).$

證明. 留作習題。

□

## 綫性方程組

綫性方程組主要用以表達兩條或多條同時成立的綫性方程，最具代表性的可數初中的聯立方程：

$$\begin{cases} ax + by = k_1 \\ cx + dy = k_2 \end{cases}$$

當然，綫性方程組的含義不僅是二元一次方程，更可以拓展到多元一次(綫性)方程：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

示例. 以下是綫性方程組的例子：

$$1. \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 4z = 0 \\ -2x - 4y = 0 \end{cases}$$

## 解綫性方程組

欲求綫性方程組的解，我們可使代入法或消元法，其中消元法比代入法的效率更高，因此普遍數學家都會使用消元法解方程。同時此辦法也衍生出矩陣的各項命題。

示例. 求解綫性方程組  $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 6x - 2y = 9 \end{cases}$

1. 運用代入法求解：從  $2x + 3y = 8$  可得  $x = \frac{8 - 3y}{2}$ ，代入  $6x - 2y = 9$  得

$$6\left(\frac{8 - 3y}{2}\right) - 2y = 9$$

$$3(8 - 3y) - 2y = 9$$

$$24 - 9y - 2y = 9$$

$$11y = 15$$

$$y = \frac{15}{11}$$

再代  $y = \frac{15}{11}$  入  $x = \frac{8 - 3y}{2}$  得

$$\begin{aligned} x &= \frac{8 - 3\left(\frac{15}{11}\right)}{2} \\ &= \frac{43}{22} \end{aligned}$$

因此綫性方程組的解為  $\left(\frac{43}{22}, \frac{15}{11}\right)$ 。

2. 運用消元法求解：從  $2x + 3y = 8$  三倍後可得  $6x + 9y = 24$ ，則上式減去下式可得

$$\begin{array}{rcl} (1) \times 3 : & & 6x + 9y = 24 \\ -) (2) : & & 6x - 2y = 9 \\ \hline (1) \times 3 - (2) : & & 11y = 15 \\ & & y = \frac{15}{11} \\ & & 6x - 2\left(\frac{15}{11}\right) = 9 \\ & & x = \frac{43}{22} \end{array}$$

示例. 求解綫性方程組 
$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

1. 運用代入法求解：先從  $3x - y + 3z = 0$  得出  $y = 3x + 3z$ ，代入其餘兩式可得

$$\begin{cases} 2x + 3(3x + 3z) + 4z = 1 \\ x + (3x + 3z) + z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 11x + 13z = 1 \\ 4x + 4z = 1 \end{cases}$$

再從  $4x + 4z = 1$  得  $z = \frac{1-4x}{4}$ , 代入  $11x + 13z = 1$  得

$$11x + 13\left(\frac{1-4x}{4}\right) = 1$$

$$44x + 13 - 52x = 4$$

$$-8x = -9$$

$$x = \frac{9}{8}$$

由此可得：

$$z = \frac{1-4\left(\frac{9}{8}\right)}{4}$$

$$= -\frac{7}{8}$$

$$y = 3\left(\frac{11}{4}\right) + 3\left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{4}$$

2. 運用消元法求解：

|                        |                    |
|------------------------|--------------------|
| (1) :                  | $2x + 3y + 4z = 1$ |
| (2) :                  | $3x - y + 3z = 0$  |
| (3) :                  | $x + y + z = 1$    |
|                        |                    |
| (1) - (3) $\times$ 2 : | $y + 2z = -1$      |
| (2) - (3) $\times$ 3 : | $-4y = -3$         |
|                        |                    |
|                        | $y = \frac{3}{4}$  |
|                        | $z = -\frac{7}{8}$ |
|                        | $x = \frac{9}{8}$  |

我們亦容許綫性方程組**沒有解或有無限解**。若要理解沒有解或有無限多個解，可參考直綫的特性：

**定義 7** (平行綫). 設  $L_1$  和  $L_2$  為兩條直綫，並分別以  $m_1$  和  $m_2$  代表其斜率。若  $L_1 // L_2$ ，則  $m_1 = m_2$ 。

**定理** (平行綫的交點數). 設  $L_1$  和  $L_2$  為一對（歐幾里得幾何）平行綫，則  $L_1$  和  $L_2$  的交點數只能為 0 或  $\infty$ 。

證明. 設 $m$ 為 $L_1$ 及 $L_2$ 的斜率, 及 $c_1$ 和 $c_2$ 分別為 $L_1$ 及 $L_2$ 的縱軸截距, 則

$$L_1 : y = mx + c_1, \quad L_2 : y = mx + c_2$$

若 $c_1 = c_2$ , 則 $\forall x$ , 若  $(x, y_1) \in L_1, (x, y_2) \in L_2$ ,

$$y_1 = mx + c_1 = mx + c_2 = y_2$$

由於對任意 $x$ 均成立, 此為無限多交點。

若 $c_1 \neq c_2 \implies c_1 - c_2 \neq 0$ , 則 $\forall x$ , 若  $(x, y_1) \in L_1, (x, y_2) \in L_2$ ,

$$y_2 - y_1 = (mx + c_1) - (mx + c_2) = c_1 - c_2 \neq 0 \implies y_1 \neq y_2$$

因此沒有交點。 □

衍理. 任何一對歐幾里得二維直線可有0,1或 $\infty$ 交點。

因此, 綫性方程組可有0,1或無限多解。同時, 綫性方程組若有兩個解, 則會有無限多解。

**定理.** 設 $A \in \mathbb{M}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{M}^{m \times 1}$ 使得 $(S) : [A|\mathbf{b}]$ 為一綫性方程組, 並設 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{M}^{m \times 1}$ 為相異解, 則

$$I := \{t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} : t \in \mathbb{R}\}$$

為方程組的解集。

證明. 對於任意 $1 \leq k \leq m$ ,

$$\begin{aligned} & a_{k1}[tx_1 + (1-t)y_1] + \cdots + a_{kn}[tx_n + (1-t)y_n] \\ &= t[a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n] + (1-t)[a_{k1}y_1 + \cdots + a_{kn}y_n] \\ &= tb_k + (1-t)b_k \\ &= b_k \end{aligned}$$

□

我們稱擁有無限多解的方程組的解集為**通解**。

**示例.** 以下為綫性方程組無限多解的例子:

1. 考慮  $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -3x - y = -2 \end{cases}$ , 由於任何符合 $3x + y = 2$ 的點均符合 $-3x - y = -2$ ,  
因此此方程組有無限多解。解集為

$$\{(t, 2 - 3t) : t \in \mathbb{R}\}$$



2. 考慮 
$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 0 \\ x + y + 7z = 0 \\ 2x - 5z = 0 \end{cases}$$
 , 由於上式減中式等於下式, 因此此方程組無法解下去, 有無限多解。解集為

$$\{(5t, -19t, 2t) : t \in \mathbb{R}\}$$

以下為綫性方程組沒有解的例子:

1. 考慮 
$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -3x - y = 0 \end{cases}$$
 , 由於任何符合  $3x + y = 2$  的點均不符合  $-3x - y = 0$ , 因此此方程組沒有解。解集為

$$\emptyset$$

## 綫性方程組的可解性I

現記綫性方程組的通常式為

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

**定理** (綫性方程組的可解性I). 對於  $m$  行  $n$  列綫性方程組  $S$ , 若  $m \leq n$ , 則  $S$  有解。

證明. 當  $m=1$  時,  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$ , 則存在綫性函數  $f$  使得  $x_1 = f(x_2, x_3, \dots, x_n)$  令  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$  成立。

當  $1 < m < n$  時, 已知有函數  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_{m-1}$  使得

$$x_1 = f_1(x_{m+1}, \dots, x_n)$$

$$x_2 = f_2(x_{m+1}, \dots, x_n)$$

$$\vdots = \vdots$$

$$x_m = f_m(x_{m+1}, \dots, x_n)$$

$$\text{令} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases} \text{成立。}$$

則  $m+1 \leq n$  時，存在綫性函數  $f_{m+1}$  使得

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= f_{m+1}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, x_{m+2}, \dots, x_n) \\ &= f_{m+1}(f_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, f_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+2}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

則存在綫性函數  $F$  和  $g_{m+1}$  使得

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= F(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n) \\ &= g_{m+1}(x_{m+2}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

因此可見存在綫性函數  $g_1, g_2, \dots, g_m$  (若  $m+2 > n$  視所有  $g_k$  為常函數)

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(g_{m+1}(x_{m+2}, \dots, x_n), x_{m+2}, \dots, x_n) \\ &= g_1(x_{m+2}, \dots, x_n) \\ x_2 &= f_2(g_{m+1}(x_{m+2}, \dots, x_n), x_{m+2}, \dots, x_n) \\ &= g_2(x_{m+2}, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ x_m &= f_m(g_{m+1}(x_{m+2}, \dots, x_n), x_{m+2}, \dots, x_n) \\ &= g_m(x_{m+2}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

此證畢方程解的存在性。 □

目前只有存在性能證明，因為：

1. 未能確定是否有多於一個解；
2. 當  $m > n$  時，未知是否有解。

下一節會解決上述問題，判斷解的唯一性。

## 增廣矩陣

爲了使方程組的觀察更方便及易於處理，在此階段引入**增廣矩陣**的概念。

考慮以下綫性方程組：

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

考慮  $\mathbf{A} := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}^{m \times n}$  為係數矩陣及  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$  為水平向量，則

可將(S)作以下簡化表達：

$$(S) : [\mathbf{A} | \mathbf{b}] = \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

以上 $[\mathbf{A} | \mathbf{b}]$ 稱為**增廣矩陣**。增廣矩陣的概念在於簡化方程組的表達，因此方程組的運作均可在擴增矩陣中實現。如此引入以下概念：

**定義 8** (列階梯形矩陣). 設  $A \in \mathbb{M}^{m \times n}$ ，若  $A$  符合以下條件，則稱  $A$  為**列階梯形矩陣**：

- 若某列有非零元素，則必在所有全零列之上；
- 某列最左邊的非零元素稱為**首項係數**。某列的首項係數必定比上一列的首項係數更靠右。

**示例.** 列階梯形矩陣的例子：

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 2 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{3n} & b_3 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

**定義 9** (還原列梯矩陣). 設  $A \in \mathbb{M}^{m \times n}$ ，若  $A$  符合以下條件，則稱  $A$  為**還原列梯矩陣**：

- $A$  為列階梯形矩陣，並且；
- $A$  的所有首項係數均為 1；
- $A$  中所有首項係數的對應行僅有一個非零數字。

示例. 還原列梯矩陣的例子：

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & a_{1(n-1)} & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

已知綫性方程組能通過消元法求解，由此可見還原列梯矩陣正是消元法所形成的結果。我們給出以下定義：

**定義 10** (初等行(列)變換). 下列三種對矩陣的變換稱為矩陣的**初等行(列)變換**：

1. 把第  $i$  行(列) 和第  $j$  行(列) 互換位置，記為  $r_i \leftrightarrow r_j$  ( $c_i \leftrightarrow c_j$ ) ；
2. 用非零數  $\alpha$  乘以第  $i$  行(列)，記為  $\alpha r_i$  ( $\alpha c_i$ ) ；
3. 把第  $i$  行(列) 的  $\alpha$  倍加到第  $j$  行(列)，記為  $\alpha r_i + r_j$  ( $\alpha c_i + c_j$ )。

**定義 11.** 設  $A, A' \in \mathbb{M}^{m \times n}$ 。

我們稱  $A$  和  $A'$  是等價的若  $A$  可通過列運算達成  $A'$ ，記  $A \sim A'$ ；若  $A'$  為還原列階矩陣而且  $A \sim A'$ ，則稱  $A'$  為  $A$  的還原式，記  $A' = \text{RREF}(A)$ 。

示例. 設  $A = \left[ \begin{array}{cccc|c} 6 & 9 & 3 & 3 & 9 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 7 & 3 & 2 & 6 & 6 \\ 8 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 9 & 2 \\ 7 & 5 & 6 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$ ，求  $\text{RREF}(A)$ 。

先將第一行的首項係數求出，由於第二行的首項係數為 1，因此我們可以通過簡單的行變換造出適當的等價矩陣。

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{ccccc|c} 6 & 9 & 3 & 3 & 9 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 7 & 3 & 2 & 6 & 6 \\ 8 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 9 & 2 \\ 7 & 5 & 6 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \\
 \begin{array}{c} \frac{1}{3}r_1 \\ r_1 \leftrightarrow r_2 \\ \sim \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & 4 & 0 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 2 & 6 & 6 \\ 8 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 9 & 2 \\ 7 & 5 & 6 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \\
 \begin{array}{c} -2r_1 + r_2 \\ -8r_1 + r_4 \\ -7r_1 + r_6 \\ \sim \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & 4 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & -7 & -7 & 1 & 1 & -17 \\ 0 & 7 & 3 & 2 & 6 & 6 \\ 0 & -39 & -31 & 2 & -5 & -68 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 9 & 2 \\ 0 & -30 & -22 & 0 & -7 & -61 \end{array} \right]
 \end{array}$$

隨後將第二及其餘行的首項係數求出：

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} r_3 + r_2 \\ 20r_5 + r_4 \\ 15r_5 + r_6 \\ \sim \end{array}
 \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & 4 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 7 & -11 \\ 0 & 7 & 3 & 2 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 109 & 62 & 175 & -28 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 83 & 45 & 128 & -31 \end{array} \right] \\
 \begin{array}{c} -5r_4 + r_1 \\ -7r_4 + r_3 \\ -2r_4 + r_5 \\ \sim \end{array}
 \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -541 & -310 & -874 & 149 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 7 & -11 \\ 0 & 0 & -760 & -432 & -1219 & 174 \\ 0 & 1 & 109 & 62 & 175 & -28 \\ 0 & 0 & -211 & -121 & -341 & 58 \\ 0 & 0 & 83 & 45 & 128 & -31 \end{array} \right] \\
 \begin{array}{c} 135r_4 + r_1 \\ -27r_4 + r_2 \end{array}
 \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -541 & -310 & -874 & 149 \\ 0 & 1 & 109 & 62 & 175 & -28 \\ 0 & 0 & -760 & -432 & -1219 & 174 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -211 & -121 & -341 & 58 \\ 0 & 0 & 83 & 45 & 128 & -31 \end{array} \right] \\
 \begin{array}{c} -r_2 \\ r_2 \leftrightarrow r_4 \\ \sim \end{array}
 \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -541 & -310 & -874 & 149 \\ 0 & 1 & 109 & 62 & 175 & -28 \\ 0 & 0 & -760 & -432 & -1219 & 174 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -211 & -121 & -341 & 58 \\ 0 & 0 & 83 & 45 & 128 & -31 \end{array} \right] \\
 \begin{array}{c} 190r_4 + r_2 \\ 53r_4 + r_5 \\ -20r_4 + r_6 \\ \sim \end{array}
 \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -715 & -1819 & 1634 \\ 0 & 1 & 1 & 143 & 364 & -325 \\ 0 & 0 & 0 & -1002 & -2549 & 2264 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -280 & -712 & 641 \\ 0 & 0 & 3 & 105 & 268 & -251 \end{array} \right] \\
 \begin{array}{c} r_5 + r_1 \\ -r_5 + r_2 \\ -4r_5 + r_4 \\ -3r_5 + r_6 \\ \sim \dots \end{array}
 \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{148}{551} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{717}{551} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{895}{551} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3975}{551} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2058}{551} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6817}{551} \end{array} \right]
 \end{array}$$

詳細步驟參考 RREF calculator: <https://www.emathhelp.net/en/calculators/linear-algebra/reduced-row-echelon-form-rref-calculator/>

**小記.** 上例可見最後一行的左方為零行，但右方為非零數字，得到 $0 = 1$ 的結論。此情形我們稱方程組無解。

重新考慮綫性方程組的樣式，因應矩陣乘法的特性，我們可以將 $S = [\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ 寫作

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

若存在 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{M}^{n \times 1}$ 使得 $\mathbf{Ax}_0 = \mathbf{b}$ 成立，則稱 $\mathbf{x}_0$ 為 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的一個解。

**定理.** 綫性方程組 $S = [\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ 有解當且僅當 $\text{RREF}(S) = [\mathbf{A}'|\mathbf{b}']$ 有解；並且 $S$ 與 $\text{RREF}(S)$ 同解。

**證明.** 由於 $S$ 與 $\text{RREF}(S)$ 等價，故存在若干行變換及對應的變換矩陣 $\mathbf{P}$ 使得

$$\mathbf{Ax}_0 = \mathbf{b} \iff \mathbf{PAx}_0 = \mathbf{Pb} \iff \mathbf{A}'\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}'$$

□

故本節以下列定理總結：

**定理** (綫性方程組的可解性II). 對於 $m$ 行 $n$ 列綫性方程組 $S$ ，若 $\text{RREF}(S)$ 中係數矩陣的非零行數 $\leq n$ 同時大於或等於水平向量的非零行數，則 $S$ 有解。

## 行列式

## 逆矩陣

設  $\mathbf{A} \in \mathbb{M}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{M}^{n \times 1}$ , 設

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

若  $\text{RREF}(\mathbf{A}) = \mathbf{I}$ , 則存在  $\mathbf{B} \in \mathbb{M}^{m \times n}$  令

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}] \sim [\mathbf{I}|\mathbf{B}]$$

對符合條件的矩陣  $\mathbf{B}$ , 我們稱其為  $\mathbf{A}$  的逆矩陣, 記  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ 。

## 矩陣的幾何含義

## 博弈論簡介