References: Introduction to Real Analysis (Bartle & Sherbert), Thomas Calculus 12th Edition

單元導數定義

由牛頓發揚光大的流數法，今時今日變成了以極限定義的導數。

定義 1 (導數定義)**.** *若f在c可導，則其導數$f'(c)$為*

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

定義 2 (現代導數嚴謹定義)**.** *L為f在c的導數當：對於任意$\epsilon > 0$,若存在$\delta(\epsilon) > 0$使得對於$0 < |x - c| < \delta(\epsilon)$,*

$$|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L| < \epsilon$$

則寫$f'(c) = L$。

定理. *若$f : I \to \mathbb{R}$在$c \in I$可微，則f在$c \in I$連續。*

證明. 導數存在，則

$$\begin{aligned}\lim_{x \to c}(f(x) - f(c)) &= \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \lim_{x \to c}(x - c) \\ &= f'(c) \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

因此$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$使得$f$在$c \in I$連續。 □

導數的目的在於處理函數的變化：從算式可見，導數取自f的變化除以變量x的變化，即可理解爲變化的比例，等於變化比率。簡而言之，導數為函數的斜率。

定理 (基本導數定則)**.** *1. 常函數的導數：*

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

2. 冪函數的導數：

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

3. 自然指數的導數：

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

4. 自然對數的導數：
$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$$

5. 三角函數的導數：

   (a)
   $$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

   (b)
   $$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

   (c)
   $$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

證明. 留做習題。 □

定理 (導數的性質). 導數擁有以下性質：

1. 綫性性：對於可微函數f, g，常數α, β，$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$。

2. 乘積法則：對於連續函數f, g，$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$。

3. 除法定則：對於連續函數f, g，$(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$。

證明.

1. 綫性性：從f, g的可微性，可得對任意$\varepsilon > 0$，均有$\delta_f, \delta_g > 0$使得對於所有c，若x符合$0 < |x - c| < \min\{\delta_f, \delta_g\}$時，
$$|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c)| < \frac{\varepsilon}{2\alpha}; |\frac{g(x) - g(c)}{x - c} - g'(c)| < \frac{\varepsilon}{2\beta}$$
則
$$\begin{aligned}
&|\frac{(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(c) + \beta g(c))}{x - c} - (\alpha f'(c) + \beta g'(c))| \\
&< \alpha|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c)| + \beta|\frac{g(x) - g(c)}{x - c} - g'(c)| \\
&< \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{2\alpha} + \beta \cdot \frac{\varepsilon}{2\beta} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

2. 乘積法則：從f,g的可微性，可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}\frac{f(x)g(x)-f(c)g(c)}{x-c} &= \lim_{x\to c}\frac{f(x)g(x)-f(x)g(c)+f(x)g(c)-f(c)g(c)}{x-c}\\ &= \lim_{x\to c}(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\cdot g(c)+f(x)\cdot\frac{g(x)-g(c)}{x-c})\\ &= f'(c)g(c)+f(c)g'(c)\end{aligned}$$

3. 除法定則：留作習題

$\square$

衍理. 導數擁有以下性質：

1. 綫性性：對於一系列可微函數$\{f_k\}_{k=1}^n$，及一系列常數$\{\alpha_k\}_{k=1}^n$，$(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_k)' = \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k f_k')$。

2. 乘積法則：對於一系列可微函數$\{f_k\}_{k=1}^n$，$(\prod_{k=1}^{n} f_k)' = \sum_{k=1}^{n}(f_1 f_2\cdots f_k'\cdots f_{n-1}f_n)$。

定理 (鏈鎖律)**.** 對於複合函數$h := (g\circ f)$，

$$h' = (g'\circ f)\cdot(f')$$

證明. 留做習題 $\square$

定理 (逆函數)**.** 對於逆函數$g := f^{-1}$，

$$g' = \frac{1}{f'\circ g}$$

證明. 設$g(x)=f^{-1}(x)$，則$(f\circ g)(x)=x$。利用鏈鎖律，可得

$$\begin{aligned}(f'\circ g)(x)\cdot g'(x) &= 1\\ g'(x) &= \frac{1}{(f'\circ g)(x)}\end{aligned}$$

$\square$

導數可視爲函數於任意點的斜率，換言之，利用直綫方程的點斜式，可得出函數f於任意點$(x_0,f(x_0))$上的切綫方程為

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

定義 3 (高維導數). 若f可微，則f'為f的第一導數；若f'可微，則f''為f的第二導數，並記

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$$

如此類推，我們稱$f^{(n)}(x)$為f的第n導數，記

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}(f(x))$$

均值定理

均值定理為數學分析其中一個重要工具，亦是導數的重要應用結果。其含義在於將導數與函數值作連接，將切綫普及化。

定理 (極值定理). 設$c \in I$使得$f : I \to \mathbb{R}$有極值於c。若f可微，則$f'(c) = 0$。

證明. 先證明$f(c)$為極大值的情況：若$f'(c) > 0$，則存在c的鄰域$V \subseteq I$使得對於$x \in V$，

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

因此，若$x \in V$同時$x > c$，則

$$f(x) - f(c) = (x - c) \cdot \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

此則違反$f(c)$為極大值的假設，$f'(c) \not> 0$。

同理，證明$f'(c) \not< 0$可運用相似做法，因此$f'(c) = 0$。 □

衍理. 設$f : I \to \mathbb{R}$為連續函數，並設f在$c \in I$有極值。則$f'(c)$不存在或$f'(c) = 0$。

小記. $f(x) := |x|$可作衍理的例證：f在$0 \in I := [-1, 1]$上存在極小值，但$f'(0)$並不存在。

定理 (羅爾定理). 設f在閉合區間$[a, b]$上連續，且可微於開放區間(a, b)，使得$f(a) = f(b) = 0$。則存在至少一個$c \in (a, b)$使得$f'(c) = 0$。

定理 (基本均值定理). 設f在閉合區間$[a, b]$上連續，且可微於開放區間(a, b)，則存在至少一個$c \in (a, b)$使得

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

證明. 設

$$\varphi(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

可見φ在閉合區間$[a,b]$上連續，且可微於開放區間(a,b)，而且$\varphi(b)=\varphi(a)=0$。則可利用羅爾定理引存在$c\in(a,b)$使得

$$0=\varphi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

通過簡單移項，便得

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

□

逆微分的基本原理，以及第一導數測試，都是從均值定理發展的一些應用。

定理. *設f在閉合區間$I:=[a,b]$上連續，且可微於開放區間(a,b)，且$f'(x)=0$對所有$x\in(a,b)$，則f為I上的常函數。*

證明. 利用均值定理，存在至少一個$c\in(a,b)$使得$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)=0$，則$f(a)=f(b)$；並對於所有$x\in(a,b)$，均有$c\in(x,a)$使得$f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)=0$。則$f(x)=f(a)$對所有$x\in[a,b]$成立。 □

衍理. *設f,g在閉合區間$I:=[a,b]$上連續，且均可微於開放區間(a,b)，且$f'(x)=g'(x)$對所有$x\in(a,b)$，則$f=g+C$，其中C為常數。*

定義 4 (遞升函數)**.** *設f為連續函數，若對於所有$x_1<x_2$均有$f(x_1)\leq f(x_2)$，則稱f為遞升函數。*

定義 5 (遞降函數)**.** *設f為連續函數，若對於所有$x_1<x_2$均有$f(x_1)\geq f(x_2)$，則稱f為遞降函數。*

定理. *設$f:I\to\mathbb{R}$為可微函數，則：*

1. *f為遞升函數當且僅當所有$x\in I$均有$f'(x)\geq 0$；*
2. *f為遞降函數當且僅當所有$x\in I$均有$f'(x)\leq 0$。*

證明. 證明1：設$f'(x)\geq 0$。若$x_1<x_2$，則根據均值定理存在$c\in(x_1,x_2)$使得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)\geq 0$$

相對地，若f為遞升函數，則

$$f'(x)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0$$

證明2：與證明1相似，留做習題。 □

定理 (第一導數測試). 設f為$I := [a,b]$上的連續函數，並設$c \in (a,b)$。假定f在(a,c)及(b,c)上可微，則：

1. 若存在c的δ-鄰域$V_\delta(c) := (c-\delta, c+\delta) \subseteq I$使得$\begin{cases} f'(x) \geq 0, & c-\delta < x < c; \\ f'(x) \leq 0, & c < x < c+\delta \end{cases}$，
   則c為f在I上的相對極大值；

2. 若存在c的δ-鄰域$V_\delta(c) := (c-\delta, c+\delta) \subseteq I$使得$\begin{cases} f'(x) \leq 0, & c-\delta < x < c; \\ f'(x) \geq 0, & c < x < c+\delta \end{cases}$，
   則c為f在I上的相對極小值。

證明. 對於$c-\delta < x < c$時$f'(x) \geq 0$，則根據均值定理，存在$c_x \in (x,c)$使得

$$f(c) - f(x) = f'(c_x)(c-x) \geq 0$$

則$f(c) \geq f(x)$；同理，對於$c < x < c+\delta$時$f'(x) \leq 0$，則根據均值定理，存在$c_x \in (c,x)$使得

$$f(x) - f(c) = f'(c_x)(x-c) \leq 0$$

則$f(c) \geq f(x)$。因此，$f(c)$為相對極大值。

2的證明與1相似，留做習題。 □

洛必達法則

泰勒定理

向量函數

偏導數與全導數

方向導數

切面與法綫

二維極值與鞍點