

Contents

1	二項式定理	2
2	指數函數與對數函數	2
3	微積分	3
4	概率	5
5	分佈	6

1 二項式定理

1. (a) i. 展開 $(x + y + z)^2$ 。
 ii. 求 $(x + y + z)^4$ 的展開式中 x^3y , x^3z , xy^3 , y^3z , xz^3 , yz^3 的係數。
- (b) 若從一個裝有紅色杯子、藍色杯子及綠色杯子的箱子中隨機抽取一個杯子，則抽到紅色杯子、藍色杯子及綠色杯子的概率分別為 p, q 及 r 。若從中抽取4個杯子，每次抽取後均可把杯子放回箱子內，試以 p, q, r 表示
 - i. 抽到至少2個不同顏色的杯子的概率；
 - ii. 抽到剛好3個相同顏色的杯子的概率。
2. 假設 $(1 + x)^{\frac{1}{2}} = 1 + ax + bx^2 + cx^3 + \text{更高次冪的項}$ 。
 - (a) 藉考慮 $(1 + x) = [(1 + x)^{\frac{1}{2}}]^2$ ，求 a 及 b 的值。
 - (b) 按 x 的升冪展開 e^{-2x} 至 x^3 的項。
 - (c) 由此，按 x 的升冪展開 $\frac{(1 + x)^{\frac{1}{2}}}{e^{2x}}$ 至 x^3 的項。
3. 設 $(1 + ax)^8 = \sum_{k=0}^8 \lambda_k x^k$ 及 $(b + x)^9 = \sum_{k=0}^9 \mu_k x^k$ ，其中 a, b 為實常數。已知 $\lambda_2 : \mu_7 = 7 : 4$ 及 $\lambda_1 + \mu_8 + 6 = 0$ 。求 a 的值。

2 指數函數與對數函數

1. 按 x 的升冪展開 e^{e^x} 至 x^2 的項。
2. 設 $y = \frac{1 - e^{4x}}{1 + e^{8x}}$ 。
 - (a) 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$ 的值。
 - (b) 設 $(z^2 + 1)e^{3z} = e^{\alpha + \beta x}$ ，其中 α, β 為常數。
 - i. 試表 $\ln(z^2 + 1) + 3z$ 為 x 的綫性函數。
 - ii. 已知(b)(i)的函數圖像通過原點并且斜率為2。求 α 和 β 的值。
 - iii. 利用(b)(ii)所得的 α 和 β 的值，求 $\left. \frac{dy}{dz} \right|_{z=0}$ 。
3. 某研究員正在研究某城市的人口增長與電力消耗。已知該城市的人口 P 可以下式模擬

$$P = \frac{ke^{-\lambda t}}{t^2}, 0 < t < 6,$$

其中 k 和 λ 為常數， t 則為從研究開始算起所經歷的時間。

- (a) i. 試表 $\ln P + 2 \ln t$ 為 t 的綫性函數。
 ii. 已知(a)(i)的函數圖像的水平截距與垂直截距分別為 -1.15 及 2.3 , 求 k 和 λ 的值, 答案準確至最接近的整數。
 iii. 由此, 求該城市的人口的最少值, 準確至最接近的百位。
 (b) 該城市的年度電力消耗 E (兆焦耳每年) 可以下式模擬

$$\frac{dE}{dt} = hte^{ht} - 1.2e^{ht} + 4.214, t \geq 0,$$

其中 h 為非零常數, t 則為從研究開始算起所經歷的時間。已知當 $t = t_0$ 時, 該城市的人口與年度電力消耗同時達到最少值, 而 $t = 0$ 時, $E = 1$ 。

- i. 求 h 的值。
 ii. 藉考慮 $\frac{d}{dt}(te^{ht})$, 求 $\int te^{ht} dt$ 。
 iii. 由此, 求該城市在 $t = t_0$ 時的年度電力消耗, 準確至最接近的兆焦耳每年。
 iv. 某環保運動在 $t = t_0$ 後立即推行以減少年度電力消耗。新的年度電力消耗 F (兆焦耳每年) 可以下式模擬

$$F = \frac{6}{1 - 5e^{rt} + 3e^{2rt}} + 2, t \geq t_0.$$

- A. 若新的年度電力消耗在 $t = t_0$ 時與原本的年度電力消耗相同, 求 r 的值。
 B. 新的年度電力消耗會否在某個 t_0 以後的時間上升?

3 微積分

1. 考慮曲綫 $C_1: y = e^{2x} - e^4$ 及 $C_2: e^{x+3}e^{x+1}$ 。求 C_1 及 C_2 的相交點。
 2. 求以下積分:

(a) $\int_1^3 \frac{t+2}{t^2+4t+11} dt;$

(b) $\int_1^3 \frac{t^2+3t+9}{t^2+4t+11} dt。$

3. 一個大缸中的水的體積的變率可以表為

$$f(t) = \frac{500}{(t+2)^2 e^t},$$

其中 $t (\geq 0)$ 為以分鐘量度的時間。

- (a) 利用5個區間的梯形法則, 估算從 $t = 1$ 至 $t = 11$ 期間流進缸中的水的總量。

(b) 求 $\frac{d^2 f(x)}{dt^2}$ 。

(c) 判斷(a)題的估算為過高估算還是過低估算。

4. 某單位正方形標靶的四個頂點分別位於 $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ 。該標靶以曲綫 $y = \sqrt{x}$ 及 $y = x^3$ 劃分為三個區域，從左上而右下分別為II區、I區和III區。若飛鏢砸中I區、II區或III區，則分別可得10分、20分和30分。

(a) 求該三區的面積。

(b) 假設某小孩隨機扔出兩道飛鏢而且均命中標靶，求小孩獲得總共40分的概率。

5. (a) 按 x 的遞升序展開 $e^{\frac{-x^2}{2}}$ 至 x^6 的項。

(b) 由此，估算 $\int_0^1 e^{\frac{-x^2}{2}} dx$ 的值。

(c) 已知標準常態分佈在 $z = 0$ 至 $z = a$ 之間的曲綫下面積為 $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$ 。利用(a)的結果與常態分佈圖表估算 π 的值，準確至3位小數。

6. 某店鋪經理欲推行計劃A或B以提高利潤。設 R 和 Q （以百萬為單位）分別為計劃A和B推行後的累計每周盈餘。已知

$$\frac{dR}{dt} = \begin{cases} \ln(2t+1) & 0 \leq t \leq 6 \\ 0 & t > 6 \end{cases},$$

及

$$\frac{dQ}{dt} = \begin{cases} 45t(1-t) + \frac{1.58}{t+1} & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{30e^{-t}}{(3+2e^{-t})^2} & t > 1 \end{cases},$$

其中 t 為計劃推行後所經過的周數。

(a) 假設執行了A計劃。

i. 利用6區間的梯形法則，估算計劃開始後首6周的盈餘。

ii. 請問(a)(i)的估算屬於過低估算還是過高估算？試加以解釋。

(b) 假設執行了B計劃。

i. 求計劃開始後首周的盈餘。

ii. 藉代入 $u = 3 + 2e^{-t}$ ，或其他方法，求計劃執行後首 n 周的盈餘，其中 $n > 1$ 。答案以 n 表示。

(c) 哪個計劃的長期盈餘更多？試加以解釋。

4 概率

1. 設 A 和 B 為兩個事件。設 $P(A) = 0.75$ 及 $P(B) = 0.8$ ，且 $P(A \cap B) = k$ 。
 - (a) 以 k 表示 $P(A \cup B)$ 。
 - (b)
 - i. 證明 $0.55 \leq k \leq 1$;
 - ii. 令 A' 及 B' 分別為 A 及 B 的補事件。利用(b)(i)及 $A' \cup B'$ 為 $A \cap B$ 的補事件這一事實，或利用其它方法，證明 $0 \leq P(A' \cup B') \leq 0.45$ ，並證明 $0.25 \leq P(A' \cup B') \leq 0.45$ 。
 - (c) 由此，求 $P(A \cup B)$ 的值的範圍。
2. 設 A 和 B 為兩個事件。假設 $P(A|B') = \frac{5}{12}$, $P(B|A') = \frac{8}{15}$ 及 $P(B) = \frac{2}{5}$ ，其中 A' 及 B' 分別為 A 及 B 的補事件。設 $P(A) = a$ ，其中 $0 < a < 1$ 。
 - (a) 求 $P(A \cap B')$ 。
 - (b) 以 a 表示 $P(A' \cap B)$ 。
 - (c) 利用 $A' \cup B$ 為 $A \cap B'$ 的補事件這一事實，或以其他方式，求 a 的值。
 - (d) A 及 B 是否為互斥事件？
3. 設 A 及 B 為兩事件。假設 $P(A|B) = 0.5$, $P(B|A) = 0.4$ 及 $P(A \cup B) = 0.84$ 。設 $P(A) = a$ ，其中 $a > 0$ 。
 - (a) 以 a 表示 $P(A \cap B)$ 及 $P(B)$ 。
 - (b) 利用(a)的結果，求 a 的值。
 - (c) A 及 B 是否互相獨立？
4. 某公司從A商跟B商購入了相同箱數的保險絲，每一箱各有100枚。該公司將從每一箱保險絲中抽取兩條做檢查，如兩條樣本均合格則收貨。已知A商及B商的保險絲分別有4%及1%的概率損壞。假設他們的損壞概率互相獨立。
 - (a) 求收貨的概率。
 - (b) 求收貨的保險絲屬於A商的概率。
5. 某限額為\$3000的信用卡在推廣期內，若持卡人的最高消費多於\$400，則會成為會員並可參加“點·得分”網上抽獎遊戲。下表列了遊戲規則：

消費(\$ x)	會員級別	可點擊次數
$400 < x \leq 800$	銀	1
$800 < x \leq 1000$	金	2
$1000 < x \leq 3000$	鉑	3

每次點擊可獲得1分、2分、3分及4分的概率分別為0.4、0.3、0.2及0.1。每場遊戲的總得分可根據下表獲取相應的現金回贈：

總分	現金回贈
1至3	\$20
4至9	\$50
10至12	\$200

已知在所有會員中，有25%銀級，60%金級，15%鉑級。

- (a) 在某場完整遊戲內，求
- 金級會員取得剛好3分的概率；
 - 任意會員取得剛好3分的概率；
 - 已知該會員取得剛好3分，其為金級會員的概率。
- (b) 求某會員在一場完整遊戲中取得剛好\$20現金回贈的概率。
- (c) 在某場完整遊戲中，求某會員
- 取得剛好10分的概率；
 - 剛好\$200現金回贈的概率。
- (d) 研究發現70%的會員會完成遊戲。一名卡公司的管理層提議將遊戲改為直接提供4%現金回贈。然而，高級管理層溫妮認為此建議將會令公司的預期支出高於進行遊戲。
- 你是否同意溫妮的說法？
 - 另一名高級管理層約翰認為提供2%現金回贈將比進行遊戲的預期支出低。你是否同意約翰的說法？

5 分佈