函數基礎

我們必須瞭解題目當中字眼的含義，才能更好的利用定義進行推論。

定義 (實數域). $\mathbb{R}$為包含所有實數之集合。

定義 (函數、定義域、值域). 若f為函數，擁有定義域D和值域R，則以下三種敘述均可描述f：

- $f : D \to R$;
- $x \in D$, $f(x) \in R$, $x \mapsto f(x)$;
- $f(x) =$以x建立/表述的算式。

定義 (實函數). 若$f : D \to R$為函數，值域$R = \mathbb{R}$(或$R \subset \mathbb{R}$)，我們稱之爲**實函數**。

定義 (奇偶函數). 設$f : D \to R$為函數。

- 若對於所有$x \in D$，均使$f(-x) = -f(x)$成立，則f為**奇函數**;
- 若對於所有$x \in D$，均使$f(-x) = f(x)$成立，則f為**偶函數**。

例子.

1. $f(x) = x$時，f為奇函數;
2. 對於整數n，$f(x) = x^{2n+1}$時，f為奇函數;
3. $f(x) = x^2$時，f為偶函數;
4. 對於整數n，$f(x) = x^{2n}$時，f為偶函數;
5. $\sin x, \tan x, \csc x, \cot x$均爲奇函數;
6. $\cos x, \sec x$均爲偶函數。

設理. 設f_1, f_2為奇函數，g_1, g_2為偶函數。則以下成立：

- $f_1 \circ f_2$是奇函數;
- $f_1 \circ g_1$是偶函數;
- $g_1 \circ f_2$是偶函數;
- $g_1 \circ g_2$是偶函數。

證明. 設f_1, f_2為奇函數，g_1, g_2為偶函數。則

- $f_1(-x) = -f_1(x)$;
- $f_2(-x) = -f_2(x)$;
- $g_1(-x) = g_1(x)$;
- $g_2(-x) = g_2(x)$。

由此可得

- $(f_1 \circ f_2)(-x) = f_1(f_2(-x)) = f_1(-f_2(x)) = -f_1(f_2(x)) = -(f_1 \circ f_2)(x)$;
- $(f_1 \circ g_2)(-x) = f_1(g_2(-x)) = f_1(g_2(x)) = (f_1 \circ g_2)(x)$;
- $(g_1 \circ f_2)(-x) = g_1(f_2(-x)) = g_1(-f_2(x)) = g_1(f_2(x)) = (g_1 \circ f_2)(x)$;
- $(g_1 \circ g_2)(-x) = g_1(g_2(-x)) = g_1(g_2(x)) = (g_1 \circ g_2)(x)$。

□

題解

1. （10分）設$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$為實函數。

   (a) （4分）證明$\frac{f(x)+f(-x)}{2}$為偶函數；$\frac{f(x)-f(-x)}{2}$為奇函數。

   解. 設$g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$及$h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$。

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{f(-x)+f(-(-x))}{2} \\ &= \frac{f(-x)+f(x)}{2} \\ &= \frac{f(x)+f(-x)}{2} \\ &= g(x) \\ h(-x) &= \frac{f(-x)-f(-(-x))}{2} \\ &= \frac{f(-x)-f(x)}{2} \\ &= -\frac{f(x)-f(-x)}{2} \\ &= -h(x) \end{aligned}$$

由此，g為偶函數，h為奇函數。 ■

(b) （2分）證明對於任意實函數，均可拆分為奇函數及偶函數兩部分。

解. 對於任意函數f，均可寫成

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

根據(a)，$\frac{f(x)+f(-x)}{2}$為偶函數，$\frac{f(x)-f(-x)}{2}$為奇函數，證畢。 ■

(c) 現假設對於任意$x, y \in \mathbb{R}$，函數f都符合以下函數等式

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

i. （3分）證明對於任意$x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$；

解. 對於任意$x \in \mathbb{R}$，均有

$$f(x) = f(2 \cdot \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2})f(\frac{x}{2}) = (f(\frac{x}{2}))^2$$

f爲實函數，則對於任意$y \in \mathbb{R}$，$(f(y))^2 \geq 0$。

故此，代$y = \frac{x}{2} \in \mathbb{R}$可得$f(x) \geq 0$。 ■

ii. （1分）由此，證明f的偶函數部分必定大於或等於0。

解. 根據(c)i及(b)，

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2} \geq \frac{0+0}{2} = 0$$

■

2. （10分）設$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$為實函數。

(a) （3分）證明若$f(ix) = if(x)$，則f為奇函數。

解. $f(-x) = f(i^2x) = if(ix) = i^2f(x) = -f(x)$。 ■

(b) （7分）設$F(x) = f(x) + if(-x)$，而且$F(x+y) = F(x) + F(y)$。

i. （3分）求$f(0)$。

解. 考慮$F(x) = F(x+0) = F(x) + F(0)$，可得$F(0) = 0$。

因此$0 = F(0) = f(0) + if(0)$，可得$f(0) = 0$。 ■

ii. （4分）證明f為奇函數。

解. 考慮$0 = F(0) = F(x-x) = F(x) + F(-x)$，可得$F(-x) = -F(x)$。

因此$f(-x) = \mathrm{Re}\{F(-x)\} = \mathrm{Re}\{-F(x)\} = -f(x)$。 ■

二項式展開

定理 (二項式定理). 對於$a, b \in \mathbb{R}$及整數$n \geq 0$，

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n a^r b^{n-r}$$

其中$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$。

題解

1. （5分）記$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!}$。

   (a) （2分）求$\sum_{k=0}^{n} C_k^n$。

   解. 考慮$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} (1)^k (1)^{n-k}$，可得

   $$\sum_{k=0}^{n} C_k^n = 2^n$$

   ■

   (b) （3分）證明$\sum_{奇數k}^{n} C_k^n = \sum_{偶數k}^{n} C_k^n$。

   解. 考慮$(1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (1)^{n-k}$，可得

   $$\sum_{偶數k} C_k^n - \sum_{奇數k} C_k^n = 0$$

   由此，

   $$\sum_{奇數k}^{n} C_k^n = \sum_{偶數k}^{n} C_k^n$$

   ■

2. （5分）記$\begin{pmatrix} n \\ x_1, x_2, \ldots, x_k \end{pmatrix} = \frac{n!}{x_1! x_2! \cdots x_k!}$。

   (a) （3分）證明對於任意正整數n及$k \geq 2$，若$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$，

   $$\begin{pmatrix} n \\ x_1, x_2, \ldots, x_k \end{pmatrix} = C_{x_1}^n C_{x_2}^{n-x_1} \cdots C_{x_{k-1}}^{n-x_1-x_2-\cdots-x_{k-2}}$$

   解. 設$P(k)$為上述設理。

   對於$k=2$，$P(2)$：$x_1 + x_2 = n$

左方$=\begin{pmatrix} n \\ x_1, x_2 \end{pmatrix} = \frac{n!}{x_1!x_2!} = \frac{n!}{x_1!(n-x_2)!} = C^n_{x_1}$ =右方

$\therefore P(2)$成立。

假設$P(m)$對某正整數m成立，即若$x_1+x_2+\cdots+x_m=n$，

$$\begin{pmatrix} n \\ x_1, x_2, \dots, x_m \end{pmatrix} = C^n_{x_1} C^{n-x_1}_{x_2} \cdots C^{n-x_1-x_2-\cdots-x_{m-2}}_{x_{m-1}}$$

當$k=m+1$時，$x_1+x_2+\cdots+x_m+x_{m+1}=n$，

$$\begin{aligned} \text{左方} &= \begin{pmatrix} n \\ x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_m!x_{m+1}!} \\ &= \frac{n!}{x_1!(n-x_1)!} \begin{pmatrix} n-x_1 \\ x_2, \dots, x_m, x_{m+1} \end{pmatrix} \\ &= C^n_{x_1} C^{n-x_1}_{x_2} C^{n-x_1-x_2}_{x_3} \cdots C^{n-x_1-x_2-\cdots-x_{m-1}}_{x_m} \\ &= \text{右方} \end{aligned}$$

$\therefore$若$P(m)$成立，則$P(m+1)$成立。

$\therefore$根據數學歸納法原理，$P(k)$對所有整數$k\geq 2$成立。 ■

(b) （2分）由此，證明對於任意正整數n，

$$(a+b+c)^n = \sum_{\substack{i+j+k=n, \\ i,j,k\text{為非負整數}}} \begin{pmatrix} n \\ i, j, k \end{pmatrix} a^i b^j c^k$$

解. 根據(a)，取$k=3$，則

$$\begin{aligned} (a+b+c)^n &= \sum_{m=0}^{n} C^n_m a^m (b+c)^{n-m} \\ &= \sum_{m=0}^{n} C^n_m a^m \sum_{r=0}^{n-m} C^{n-m}_r b^r c^{n-m-r} \\ &= \sum_{m=0}^{n} \sum_{r=0}^{n-m} C^n_m C^{n-m}_r a^m b^r c^{n-m-r} \end{aligned}$$

若設$i=m, j=r, k=n-m-r$,則$i+j+k=n$。由此可得

$$(a+b+c)^n = \sum_{\substack{i+j+k=n, \\ i,j,k\text{為非負整數}}} \begin{pmatrix} n \\ i, j, k \end{pmatrix} a^i b^j c^k$$

■

數學歸納法

回憶數學歸納法原則的定理：

公設 (一般歸納法). 設$P(n)$為對於整數$n \geq 1$的設理。若以下條件同時成立：

- $P(1)$成立；
- 若$P(n)$成立，則$P(n+1)$成立。

則$P(n)$對所有整數$n \geq 1$成立。

衍理 (強歸納法). 設$P(n)$為對於整數$n \geq 1$的設理。若以下條件同時成立：

- $P(1)$成立；
- 若$P(1), P(2), \ldots, P(n)$成立，則$P(n+1)$成立。

則$P(n)$對所有整數$n \geq 1$成立。

題解

1. （2分）利用數學歸納法，證明對於任意正整數n，$n! \leq n^n$。

   解. 設$P(n)$為上述設理。

   對於$n = 1$，$P(1)$：

   左方$= 1! = 1 = 1^1 =$右方

   $\therefore P(1)$成立。

   假設$P(k)$對某正整數k成立，即

   $$k! \leq k^k$$

   當$n = k+1$時，

   $$\begin{aligned} \text{左方} &= (k+1)! \\ &= (k+1)k! \\ &\leq (k+1)k^k \\ &\leq (k+1)(k+1)^k \\ &= (k+1)^{k+1} \\ &= \text{右方} \end{aligned}$$

$\therefore$若$P(k)$成立，則$P(k+1)$成立。

$\therefore$根據數學歸納法原理，$P(n)$對所有整數$n \geq 1$成立。 ■

2. （3分）利用數學歸納法，證明對於任意正整數n及$-1 < r < 1$，

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k^{n+k-1} r^k = \frac{1}{(1-r)^n}$$

解. 設$P(n)$為上述設理。

對於$n=1$，$P(1)$：

左方$= \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{1+k-1} r^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^k r^k = \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{(1-r)^1}$ =右方

$\therefore P(1)$成立。

假設$P(m)$對某正整數m成立，即

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k^{m+k-1} r^k = \frac{1}{(1-r)^m}$$

當$n = m+1$時，由於$C_r^n + C_{r+1}^n = C_{r+1}^{n+1}$，

$$\begin{aligned}
\text{左方} &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{m+k} r^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{m+k} r^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k^{m+k-1} + C_{k-1}^{m+k-1}) r^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{m+k-1} r^k + \sum_{k=1}^{\infty} C_{k-1}^{m+k-1} r^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{m+k-1} r^k + r \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{m+k} r^k \\
(1-r) \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{m+k} r^k &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{m+k-1} r^k \\
&= \frac{1}{(1-r)^m} \\
\text{左方} &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{m+k} r^k \\
&= \frac{1}{(1-r)^{m+1}} \\
&= \text{右方}
\end{aligned}$$

∴若$P(m)$成立，則$P(m+1)$成立。

∴根據數學歸納法原理，$P(n)$對所有整數$n \geq 1$成立。 ■

三角函數

設理 (公式). 三角恆等式:

- $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$;
- $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$。

題解

1. （7分）設$i^2 = -1$。證明對於任意整數n，

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

解. 當$n = 0$時，$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^0 = 1 = \cos(0) + i\sin(0)$;

當$n \geq 1$時，利用數學歸納法：設$P(n)$為上述設理。

對於$n = 1$，$P(1)$：

左方$= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^1 = \cos\theta + i\sin\theta =$右方

$\therefore P(1)$成立。

假設$P(m)$對某所有正整數m成立，即

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^m = \cos(m\theta) + i\sin(m\theta)$$

當$n = m + 1$時，

$$\begin{aligned}
&\text{左方}(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^{m+1} \\
&\quad = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^m(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \\
&\quad = (\cos(m\theta) + i\sin(m\theta))(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \\
&\quad = \cos(m\theta)\cos(\theta) - \sin(m\theta)\sin(\theta) + i\sin(m\theta)\cos(\theta) + i\sin(\theta)\cos(m\theta) \\
&\quad = \cos((m+1)\theta) + i\sin((m+1)\theta) \\
&\quad = \text{右方}
\end{aligned}$$

$\therefore$若$P(m)$成立，則$P(m+1)$成立。

$\therefore$根據數學歸納法原理，$P(n)$對所有整數$n \geq 1$成立。

當$n \leq -1$時，考慮$(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^{-n}=1$，則

$$\begin{aligned}
(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n &= \frac{1}{(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^{-n}} \\
&= \frac{1}{\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)} \\
&= \frac{1}{\cos(n\theta)-i\sin(n\theta)} \\
&= \frac{\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)}{\cos^2(n\theta)+\sin^2(n\theta)} \\
&= \cos(n\theta)+i\sin(n\theta)
\end{aligned}$$

$\therefore P(n)$對所有整數n成立。 ■

2. （8分）考慮$\sin(36^\circ)=\cos(54^\circ)$，求$\sin(18^\circ)$。

解. 由恆等式，可得：

$$\begin{aligned}
\cos 2\theta &= 2\cos^2\theta - 1 \\
\cos 3\theta &= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta \\
&= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - (2\sin\theta\cos\theta)\sin\theta \\
&= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta \\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
\sin(36^\circ) &= \cos(54^\circ) \\
2\sin(18^\circ)\cos(18^\circ) &= 4\cos^3(18^\circ) - 3\cos 18^\circ \\
4\cos^2(18^\circ) - 2\sin(18^\circ) - 3 &= 0 \\
4\sin^2(18^\circ) + 2\sin(18^\circ) - 1 &= 0 \\
\sin(18^\circ) &= \frac{-2 \pm \sqrt{4+4\cdot 4}}{8} \\
\sin(18^\circ) &= \frac{\sqrt{5}-1}{4}
\end{aligned}$$

■

極限

設理 (公式). 極限公式:

- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$;
- $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$。

題解

1. （5分）設f,g,h為實函數，并且$f(0)=g(0)=h(0)=0$。若$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{h(x)}=9$，求

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-e^{g(x)}}{\sin(h(x))}$$

解.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-e^{g(x)}}{\sin(h(x))}&=\lim_{x\to 0}(e^{g(x)}\cdot\frac{e^{f(x)-g(x)}-1}{f(x)-g(x)}\cdot\frac{h(x)}{\sin h(x)}\cdot\frac{f(x)-g(x)}{h(x)})\\&=9\end{aligned}$$

■

2. （15分）設$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$為實函數，定義

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

(a) （3分）求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，並證明f為連續函數。

解.

$$\begin{aligned}0\leq\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}\leq\lim_{x\to 0}x=0\\ \lim_{x\to 0}f(x)=0\end{aligned}$$

■

(b) （4分）求$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$及$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$。

解.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}\\
&= 1\\
\lim_{x\to -\infty} f(x) &= \lim_{x\to -\infty} x\sin\frac{1}{x}\\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}\\
&= 1
\end{aligned}
$$

■

(c) （8分）設$g(x) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$，證明$\lim_{x\to 0} g(x)$無法被定義。

解.

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)\sin\frac{1}{x+h}-(x-h)\sin\frac{1}{x-h}}{2h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2x\sin\frac{h}{x^2-h^2}\cos\frac{x}{x^2-h^2}-2h\sin\frac{x}{x^2-h^2}\cos\frac{h}{x^2-h^2}}{2h}\\
&= \lim_{x\to 0}(\frac{x\cos\frac{x}{x^2-h^2}}{x^2-h^2}-\sin\frac{x}{x^2-h^2}\cos\frac{h}{x^2-h^2})\\
&= \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

因爲$\lim_{x\to 0} g(x)=\infty$，所以$\lim_{x\to 0} g(x)$無法被定義。 ■

微分原理

設理 (基本原理). *若f為可微函數，則f'為f的導數，且*

$$
f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}
$$

設理 (基本導數). *按照基本原理可直接得出以下函數之導數:*

- $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$;
- $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$;
- $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$;
- $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$。

設理 (求導法則). 對於可微函數f, g:

- 綫性:$(af \pm bg)' = af' \pm bg'$,其中$a, b$為常數;
- 乘積:$(fg)' = f'g + fg'$;
- 商:$(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$;
- 複合:$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$。

設理 (頂點). 若f為可微函數,當$f'(x) = 0$而$f''(x) \neq 0$時,f可處於頂點。

題解

1. (10分)設$f(x) = \sin \pi x$。

   (a) (2分)求$f'(0)$;

   解.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin \pi h - \sin \pi 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin \pi h}{\pi h}\pi \\ &= \pi \end{aligned}$$

■

   (b) (8分)設(g_n)為函數數列,定義$g_1(x) = f(x)$及$g_n(x) = f(g_{n-1}(x))$。證明對於任意正整數n,$g_n'(0) = \pi^n$。

   解.

$$g_1'(0) = f'(0) = \pi = \pi^1$$
$$\text{設} g_k'(0) = \pi^k \text{則}$$
$$g_{k+1}'(0) = (f(g_k(0)))' = f'(g_k(0))g_k'(0) = \pi \cdot \pi^k = \pi^{k+1}$$

■

2. （5分）寫出令$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$沒有頂點的條件，已知$a, b, c, d$均爲實數及$a \neq 0$。

解. 若$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \neq 0$，則

$$\Delta < 0 \implies 4b^2 < 12ac \iff b^2 < 3ac$$

或若$f'(x) = 0$而$f''(x) = 0$,則

$$\begin{cases} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \\ x &= \frac{-b}{3a} \end{cases} \implies b^2 = 3ac$$

因此，$b^2 \leq 3ac$為f沒有頂點的條件。 ■