實域拓展的三角函數

回顧直角三角形及三角函數：

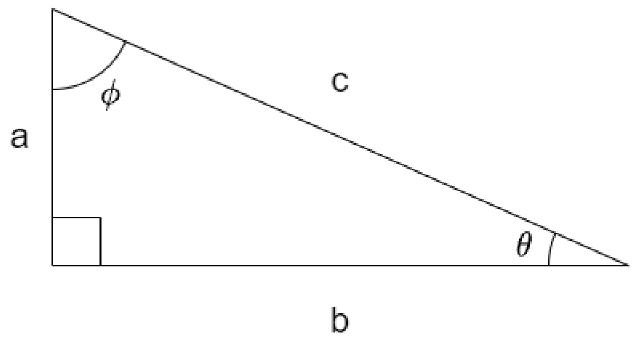


Figure 1: 邊長爲a, b, c的直角三角形

對以上直角三角形，我們定義c為**斜邊**。

對於θ，我們稱a為θ的**對邊**，b為θ的**鄰邊**；對於ϕ，我們稱b為ϕ的**對邊**，a為ϕ的**鄰邊**。

定義 1 (三角函數). *參考上述直角三角形，我們定義以下三角函數：*

- *正弦函數(sine)*：$\sin\theta = \dfrac{a}{c}$。
- *餘弦函數(cosine)*：$\cos\theta = \dfrac{b}{c}$。
- *正切函數(tangent)*：$\tan\theta = \dfrac{a}{b}$。
- *正割函數(secant)*：$\sec\theta = \dfrac{c}{b}$。
- *餘割函數(cosecant)*：$\csc\theta = \dfrac{c}{a}$。
- *餘切函數(cotangent)*：$\cot\theta = \dfrac{b}{a}$。

小記. *在描述三角函數的正整數次冪時，我們會寫*$\sin^n\theta := (\sin\theta)^n$。*但留意此寫法只適用於*$n$*為正整數的情況。一般而言，函數*$f$*的次冪以*$(f)^n$*記之。*

引理 (畢氏定理). *參考上述直角三角形，則以下等式成立：*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

設理 (恆等式). *參考上述直角三角形，有以下恆等式：*

1. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$;
2. $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$;
3. $\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$;
4. $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$, $\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$;
5. $\sin\theta = \cos\phi$, $\sin\phi = \cos\theta$。

三角函數在圓上的拓展

在代數幾何學中，一般考慮圓形為圓心與圓周的程差公式：考慮半徑爲r的圓並設圓心於原點$(0,0)$，則任何位於圓周上的點$P(x,y)$，其與圓心的距離為：

$$\sqrt{x^2+y^2} = r \implies x^2+y^2 = r^2$$

若設$r = 1$，我們稱其爲**單位圓**。留意圓形公式與三角恆等式$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$的相似性，並參考下圖：

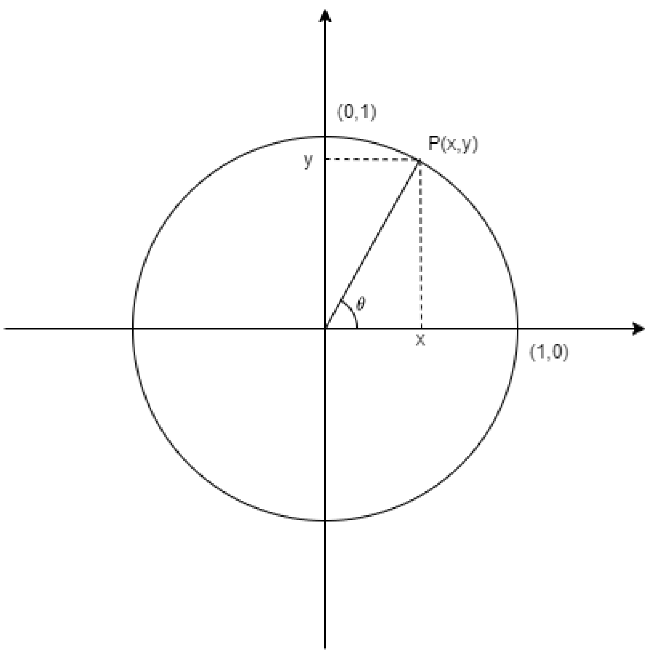


Figure 2: 半徑爲1的圓

由此得出，對於半徑爲1的圓，其坐標(x,y)亦可寫作$(\cos\theta, \sin\theta)$。以此爲鑒，將$\sin\theta$與$\cos\theta$的定義域從$0^\circ \le \theta \le 90^\circ$拓展至$0^\circ \le \theta \le 360^\circ$，則有以下定義：

定義 2 (象限). *按一個圓的角度θ分類，給出以下名稱：*

- *第一象限(I)：*$0° \le \theta \le 90°$；
- *第二象限(II)：*$90° \le \theta \le 180°$；
- *第三象限(III)：*$180° \le \theta \le 270°$；
- *第四象限(IV)：*$270° \le \theta \le 360°$。

第一象限為基本三角形的角度象限，至於第二、三、四象限，考慮以下圖像：

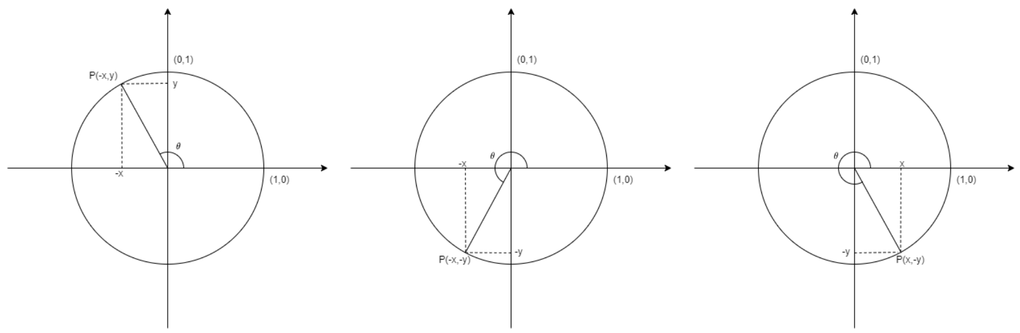


Figure 3: 第二、三、四象限的展現

因此，對於三角函數在圓上的拓展，我們給出以下定義：

定義 3 (圓拓展三角函數). *設$P(x,y)$為單位圓上的一點，而θ為$(1,0)$展至P的角度，則*

$$x = \cos\theta, y = \sin\theta$$

衍理. *設$P(x,y)$為半徑r的圓上的一點，而θ為$(r,0)$展至P的角度，則*

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

小記. *考慮$\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$的值，第一象限給出所有(All)函數均爲正數，第二象限給出$\sin\theta$爲正數，第三象限給出$\tan\theta$爲正數，第四象限給出$\cos\theta$爲正數。故引稱C-A-S-T圖以便考慮三角函數的符號。*

至於如何求出此拓展函數的值，考慮以旋轉求出第二象限的數值：設$0° \le \theta \le 90°$，則$90° \le \theta + 90° \le 180°$。考慮下圖：

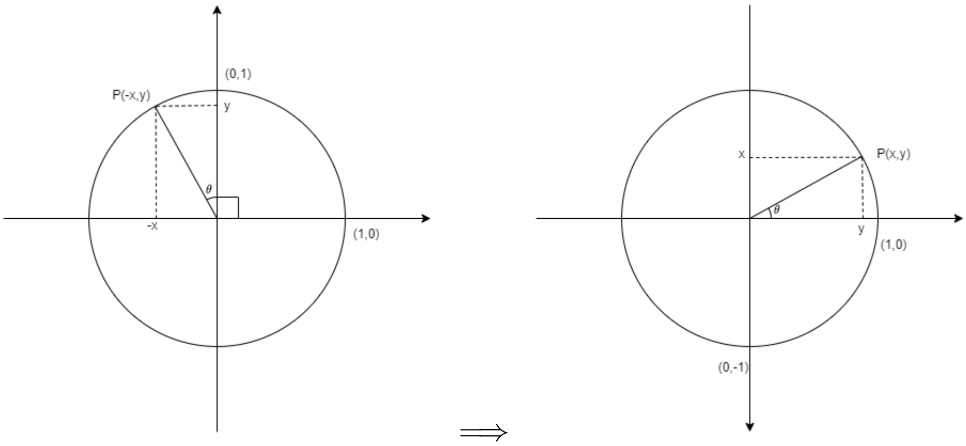


Figure 4: 以順時針方向旋轉90°

留意$\sin(\theta+90°)=y=\cos\theta$，$\cos(\theta+90°)=-x=-\sin\theta$。因此得出

$$\sin(\theta+90°)=\cos\theta,\qquad \cos(\theta+90°)=-\sin\theta,\qquad \tan(\theta+90°)=-\cot\theta$$
$$\sin(\theta+180°)=-\sin\theta,\qquad \cos(\theta+180°)=-\cos\theta,\qquad \tan(\theta+180°)=\tan\theta$$
$$\sin(\theta+270°)=-\cos\theta,\qquad \cos(\theta+270°)=\sin\theta,\qquad \tan(\theta+270°)=-\cot\theta$$

因圓形每360°為一周期，故可定義：

定義 4 (三角函數的周期性)**.** $\sin(\theta+360°)=\sin\theta,\cos(\theta+360°)=\cos\theta$

定理. 設$\sin\theta,\cos\theta,\tan\theta$為圓拓展三角函數，$0°\le\theta\le 90°$，則：

$$\sin(\pm\theta)=\pm\sin\theta,\qquad \cos(\pm\theta)=\cos\theta,\qquad \tan(\pm\theta)=\pm\tan\theta$$
$$\sin(90°\pm\theta)=\cos\theta,\qquad \cos(90°\pm\theta)=\mp\sin\theta,\qquad \tan(90°\pm\theta)=\mp\cot\theta$$
$$\sin(180°\pm\theta)=\mp\sin\theta,\qquad \cos(180°\pm\theta)=-\sin\theta,\qquad \tan(180°\pm\theta)=\pm\tan\theta$$
$$\sin(270°\pm\theta)=-\cos\theta,\qquad \cos(270°\pm\theta)=\pm\sin\theta,\qquad \tan(270°\pm\theta)=\mp\cot\theta$$

衍理. 設$\sin\theta,\cos\theta,\tan\theta$為圓拓展三角函數，$\theta$為任意角度，則：

$$\sin(\pm\theta)=\pm\sin\theta,\qquad \cos(\pm\theta)=\cos\theta,\qquad \tan(\pm\theta)=\pm\tan\theta$$
$$\sin(90°\pm\theta)=\cos\theta,\qquad \cos(90°\pm\theta)=\mp\sin\theta,\qquad \tan(90°\pm\theta)=\mp\cot\theta$$
$$\sin(180°\pm\theta)=\mp\sin\theta,\qquad \cos(180°\pm\theta)=-\sin\theta,\qquad \tan(180°\pm\theta)=\pm\tan\theta$$
$$\sin(270°\pm\theta)=-\cos\theta,\qquad \cos(270°\pm\theta)=\pm\sin\theta,\qquad \tan(270°\pm\theta)=\mp\cot\theta$$

定義 5 (弧度)**.** 依照圓周計算，定義**弧度**為角度對應的單位弧長路徑，並以rad爲單位（使用時可忽略單位不寫）。π對應180°。

衍理. 設$\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$為圓拓展三角函數，$\theta$為任意角度，則：

$$\begin{aligned}
&\sin(\pm\theta) = \pm\sin\theta, && \cos(\pm\theta) = \cos\theta, && \tan(\pm\theta) = \pm\tan\theta \\
&\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \cos\theta, && \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp\sin\theta, && \tan\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp\cot\theta \\
&\sin(\pi \pm \theta) = \mp\sin\theta, && \cos(\pi \pm \theta) = -\sin\theta, && \tan(\pi \pm \theta) = \pm\tan\theta \\
&\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm \theta\right) = -\cos\theta, && \cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm \theta\right) = \pm\sin\theta, && \tan\left(\frac{3\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp\cot\theta
\end{aligned}$$

逆三角函數

考慮三角函數作爲函數的可逆性並不理想（不符合單射性），故對於逆三角函數的討論，雖稱其爲逆函數，卻視之為逆映射。

定義 6 (三角函數的逆函數)**.** 對於逆三角函數，給出以下定義：

$$\begin{aligned}
&\arcsin : \{-1 \le x \le 1\} \to \mathbb{R}, && x \mapsto \{\theta \in \mathbb{R} : \sin\theta = x\} \\
&\arccos : \{-1 \le x \le 1\} \to \mathbb{R}, && x \mapsto \{\theta \in \mathbb{R} : \cos\theta = x\} \\
&\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && x \mapsto \{\theta \in \mathbb{R} : \tan\theta = x\}
\end{aligned}$$

同理，對於另外三個三角函數：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{arcsec} : \{-1 \le x \le 1\} \to \mathbb{R}, && x \mapsto \{\theta \in \mathbb{R} : \sec\theta = x\} \\
&\mathrm{arccsc} : \{-1 \le x \le 1\} \to \mathbb{R}, && x \mapsto \{\theta \in \mathbb{R} : \csc\theta = x\} \\
&\mathrm{arccot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && x \mapsto \{\theta \in \mathbb{R} : \cot\theta = x\}
\end{aligned}$$

小記. 留意前綴‘*arc*’，其意義為‘求弧度’。因此意義上與求角度是一樣的，惟需注意的是因應三角函數的周期性，符合條件的結果有無窮多項，因此定義以數集表示。通常所求角度在0至2π之間，對應結果有兩項。若限於0至$\pi/2$之間，則可視爲逆函數，亦是常規解釋，分別記爲$\sin^{-1}, \cos^{-1}, \tan^{-1}, \sec^{-1}, \csc^{-1}, \cot^{-1}$。

設理. 對於$x \in \mathbb{R}$，

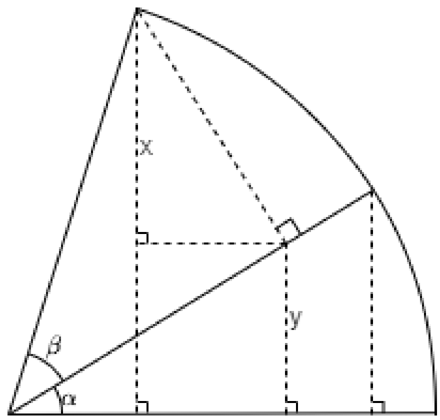
$$\begin{aligned}
\arcsin(\sin x) &= \{2n\pi + x, (2n+1)\pi - x : n\text{為整數}\} \\
\arccos(\cos x) &= \{2n\pi \pm x : n\text{為整數}\} \\
\arctan(\tan x) &= \{n\pi + x : n\text{為整數}\}
\end{aligned}$$

三角函數的和積互化

目前已知特殊角度的加減可簡化爲單一角度的算式，如此衍伸問題：對於任意角度α, β，若寫$\sin(\alpha+\beta), \cos(\alpha+\beta), \tan(\alpha+\beta)$，能否將之簡化爲$\alpha$與$\beta$的三角函數算式呢？即是否有函數$f, g, h$使得

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= f(\sin\alpha, \sin\beta, \cos\alpha, \cos\beta, \tan\alpha, \tan\beta)\\ \cos(\alpha+\beta) &= g(\sin\alpha, \sin\beta, \cos\alpha, \cos\beta, \tan\alpha, \tan\beta)\\ \tan(\alpha+\beta) &= h(\sin\alpha, \sin\beta, \cos\alpha, \cos\beta, \tan\alpha, \tan\beta)\end{aligned}$$

從$\sin(\alpha+\beta)$入手，考慮以下扇形



如上圖所示，$\sin(\alpha+\beta) = x + y$。又見

$$x = \sin\beta\cos\alpha, y = \cos\beta\sin\alpha$$

則$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$。

現求得$\sin(\alpha+\beta)$的變化，則可通過代入求得其餘變化：

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha+(-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta)+\sin(-\beta)\cos\alpha \\
&= \sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha \\
\cos(\alpha+\beta) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(-\beta)+\sin(-\beta)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \\
&= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha+(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta) \\
&= \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \\
\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} \\
&= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\frac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \\
\tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)} \\
&= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}
\end{aligned}$$

定理. 設α,β為弧度角，則

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha\pm\beta) &= \sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha \\
\cos(\alpha\pm\beta) &= \cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta \\
\tan(\alpha\pm\beta) &= \frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}
\end{aligned}$$

由此，可逆推算出以下設理：

設理. 設α,β為弧度角，則

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)] \\
\sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] \\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]
\end{aligned}$$

衍理. 設α,β為弧度角，則

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\pm\sin\beta &= 2\sin\frac{\beta\pm\alpha}{2}\cos\frac{\beta\mp\alpha}{2} \\
\cos\alpha+\cos\beta &= 2\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2} \\
\cos\alpha-\cos\beta &= 2\sin\frac{\beta+\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}
\end{aligned}$$

兩倍角公式

從以上和積互化公式可見，若$\alpha = \beta$，則可視爲**兩倍角公式**：

定理. 設x為弧度角，則

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= 2\sin x\cos x\\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x\\ \tan(2x) &= \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\end{aligned}$$

留意$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$可化為

$$\begin{aligned}\cos^2 x - \sin^2 x &= (1-\sin^2 x) - \sin^2 x\\ &= 1 - 2\sin^2 x\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}\cos^2 x - \sin^2 x &= \cos^2 x - (1-\cos^2 x)\\ &= 2\cos^2 x - 1\end{aligned}$$

故當$0 < x < \pi$時，

$$\sin x = \sqrt{\frac{1-\cos(2x)}{2}} \implies \sin\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}$$

當$0 < x < \frac{\pi}{2}$時，

$$\cos x = \sqrt{\frac{1+\cos(2x)}{2}} \implies \cos\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos t}{2}}$$

當$\frac{\pi}{2} < x < \pi$時，

$$\cos x = -\sqrt{\frac{1+\cos(2x)}{2}} \implies \cos\frac{t}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos t}{2}}$$

其中$t = 2x$。此算式稱爲**半倍角公式**。

同時考慮$t = \tan\frac{x}{2}$，則對於所有三角函數，均可以t表示。以$\sin x$爲例：

$$\begin{aligned}\sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\\ &= \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}\\ &= \frac{2t}{1+t^2}\end{aligned}$$

對此，以下定理成立：

定理. 設$x \in \mathbb{R}$，若$t = \tan\frac{x}{2}$，則

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

三倍角公式

定理. 設$x \in \mathbb{R}$，則

$$\begin{aligned}
\sin(3x) &= 3\sin x - 4\sin^3 x \\
\cos(3x) &= 4\cos^3 x - 3\cos x \\
\tan(3x) &= \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}
\end{aligned}$$

證明. 重複運用兩倍角公式以推導出$\sin(3x)$和$\cos(3x)$的算式，並運用$\tan(3x) = \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)}$推導結果。 □

輔助角

回顧和積互化公式，大部分三角學算式都能化作sin與cos的組合，如此便能讓大部分等式迎刃而解。但亦有例外：

$$2\sin x + 3\cos x = 4$$

對於以上等式，我們無法直接套用任何一條三角形公式以求得答案。如此便需要額外技巧，稱爲**輔助角**。在運用輔助角時需要一定條件，考慮通用式：

$$a\sin x + b\cos x = c$$

其中$a, b, c \in \mathbb{R}$。考慮左邊算式與$\sin(x + y)$的展開式的相似性，便作以下猜想：

主張. 設存在r與α使得以下等式成立：

$$r\sin(x + \alpha) = a\sin x + b\cos x$$

且$r \geq |c|$，則$a\sin x + b\cos x = c$可解。

證明. 直接計算即可。若

$$r\sin(x + \alpha) = a\sin x + b\cos x$$

則

$$\begin{aligned}
r\sin x\cos\alpha + r\cos x\sin\alpha &= a\sin x + b\cos x \\
&\implies \begin{cases} r\cos\alpha = a \\ r\sin\alpha = b \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha = \tan^{-1}(\frac{b}{a}) \end{cases}
\end{aligned}$$

同時

$$r\sin(x+\alpha)=c \implies \sin(x+\alpha)=\frac{c}{r}$$

由於$\sin x$的值域介乎-1與1之間，故$|c|/r\le 1 \implies |c|\le r$時等式可解。 $\square$

定理. 設a,b,c為常數，$x\in\mathbb{R}$。當$a^2+b^2\ge c^2$時，則$a\sin x+b\cos x=c$的解為

$$x=\sin^{-1}(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}})-\tan^{-1}(\frac{b}{a})$$

複域幾何

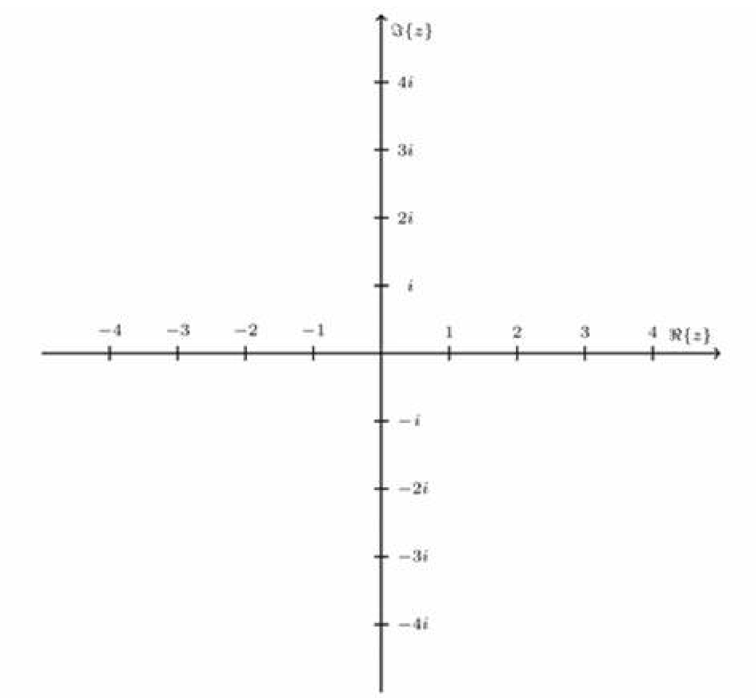
回顧中四對於複數的教學：對於任意複數$z\in\mathbb{C}$，均可寫

$$z=x+yi$$

其中$x,y\in\mathbb{R}$，$i^2=-1$。此表達式稱爲**標準式**（或稱**笛卡爾式**），因爲對於任何複數而言，此表達式都是獨特的，而且可輕易區分**實部**和**複部**：

- 實部：記$\mathrm{Re}\{z\}=x$；
- 複部：記$\mathrm{Im}\{z\}=y$；

對此，考慮i並非實數，則可假設i為與實數綫垂直的方向。由此引用**阿根圖**：



以此爲鑒，此圖考慮等價於**笛卡爾坐標圖**，作y軸為Im$\{z\}$的向量，x軸為Re$\{z\}$的向量，則任何複數$z = x + yi \in \mathbb{C}$，都可記爲：

$$x + yi \sim (x, y)$$

並且留意到

$$i = 0 + 1i \sim (0, 1)$$
$$(a, b) + (c, d) \sim (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \sim (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) \sim (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \sim (ac - bd, ad + bc)$$

運用坐標可使我們對複數的理解更具體。現定義：

定義 7 (模). 對於$z \in \mathbb{C}$，我們稱z與0的距離為**模**，並記為：

$$|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}\{z\})^2 + (\mathrm{Im}\{z\})^2}$$

定義 8 (模). 對於$z \in \mathbb{C}$，定義z的**共軛**為：

$$\overline{z} = \mathrm{Re}\{z\} - \mathrm{Im}\{z\}$$

若以坐標描述，可定義爲$(x, y) \mapsto (x, -y)$，並視爲沿實數軸反射。

設理. 對於任意$z \in \mathbb{C} - \{0\}$，均有

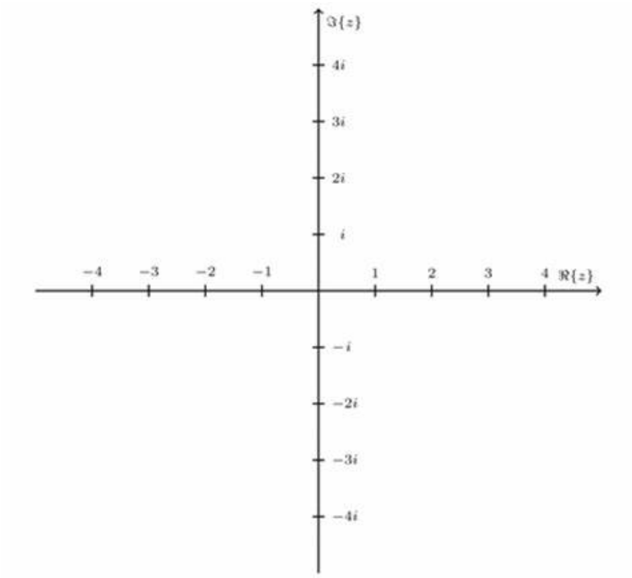
$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}$$

衍理. 對於任意$z \in \mathbb{C} - \{0\}$，z可逆，並且

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

小記. 需注意0沒有逆元素，除非對於$\dfrac{1}{0}$有明確定義，否則不作考慮。詳細參考**擴充平面**的敘述。

考慮笛卡爾平面與極坐標的轉換，參考



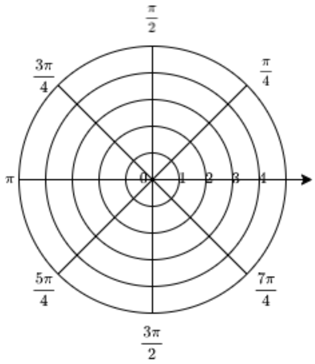


Figure 5: 阿根圖與極坐標

坐標的對應方式如下：

複數	笛卡爾	極坐標
0	(0,0)	(0,0)
1	$(1,0)$	$(1,0)$
i	$(0,1)$	$(1,\pi/2)$
-1	$(-1,0)$	$(1,\pi)$
$-i$	$(0,-1)$	$(1,3\pi/2)$

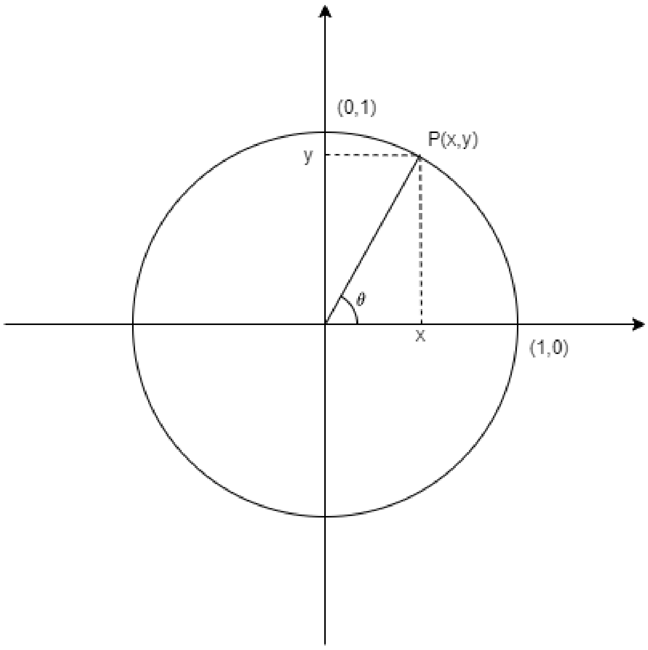
並且回憶圓形與三角函數的關係，可得以下表達式：

定理. 對於任意$z \in \mathbb{C}$，均可寫作

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

其中$r = |z|, \theta = \arctan\frac{\mathrm{Im}\{z\}}{\mathrm{Re}\{z\}}$。

證明. 考慮單位圓：



並由定義3之衍理，可得$z \sim (r\cos\theta, r\sin\theta) \sim r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$。其中

$$\begin{aligned}
|z| &= \sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} \\
&= \sqrt{r^2} \\
&= r \\
\tan\theta &= \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \frac{\mathrm{Im}\{z\}}{\mathrm{Re}\{z\}} \\
\theta &= \arctan\frac{\mathrm{Im}\{z\}}{\mathrm{Re}\{z\}}
\end{aligned}$$

□

棣莫弗定理與多倍角

對於複數加減法，我們不再多說，因爲加減法屬於非常簡單的運算。但是，對於乘除法，我們可有更深刻的瞭解，而且其中牽涉的很大程度與三角函數有關。

定理 (棣莫弗定理). 設$z, w \in \mathbb{C}$，並表$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), w = s(\cos\phi + i\sin\phi)$。則

$$zw = rs(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi))$$

證明. 通過直接計算：

$$\begin{aligned}
zw &= r(\cos\theta + i\sin\theta)s(\cos\phi + i\sin\phi) \\
&= rs(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi) \\
&= rs(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi + i(\cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi)) \\
&= rs(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi))
\end{aligned}$$

□

設理 (棣莫弗定理的推廣形式). 設$(z_k)_{k=1}^n$為一系列複數，其中對於所有$1 \le k \le n$，$z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$。則

$$\prod_{k=1}^n z_k = (\prod_{k=1}^n r_k)[\cos\left(\sum_{k=1}^n \theta_k\right) + i\sin\left(\sum_{k=1}^n \theta_k\right)]$$

證明. 運用數學歸納法。 □

設理 (乘方形式). 對於任意$z \in \mathbb{C}$，若$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，則對於任何整數$n$，均有

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

證明. 推廣形式中所有θ_k相等時的結果。 □

衍理. *若考慮乘方形式中$r = 1$，即模為1的複數，則*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

根據以上衍理，可得出多倍角的算式為

$$\begin{aligned}
\cos(nx) &= \sum_{0\le k\le n/2} \cos^{n-2k} x \sin^{2k} x \\
\sin(nx) &= \sum_{0\le k\le n/2} \cos^{n-2k-1} x \sin^{2k+1} x
\end{aligned}$$

習題

1. 求以下x的值($0 \le x \le 2\pi$)：

a) $\sin x = \frac{1}{2}$	b) $\cot x = -\frac{1}{3}$	c) $\cos x = \frac{3}{5}$	d) $\tan x = 1$
e) $\cot x = 3$	f) $\cos x = -0.5$	g) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	h) $\tan x = -2.4$
i) $\sin x = -0.4$	j) $\cos x = -1$	k) $\tan x = -\sqrt{3}$	l) $\cot x = \frac{1}{7}$

2. 簡化以下表達式：

a) $\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ b) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$

c) $\dfrac{\tan x\tan 2x}{\tan x-\tan 2x}$ d) $\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}+\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$

e) $\dfrac{\sin u+\sin v}{\cos u+\cos v}$ f) $\dfrac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\sin 7x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x}$

g) $\sin x\cot x+\cos x$ h) $\sin^2 x(1+\cot x)+\cos^2 x(1+\tan x)-1-\sin 2x$

i) $\dfrac{\cos x-\sin x}{1-\tan x}$ j) $\dfrac{\cos 3x+\cos x}{\cos 4x+\cos 2x}+\dfrac{\sin 3x+\sin x}{\sin 4x+\sin 2x}$

k) $\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$ l) $\dfrac{1}{1-\sin x}-\dfrac{\sin x}{1-\sin^2 x}-\dfrac{1}{1+\sin x}$

m) $\dfrac{\sin 2x}{\cos^2 x}$ n) $\dfrac{\sin x+\sin 5x-\sin 3x}{\cos x+\cos 5x-\cos 3x}$

o) $\dfrac{1-\tan^2 x}{\cos 2x}$ p) $\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos x}-\dfrac{4\cos^2(x/2)}{\tan^2 x}$

q) $\dfrac{\sin^2 x-1}{\cos^2 x-1}$ r) $\dfrac{\sin(\pi/6+x)-\sin(\pi/6-x)}{\cos(\pi/3+x)+\cos\pi/3-x}$

s) $\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ t) $\cos(\pi/4+x)-\cos(\pi/4-x)$

3. 證明以下等式：

$$\sin^2(n\theta)-\sin^2(m\theta)=\sin[(n+m)\theta]\sin[(n-m)\theta]$$

由此，解方程$\sin^2(3\theta)-\sin^2(2\theta)-\sin\theta=0$，其中$0\le\theta\le\pi$。

4. (a) 試以$\cot\theta$表述 $\cot 4\theta$。由此，解方程$x^4-4x^3-6x^2+4x+1=0$. (答案以π表示。)

   (b) i. 若 $\cos\theta-\cos\phi=a$ 及 $\sin\theta-\sin\phi=b$ $(b\neq 0)$，證明

$$\frac{1}{2}(2-a^2-b^2)=\cos(\theta-\phi) \text{ and } \frac{-a}{b}=\tan\frac{\theta+\phi}{2}.$$

   ii. 解以下方程組

$$\begin{cases}\cos\theta-\cos\phi=1\\ \sin\theta-\sin\phi=\sqrt{3}\end{cases}$$

   其中 $0\le\theta\le 2\pi$ 及 $0\le\phi\le 2\pi$。

5. (a) 解方程 $\sin x-\sin 2x+\sin 3x=0$， $0<x<2\pi$。

(b) 設$f(\theta) = \sin 2\theta + \sin\theta + \cos\theta$。

i. 試以p表述 $f(\theta)$，其中$p = \sin\theta + \cos\theta$。

ii. 利用(i)和配方法，求 $f(\theta)$的最小值。若$0 < \theta < \pi$，求 θ 的值使得 $f(\theta)$ 到達最小值。

6. 解方程：$2\sin x + 3\cos x = 1$.

7. 證明$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

8. 利用數學歸納法，證明乘方形式及其衍理。