Reference from Introduction to Real Analysis, by R. Bartle and D. Sherbert.

無窮小量與無窮大量

在高等數學，對於無窮的討論，一般從無窮小量開始。何爲無窮小量？即一個非常接近0的變量不斷向零靠近，而永遠無法到達0，即爲無窮小量。

我們可以考慮數列$\{a_n\}$, 其中對於任意整數n，$a_n = \dfrac{1}{10^n}$。則當n越大時，a_n越靠近0。對此，記

$$a_n \to 0$$

考慮對任意n，均有$\varepsilon > 0$使得$0 < \varepsilon < a_n$，則稱變量ε為無窮小量。記$\varepsilon \to 0$。

相對的，考慮數列$\{A_n\}$, 其中對於任意整數n，$A_n = 10^n$。則當n越大時，A_n越靠近∞。對此，記

$$A_n \to \infty$$

考慮對任意n，均有$N > 0$使得$A_n < N$，則稱變量N為無窮大量。記$N \to \infty$。

由此發現，無窮小量與無窮大量互相關聯：

公設. *若*$a_n = \dfrac{1}{A_n}$，*則*

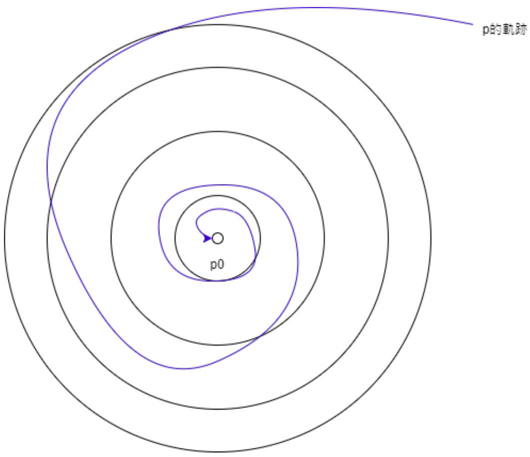
$$\lim_{A_n \to \infty} a_n = 0$$

以上亦可簡記為$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$

極限的幾何概念

想象一個漩渦，然後有一個點p在漩渦裏漂浮，其結果就是p**會不斷沿著漩渦中心繞圈，無限接近漩渦中心，但永遠不會到達中心**。此刻，我們稱p所走的路綫為p的**軌跡**，記$p(t)$並以$t > 0$作時間變數，而漩渦中心p_0則爲p的軌跡的極限，記

$$p_0 = \lim_{t\to\infty} p(t)$$



留意上圖，p的軌跡從外圍開始，不斷趨近於p_0。可見對於任何圓心為p_0且半徑爲$r > 0$的圓形，均有$p(t)$位於圓形內。我們稱$p(t)$的極限**收斂**；反之，若$p(t)$沒有唯一極限（甚至沒有極限），我們稱之爲**發散**。

那麼，該如何證明極限收斂性成爲了微分數學一個重要命題。對此，幾何學家定名了一個數學模型，稱爲**賦距空間**，指一個數學空間中，擁有計算距離的函數：

定義 1 (距離函數). *對於一個數集S，若函數$d : S \times S \to \mathbb{R}$符合以下條件：*

- *(正定性)對於任何$x, y \in S$，均有$d(x, y) \geq 0$；$d(x, y) = 0$當且僅當$x = y$。*
- *(對稱性)對於任何$x, y \in S$，$d(x, y) = d(y, x)$。*
- *(三角不等式)對於任何$x, y, z \in S$，$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$。*

則稱d為S的距離函數。

定義 2 (賦距空間). *設d為數集S的距離函數，則稱(S, d)為賦距空間。*

例子. *若$d(x, y) = \sqrt{(x-y)^2} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，則$(\mathbb{R}, d)$為賦距空間。*

證明. 證明函數d符合距離公式條件：

1. 正定性：$d(x, y) = \sqrt{(x-y)^2} \geq \sqrt{0} = 0$。同時

$$d(x, y) = 0 \iff (x-y)^2 = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$$

2. 對稱性：$d(x, y) = \sqrt{(x-y)^2} = \sqrt{(y-x)^2} = d(y, x)$。

3. 三角不等式：

$$\begin{aligned}
[d(x,z)]^2 &= (x-z)^2 \\
&= (x-y+y-z)^2 \\
&= (x-y)^2 + 2(x-y)(y-z) + (y-z)^2 \\
&\leq [d(x,y)]^2 + 2[d(x,y)][d(y,z)] + [d(y,z)]^2 \\
&= [d(x,y) + d(y,z)]^2
\end{aligned}$$

因此，d為$\mathbb{R}$上的距離公式，$(\mathbb{R}, d)$為賦距空間。 □

小記. 此距離為絕對值函數$|\cdot|$。

例子. 設$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$。若$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，則$(\mathbb{R}^2, d)$為賦距空間。

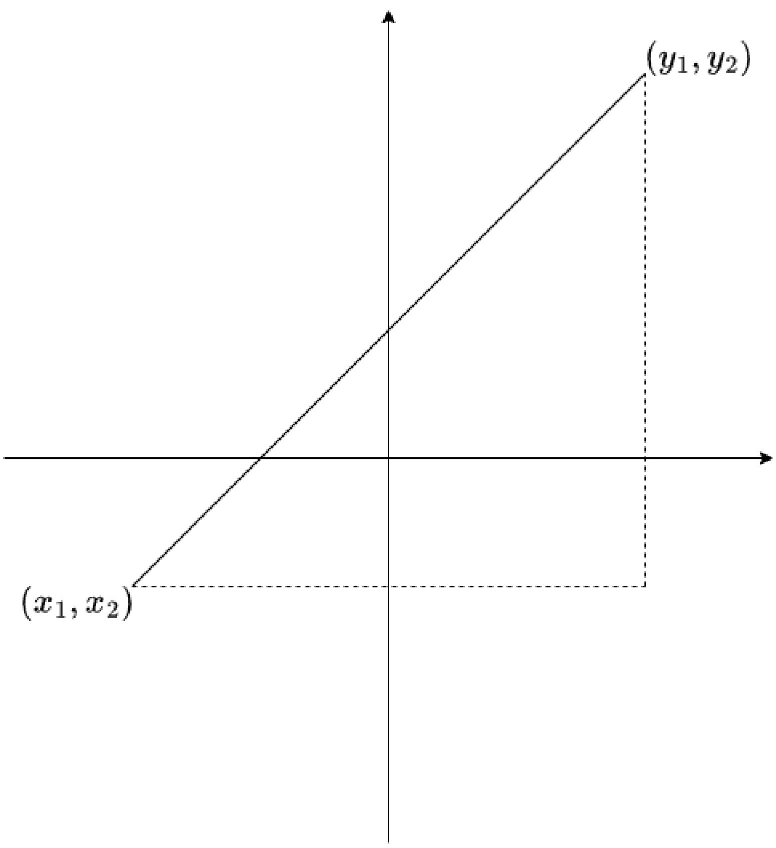


Figure 1: 歐氏幾何：$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$即xy坐標平面

證明. 證明函數d符合距離公式條件：

1. 正定性：$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\geq\sqrt{0}=0$。同時

$$d(x,y)=0 \iff (x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2=0 \iff \begin{cases} x_1-y_1=0 \\ x_2-y_2=0 \end{cases} \iff x=y$$

2. 對稱性：$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}=d(y,x)$。

3. 三角不等式：證明留作習題。

因此，d為$\mathbb{R}^2$上的距離公式，$(\mathbb{R}^2,d)$為賦距空間。 □

小記. 此距離為歐式距離函數，亦稱通常距離。

在正規數學當中，無論是在一維、二維、三維，還是更高維的賦距空間，我們都希望擁有極限收斂。利用距離公式定義收斂性，可讓我們對收斂性有更直觀的判斷。現定義於賦距空間(S,d)上p點的ε-**鄰域**為

$$U_\varepsilon(p):=\{q\in S: d(p,q)<\varepsilon\}$$

定義 3 (聚點). 設$x(t)$為軌跡，若有x_0令任何$\varepsilon>0$，均有$x(t)\in U_\varepsilon(x_0)$，則$x_0$為$x(t)$的聚點。

定義 4 (聚點(2)). 設(x_n)為一系列點，若有x_0令任何$\varepsilon>0$，均有$x_n\in U_\varepsilon(x_0)$，則$x_0$為$x_n$的聚點。

定義 5 (極限收斂). 設x_0為(x_n)的聚點，而且對於任何$n>0$，均有$\varepsilon>0$使得所有$m>n$都有$x_m\in U_\varepsilon(x_0)$，則稱$x_0$為$(x_n)$的極限，或$(x_n)$收斂於$x_0$。

例子. 設$x_n:=\dfrac{1}{n}$，則(x_n)在$(\mathbb{R},|\cdot|)$收斂於0，$\lim_{n\to\infty}x_n=0$。

證明. 對於任意$n>0$，均可設$\varepsilon=\frac{1}{n}$使得當$m>n$時

$$d(x_m,0)=\frac{1}{m}<\frac{1}{n}=\varepsilon$$

□

$\varepsilon-\delta$定義-於無窮小的極限

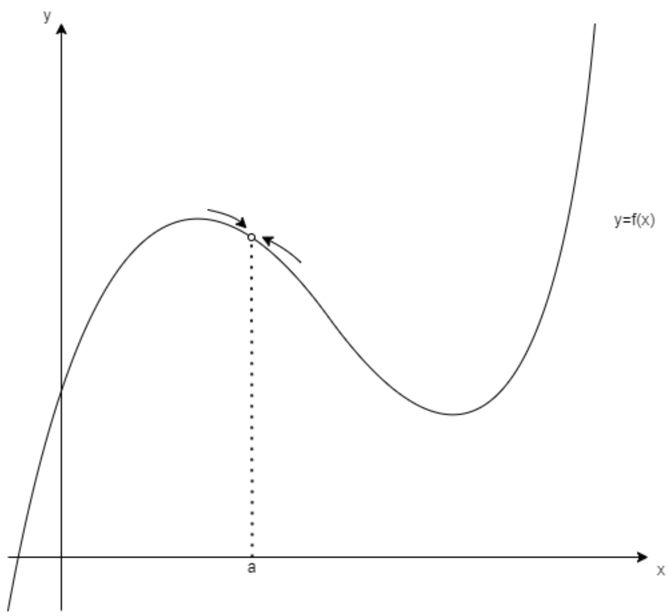
當討論與函數相關時，我們必須將原有的幾何看法濃縮至代數看法，以方便計算。作爲入門理解，目前以$C(\overline{\mathbb{R}})$作討論範圍（即所有函數$f:\overline{\mathbb{R}}\to\overline{\mathbb{R}}$），這裏以$\overline{\mathbb{R}}$指代賦距空間$(\overline{\mathbb{R}},|\cdot|)$。

$\overline{\mathbb{R}}$的定義如下：

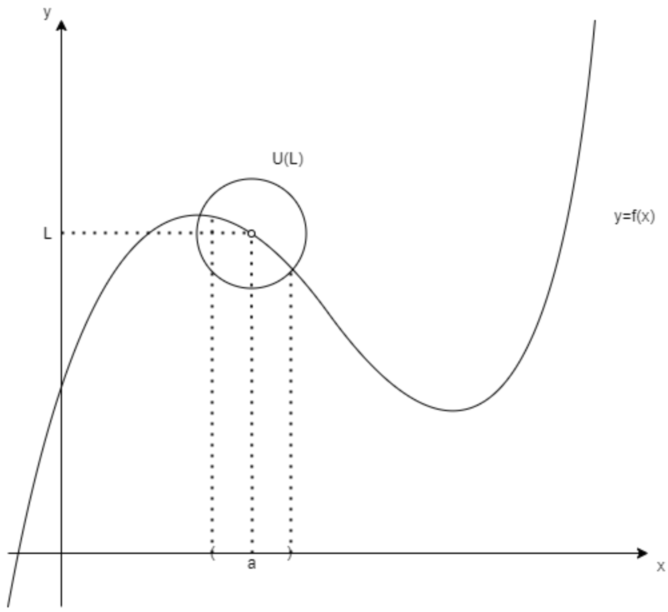
定義 6 (拓展實域). $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$，同時定義：

- $a + \infty = +\infty + a = +\infty$，當$a \neq -\infty$；
- $a - \infty = -\infty + a = -\infty$，當$a \neq +\infty$；
- $a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot a = \pm\infty$，當$a > 0$；
- $a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot a = \mp\infty$，當$a < 0$；
- $\dfrac{a}{\pm\infty} = 0$，當$a \in \mathbb{R}$；
- $\dfrac{\pm\infty}{a} = \pm\infty$，當$a > 0$；
- $\dfrac{\pm\infty}{a}$，當$a < 0$。

討論函數的極限，我們考慮下圖：



如上圖，我們希望求得$\lim_{x\to a} f(x)$的值，故以幾何角度觀看，這等同於對任意$\varepsilon > 0$，當$f(x) \in U_\varepsilon(L)$時，存在$\delta > 0$使得$x \in U_\delta(a)$，其中$L = \lim_{x\to a} f(x)$。



故此，以$|\cdot|$作爲距離函數，$x \in U_\delta(a)$等價於$|x-a| < \delta$，$y \in U_\varepsilon(L)$等價於$|y - L| < \varepsilon$，可得以下極限定理：

定理. 設f為函數，f在a存在極限當且僅當對於任意$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$使得所有x符合$0 < |x-a| < \delta$時，

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

此則寫$L = \lim_{x\to a} f(x)$。

例子. 證明$\lim_{x\to a} x = a$。

證明. 設$\varepsilon > 0$及$\delta < \varepsilon$。

若$0 < |x-a| < \delta$，則

$$\begin{aligned} |x-a| &< \delta \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

□

例子. 證明$\lim_{x\to a} x^n = a^n$，$n > 1$為整數。

證明. 設$\varepsilon > 0$及$\delta < \dfrac{\varepsilon}{nM^{n-1}}$，其中$M := \max\{|a-\delta|, |a+\delta|\}$。

若$0 < |x-a| < \delta$，則

$$\begin{aligned}
|x^n - a^n| &= |x-a| |\sum_{i=0}^{n-1} x^i a^{n-i-1}| \\
&\le |x-a| \sum_{i=0}^{n-1} |x^i a^{n-i-1}| \\
&\le |x-a| \sum_{i=0}^{n-1} |M^i M^{n-i-1}| \\
&= |x-a| n M^{n-1} \\
&< \delta \cdot n M^{n-1} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

□

從定義及定理不難發現，極限的求值無關$x = a$，說明$x = a$是一個可排除不理的點。我們稱之爲**可移去點**(point of removable discontinuity)。

有鑒於可移去點的概念，我們求得更多難以想象、非必然但可以理解的極限的值。

例子. 證明$\lim_{x\to a} \dfrac{x^{n+1} - a^{n+1}}{x-a} = (n+1)a^n$，$n \ge 0$為整數。

證明. 設$\varepsilon > 0$及$\delta < \dfrac{2\varepsilon}{n(n+1)M^{n-1}}$，其中$M := \max\{|a-\delta|, |a+\delta|\}$。

若$0 < |x-a| < \delta$，則

$$\begin{aligned}
|\frac{x^{n+1}-a^{n+1}}{x-a}-(n+1)a^n| &= |\sum_{i=0}^{n} x^i a^{n-i}-(n+1)a^n| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} |x^i a^{n-i}-a^n| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |a^{n-i}||x^i-a^i| \\
&\leq |x-a|\sum_{i=1}^{n} |a^{n-i}| \sum_{k=0}^{i-1} |x^k a^{i-1-k}| \\
&\leq |x-a|\sum_{i=1}^{n} M^{n-i} \sum_{k=0}^{i-1} M^k M^{i-1-k} \\
&< \delta \cdot \sum_{i=1}^{n} iM^{n-1} \\
&= \delta \cdot \frac{n(n+1)}{2} M^{n-1} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

□

上例證得$x=a$為可移去點。

對極限的討論，除了需要求得極限的值，還需要確定極限的唯一性，如此才能體現極限的價值。

定理 (唯一性). *若$f : A \to \mathbb{R}$且c是A的聚點，則f在c點上只有一個極限。*

證明. 設L, L'均爲$\lim_{x\to c} f(x)$的值，則對於任意$\varepsilon > 0$，均有：

$$\begin{aligned}
|L-L'| &= |L-f(x)+f(x)-L'| \\
&\leq |L-f(x)|+|L'-f(x)| \\
&< \varepsilon/2+\varepsilon/2 \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

□

極限的性質

理解了極限的唯一性，現在可以更進一步探討極限的性質，包括其運算原理和重要定理。

定義 7 (運算符). 設f, g為實函數，則定義以下函數運算：

- 定義加法為$f+g$，並理解爲$(f+g)(x) := f(x)+g(x)$。
- 定義減法為$f-g$，並理解爲$(f-g)(x) := f(x)-g(x)$。
- 定義乘法為fg，並理解爲$(fg)(x) := f(x)g(x)$。
- 若$g(x)\neq 0$，定義除法為$\frac{f}{g}$，並理解爲$(\frac{f}{g})(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$。

定理. 若$\lim_{x\to c} f(x) = L$及$\lim_{x\to c} g(x) = M$，則：

- $\lim_{x\to c}(f+g) = L+M$；
- $\lim_{x\to c}(f-g) = L-M$；
- $\lim_{x\to c}(fg) = LM$；
- 若$M\neq 0$，$\lim_{x\to c}(f/g) = L/M$。

證明. 加法：對於任意$\varepsilon > 0$，均有：

$$\begin{aligned}|(f+g)-(L+M)| &= |L-f(x)+g(x)-M| \\ &\leq |L-f(x)|+|M-g(x)| \\ &< \varepsilon/2+\varepsilon/2 \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

減法：對於任意$\varepsilon > 0$，均有：

$$\begin{aligned}|(f-g)-(L-M)| &= |f(x)-L+M-g(x)| \\ &\leq |L-f(x)|+|M-g(x)| \\ &< \varepsilon/2+\varepsilon/2 \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

乘法：對於任意$\varepsilon > 0$，均有：

$$\begin{aligned}|(fg)-(LM)| &= |f(x)g(x)-Lg(x)+Lg(x)-LM| \\ &\leq |g(x)||L-f(x)|+|L||M-g(x)| \\ &< (|M|+\varepsilon)\varepsilon/(2|M|+\varepsilon)+|L|\varepsilon/2|L| \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

除法：對於任意$\varepsilon > 0$，均有：

$$
\begin{aligned}
|(f/g)-(L/M)| &= |Mf(x)-LM+LM-Lg(x)|/|LM| \\
&\leq |L-f(x)|/|L|+|M-g(x)|/|M| \\
&< |L|\varepsilon/2|L|+|M|\varepsilon/2|M| \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

□

以上定理其實就是極限的分配律：

- $\lim_{x\to c}(f+g)=\lim_{x\to c}f(x)+\lim_{x\to c}g(x)$；
- $\lim_{x\to c}(f-g)=\lim_{x\to c}f(x)-\lim_{x\to c}g(x)$；
- $\lim_{x\to c}(fg)=\lim_{x\to c}f(x)\lim_{x\to c}g(x)$；
- 若$M\neq 0$，$\lim_{x\to c}(f/g)=\lim_{x\to c}f(x)/\lim_{x\to c}g(x)$。

設理. 設f,g,h為函數，并且對於所有$x\in\mathbb{R}$符合$g(x)\leq f(x)\leq h(x)$，若$\lim_{x\to c}g(x)=\lim_{x\to c}h(x)$，則

$$\lim_{x\to c}g(x)=\lim_{x\to c}f(x)=\lim_{x\to c}h(x)$$

證明. 設$\lim_{x\to c}g(x)=\lim_{x\to c}h(x)=L$，則

$$-\varepsilon\leq g(x)-L\leq f(x)-L\leq h(x)-L\leq\varepsilon$$

因此，$|f(x)-L|\leq\varepsilon$。 □

以上定理汎用性極高，如下列例子：

例子. 求$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}$。

因$-1\leq\sin x\leq 1$，

$$\frac{-1}{n}\leq\frac{\sin n}{n}\leq\frac{1}{n}\implies\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$$

特殊的極限

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

由於證明以上極限需使用泰勒展開式，故目前不做證明。（或以切綫解釋：需要導數基礎）

連續函數

定義 8 (連續函數). 設f為函數，f在a存在連續性當且僅當對於任意$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$使得所有x符合$0 < |x-a| < \delta$時，

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

若f不符合以上條件，則稱f在a不連續。

定義 9. 設$f : D \to R$為函數，若f對所有$a \in D$均存在連續性，則稱f為D上的連續函數。

例子.

1. 常函數$f(x) := b$是$\mathbb{R}$上的連續函數。
2. 函數$f(x) := x$是$\mathbb{R}$上的連續函數。
3. 函數$f(x) := x^2$是$\mathbb{R}$上的連續函數。
4. 函數$f(x) := \dfrac{1}{x}$是$\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$上的連續函數。
5. 函數$f(x) := \dfrac{1}{x}$不是$\mathbb{R}$上的連續函數。
6. 函數$f(x) := \begin{cases} 1 & 若x為有理數 \\ 0 & 若x為無理數 \end{cases}$是$\mathbb{R}$上的連續函數。

小記. 若f不在c上連續，但在c上存在極限，則可得

$$g(x) := \begin{cases} \lim_{x \to c} f(x) & x = c \\ f(x) & x \neq c \end{cases}$$

為連續函數。此概念多見於拓展函數。

連續函數的性質

與極限相似，連續性亦擁有綫性性。

定理. 若f, g為連續函數，則：

- $f \pm g, fg$均爲連續函數；
- 若$g \neq 0$，f/g為連續函數。

證明. 證明只需引用連續函數之定義即可。 □

例子. 1. 多項式函數：$p(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$。

2. 有理函數：$r(x) := \dfrac{p(x)}{q(x)}$，而$x \notin \{\alpha_i : q(\alpha_i) = 0\}$。

3. （基本）三角函數：$\sin x$和$\cos x$。

   證明. 基於$|\sin x| \leq |x|$和$|\cos x| \leq 1$（同理，對於$\cos x$），可得

$$|\sin x - \sin c| = 2|\sin[\frac{1}{2}(x-c)]||\cos[\frac{1}{2}(x+y)]| \leq 2 \cdot \frac{1}{2}|x-c| = |x-c|$$

□

4. 三角函數：$\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$。證明從有理函數可得。

定理 (複合函數的延續性)**.** 若$f : A \to B,\ g : C \to D$均爲連續函數，且$B \subset C$，則

$$h(x) := (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

亦爲連續函數。

證明. 留做習題。 □

區間上的連續函數

定義 10 (有界性)**.** 函數$f : D \to R$被稱爲**在**A**上有界**若存在$M > 0$使得對於任意$x \in D$，均有$|f(x)| \leq M$。

換言之，有界性的定義在於f是一個值域受限的函數，以便討論極大極小值。反之，爲無界。

定理. 設$I := [a, b]$為閉合區間，並設$f : I \to \mathbb{R}$為連續函數，則f在I上有界。

定義 11 (絕對極值)**.** 設$A \subset \mathbb{R}$及$f : A \to \mathbb{R}$。

- 若存在$x^* \in A$使得對於所有$x \in A$均有

$$f(x^*) \geq f(x)$$

  則稱f有**絕對峰值**，x^*為**峰點**。

- 若存在$x_* \in A$使得對於所有$x \in A$均有

$$f(x_*) \leq f(x)$$

  則稱f有**絕對谷值**，x_*為**谷點**。

倘若連續函數存在峰點$x^* > 0$與谷點$x_* < 0$，則有以下理論：

定理 (根點). 設$I = [a, b]$並設$f : I \to \mathbb{R}$為連續函數。若$f(a) < 0 < f(b)$或$f(b) < 0 < f(a)$，則存在$c \in (a, b)$使得$f(c) = 0$。

衍理 (介值定理). 設$I = [a, b]$並設$f : I \to \mathbb{R}$為連續函數。若$f(a) < k < f(b)$或$f(b) < k < f(a)$，則存在$c \in (a, b)$使得$f(c) = k$。