矩陣的定義

定義 1 (矩陣). **矩陣**是代數學中一種特殊的表達形式，用以同時表達多位元的表格：

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

若元素$a_{ij} \in S$則稱爲**S上的$m\times n$矩陣**，記$\mathbf{A} \in \mathbb{M}^{m\times n}$。

定義 2 (矩陣的加法與乘法定義). 給定$\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{M}^{m\times n}$，$\mathbf{C} \in \mathbb{M}^{n\times t}$，則

1. 加法：$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})$。
2. 數乘：$k\mathbf{A} = (ka_{ij})$。
3. 矩陣乘法：$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj})$。

例子. 設$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$，則

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1+2 & 1+1 & 0+0 \\ 1+1 & 0+2 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$。
2. $4\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$。
3. $\mathbf{A} \times \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1\times 2 + 1\times 2 + 0\times 3 & 1\times 0 + 1\times 1 + 0\times 3 \\ 1\times 2 + 0\times 2 + 1\times 3 & 1\times 0 + 0\times 1 + 1\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$。

定義 3 (特殊矩陣). 下列為一些矩陣寫法的共識：

- 零矩陣：$\mathbf{0}_{m\times n} = \mathbf{O}_{m\times n} = (0)_{m\times n}$。
- 一矩陣：$\mathbf{1}_{m\times n} = (1)_{m\times n}$。
- 單位矩陣：$\mathbf{I}_{m\times n} = (\delta_{ij})_{m\times n}$，其中$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$。

設理 (加法與數乘定則). 設$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{M}^{m\times n}$，則

1. 加法結合律：$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$。
2. 加法交換律：$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$。
3. $\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$。
4. $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0}$。
5. $a(\mathbf{A}+\mathbf{B})=a\mathbf{A}+\mathbf{B}$。
6. $(a+b)\mathbf{A}=a\mathbf{A}+b\mathbf{A}$。
7. $(ab)\mathbf{A}=a(b\mathbf{A})$

設理 (矩陣乘法定則). 設$\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}$為矩陣，則

1. 乘法結合律：$(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$。
2. 分配律1：$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$。
3. 分配律2：$\mathbf{D}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathbf{DA}+\mathbf{DB}$。
4. $\alpha\mathbf{AB}=(\alpha\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$。
5. $\mathbf{AI}=\mathbf{IA}=\mathbf{A}$。

定義 4 (綫性組合). 設$c_1,c_2,\ldots,c_\ell$為常數，$\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\ldots,\mathbf{A}_\ell\in\mathbb{M}_{m\times n}$，則稱

$$\sum_{k=1}^{\ell}c_k\mathbf{A}_k=c_1\mathbf{A}_1+c_2\mathbf{A}_2+\cdots+c_\ell\mathbf{A}_\ell$$

為綫性組合。

例子. 設$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，則可寫

$$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=3e_1+2e_2+e_1$$

小記. 以上例子便是矩陣與綫性方程組的關係。

綫性方程組

擴增矩陣

逆矩陣

行列式

矩陣的幾何含義