無窮小量與無窮大量

在高等數學，對於無窮的討論，一般從無窮小量開始。何爲無窮小量？即一個非常接近0的變量不斷向零靠近，而永遠無法到達0，即爲無窮小量。

我們可以考慮數列$\{a_n\}$, 其中對於任意整數n，$a_n = \frac{1}{10^n}$。則當n越大時，a_n越靠近0。對此，記

$$a_n \to 0$$

考慮對任意n，均有$\varepsilon > 0$使得$0 < \varepsilon < a_n$，則稱變量ε為無窮小量。記$\varepsilon \to 0$。

相對的，考慮數列$\{A_n\}$, 其中對於任意整數n，$A_n = 10^n$。則當n越大時，A_n越靠近∞。對此，記

$$A_n \to \infty$$

考慮對任意n，均有$N > 0$使得$A_n < N$，則稱變量N為無窮大量。記$N \to \infty$。

由此發現，無窮小量與無窮大量互相關聯：

公設. *若*$a_n = \frac{1}{A_n}$，*則*

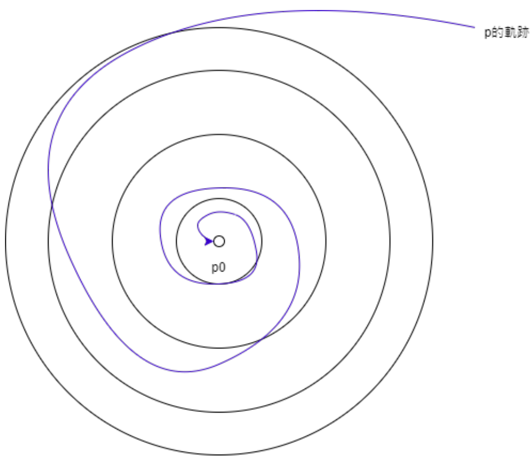
$$\lim_{A_n \to \infty} a_n = 0$$

以上亦可簡記為$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

極限的幾何概念

想象一個漩渦，然後有一個點p在漩渦裏漂浮，其結果就是p**會不斷沿著漩渦中心繞圈，無限接近漩渦中心，但永遠不會到達中心**。此刻，我們稱p所走的路綫為p的**軌跡**，記$p(t)$並以$t > 0$作時間變數，而漩渦中心p_0則爲p的軌跡的極限，記

$$p_0 = \lim_{t\to\infty} p(t)$$



留意上圖，p的軌跡從外圍開始，不斷趨近於p_0。可見對於任何圓心為p_0且半徑爲$r > 0$的圓形，均有$p(t)$位於圓形內。我們稱$p(t)$的極限**收斂**；反之，若$p(t)$沒有唯一極限（甚至沒有極限），我們稱之爲**發散**。

那麼，該如何證明極限收斂性成爲了微分數學一個重要命題。對此，幾何學家定名了一個數學模型，稱爲**賦距空間**，指一個數學空間中，擁有計算距離的函數：

定義 1 (距離函數). 對於一個數集S，若函數$d : S \times S \to \mathbb{R}$符合以下條件：

- *(正定性)*對於任何$x, y \in S$，均有$d(x, y) \geq 0$；$d(x, y) = 0$當且僅當$x = y$。
- *(對稱性)*對於任何$x, y \in S$，$d(x, y) = d(y, x)$。
- *(三角不等式)*對於任何$x, y, z \in S$，$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$。

則稱d為S的距離函數。

定義 2 (賦距空間). 設d為數集S的距離函數，則稱(S, d)為賦距空間。

例子. 若$d(x, y) = \sqrt{(x-y)^2} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，則$(\mathbb{R}, d)$為賦距空間。

證明. 證明函數d符合距離公式條件：

1. 正定性：$d(x, y) = \sqrt{(x-y)^2} \geq \sqrt{0} = 0$。同時

$$d(x, y) = 0 \iff (x-y)^2 = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$$

2. 對稱性：$d(x, y) = \sqrt{(x-y)^2} = \sqrt{(y-x)^2} = d(y, x)$。

3. 三角不等式：

$$\begin{aligned}
[d(x,z)]^2 &= (x-z)^2 \\
&= (x-y+y-z)^2 \\
&= (x-y)^2 + 2(x-y)(y-z) + (y-z)^2 \\
&\leq [d(x,y)]^2 + 2[d(x,y)][d(y,z)] + [d(y,z)]^2 \\
&= [d(x,y) + d(y,z)]^2
\end{aligned}$$

因此，d為$\mathbb{R}$上的距離公式，$(\mathbb{R}, d)$為賦距空間。 □

小記. 此距離為絕對值函數$|\cdot|$。

例子. 設$x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)$。若$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$，則$(\mathbb{R}^2,d)$為賦距空間。

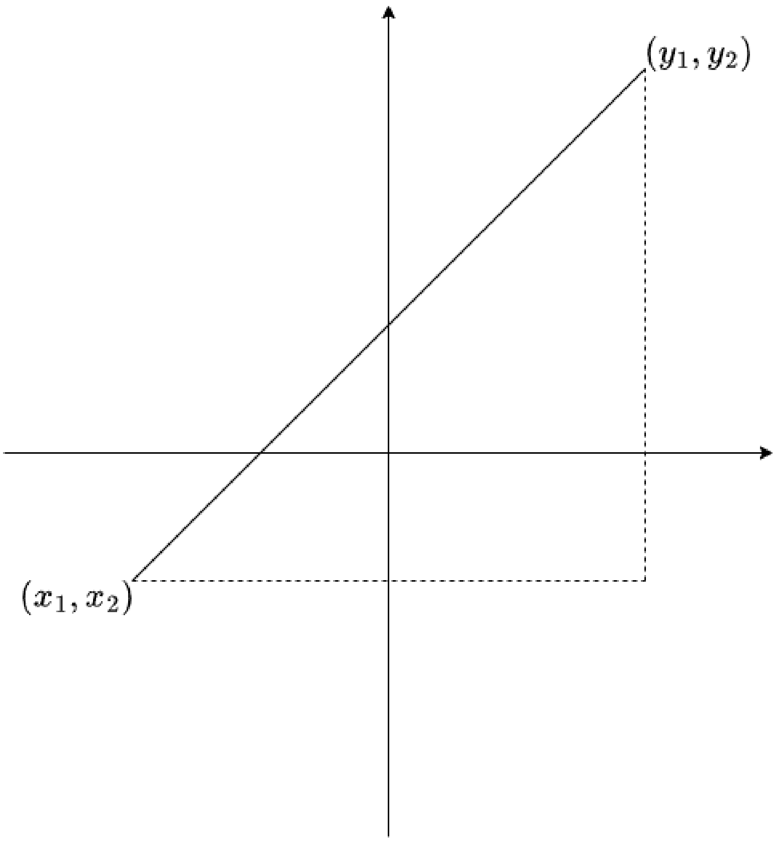


Figure 1: 歐氏幾何：$\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$即xy坐標平面

證明. 證明函數d符合距離公式條件：

1. 正定性：$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\geq\sqrt{0}=0$。同時

$$d(x,y)=0 \iff (x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2=0 \iff \begin{cases} x_1-y_1=0 \\ x_2-y_2=0 \end{cases} \iff x=y$$

2. 對稱性：$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}=d(y,x)$。

3. 三角不等式：證明留作習題。

因此，d為$\mathbb{R}^2$上的距離公式，$(\mathbb{R}^2,d)$為賦距空間。 □

小記. 此距離為歐式距離函數，亦稱通常距離。

在正規數學當中，無論是在一維、二維、三維，還是更高維的賦距空間，我們都希望擁有極限收斂。利用距離公式定義收斂性，可讓我們對收斂性有更直觀的判斷。現定義於賦距空間(S,d)上p點的ε-**鄰域**為

$$U_\varepsilon(p) := \{q \in S : d(p,q) < \varepsilon\}$$

定義 3 (聚點). 設$x(t)$為軌跡，若有x_0令任何$\varepsilon > 0$，均有$x(t) \in U_\varepsilon(x_0)$，則$x_0$為$x(t)$的聚點。

定義 4 (聚點(2)). 設(x_n)為一系列點，若有x_0令任何$\varepsilon > 0$，均有$x_n \in U_\varepsilon(x_0)$，則$x_0$為$x_n$的聚點。

定義 5 (極限收斂). 設x_0為(x_n)的聚點，而且對於任何$n > 0$，均有$\varepsilon > 0$使得所有$m > n$都有$x_m \in U_\varepsilon(x_0)$，則稱$x_0$為$(x_n)$的極限，或$(x_n)$收斂於$x_0$。

例子. 設$x_n := \dfrac{1}{n}$，則(x_n)在$(\mathbb{R}, |\cdot|)$收斂於0，$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$。

證明. 對於任意$n > 0$，均可設$\varepsilon = \frac{1}{n}$使得當$m > n$時

$$d(x_m, 0) = \frac{1}{m} < \frac{1}{n} = \varepsilon$$

□

$\varepsilon - \delta$定義-於無窮小的極限

極限的性質

特殊的極限

於無窮大的極限

連續函數

連續函數的性質

介值定理

單調函數與逆函數