

矩陣的定義

定義 1 (矩陣). 矩陣是代數學中一種特殊的表達形式, 用以同時表達多位元的表格:

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

若元素 $a_{ij} \in S$ 則稱為 S 上的 $m \times n$ 矩陣, 記 $\mathbf{A} \in \mathbb{M}^{m \times n}(S) = \mathbb{M}_S^{m \times n}$ 。

示例. 以下為矩陣的例子:

1. $1 =: [1] \in \mathbb{M}^{1 \times 1}(\mathbb{R})$ 。

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}^{2 \times 2}(\mathbb{R})$ 。

3. $\begin{bmatrix} 1+2i & 3-4i & i \\ -i & 1 & 2-i \end{bmatrix} \in \mathbb{M}^{2 \times 3}(\mathbb{C})$ 。

定義 2 (矩陣的加法與乘法定義). 給定 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{M}^{m \times n}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{M}^{n \times t}$, 則

1. 加法: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})$ 。

2. 數乘: $k\mathbf{A} = (ka_{ij})$ 。

3. 矩陣乘法: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj})$ 。

示例. 設 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, 則

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1+2 & 1+1 & 0+0 \\ 1+1 & 0+2 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 。

2. $4\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 。

3. $\mathbf{A} \times \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 1 \times 2 + 0 \times 3 & 1 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 3 \\ 1 \times 2 + 0 \times 2 + 1 \times 3 & 1 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ 。

定義 3 (特殊矩陣). 下列為一些矩陣寫法的共識:

- 零矩陣: $\mathbf{0}_{m \times n} = \mathbf{O}_{m \times n} = (0)_{m \times n}$.
- 一矩陣: $\mathbf{1}_{m \times n} = (1)_{m \times n}$.
- 單位矩陣: $\mathbf{I}_{m \times n} = (\delta_{ij})_{m \times n}$, 其中 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$.

命題 (加法與數乘定則). 設 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{M}^{m \times n}$, 則

1. 加法結合律: $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$.
2. 加法交換律: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.
3. $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$.
4. $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.
5. $a(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a\mathbf{A} + a\mathbf{B}$.
6. $(a + b)\mathbf{A} = a\mathbf{A} + b\mathbf{A}$.
7. $(ab)\mathbf{A} = a(b\mathbf{A})$.

命題 (矩陣乘法定則). 設 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ 為矩陣, 則

1. 乘法結合律: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.
2. 分配律 I: $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$.
3. 分配律 II: $\mathbf{D}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{DA} + \mathbf{DB}$.
4. $\alpha\mathbf{AB} = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$.
5. $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$.

定義 4 (綫性組合). 設 c_1, c_2, \dots, c_ℓ 為常數, $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_\ell \in \mathbb{M}_{m \times n}$, 則稱

$$\sum_{k=1}^{\ell} c_k \mathbf{A}_k = c_1 \mathbf{A}_1 + c_2 \mathbf{A}_2 + \cdots + c_\ell \mathbf{A}_\ell$$

為綫性組合。

示例. 設 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 則可寫

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3e_1 + 2e_2 + e_3$$

示例. 設 $E_n \in \mathbb{M}^{3 \times 3}$, 對於 $1 \leq n \leq 9$, $E_n = (e_{ij})_{3 \times 3}$ 而且

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & n = 3(i-1) + j \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

, 則可寫

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^9 k E_k$$

小記. 以上例子便是矩陣與綫性方程組的關係。

綫性方程組

綫性方程組主要用以表達兩條或多條同時成立的綫性方程，最具代表性的可數初中的聯立方程：

$$\begin{cases} ax + by = k_1 \\ cx + dy = k_2 \end{cases}$$

當然，綫性方程組的含義不僅是二元一次方程，更可以拓展到多元一次(綫性)方程：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

示例. 以下是綫性方程組的例子：

$$1. \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 4z = 0 \\ -2x - 4y = 0 \end{cases}$$

解綫性方程組

欲求綫性方程組的解，我們可使代入法或消元法，其中消元法比代入法的效率更高，因此普遍數學家都會使用消元法解方程。同時此辦法也衍生出矩陣的各項命題。

示例. 求解綫性方程組
$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 6x - 2y = 9 \end{cases}$$

1. 運用代入法求解：從 $2x + 3y = 8$ 可得 $x = \frac{8 - 3y}{2}$ ，代入 $6x - 2y = 9$ 得

$$6\left(\frac{8 - 3y}{2}\right) - 2y = 9$$

$$3(8 - 3y) - 2y = 9$$

$$24 - 9y - 2y = 9$$

$$11y = 15$$

$$y = \frac{15}{11}$$

再代 $y = \frac{15}{11}$ 入 $x = \frac{8 - 3y}{2}$ 得

$$\begin{aligned} x &= \frac{8 - 3\left(\frac{15}{11}\right)}{2} \\ &= \frac{43}{22} \end{aligned}$$

因此綫性方程組的解為 $\left(\frac{43}{22}, \frac{15}{11}\right)$ 。

2. 運用消元法求解：從 $2x + 3y = 8$ 三倍後可得 $6x + 9y = 24$ ，則上式減去下式可得

$$\begin{array}{rcl} (1) \times 3 : & & 6x + 9y = 24 \\ -(2) : & & 6x - 2y = 9 \\ \hline (1) \times 3 - (2) : & & 11y = 15 \\ & & y = \frac{15}{11} \\ & & 6x - 2\left(\frac{15}{11}\right) = 9 \\ & & x = \frac{43}{22} \end{array}$$

示例. 求解綫性方程組
$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

1. 運用代入法求解：先從 $3x - y + 3z = 0$ 得出 $y = 3x + 3z$ ，代入其餘兩式可得

$$\begin{cases} 2x + 3(3x + 3z) + 4z = 1 \\ x + (3x + 3z) + z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 11x + 13z = 1 \\ 4x + 4z = 1 \end{cases}$$

再從 $4x + 4z = 1$ 得 $z = \frac{1-4x}{4}$, 代入 $11x + 13z = 1$ 得

$$11x + 13\left(\frac{1-4x}{4}\right) = 1$$

$$44x + 13 - 52x = 4$$

$$-8x = -9$$

$$x = \frac{9}{8}$$

由此可得：

$$z = \frac{1-4\left(\frac{9}{8}\right)}{4}$$

$$= -\frac{7}{8}$$

$$y = 3\left(\frac{11}{4}\right) + 3\left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{4}$$

2. 運用消元法求解：

(1) :	$2x + 3y + 4z = 1$
(2) :	$3x - y + 3z = 0$
(3) :	$x + y + z = 1$
(1) - (3) $\times 2$:	$y + 2z = -1$
(2) - (3) $\times 3$:	$-4y = -3$
	$y = \frac{3}{4}$
	$z = -\frac{7}{8}$
	$x = \frac{9}{8}$

我們亦容許綫性方程組**沒有解或有無限解**。若要理解沒有解或有無限多個解，可參考直綫的特性：

定義 5 (平行綫). 設 L_1 和 L_2 為兩條直綫，並分別以 m_1 和 m_2 代表其斜率。若 $L_1 // L_2$ ，則 $m_1 = m_2$ 。

定理 (平行綫的交點數). 設 L_1 和 L_2 為一對（歐幾里得幾何）平行綫，則 L_1 和 L_2 的交點數只能為 0 或 ∞ 。

證明. 設 m 為 L_1 及 L_2 的斜率, 及 c_1 和 c_2 分別為 L_1 及 L_2 的縱軸截距, 則

$$L_1 : y = mx + c_1, \quad L_2 : y = mx + c_2$$

若 $c_1 = c_2$, 則 $\forall x$, 若 $(x, y_1) \in L_1, (x, y_2) \in L_2$,

$$y_1 = mx + c_1 = mx + c_2 = y_2$$

由於對任意 x 均成立, 此為無限多交點。

若 $c_1 \neq c_2 \implies c_1 - c_2 \neq 0$, 則 $\forall x$, 若 $(x, y_1) \in L_1, (x, y_2) \in L_2$,

$$y_2 - y_1 = (mx + c_1) - (mx + c_2) = c_1 - c_2 \neq 0 \implies y_1 \neq y_2$$

因此沒有交點。 □

衍理. 任何一對歐幾里得二維直線可有0,1或 ∞ 交點。

示例. 以下為綫性方程組無限多解的例子:

1. 考慮 $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -3x - y = -2 \end{cases}$, 由於任何符合 $3x + y = 2$ 的點均符合 $-3x - y = -2$,
因此此方程組有無限多解。解集為

$$\{(t, 2 - 3t) : t \in \mathbb{R}\}$$

2. 考慮 $\begin{cases} 3x + y + 2z = 0 \\ x + y + 7z = 0 \\ 2x - 5z = 0 \end{cases}$, 由於上式減中式等於下式, 因此此方程組無法解下去, 有無限多解。解集為

$$\{(5t, -19t, 2t) : t \in \mathbb{R}\}$$

以下為綫性方程組沒有解的例子:

1. 考慮 $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -3x - y = 0 \end{cases}$, 由於任何符合 $3x + y = 2$ 的點均不符合 $-3x - y = 0$,
因此此方程組有無限多解。解集為

$$\emptyset$$

綫性方程組的可解性I

現記綫性方程組的通常式為

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_n \end{cases}$$

定理 (綫性方程組的可解性I). 對於 m 行 n 列綫性方程組 S , 若 $m \leq n$, 則 S 有解。

證明. 當 $m=1$ 時, $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$, 則存在綫性函數 f 使得 $x_1 = f(x_2, x_3, \dots, x_n)$ 令 $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$ 成立。

當 $1 < m < n$ 時, 已知有函數 $f_1, f_2, f_3, \dots, f_{m-1}$ 使得

$$x_1 = f_1(x_{m+1}, \dots, x_n)$$

$$x_2 = f_2(x_{m+1}, \dots, x_n)$$

$$\vdots = \vdots$$

$$x_m = f_m(x_{m+1}, \dots, x_n)$$

$$\text{令} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases} \text{成立。}$$

則 $m+1 \leq n$ 時, 存在綫性函數 f_{m+1} 使得

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= f_{m+1}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, x_{m+2}, \dots, x_n) \\ &= f_{m+1}(f_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, f_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+2}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

則存在綫性函數 F 和 g_{m+1} 使得

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= F(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n) \\ &= g_{m+1}(x_{m+2}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

因此可見存在綫性函數 g_1, g_2, \dots, g_m (若 $m + 2 > n$ 視所有 g_k 為常函數)

$$\begin{aligned}x_1 &= f_1(g_{m+1}(x_{m+2}, \dots, x_n), x_{m+2}, \dots, x_n) \\&= g_1(x_{m+2}, \dots, x_n) \\x_2 &= f_2(g_{m+1}(x_{m+2}, \dots, x_n), x_{m+2}, \dots, x_n) \\&= g_2(x_{m+2}, \dots, x_n) \\&\vdots \\&\vdots \\x_m &= f_m(g_{m+1}(x_{m+2}, \dots, x_n), x_{m+2}, \dots, x_n) \\&= g_m(x_{m+2}, \dots, x_n)\end{aligned}$$

此證畢方程解的存在性。

□

目前只有存在性能證明，因為：

1. 未能確定是否有多於一個解；
2. 當 $m > n$ 時，未知是否有解。

下一節會解決上述問題，判斷解的唯一性。

擴增矩陣

逆矩陣

行列式

矩陣的幾何含義