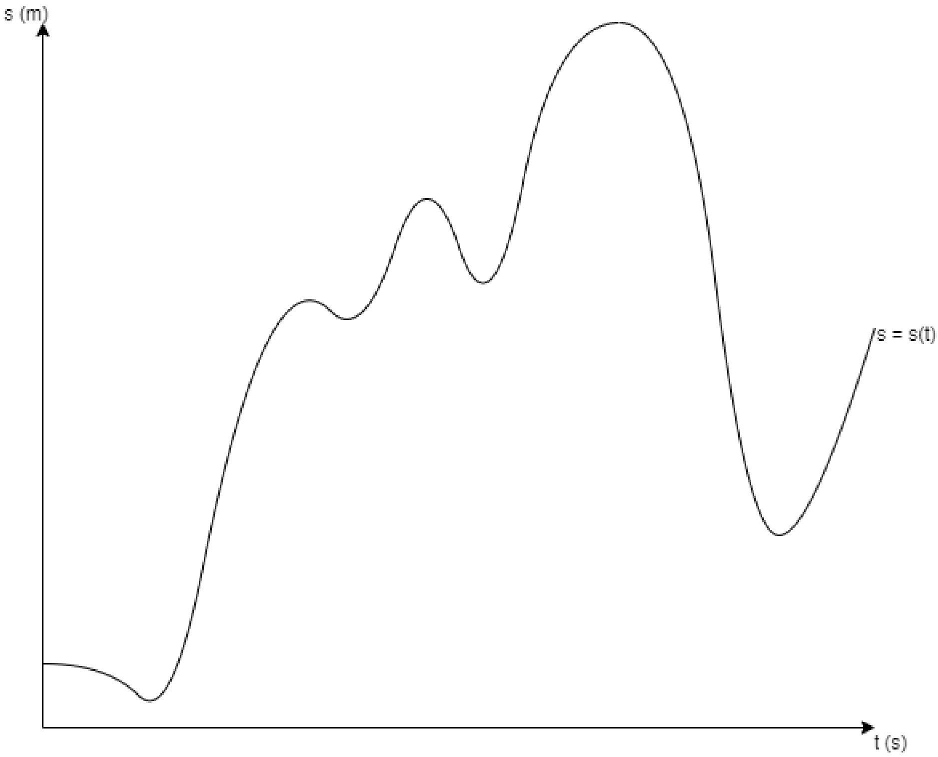
積分起源

討論積分起源，我們依然追溯到牛頓與萊布尼茨的時代。當時牛萊之爭除了微分學的發現以外，還有積分學的建立。雖説兩人整得如火如荼，但我們有著漁翁之利，可以坐享其成。

但無論如何，之所以存在積分學，是由於一道最基本的問題：假設一物體移動速度$v(t) : (0, \infty) \to \mathbb{R}$可以參數$t$量化，則可以下圖表示速度-時間之關係：

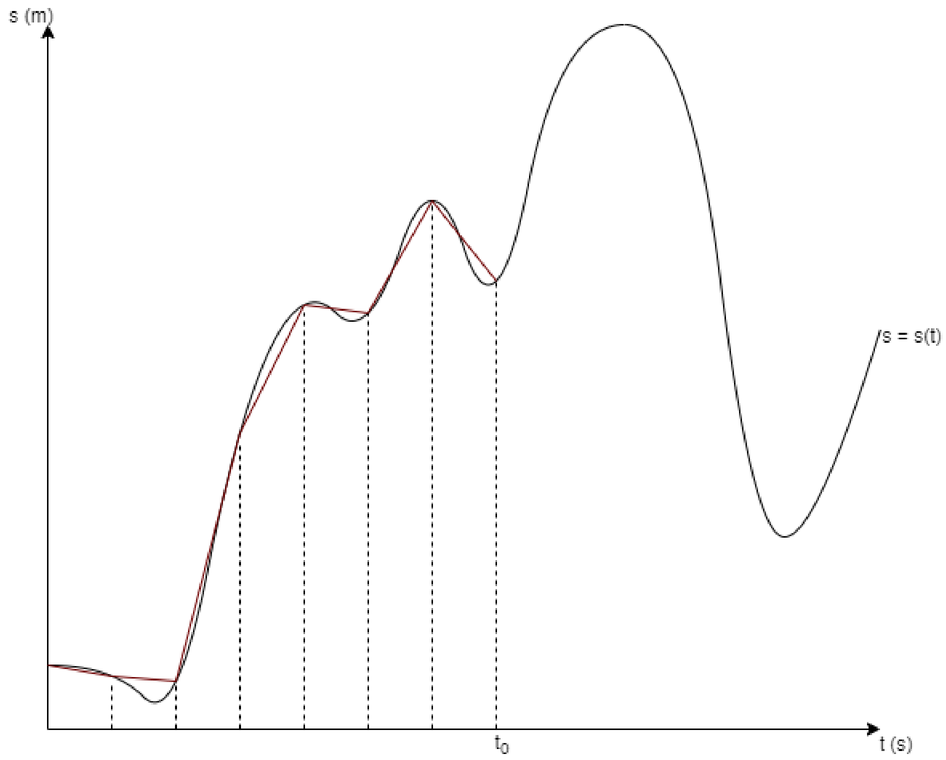


若欲求得任意時間的位移，考慮在極短時間内的瞬間位移相等於瞬時速度乘以時間跨度：設$s(t) : (0, \infty) \to \mathbb{R}$為位移函數，則

$$\Delta s(t) = v(t)\Delta t$$

并且總位移應由所有所有瞬間的瞬間位移總和得出，則可考慮將時間均分爲n段瞬間，記$t = 0$為初始時間及t_f為終結時間，并且$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = t_f$，並記對其求和：

$$s(t_f) = \sum_{k=0}^{n-1}(s(t_{k+1}) - s(t_k)) = \sum_{k=0}^{n-1} v(t_k)(t_{k+1} - t_k)$$



將$n \to \infty$便可定義

$$s(t_f) = \int_0^{t_f} v(t)dt$$

若視t_f為變量，則稱其爲**不定積分**；反之，則稱其爲**定積分**。

積分的含義

從以上簡介可以看出，積分的目的在於加法；更明確的説法是定積分在於計算面積。與中學教程不同，我們會先觀察定積分，再闡述不定積分（實際上他們只差一步）。

黎曼積分法

黎曼對於曲綫下的面積有著相當扎實的幾何見解，他認爲每一條連續曲綫都可以用分割法的方式進行求積，而且**無論分割的方法如何隨機，若分割數量趨向無限，其結果都是恆定的**。

藉著以上見解，黎曼將某區間$[a, b]$拆分爲n個區間，使得$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$並記第$k$個區間為

$$P_k := [a_{k-1}, a_k]$$

因應P_k的有限性及函數f的連續性，隨機於P_k內抽取變量$t_k \in P_k = [a_{k-1}, a_k]$，可得對於$P_k$上的曲綫面積的估算

$$f(t_k)\|P_k\|$$

其中$\|P_k\|$代表區間P_k的寬度。因此，黎曼給出的積分方法為

定義 1 (黎曼積分)**.** 設f為$[a,b]$上的連續函數，令存在$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$使得$a =: a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n := b$，並設$P := \{(t_k, P_k) : 1 \leq k \leq n\}$為**標識區間集**使得$t_k \in P_k = [a_{k-1}, a_k]$，則定義$f$在$[a,b]$上的$P$**-估算面積**為

$$S(f;P) := \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\|P_k\|$$

而精確面積為

$$\int_a^b f = S(f) := \lim_{n\to\infty} S(f;P)$$

黎曼積分屬於概念上的積分，實際情況還需要確定一種t_k的取值方法。我們先論證黎曼積分的存在性和唯一性，再討論實際應用會如何處理。

定理. 若f為有限區間內的連續函數，則f的黎曼積分有界且唯一。

證明. 由於

$$\min\{\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\|P_k\|\} \leq \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\|P_k\| \leq \max\{\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\|P_k\|\}$$
$$\sum_{k=1}^{n} \min\{f(t_k)\}\|P_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\|P_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} \max\{f(t_k)\}\|P_k\|$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \min\{f(t_k)\}\|P_k\| \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\|P_k\| \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \max\{f(t_k)\}\|P_k\|$$

對於$\|P_k\| \to 0$，可視$\min\{f(t_k)\} = \max\{f(t_k)\}$，因此$\int_a^b f$唯一存在。 □

勒貝格積分法

萊布尼茨法則

積分方法

基本積分定則

換元代入法

參數化代入法

部分積分法

費曼積分法

體積運算

圓盤法

外殼法

多元積分

雙重積分

三重積分

向量函數積分

綫積分

曲面積分