矩陣的定義

定義 1 (矩陣). **矩陣**是代數學中一種特殊的表達形式，用以同時表達多位元的表格：

$$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

若**元素**$a_{ij}\in S$則稱爲S**上的**$m\times n$**矩陣**，記$\mathbf{A}\in\mathbb{M}^{m\times n}$。

定義 2 (矩陣的加法與乘法定義). 給定$\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbb{M}^{m\times n}$，$\mathbf{C}\in\mathbb{M}^{n\times t}$，則

1. 加法：$\mathbf{A}+\mathbf{B}=(a_{ij}+b_{ij})$。
2. 數乘：$k\mathbf{A}=(ka_{ij})$。
3. 矩陣乘法：$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj})$。

示例. 設$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix},\mathbf{C}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$，則

1. $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1+2 & 1+1 & 0+0\\ 1+1 & 0+2 & 1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$。
2. $4\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & 4 & 0\\ 4 & 0 & 4\end{pmatrix}$。
3. $\mathbf{A}\times\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1\times 2+1\times 2+0\times 3 & 1\times 0+1\times 1+0\times 3\\ 1\times 2+0\times 2+1\times 3 & 1\times 0+0\times 1+1\times 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$。

定義 3 (特殊矩陣). 下列為一些矩陣寫法的共識：

- 零矩陣：$\mathbf{0}_{m\times n}=\mathbf{O}_{m\times n}=(0)_{m\times n}$。
- 一矩陣：$\mathbf{1}_{m\times n}=(1)_{m\times n}$。
- 單位矩陣：$\mathbf{I}_{m\times n}=(\delta_{ij})_{m\times n}$，其中$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$。

命題 (加法與數乘定則). 設$\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\in\mathbb{M}^{m\times n}$，則

1. 加法結合律：$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$。

2. 加法交換律：$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$。

3. $\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$。

4. $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0}$。

5. $a(\mathbf{A}+\mathbf{B})=a\mathbf{A}+\mathbf{B}$。

6. $(a+b)\mathbf{A}=a\mathbf{A}+b\mathbf{A}$。

7. $(ab)\mathbf{A}=a(b\mathbf{A})$

命題 (矩陣乘法定則). 設$\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}$為矩陣，則

1. 乘法結合律：$(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$。

2. 分配律*I*：$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$。

3. 分配律*II*：$\mathbf{D}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathbf{DA}+\mathbf{DB}$。

4. $\alpha\mathbf{AB}=(\alpha\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$。

5. $\mathbf{AI}=\mathbf{IA}=\mathbf{A}$。

定義 4 (綫性組合). 設$c_1,c_2,\ldots,c_\ell$為常數，$\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\ldots,\mathbf{A}_\ell\in\mathbb{M}_{m\times n}$，則稱

$$\sum_{k=1}^{\ell}c_k\mathbf{A}_k=c_1\mathbf{A}_1+c_2\mathbf{A}_2+\cdots+c_\ell\mathbf{A}_\ell$$

為綫性組合。

示例. 設$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，則可寫

$$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=3e_1+2e_2+e_1$$

示例. 設$E_n \in \mathbb{M}^{3\times 3}$，對於$1 \leq n \leq 9$，$E_n = (e_{ij})_{3\times 3}$而且

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & n = 3(i-1)+j \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

，則可寫

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{9} kE_k$$

小記. 以上例子便是矩陣與綫性方程組的關係。

綫性方程組

綫性方程組主要用以表達兩條或多條同時成立的綫性方程，最具代表性的可數初中的聯立方程：

$$\begin{cases} ax + by & = k_1 \\ cx + dy & = k_2 \end{cases}$$

當然，綫性方程組的含義不僅是二元一次方程，更可以拓展到多元一次(綫性)方程：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + x_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + x_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_n \end{cases}$$

示例. 以下是綫性方程組的例子：

1. $\begin{cases} x + y & = 0 \\ 2x - 3y & = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y + z & = 0 \\ 2x + 3y + 4z & = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x - y + z & = 0 \\ 2x + 4z & = 0 \\ -2x - 4y & = 0 \end{cases}$

解綫性方程組

欲求綫性方程組的解，我們可使**代入法**或**消元法**，其中消元法比代入法的效率更高，因此普遍數學家都會使用消元法解方程。同時此辦法也衍生出矩陣的各項命題。

示例. 求解綫性方程組$\begin{cases} 2x+3y &= 8 \\ 6x-2y &= 9 \end{cases}$

1. 運用代入法求解：從$2x+3y=8$可得$x=\dfrac{8-3y}{2}$，代入$6x-2y=9$得

$$\begin{aligned} 6(\frac{8-3y}{2})-2y &= 9 \\ 3(8-3y)-2y &= 9 \\ 24-9y-2y &= 9 \\ 11y &= 15 \\ y &= \frac{15}{11} \end{aligned}$$

再代$y=\dfrac{15}{11}$入$x=\dfrac{8-3y}{2}$得

$$\begin{aligned} x &= \frac{8-3(\frac{15}{11})}{2} \\ &= \frac{43}{22} \end{aligned}$$

因此綫性方程組的解為$(\dfrac{43}{22},\dfrac{15}{11})$。

2. 運用消元法求解：從$2x+3y=8$三倍後可得$6x+9y=24$，則上式減去下式可得

$$\begin{array}{lr} (1)\times 3: & 6x+9y=24 \\ -)(2): & 6x-2y=9 \\ \hline (1)\times 3-(2): & 11y=15 \\ & y=\dfrac{15}{11} \\ & 6x-2(\dfrac{15}{11})=9 \\ & x=\dfrac{43}{22} \end{array}$$

示例. 求解綫性方程組$\begin{cases} 2x+3y+4z &= 1 \\ 3x-y+3z &= 0 \\ x+y+z &= 1 \end{cases}$

1. 運用代入法求解：先從$3x-y+3z=0$得出$y=3x+3z$，代入其餘兩式可得

$$\begin{cases} 2x+3y+4(3x+3z) &= 1 \\ x+y+(3x+3z) &= 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 14x+15z &= 1 \\ 4x+4z &= 1 \end{cases}$$

擴增矩陣

逆矩陣

行列式

矩陣的幾何含義