

**測驗2**  
**數學延伸單元**  
**單元1 (微積分與統計學)**  
**試題-答題簿**

限時: 2 小時

姓名: \_\_\_\_\_

得分: \_\_\_\_\_/51+5

學校: \_\_\_\_\_

**規則**

1. 此試卷必須使用中文回答。
2. 除特別指明外，需詳細列出所有算式。
3. 除特別指明外，數值答案必須用真確值表示。
4. 本試卷只作內部使用。
5. 所有試題取自AL/CE/DSE歷屆試題，來源：<https://www.dse.life/ppindex/m2/>

-此為空白頁-

- [illegible]



2. (15分) 某病菌在某時間點 $t$ (從16/4/2010早上9時起計算的天數, 可正可負)的數量 $p(t)$ 可以用下式估算

$$p(t) = \frac{a}{b + e^{-t}} + c, -\infty < t < \infty$$

其中 $a, b, c$ 為正常數。定義原始數量為無限多天之前的病菌數量，以及終極數量為無限多天後的病菌數量。

- (a) 試以 $a, b, c$ 表下列各數：

- $p(t)$ 的增長速度最快之時;
- 原始數量;
- 終極數量。

(5分)

- (b) 某科學家通過繪畫 $\ln[p(t) - c]$ 對 $\ln(b + e^{-t})$ 的圖像來研究病菌數量，並發現圖像的縱軸截距為 $\ln 8000$ 。如果16/4/2010早上9時的病菌數量及每天增長速度分別為6000及2000，求 $a, b, c$ 的值。(3分)

- (c) 另一名科學家認為當病菌的增長速度達到峰值時，病菌數量將等於原始數量及終極數量的平均值。你同意嗎？試解釋你的答案。(2分)

- (d) 透過以 $a, b, c$ 及 $p(t)$ 表 $e^{-t}$ ，以 $\frac{-b}{a}[p(t) - \alpha][p(t) - \beta]$ 的形式表 $p'(t)$ ，其中 $\alpha < \beta$ 。由此以 $a, b, c$ 表 $\alpha$ 及 $\beta$ 。描繪於 $\alpha < p(t) < \beta$ 時 $p'(t)$ 對 $p(t)$ 的圖像並驗證(c)題的答案。(5分)









- ii. 求容器浸濕部分的面積的變率。 (2分)

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.



4. (8分) 計算下列不定積分問題。

(a)  $\int 3x^7 + 4\sqrt{x} + x^{-1} + 2dx$  (2分)

(b)  $\int \frac{2x^3 + 4x^2 + 6x + 3}{x^2 + x + 1} dx$  (2分)

(c) 已知某曲線在 $(x, y)$ 的斜率為 $\frac{dy}{dx} = xe^x$ ，且 $y$ 截距為0。考慮 $\frac{d}{dx}(xe^x)$ 的結果，求曲線的 $x$ 截距。(4分)

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.



5. (10分) 按要求回答下列定積分問題。

- (a) 利用梯形法則， $n = 6$ 的情況，估算  $\int_{1/7}^1 \ln x dx$  的值，並判斷估算值為過高估算或過低估算。(4分)

- (b) 求  $y = \frac{1}{x \ln x}$  的圖像從  $x = e$  至  $x = e^4$  的曲線下面積。 (2分)

- (c) i. 證明對於任意實數 $a$ ,  $\int_{-a}^a \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int_{-a}^a \frac{1}{e^x + 1} dx$ .

- ii. 由此, 求  $\int_{-a}^a \frac{e^x}{e^x + 1} dx$  及  $\int_{-a}^a \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$  的值。

(4分)

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.



挑戰題I. (3分) 設 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，其中 $a, b, c, d$ 為常數且 $a \neq 0$ 。試以 $a, b, c$ 表 $f(x)$ 沒有極值的條件。

[illegible]

挑戰題II. (2分) 設 $f(x) = e^{-x^2}$ 。求 $f(x)$ 及 $-f(x)$ 所包裹的區域內最大圓形的面積。

[illegible]





[illegible]

