

測驗2
數學延伸單元
單元1 (微積分與統計學)
試題-答題簿

限時: 1.5 小時

姓名: _____

得分: _____/30+5

學校: _____

規則

1. 此試卷必須使用中文回答。
2. 除特別指明外，需詳細列出所有算式。
3. 除特別指明外，數值答案必須用真確值表示。
4. 本試卷只作內部使用。
5. 所有試題取自AL/CE/DSE歷屆試題，來源：<https://www.dse.life/ppindex/m2/>

-此為空白頁-

1. (9分) 已知 $t = y^3 + 1$ 及 $e^t = x^{x^2+1}$

(a) 求 $\frac{dt}{dy}$ 。(1分)

(b) 從以 x 表 t ，求 $\frac{dt}{dx}$ 。(2分)

(c) 以 x 及 y 表 $\frac{dy}{dx}$ 。(2分)

(d) 求當 $x = e$ 時 y 的值，並求出 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=e}$ 的值。 (2分)

(e) 由此，求 $x = e$ 時以上述算式在 xy 平面繪出的曲線的切綫的 x 軸截距。 (2分)

[illegible]

2. (15分) 某病菌在某時間點 t (從16/4/2010早上9時起計算的天數, 可正可負)的數量 $p(t)$ 可以用下式估算

$$p(t) = \frac{a}{b + e^{-t}} + c, -\infty < t < \infty$$

其中 a, b, c 為正常數。定義原始數量為無限多天之前的病菌數量，以及終極數量為無限多天後的病菌數量。

- (a) 試以 a, b, c 表下列各數:

- $p(t)$ 的增長速度最快之時;
- 原始數量;
- 終極數量。

(5分)

- (b) 某科學家通過繪畫 $\ln[p(t) - c]$ 對 $\ln(b + e^{-t})$ 的圖像來研究病菌數量，並發現圖像的縱軸截距為 $\ln 8000$ 。如果16/4/2010早上9時的病菌數量及每天增長速度分別為6000及2000，求 a, b, c 的值。(3分)

- (c) 另一名科學家認為當病菌的增長速度達到峰值時，病菌數量將等於原始數量及終極數量的平均值。你同意嗎？試解釋你的答案。(2分)

- (d) 透過以 a, b, c 及 $p(t)$ 表 e^{-t} ，以 $\frac{-b}{a}[p(t) - \alpha][p(t) - \beta]$ 的形式表 $p'(t)$ ，其中 $\alpha < \beta$ 。由此以 a, b, c 表 α 及 β 。描繪於 $\alpha < p(t) < \beta$ 時 $p'(t)$ 對 $p(t)$ 的圖像並驗證(c)題的答案。(5分)

3. (6分) 某倒立正圓錐形容器的底半徑為15 cm且高為20 cm。該容器在初時裝滿水。假設容器內的水正以 $2\pi \text{ cm}^3/\text{s}$ 的速度流走。設 $h \text{ cm}$ 為容器內餘下的水的深度， $r \text{ cm}$ 為水面的半徑(如圖)， $V \text{ cm}^3$ 為水的體積，而 $A \text{ cm}^2$ 為容器浸濕部分的面積。

(a) 試只以 r 表 V 及 A 。 (2分)

(b) 當 $r = 3$ 時,

- i. 求半徑的變率; (2分)

- ii. 求容器浸濕部分的面積的變率。 (2分)

[illegible]

挑戰題I. (3分) 設 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，其中 a, b, c, d 為常數且 $a \neq 0$ 。試以 a, b, c 表 $f(x)$ 沒有極值的條件。

[illegible]

[illegible]

