

數集

定義 1 (元素). 設 X 為數集, 則

$$x \in X$$

表示 x 為數集 X 的成員; 相反, $x \notin X$ 表示 x 并非數集 X 的成員。

例子. 設 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 則 $1 \in X$, $0 \notin X$.

定義 2 (數集等價). 設 X 及 Y 皆為數集, 其中 Y 為 X 重複附帶 $x \in X$, 則寫 $Y = X$.

例子. 設 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 及 $Y = \{1, 1, 2, 3, 4, 5\}$, 則 $X = Y$.

定義 3 (子集). 設 X 及 Y 皆為數集, 則

$$X \subset Y$$

表示所有 X 的成員都是 Y 的成員。我們稱 X 為 Y 的子集。

例子. 設 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$, $Z = \{0, 1\}$ 。則 $X \subset Y$ 但 $Z \not\subset Y$ 。

設理. 設 X, Y 及 Z 皆為集合, 則以下成立:

1. $X \subset X$ 。
2. 若 $X \subset Y$ 及 $Y \subset Z$, 則 $X \subset Z$ 。
3. 若 $X \subset Y$ 及 $Y \subset X$, 則 $X = Y$ 。

證明.

1. 所有 $x \in X$ 都自然為 X 的成員。
2. 若 $X \subset Y$ 及 $Y \subset Z$, 則以下假設成立:
 - (a) 所有 $x \in X$ 都是 Y 的成員。
 - (b) 所有 $y \in Y$ 都是 Z 的成員。

則 $x \in X$ 令 $x \in Y$, 則令 $x \in Z$ 。所以 $X \subset Z$ 。

3. 所有 $x \in X$ 都是 Y 的成員, 因此 Y 有可能擁有 X 以外的成員。但 $Y \subset X$, 所以 Y 不可能擁有 X 以外的成員。所以 $Y = X$ 。

□

由於我們需要面對無限集合，因此我們不可能每一次都明確的寫下所有元素。於是有以下一種定義數集的方式：

定義 4. 設 X 為數集和判斷式 P ，則有且僅有一個 X 的子集令 $P(x)$ 對於所有子集的成員 x 皆為正確。此子集記為

$$\{x \in X | P(x)\} \text{ 或 } \{x \in X : P(x)\}$$

例子. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 = 0\}$ 等價 $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

定義 5 (空集). 若 X 沒有成員，我們稱之為**空集**，記 \emptyset 。

定義 6 (運算封閉). 設 S 為一個非空數集，若對任意 $a, b \in S$ 均有 $a + b \in S$ ，則說 S 關於加法封閉。同樣可以對減法、乘法、除法定義封閉性。

定義 7 (數域). 設 S 為數集，至少包含兩個數，並且關於加、減、乘、除四則運算封閉，則稱 S 為**數域**。

例子 (實數域). \mathbb{R} 為包含所有實數之集合，亦是數域。

函數

定義 8 (映射、定義域、值域). 若 f 為**映射**，擁有**定義域** D 和**值域** R ，則以下三種敘述均可描述 f ：

- $f : D \rightarrow R$;
- $x \in D, f(x) \in R, x \mapsto f(x)$;
- $f(x)$ = 以 x 建立/表述的算式。

代表 f 為將 D 的成員映射至 R 的方式。

公設 (函數基本性質). 任何可稱為**函數**的映射 $f : D \rightarrow R$ ，必須符合以下性質：

1. 存在性：若 $x \in D$ ，則 $f(x) \in R$;
2. 唯一性：若 $x, y \in D$ 且 $x = y$ ，則 $f(x) = f(y)$ 。

定義 9 (實函數). 若 $f : D \rightarrow R$ 為函數，值域 $R = \mathbb{R}$ (或 $R \subset \mathbb{R}$)，我們稱之為**實函數**。

定義 10 (複函數). 若 $f : D \rightarrow R$ 為函數, 值域 $R = \mathbb{C}$ (或 $R \subset \mathbb{C}$), 我們稱之為**複函數**。

衍理. 任何實函數都是複函數。

由於逆函數的存在性並非必然, 故需要作出新的猜想以求其存在條件。實際上, 若逆函數存在, 則必然牽涉其作為函數的基本性質。

於是我們給出以下條件:

若 f 的逆函數 g 存在, 則下列條件成立:

1. 存在性: 若 $y \in R$, 則 $g(y) \in D$;
2. 唯一性: 若 $x, y \in R$ 且 $x = y$, 則 $g(x) = g(y)$ 。

並且 $f(g(y)) = y, g(f(x)) = x$ 。

於是, 從 f 的角度定義:

定義 11 (單射性). 設 $f : D \rightarrow R$ 為函數。若當 $f(x) = f(y)$ 時, 可令 $x = y$, 則稱 f 為**單射函數**。

定義 12 (滿射性). 設 $f : D \rightarrow R$ 為函數。若當 $y \in R$ 時, 存在至少一個 $x \in D$ 符合 $y = f(x)$, 則稱 f 為**滿射函數**。

以上定義分別對應逆函數的唯一性與存在性。因此若定義:

定義 13 (雙射性). 函數 f 若同時滿足單射性與滿射性, 則稱其為**雙射函數**。

定理. 函數 f 的逆函數存在當且僅當 f 為雙射函數。

對於擁有逆函數的函數 f , 我們稱 f 是**可逆的**, 並記其逆函數作 f^{-1} 。

例子. 證明 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 且 $x \mapsto x^{2n+1}$ 為可逆函數, 其中 n 為非負整數, 並求出 f^{-1} 。

解. 證明 f 的單射性:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \\ x^{2n+1} &= y^{2n+1} \\ x^{2n+1} - y^{2n+1} &= 0 \\ (x - y) \sum_{i=0}^{2n} x^i y^{2n-i} &= 0 \end{aligned}$$

考慮 $f(x) = f(y)$ 則 $\operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(y)$, 其中 $\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} +1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ 。故 $\operatorname{sgn}(x^i y^{2n-i}) =$

$(\pm 1)^{2n} = +1$ 。因此 $\sum_{i=0}^{2n} x^i y^{2n-i} \neq 0$, 則 $x = y$ 。

證明 f 的滿射性：對於任意 y , 存在 $x = y^{\frac{1}{2n+1}}$ 滿足 $x^{2n+1} = y$ 。

因此, f 是雙射的, 擁有逆函數 f^{-1} 。 $(f^{-1}(y))^{2n+1} = y$, 故 $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{2n+1}}$ 。 ■

奇偶函數

定義 14 (奇偶函數). 設 $f: D \rightarrow R$ 為函數。

- 若對於所有 $x \in D$, 均使 $f(-x) = -f(x)$ 成立, 則 f 為奇函數;
- 若對於所有 $x \in D$, 均使 $f(-x) = f(x)$ 成立, 則 f 為偶函數。

例子. 1. $f(x) = x$ 時, f 為奇函數;

解.

$$f(-x) = -x = -f(x)$$

■

2. 對於整數 n , $f(x) = x^{2n+1}$ 時, f 為奇函數;

解.

$$f(-x) = (-x)^{2n+1} = -x^{2n+1} = -f(x)$$

■

3. $f(x) = x^2$ 時, f 為偶函數;

解.

$$f(-x) = x = f(x)$$

■

4. 對於整數 n , $f(x) = x^{2n}$ 時, f 為偶函數;

解.

$$f(-x) = (-x)^{2n} = x^{2n} = f(x)$$

■

5. $\sin x, \tan x, \csc x, \cot x$ 均為奇函數;

6. $\cos x, \sec x$ 均為偶函數。

設理. 設 f_1, f_2 為奇函數, g_1, g_2 為偶函數。則以下成立:

- $f_1 \circ f_2$ 是奇函數;
- $f_1 \circ g_1$ 是偶函數;
- $g_1 \circ f_2$ 是偶函數;
- $g_1 \circ g_2$ 是偶函數。

證明. 設 f_1, f_2 為奇函數, g_1, g_2 為偶函數。則

- $f_1(-x) = -f_1(x)$;
- $f_2(-x) = -f_2(x)$;
- $g_1(-x) = g_1(x)$;
- $g_2(-x) = g_2(x)$ 。

由此可得

- $(f_1 \circ f_2)(-x) = f_1(f_2(-x)) = f_1(-f_2(x)) = -f_1(f_2(x)) = -(f_1 \circ f_2)(x)$;
- $(f_1 \circ g_2)(-x) = f_1(g_2(-x)) = f_1(g_2(x)) = (f_1 \circ g_2)(x)$;
- $(g_1 \circ f_2)(-x) = g_1(f_2(-x)) = g_1(-f_2(x)) = g_1(f_2(x)) = (g_1 \circ f_2)(x)$;
- $(g_1 \circ g_2)(-x) = g_1(g_2(-x)) = g_1(g_2(x)) = (g_1 \circ g_2)(x)$ 。

□

小記. 奇偶函數在微積分有重大作用, 應熟練並一眼看穿。

習題

1. 設 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 為實函數。

- (a) 證明 $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ 為偶函數； $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ 為奇函數。
- (b) 證明對於任意實函數，均可拆分為奇函數及偶函數兩部分。
- (c) 現假設對於任意 $x, y \in \mathbb{R}$ ，函數 f 都符合以下函數等式

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

- i. 證明對於任意 $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$;
- ii. 由此，證明 f 的偶函數部分必定大於或等於 0。

2. 設 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 為實函數。

- (a) 證明若 $f(ix) = if(x)$ ，則 f 為奇函數。
- (b) 設 $F(x) = f(x) + if(-x)$ ，而且 $F(x+y) = F(x) + F(y)$ 。
 - i. 求 $f(0)$ 。
 - ii. 證明 f 為奇函數。

3. 判斷下列結果為何種函數：

- (a) 奇函數相加；
- (b) 偶函數相加；
- (c) 奇函數相乘；
- (d) 偶函數相乘。