單元導數定義

由牛頓發揚光大的流數法，今時今日變成了以極限定義的導數。

定義 1 (導數定義). *若f在c可導，則其導數$f'(c)$為*

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

定義 2 (現代導數嚴謹定義). *L為f在c的導數當：對於任意$\epsilon > 0$,若存在$\delta(\epsilon) > 0$使得對於$0 < |x - c| < \delta(\epsilon)$,*

$$|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L| < \epsilon$$

則寫$f'(c) = L$。

定理. *若$f : I \to \mathbb{R}$在$c \in I$可微，則f在$c \in I$連續。*

證明. 導數存在，則

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to c}(f(x) - f(c)) &= \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \lim_{x \to c}(x - c) \\
&= f'(c) \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

因此$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$使得$f$在$c \in I$連續。 □

導數的目的在於處理函數的變化：從算式可見，導數取自f的變化除以變量x的變化，即可理解爲變化的比例，等於變化比率。簡而言之，導數為函數的斜率。

定理 (基本導數定則). *1. 常函數的導數：*

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

2. 冪函數的導數：

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

3. 自然指數的導數：

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

4. 自然對數的導數：

$$\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{1}{x}$$

5. 三角函數的導數：

(a)

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

(b)

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

(c)

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

證明. 留做習題。 □

定理 (導數的性質). *導數擁有以下性質：*

1. *綫性性：對於可微函數f, g，常數α, β，$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$。*
2. *乘積法則：對於連續函數f, g，$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$。*
3. *除法定則：對於連續函數f, g，$(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$。*

證明.

1. 綫性性：從f, g的可微性，可得對任意$\varepsilon > 0$，均有$\delta_f, \delta_g > 0$使得對於所有c，若x符合$0 < |x - c| < \min\{\delta_f, \delta_g\}$時，

$$|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c)| < \frac{\varepsilon}{2\alpha}; |\frac{g(x) - g(c)}{x - c} - g'(c)| < \frac{\varepsilon}{2\beta}$$

則

$$\begin{aligned}
&|\frac{(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(c) + \beta g(c))}{x - c} - (\alpha f'(c) + \beta g'(c))| \\
&< \alpha|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c)| + \beta|\frac{g(x) - g(c)}{x - c} - g'(c)| \\
&< \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{2\alpha} + \beta \cdot \frac{\varepsilon}{2\beta} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

2. 乘積法則：從f, g的可微性，可得

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to c} \frac{f(x)g(x) - f(c)g(c)}{x - c} &= \lim_{x \to c} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(c) + f(x)g(c) - f(c)g(c)}{x - c} \\
&= \lim_{x \to c}(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot g(c) + f(x) \cdot \frac{g(x) - g(c)}{x - c}) \\
&= f'(c)g(c) + f(c)g'(c)
\end{aligned}$$

3. 除法定則：留作習題

□

衍理. *導數擁有以下性質：*

1. *綫性性：對於一系列可微函數$\{f_k\}_{k=1}^n$，及一系列常數$\{\alpha_k\}_{k=1}^n$，$(\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k)' = \sum_{k=1}^n (\alpha_k f_k')$。*

2. *乘積法則：對於一系列可微函數$\{f_k\}_{k=1}^n$，$(\prod_{k=1}^n f_k)' = \sum_{k=1}^n (f_1 f_2 \cdots f_k' \cdots f_{n-1} f_n)$。*

定理 (鏈鎖律). *對於複合函數$h := (g \circ f)$，*

$$h' = (g' \circ f) \cdot (f')$$

證明. 留做習題 □

定理 (逆函數). *對於逆函數$g := f^{-1}$，*

$$g' = \frac{1}{f' \circ g}$$

證明. 設$g(x) = f^{-1}(x)$，則$(f \circ g)(x) = x$。利用鏈鎖律，可得

$$\begin{aligned} (f' \circ g)(x) \cdot g'(x) &= 1 \\ g'(x) &= \frac{1}{(f' \circ g)(x)} \end{aligned}$$

□

導數可視爲函數於任意點的斜率，換言之，利用直綫方程的點斜式，可得出函數f於任意點$(x_0, f(x_0))$上的切綫方程為

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

定義 3 (高維導數). *若f可微，則f'為f的第一導數；若f'可微，則f''為f的第二導數，並記*

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$$

如此類推，我們稱$f^{(n)}(x)$為f的第n導數，記

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}(f(x))$$

均值定理

均值定理為數學分析其中一個重要工具，亦是導數的重要應用結果。其含義在於將導數與函數值作連接，將切綫普及化。

定理 (極值定理)**.** *設$c \in I$使得$f : I \to \mathbb{R}$有極值於c。若f可微，則$f'(c) = 0$。*

證明. 先證明$f(c)$為極大值的情況：若$f'(c) > 0$，則存在c的鄰域$V \subseteq I$使得對於$x \in V$，

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

因此，若$x \in V$同時$x > c$，則

$$f(x) - f(c) = (x - c) \cdot \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

此則違反$f(c)$為極大值的假設，$f'(c) \not> 0$。

同理，證明$f'(c) \not< 0$可運用相似做法，因此$f'(c) = 0$。 □

洛必達法則

泰勒定理

向量函數

偏導數與全導數

方向導數

切面與法綫

二維極值與鞍點