

## 函數基礎

我們必須瞭解題目當中字眼的含義，才能更好的利用定義進行推論。

**定義 (實數域).**  $\mathbb{R}$  為包含所有實數之集合。

**定義 (函數、定義域、值域).** 若  $f$  為函數，擁有定義域  $D$  和值域  $R$ ，則以下三種敘述均可描述  $f$ ：

- $f : D \rightarrow R$ ;
- $x \in D, f(x) \in R, x \mapsto f(x)$ ;
- $f(x)$  是以  $x$  建立/表述的算式。

**定義 (實函數).** 若  $f : D \rightarrow R$  為函數，值域  $R = \mathbb{R}$  (或  $R \subset \mathbb{R}$ )，我們稱之為實函數。

**定義 (奇偶函數).** 設  $f : D \rightarrow R$  為函數。

- 若對於所有  $x \in D$ ，均使  $f(-x) = -f(x)$  成立，則  $f$  為奇函數；
- 若對於所有  $x \in D$ ，均使  $f(-x) = f(x)$  成立，則  $f$  為偶函數。

**例子.** 1.  $f(x) = x$  時， $f$  為奇函數；

2. 對於整數  $n$ ， $f(x) = x^{2n+1}$  時， $f$  為奇函數；

3.  $f(x) = x^2$  時， $f$  為偶函數；

4. 對於整數  $n$ ， $f(x) = x^{2n}$  時， $f$  為偶函數；

5.  $\sin x, \tan x, \csc x, \cot x$  均為奇函數；

6.  $\cos x, \sec x$  均為偶函數。

**設理.** 設  $f_1, f_2$  為奇函數， $g_1, g_2$  為偶函數。則以下成立：

- $f_1 \circ f_2$  是奇函數；
- $f_1 \circ g_1$  是偶函數；
- $g_1 \circ f_2$  是偶函數；
- $g_1 \circ g_2$  是偶函數。

證明. 設  $f_1, f_2$  為奇函數,  $g_1, g_2$  為偶函數。則

- $f_1(-x) = -f_1(x)$ ;
- $f_2(-x) = -f_2(x)$ ;
- $g_1(-x) = g_1(x)$ ;
- $g_2(-x) = g_2(x)$ 。

由此可得

- $(f_1 \circ f_2)(-x) = f_1(f_2(-x)) = f_1(-f_2(x)) = -f_1(f_2(x)) = -(f_1 \circ f_2)(x)$ ;
- $(f_1 \circ g_2)(-x) = f_1(g_2(-x)) = f_1(g_2(x)) = (f_1 \circ g_2)(x)$ ;
- $(g_1 \circ f_2)(-x) = g_1(f_2(-x)) = g_1(-f_2(x)) = g_1(f_2(x)) = (g_1 \circ f_2)(x)$ ;
- $(g_1 \circ g_2)(-x) = g_1(g_2(-x)) = g_1(g_2(x)) = (g_1 \circ g_2)(x)$ 。

□

## 題解

1. (10分) 設  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  為實函數。

(a) (4分) 證明  $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$  為偶函數;  $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$  為奇函數。

解. 設  $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$  及  $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ 。

$$\begin{aligned}
 g(-x) &= \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} \\
 &= \frac{f(-x) + f(x)}{2} \\
 &= \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\
 &= g(x) \\
 h(-x) &= \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} \\
 &= \frac{f(-x) - f(x)}{2} \\
 &= -\frac{f(x) - f(-x)}{2} \\
 &= -h(x)
 \end{aligned}$$

由此， $g$ 為偶函數， $h$ 為奇函數。 ■

(b) (2分) 證明對於任意實函數，均可拆分為奇函數及偶函數兩部分。

解. 對於任意函數 $f$ ，均可寫成

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

根據(a)， $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ 為偶函數， $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ 為奇函數，證畢。 ■

(c) 現假設對於任意 $x, y \in \mathbb{R}$ ，函數 $f$ 都符合以下函數等式

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

i. (3分) 證明對於任意 $x \in \mathbb{R}$ ， $f(x) \geq 0$ ；

解. 對於任意 $x \in \mathbb{R}$ ，均有

$$f(x) = f(2 \cdot \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2})f(\frac{x}{2}) = (f(\frac{x}{2}))^2$$

$f$ 為實函數，則對於任意 $y \in \mathbb{R}$ ， $(f(y))^2 \geq 0$ 。

故此，代 $y = \frac{x}{2} \in \mathbb{R}$ 可得 $f(x) \geq 0$ 。 ■

ii. (1分) 由此，證明 $f$ 的偶函數部分必定大於或等於0。

解. 根據(c)i及(b)，

$$\frac{f(x) + f(-x)}{2} \geq \frac{0 + 0}{2} = 0$$

2. (10分) 設 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 為實函數。

(a) (3分) 證明若 $f(ix) = if(x)$ ，則 $f$ 為奇函數。

解.  $f(-x) = f(i^2x) = if(ix) = i^2f(x) = -f(x)$ 。 ■

(b) (7分) 設 $F(x) = f(x) + if(-x)$ ，而且 $F(x+y) = F(x) + F(y)$ 。

i. (3分) 求 $f(0)$ 。

解. 考慮 $F(x) = F(x+0) = F(x) + F(0)$ ，可得 $F(0) = 0$ 。

因此 $0 = F(0) = f(0) + if(0)$ ，可得 $f(0) = 0$ 。 ■

ii. (4分) 證明 $f$ 為奇函數。

解. 考慮 $0 = F(0) = F(x-x) = F(x) + F(-x)$ ，可得 $F(-x) = -F(x)$ 。

因此 $f(-x) = \operatorname{Re}\{F(-x)\} = \operatorname{Re}\{-F(x)\} = -f(x)$ 。 ■

## 二項式展開

定理 (二項式定理). 對於  $a, b \in \mathbb{R}$  及整數  $n \geq 0$ ,

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^n C_r^n a^r b^{n-r}$$

其中  $C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ 。

### 題解

1. (5分) 記  $C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ 。

(a) (2分) 求  $\sum_{k=0}^n C_k^n$ 。

解. 考慮  $(1+1)^n = \sum_{k=0}^n (1)^k (1)^{n-k}$ , 可得

$$\sum_{k=0}^n C_k^n = 2^n$$

(b) (3分) 證明  $\sum_{\text{奇數 } k} C_k^n = \sum_{\text{偶數 } k} C_k^n$ 。

解. 考慮  $(1-1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k (1)^{n-k}$ , 可得

$$\sum_{\text{偶數 } k} C_k^n - \sum_{\text{奇數 } k} C_k^n = 0$$

由此,

$$\sum_{\text{奇數 } k} C_k^n = \sum_{\text{偶數 } k} C_k^n$$

2. (5分) 記  $\binom{n}{x_1, x_2, \dots, x_k} = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!}$ 。

(a) (3分) 證明對於任意正整數  $n$  及  $k \geq 2$ , 若  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ ,

$$\binom{n}{x_1, x_2, \dots, x_k} = C_{x_1}^n C_{x_2}^{n-x_1} \dots C_{x_{k-1}}^{n-x_1-x_2-\dots-x_{k-2}}$$

解. 設  $P(k)$  為上述設理。

對於  $k=2$ ,  $P(2)$ :  $x_1 + x_2 = n$

$$\text{左方} = \binom{n}{x_1, x_2} = \frac{n!}{x_1!x_2!} = \frac{n!}{x_1!(n-x_2)!} = C_{x_1}^n = \text{右方}$$

$\therefore P(2)$ 成立。

假設 $P(m)$ 對某正整數 $m$ 成立，即若 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ ,

$$\binom{n}{x_1, x_2, \dots, x_m} = C_{x_1}^n C_{x_2}^{n-x_1} \cdots C_{x_{m-1}}^{n-x_1-x_2-\cdots-x_{m-2}}$$

當 $k = m + 1$ 時， $x_1 + x_2 + \cdots + x_m + x_{m+1} = n$ ,

$$\begin{aligned} \text{左方} &= \binom{n}{x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}} \\ &= \frac{n!}{x_1!x_2! \cdots x_m!x_{m+1}!} \\ &= \frac{n!}{x_1!(n-x_1)!} \binom{n-x_1}{x_2, \dots, x_m, x_{m+1}} \\ &= C_{x_1}^n C_{x_2}^{n-x_1} C_{x_3}^{n-x_1-x_2} \cdots C_{x_m}^{n-x_1-x_2-\cdots-x_{m-1}} \\ &= \text{右方} \end{aligned}$$

$\therefore$ 若 $P(m)$ 成立，則 $P(m+1)$ 成立。

$\therefore$ 根據數學歸納法原理， $P(k)$ 對所有整數 $k \geq 2$ 成立。 ■

(b) (2分) 由此，證明對於任意正整數 $n$ ,

$$(a+b+c)^n = \sum_{\substack{i+j+k=n, \\ i,j,k \text{ 為非負整數}}} \binom{n}{i, j, k} a^i b^j c^k$$

解. 根據(a)，取 $k = 3$ ，則

$$\begin{aligned} (a+b+c)^n &= \sum_{m=0}^n C_m^n a^m (b+c)^{n-m} \\ &= \sum_{m=0}^n C_m^n a^m \sum_{r=0}^{n-m} C_r^{n-m} b^r c^{n-m-r} \\ &= \sum_{m=0}^n \sum_{r=0}^{n-m} C_m^n C_r^{n-m} a^m b^r c^{n-m-r} \end{aligned}$$

若設 $i = m, j = r, k = n - m - r$ , 則 $i + j + k = n$ 。由此可得

$$(a+b+c)^n = \sum_{\substack{i+j+k=n, \\ i,j,k \text{ 為非負整數}}} \binom{n}{i, j, k} a^i b^j c^k$$
■

## 數學歸納法

回憶數學歸納法原則的定理：

公設 (一般歸納法). 設  $P(n)$  為對於整數  $n \geq 1$  的設理。若以下條件同時成立：

- $P(1)$  成立；
- 若  $P(n)$  成立，則  $P(n+1)$  成立。

則  $P(n)$  對所有整數  $n \geq 1$  成立。

衍理 (強歸納法). 設  $P(n)$  為對於整數  $n \geq 1$  的設理。若以下條件同時成立：

- $P(1)$  成立；
- 若  $P(1), P(2), \dots, P(n)$  成立，則  $P(n+1)$  成立。

則  $P(n)$  對所有整數  $n \geq 1$  成立。

## 題解

1. (2分) 利用數學歸納法，證明對於任意正整數  $n$ ， $n! \leq n^n$ 。

解. 設  $P(n)$  為上述設理。

對於  $n = 1$ ， $P(1)$ ：

左方  $= 1! = 1 = 1^1 =$  右方

$\therefore P(1)$  成立。

假設  $P(k)$  對某正整數  $k$  成立，即

$$k! \leq k^k$$

當  $n = k + 1$  時，

$$\begin{aligned} \text{左方} &= (k+1)! \\ &= (k+1)k! \\ &\leq (k+1)k^k \\ &\leq (k+1)(k+1)^k \\ &= (k+1)^{k+1} \\ &= \text{右方} \end{aligned}$$

∴若 $P(k)$ 成立，則 $P(k+1)$ 成立。

∴根據數學歸納法原理， $P(n)$ 對所有整數 $n \geq 1$ 成立。 ■

2. (3分) 利用數學歸納法，證明對於任意正整數 $n$ 及 $-1 < r < 1$ ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k^{m+k-1} r^k = \frac{1}{(1-r)^n}$$

解. 設 $P(n)$ 為上述設理。

對於 $n = 1$ ,  $P(1)$ :

$$\text{左方} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{1+k-1} r^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^k r^k = \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{(1-r)^1} = \text{右方}$$

∴ $P(1)$ 成立。

假設 $P(m)$ 對某正整數 $m$ 成立，即

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k^{m+k-1} r^k = \frac{1}{(1-r)^m}$$

當 $n = m + 1$ 時，由於 $C_r^n + C_{r+1}^n = C_{r+1}^{n+1}$ ,

$$\begin{aligned} \text{左方} &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{m+k} r^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{m+k} r^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k^{m+k-1} + C_{k-1}^{m+k-1}) r^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{m+k-1} r^k + \sum_{k=1}^{\infty} C_{k-1}^{m+k-1} r^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{m+k-1} r^k + r \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{m+k} r^k \\ (1-r) \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{m+k} r^k &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{m+k-1} r^k \\ &= \frac{1}{(1-r)^m} \\ \text{左方} &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{m+k} r^k \\ &= \frac{1}{(1-r)^{m+1}} \\ &= \text{右方} \end{aligned}$$

$\therefore$ 若 $P(m)$ 成立，則 $P(m+1)$ 成立。

$\therefore$ 根據數學歸納法原理， $P(n)$ 對所有整數 $n \geq 1$ 成立。 ■

## 三角函數

設理 (公式). 三角恆等式:

- $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$ ;
- $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$ 。

## 題解

1. (7分) 設 $i^2 = -1$ 。證明對於任意整數 $n$ ,

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

解. 當 $n = 0$ 時,  $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^0 = 1 = \cos(0) + i \sin(0)$ ;

當 $n \geq 1$ 時, 利用數學歸納法: 設 $P(n)$ 為上述設理。

對於 $n = 1$ ,  $P(1)$ :

$$\text{左方} = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^1 = \cos \theta + i \sin \theta = \text{右方}$$

$\therefore P(1)$ 成立。

假設 $P(m)$ 對某所有正整數 $m$ 成立, 即

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^m = \cos(m\theta) + i \sin(m\theta)$$

當 $n = m + 1$ 時,

$$\begin{aligned} \text{左方} & (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^{m+1} \\ &= (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^m (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \\ &= (\cos(m\theta) + i \sin(m\theta))(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \\ &= \cos(m\theta) \cos(\theta) - \sin(m\theta) \sin(\theta) + i \sin(m\theta) \cos(\theta) + i \sin(\theta) \cos(m\theta) \\ &= \cos((m+1)\theta) + i \sin((m+1)\theta) \\ &= \text{右方} \end{aligned}$$



∴若 $P(m)$ 成立，則 $P(m+1)$ 成立。

∴根據數學歸納法原理， $P(n)$ 對所有整數 $n \geq 1$ 成立。

當 $n \leq -1$ 時，考慮 $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^{-n} = 1$ ，則

$$\begin{aligned} (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n &= \frac{1}{(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^{-n}} \\ &= \frac{1}{\cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta)} \\ &= \frac{1}{\cos(n\theta) - i \sin(n\theta)} \\ &= \frac{\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)}{\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta)} \\ &= \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \end{aligned}$$

∴ $P(n)$ 對所有整數 $n$ 成立。 ■

2. (8分) 考慮 $\sin(36^\circ) = \cos(54^\circ)$ ，求 $\sin(18^\circ)$ 。

解. 由恆等式，可得：

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= 2 \cos^2 \theta - 1 \\ \cos 3\theta &= \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta \\ &= (2 \cos^2 \theta - 1) \cos \theta - (2 \sin \theta \cos \theta) \sin \theta \\ &= 2 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta \\ &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} \sin(36^\circ) &= \cos(54^\circ) \\ 2 \sin(18^\circ) \cos(18^\circ) &= 4 \cos^3(18^\circ) - 3 \cos 18^\circ \\ 4 \cos^2(18^\circ) - 2 \sin(18^\circ) - 3 &= 0 \\ 4 \sin^2(18^\circ) + 2 \sin(18^\circ) - 1 &= 0 \\ \sin(18^\circ) &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 4}}{8} \\ \sin(18^\circ) &= \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \end{aligned}$$
■

## 極限

設理 (公式). 極限公式:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

## 題解

1. (5分) 設  $f, g, h$  為實函數, 并且  $f(0) = g(0) = h(0) = 0$ 。若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - g(x)}{h(x)} = 9$ , 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - e^{g(x)}}{\sin(h(x))}$$

解.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - e^{g(x)}}{\sin(h(x))} &= \lim_{x \rightarrow 0} (e^{g(x)} \cdot \frac{e^{f(x)-g(x)} - 1}{f(x) - g(x)} \cdot \frac{h(x)}{\sin h(x)} \cdot \frac{f(x) - g(x)}{h(x)}) \\ &= 9 \end{aligned}$$

■

2. (15分) 設  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  為實函數, 定義

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

- (a) (3分) 求  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , 並證明  $f$  為連續函數。

解.

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= 0 \end{aligned}$$

■

- (b) (4分) 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  及  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 。

解.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \sin \frac{1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= 1\end{aligned}$$

■

(c) (8分) 設  $g(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ , 證明  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  無法被定義。

解.

$$\begin{aligned}g(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) \sin \frac{1}{x+h} - (x-h) \sin \frac{1}{x-h}}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{h}{x^2-h^2} \cos \frac{x}{x^2-h^2} - 2h \sin \frac{x}{x^2-h^2} \cos \frac{h}{x^2-h^2}}{2h} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x \cos \frac{x}{x^2-h^2}}{x^2-h^2} - \sin \frac{x}{x^2-h^2} \cos \frac{h}{x^2-h^2} \right) \\ &= \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}\end{aligned}$$

因為  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \infty$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  無法被定義。

■

## 微分原理

設理 (基本原理). 若  $f$  為可微函數, 則  $f'$  為  $f$  的導數, 且

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

設理 (基本導數). 按照基本原理可直接得出以下函數之導數:

- $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ ;
- $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ ;
- $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ ;
- $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ 。

設理 (求導法則). 對於可微函數  $f, g$ :

- 綫性:  $(af \pm bg)' = af' \pm bg'$ , 其中  $a, b$  為常數;
- 乘積:  $(fg)' = f'g + fg'$ ;
- 商:  $(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ ;
- 複合:  $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$ 。

設理 (頂點). 若  $f$  為可微函數, 當  $f'(x) = 0$  而  $f''(x) \neq 0$  時,  $f$  可處於頂點。

## 題解

1. (10分) 設  $f(x) = \sin \pi x$ 。

(a) (2分) 求  $f'(0)$ ;

解.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \pi h - \sin \pi 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \pi h}{\pi h} \pi \\ &= \pi \end{aligned}$$

■

(b) (8分) 設  $(g_n)$  為函數數列, 定義  $g_1(x) = f(x)$  及  $g_n(x) = f(g_{n-1}(x))$ 。證明對於任意正整數  $n$ ,  $g'_n(0) = \pi^n$ 。

解.

$$\begin{aligned} g'_1(0) &= f'(0) = \pi = \pi^1 \\ \text{設 } g'_k(0) &= \pi^k \text{ 則} \\ g'_{k+1}(0) &= (f(g_k(0)))' = f'(g_k(0))g'_k(0) = \pi \cdot \pi^k = \pi^{k+1} \end{aligned}$$

■

2. (5分) 寫出令  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  沒有頂點的條件, 已知  $a, b, c, d$  均為實數及  $a \neq 0$ 。

解. 若  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \neq 0$ , 則

$$\Delta < 0 \implies 4b^2 < 12ac \iff b^2 < 3ac$$

或若  $f'(x) = 0$  而  $f''(x) = 0$ , 則

$$\begin{cases} x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \\ x = \frac{-b}{3a} \end{cases} \implies b^2 = 3ac$$

因此,  $b^2 \leq 3ac$  為  $f$  沒有頂點的條件。 ■