

References: Introduction to Real Analysis (Bartle & Sherbert), Thomas Calculus 12th Edition

單元導數定義

由牛頓發揚光大的流數法，今時今日變成了以極限定義的導數。

定義 1 (導數定義). 若 f 在 c 可導，則其導數 $f'(c)$ 為

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

定義 2 (現代導數嚴謹定義). L 為 f 在 c 的導數當：對於任意 $\epsilon > 0$, 若存在 $\delta(\epsilon) > 0$ 使得對於 $0 < |x - c| < \delta(\epsilon)$,

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \epsilon$$

則寫 $f'(c) = L$ 。

例子. $f(x) := x^2$ 在 c 可微。

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{x^2 - c^2}{x - c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} (x + c) \\ &= 2c \end{aligned}$$

定理. 若 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $c \in I$ 可微，則 f 在 $c \in I$ 連續。

證明. 導數存在，則

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} (f(x) - f(c)) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \lim_{x \rightarrow c} (x - c) \\ &= f'(c) \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

因此 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ 使得 f 在 $c \in I$ 連續。 \square

導數的目的在於處理函數的變化：從算式可見，導數取自 f 的變化除以變量 x 的變化，即可理解為變化的比例，等於變化比率。簡而言之，導數為函數的斜率。

例子 (基本導數定則). 1. 常函數的導數:

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

2. 冪函數的導數:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

3. 自然指數的導數:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

4. 自然對數的導數:

$$\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{1}{x}$$

5. 三角函數的導數:

(a)

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

(b)

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

(c)

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

證明. 留做習題。

□

定理 (導數的性質). 導數擁有以下性質:

1. 綫性性: 對於可微函數 f, g , 常數 α, β , $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ 。

2. 乘積法則: 對於連續函數 f, g , $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ 。

3. 除法定則: 對於連續函數 f, g , $(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ 。

證明.

1. 綫性性: 從 f, g 的可微性, 可得對任意 $\varepsilon > 0$, 均有 $\delta_f, \delta_g > 0$ 使得對於所有 c , 若 x 符合 $0 < |x - c| < \min\{\delta_f, \delta_g\}$ 時,

$$|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c)| < \frac{\varepsilon}{2\alpha}; |\frac{g(x) - g(c)}{x - c} - g'(c)| < \frac{\varepsilon}{2\beta}$$

則

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(c) + \beta g(c))}{x - c} - (\alpha f'(c) + \beta g'(c)) \right| \\
 & < \alpha \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \right| + \beta \left| \frac{g(x) - g(c)}{x - c} - g'(c) \right| \\
 & < \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{2\alpha} + \beta \cdot \frac{\varepsilon}{2\beta} \\
 & = \varepsilon
 \end{aligned}$$

2. 乘積法則：從 f, g 的可微性，可得

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)g(x) - f(c)g(c)}{x - c} &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(c) + f(x)g(c) - f(c)g(c)}{x - c} \\
 &= \lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot g(c) + f(x) \cdot \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right) \\
 &= f'(c)g(c) + f(c)g'(c)
 \end{aligned}$$

3. 除法定則：留作習題

□

例子. 若 f, g 為可微函數使得 $f(c) = 1, g(c) = c^2, f'(c) = 1$ 及 $g'(c) = 2c$ ，則：

1. $(2f + 3g)'(c) = 2f'(c) + 3g'(c) = 2 + 6c$ 。
2. $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c) = c^2 + 2c$ 。
3. $(f/g)'(c) = (f'(c)g(c) - f(c)g'(c))/(g(c))^2 = c^{-2} - 2c^{-3}$ 。

衍理. 導數擁有以下性質：

1. 線性性：對於一系列可微函數 $\{f_k\}_{k=1}^n$ ，及一系列常數 $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ ， $\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k\right)' = \sum_{k=1}^n (\alpha_k f_k')$ 。
2. 乘積法則：對於一系列可微函數 $\{f_k\}_{k=1}^n$ ， $\left(\prod_{k=1}^n f_k\right)' = \sum_{k=1}^n (f_1 f_2 \cdots f'_k \cdots f_{n-1} f_n)$ 。

定理 (鏈鎖律). 對於複合函數 $h := (g \circ f)$,

$$h' = (g' \circ f) \cdot (f')$$

證明以上定理需引用一下引理：

引理. 設 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in I$ 。則 f 可微當且僅當存在函數 φ 在 I 上定義且於 c 點連續使得對於所有 $x \in I$ 均有

$$f(x) - f(c) = \varphi(x)(x - c)$$

則寫 $\varphi(c) = f'(c)$ 。

證明.[引理] 若 $f'(c)$ 存在，即

$$\varphi(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}, & x \neq c \\ f'(c), & x = c \end{cases}$$

為連續函數，使得 $\varphi(c) = f'(c)$ 。

若 φ 為連續函數符合

$$f(x) - f(c) = \varphi(x)(x - c)$$

則

$$\varphi(c) = \lim_{x \rightarrow c} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$$

□

證明.[鏈鎖律] 對任意 $c \in I$ ，存在 φ_c, ϕ_c 使得下列成立

$$\begin{aligned} h(x) - h(c) &= g(f(x)) - g(f(c)) \\ &= \varphi_c(f(x))(f(x) - f(c)) \\ &= \varphi_c(f(x)) \cdot \phi_c(x)(x - c) \end{aligned}$$

因此， $h'(c) = \varphi_c(f(c)) \cdot \phi_c(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c)$ 。

□

例子. 設 $h(x) := \sin e^x$ ，則

$$\begin{aligned} h'(c) &= (\sin)'(e^x) \cdot (e^x)' \\ &= e^x \cos e^x \end{aligned}$$

定理 (逆函數). 對於逆函數 $g := f^{-1}$,

$$g' = \frac{1}{f' \circ g}$$

證明. 設 $g(x) = f^{-1}(x)$, 則 $(f \circ g)(x) = x$. 利用鏈鎖律, 可得

$$\begin{aligned}(f' \circ g)(x) \cdot g'(x) &= 1 \\ g'(x) &= \frac{1}{(f' \circ g)(x)}\end{aligned}$$

□

例子. 已知 $\ln(x)$ 為 e^x 的逆函數, 則

$$\begin{aligned}(\ln(x))' &= \frac{1}{e^{\ln(x)}} \\ &= \frac{1}{x}\end{aligned}$$

導數可視為函數於任意點的斜率, 換言之, 利用直線方程的點斜式, 可得出函數 f 於任意點 $(x_0, f(x_0))$ 上的切綫方程為

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

定義 3 (高維導數). 若 f 可微, 則 f' 為 f 的第一導數; 若 f' 可微, 則 f'' 為 f 的第二導數, 並記

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$$

如此類推, 我們稱 $f^{(n)}(x)$ 為 f 的第 n 導數, 記

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}(f(x))$$

均值定理

均值定理為數學分析其中一個重要工具, 亦是導數的重要應用結果。其含義在於將導數與函數值作連接, 將切綫普及化。

定理 (極值定理). 設 $c \in I$ 使得 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ 有極值於 c 。若 f 可微, 則 $f'(c) = 0$ 。

證明. 先證明 $f(c)$ 為極大值的情況: 若 $f'(c) > 0$, 則存在 c 的鄰域 $V \subseteq I$ 使得對於 $x \in V$,

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

因此, 若 $x \in V$ 同時 $x > c$, 則

$$f(x) - f(c) = (x - c) \cdot \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

此則違反 $f(c)$ 為極大值的假設, $f'(c) \not> 0$ 。

同理, 證明 $f'(c) \not< 0$ 可運用相似做法, 因此 $f'(c) = 0$ 。

□

衍理. 設 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 為連續函數，並設 f 在 $c \in I$ 有極值。則 $f'(c)$ 不存在或 $f'(c) = 0$ 。

小記. $f(x) := |x|$ 可作衍理的例證： f 在 $0 \in I := [-1, 1]$ 上存在極小值，但 $f'(0)$ 並不存在。

定理 (羅爾定理). 設 f 在閉合區間 $[a, b]$ 上連續，且可微於開放區間 (a, b) ，使得 $f(a) = f(b) = 0$ 。則存在至少一個 $c \in (a, b)$ 使得 $f'(c) = 0$ 。

定理 (基本均值定理). 設 f 在閉合區間 $[a, b]$ 上連續，且可微於開放區間 (a, b) ，則存在至少一個 $c \in (a, b)$ 使得

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

證明. 設

$$\varphi(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

可見 φ 在閉合區間 $[a, b]$ 上連續，且可微於開放區間 (a, b) ，而且 $\varphi(b) = \varphi(a) = 0$ 。則可利用羅爾定理引存在 $c \in (a, b)$ 使得

$$0 = \varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

通過簡單移項，便得

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

□

逆微分的基本原理，以及第一導數測試，都是從均值定理發展的一些應用。

定理. 設 f 在閉合區間 $I := [a, b]$ 上連續，且可微於開放區間 (a, b) ，且 $f'(x) = 0$ 對所有 $x \in (a, b)$ ，則 f 為 I 上的常函數。

證明. 利用均值定理，存在至少一個 $c \in (a, b)$ 使得 $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) = 0$ ，則 $f(a) = f(b)$ ；並對於所有 $x \in (a, b)$ ，均有 $c \in (x, a)$ 使得 $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) = 0$ 。則 $f(x) = f(a)$ 對所有 $x \in [a, b]$ 成立。 □

衍理. 設 f, g 在閉合區間 $I := [a, b]$ 上連續，且均可微於開放區間 (a, b) ，且 $f'(x) = g'(x)$ 對所有 $x \in (a, b)$ ，則 $f = g + C$ ，其中 C 為常數。

定義 4 (遞升函數). 設 f 為連續函數，若對於所有 $x_1 < x_2$ 均有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ ，則稱 f 為遞升函數。

定義 5 (遞降函數). 設 f 為連續函數，若對於所有 $x_1 < x_2$ 均有 $f(x_1) \geq f(x_2)$ ，則稱 f 為遞降函數。

定理. 設 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ 為可微函數, 則:

1. f 為遞升函數當且僅當所有 $x \in I$ 均有 $f'(x) \geq 0$;
2. f 為遞降函數當且僅當所有 $x \in I$ 均有 $f'(x) \leq 0$ 。

證明. 證明1: 設 $f'(x) \geq 0$ 。若 $x_1 < x_2$, 則根據均值定理存在 $c \in (x_1, x_2)$ 使得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0$$

相對地, 若 f 為遞升函數, 則

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

證明2: 與證明1相似, 留做習題。 □

定理 (第一導數測試). 設 f 為 $I := [a, b]$ 上的連續函數, 並設 $c \in (a, b)$ 。假定 f 在 (a, c) 及 (b, c) 上可微, 則:

1. 若存在 c 的 δ -鄰域 $(c-\delta, c+\delta) \subseteq I$ 使得 $\begin{cases} f'(x) \geq 0, & c-\delta < x < c; \\ f'(x) \leq 0, & c < x < c+\delta \end{cases}$, 則 c 為 f 在 I 上的相對極大值;
2. 若存在 c 的 δ -鄰域 $(c-\delta, c+\delta) \cap I \subseteq I$ 使得 $\begin{cases} f'(x) \leq 0, & c-\delta < x < c; \\ f'(x) \geq 0, & c < x < c+\delta \end{cases}$, 則 c 為 f 在 I 上的相對極小值。

證明. 對於 $c - \delta < x < c$ 時 $f'(x) \geq 0$, 則根據均值定理, 存在 $c_x \in (x, c)$ 使得

$$f(c) - f(x) = f'(c_x)(c - x) \geq 0$$

則 $f(c) \geq f(x)$; 同理, 對於 $c < x < c + \delta$ 時 $f'(x) \leq 0$, 則根據均值定理, 存在 $c_x \in (c, x)$ 使得

$$f(x) - f(c) = f'(c_x)(x - c) \leq 0$$

則 $f(c) \geq f(x)$ 。因此, 對於 $x \in [a, b]$, $f(c) \geq f(x)$, 則 $f(c)$ 為相對極大值。

2的證明與1相似, 留做習題。 □

洛必達法則

洛必達法則主要用來處理不能正常求得的極限，舉例如 f, g 均為連續函數，而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ 的狀況，我們不能直接求得極限的值，因：若定義 $f(x) = \alpha x$ 及 $g(x) = x$ ， $\alpha \in \mathbb{R}$ 為任意值，則

$$\frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x}{x} = \alpha$$

但洛必達定理通過求導的方法得到了意想不到的結果。

從最直覺的判斷，我們可以考慮切綫：因為 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 及 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ ，因此根據 f, g 的連續性， $f(0) = 0$ 及 $g(0) = 0$ ，對於足夠小的 $\delta > 0$ ， $x \in (-\delta, \delta)$ ，

$$\begin{cases} f(x) \approx f'(0)x \\ g(x) \approx g'(0)x \end{cases}$$

因此可想像

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(0)x}{g'(0)x} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

而最基礎的推導也是基於導數定義：

定理. 設 f, g 均為 $[a, b]$ 上的函數使得 $f(a) = g(a) = 0$ ，並設 $g(x) \neq 0$ 對於 $x \in (a, b)$ 。若 f, g 在 a 點可微且 $g'(a) \neq 0$ ，則

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

證明.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} \\ &= \frac{f'(a)}{g'(a)} \end{aligned}$$

□

小記. 需注意的是，以上定理只適用於函數在 a 有導數，若 $a = \pm\infty$ ，則需要更多手段。

定理 (柯西均值定理/普適均值定理). 設 f, g 為 $[a, b]$ 上的連續函數，並在 (a, b) 上可微，且 $g'(x) \neq 0$ 對所有 $x \in (a, b)$ 。則存在 $c \in (a, b)$ 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

證明. 設

$$h(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

可見 h 在閉合區間 $[a, b]$ 上連續, 且可微於開放區間 (a, b) , 而且 $h(b) = h(a) = 0$ 。則可利用羅爾定理引存在 $c \in (a, b)$ 使得

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c)$$

通過簡單移項, 便得

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

□

定理 (洛必達定理I). 設 $-\infty \leq a < b \leq \infty$ 並設 f, g 於 (a, b) 可微使得所有 $x \in (a, b)$ 均使得 $g'(x) \neq 0$ 。假定

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$$

1. 若 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$, 則 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$;
2. 若 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \{-\infty, \infty\}$, 則 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ 。

證明. 設 $a < \alpha < \beta < b$, 根據羅爾定理 $g(\alpha) \neq g(\beta)$ (為何?), 並根據柯西均值定理, 存在 $u \in (\alpha, \beta)$ 使得

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(u)}{g'(u)}$$

其中 $u \in (\alpha, \beta)$ 。

情況1: $L \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, 存在 $c \in (a, b)$ 使得

$$\begin{aligned} L + \varepsilon &< \frac{f'(u)}{g'(u)} < L + \varepsilon & u \in (a, c) \\ L + \varepsilon &< \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} < L + \varepsilon & a < \alpha < \beta \leq c \end{aligned}$$

取 $\alpha \rightarrow a^+$, 可得

$$L + \varepsilon \leq \frac{f(\beta)}{g(\beta)} \leq L + \varepsilon \quad \beta \in (a, c]$$

因 $\varepsilon > 0$ 為任意值, 1證畢。

情況2.1: $L = \infty$, $M > 0$, 存在 $c \in (a, b)$ 使得

$$\begin{aligned} \frac{f'(u)}{g'(u)} &> M & u &\in (a, c) \\ \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} &> M & a < \alpha < \beta \leq c \end{aligned}$$

取 $\alpha \rightarrow a^+$, 可得

$$\frac{f(\beta)}{g(\beta)} \geq M \quad \beta \in (a, c)$$

因 $M > 0$ 為任意值, 2.1 證畢。

若 $L = -\infty$, 證明與2.1類似。 □

定理 (洛必達定理II). 設 $-\infty \leq a < b \leq \infty$ 並設 f, g 於 (a, b) 可微使得所有 $x \in (a, b)$ 均使得 $g'(x) \neq 0$ 。假定

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$$

1. 若 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$, 則 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$;
2. 若 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \{-\infty, \infty\}$, 則 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ 。

泰勒定理

回想切綫的出現, 可見對於任意可微函數 f 都存在一種估算

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

而若需要更精確的估算, 考慮若 f 存在二階導數, 則

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

同理, 若 f 存在三階導數、四階導數, 可對 f 進行更精確的估算。如此拓展下去, 可得以下定義:

定義 6 (泰勒多項式). 設 $n \in \mathbb{N}$ 及 $I := [a, b]$, 並設 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 f 及其導數 $f', f'', \dots, f^{(n)}$ 均為 (a, b) 上的連續函數, 並於 (a, b) 上存在 $(n+1)$ -階導數 $f^{(n+1)}$, 則對於 $x_0 \in I$, 設 $V(x_0)$ 為 x_0 的鄰域, 可對 $x \in V(x_0)$ 進行以下估算

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \end{aligned}$$

我們記 $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ 。

定理 (泰勒多項式定理). 設 $n \in \mathbb{N}$ 及 $I := [a, b]$, 並設 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 f 及其導數 $f', f'', \dots, f^{(n)}$ 均為 (a, b) 上的連續函數, 並於 (a, b) 上存在 $(n+1)$ -階導數 $f^{(n+1)}$, 則對於定點 $x_0 \in I$, 及任意 $x \in I$, 存在 c 位於 x 與 x_0 之間使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

證明. 設

$$F(t) := f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t)$$

則

$$\begin{aligned} F'(t) &= -f'(t) - \sum_{k=1}^n \left(-\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t) + \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) \right) \\ &= -f'(t) - (-f'(t) + \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)) \\ &= -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \end{aligned}$$

又設 $G(t) := F(t) - \left(\frac{x-t}{x-x_0} \right)^{n+1} F(x_0)$, 則見 $G(x) = G(x_0) = 0$ 。根據羅爾定理, 存在 c 位於 x 和 x_0 之間使得

$$0 = G'(c) = F'(c) + (n+1) \frac{(x-c)^n}{(x-x_0)^{n+1}} F(x_0)$$

則

$$\begin{aligned} F(x_0) &= -\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)(x-c)^n} F'(c) \\ &= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)(x-c)^n} \frac{(x-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c) \\ &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

□

泰勒定理對相對極值有很大的貢獻。回顧二階導數對極值的影響：

定理. 設 $f : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 f 及其導數 f' 均為 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上的連續函數, 並於 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上存在二階導數 f'' 使得 $f'(x_0) = 0$ 而 $f''(x_0) \neq 0$, 則

1. 若 $f''(x_0) > 0$, $f(x_0)$ 為相對極小值;
2. 若 $f''(x_0) < 0$, $f(x_0)$ 為相對極大值。

證明. 證明1: 根據泰勒定理, 存在 $c \in (x_0, x_0 + \delta)$ 使得所有 $c' \in (x_0, c)$ 均有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(c')}{2}(x - x_0)^2 \geq f(x_0)$$

同理, 存在 $d \in (x_0 - \delta, x_0)$ 使得所有 $d' \in (d, x_0)$ 均有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(d')}{2}(x - x_0)^2 \geq f(x_0)$$

則 $f(x_0)$ 為 x_0 鄰域上的相對極小值。

證明2的情況相似, 留做習題。 □

因此利用泰勒定理, 可將上述極值的定理拓展至高階導數版本:

定理. 設 $f: [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 f 及其導數 $f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ 均為 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上的連續函數, 並於 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上存在 n 階導數 $f^{(n)}$ 使得 $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ 而 $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, 則

1. 若 n 為偶數而 $f^{(n)}(x_0) > 0$, $f(x_0)$ 為相對極小值;
2. 若 n 為偶數而 $f^{(n)}(x_0) < 0$, $f(x_0)$ 為相對極大值;
3. 若 n 為奇數, 則 $f(x_0)$ 並非極值。

證明. 證明留做習題。 □

另外還有一種導數的應用, 在於尋找函數的根。我們以往可以利用分割法進行推演, 但效率實在太低; 因此牛頓發明了更快捷的做法, 我們稱其為牛頓分割法。

此方法利用切綫做切入, 加速靠近根點。因此, 通過數列的創造, 可不斷接近根點。考慮

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

代 $y = 0$ 可得 x 軸切點, 則為數列的新一項:

$$-f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \implies x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

定理 (牛頓分割法). 設 $I := [a, b]$ 並設 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 為二階可微函數。假定 $f(a)f(b) < 0$ 並存在 $m, M > 0$ 使得所有 $x \in I$ 均符合 $|f'(x)| \geq m > 0$ 及 $|f''(x)| \leq M$ 。設 $K := M/2m$ 。則存在 $r \in I' \subset I$ 使得 $f(r) = 0$, 同時有數列 (x_n) 定義為

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r$, 而且 $|x_{n+1} - r| < K|x_n - r|^2$ 。

證明. 留做習題。

提示:

1. $f(a)f(b) < 0 \implies f(a)$ 和 $f(b)$ 一正一負。根據介值定理得到 $r \in (a, b)$ 使得 $f(r) = 0$ 。

2. 考慮泰勒多項式

$$0 = f(r) = f(x_n) + f'(x_n)(x_n - r) + \frac{f''(c)}{2}(x_n - r)^2$$

其中 $x_n \in I$, c 介乎 x_n 與 r 之間。

3. 考慮

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

得到 $|x_{n+1} - r| < K|x_n - r|^2$ 。

4. 設 $\delta < 1/K$ 完成極限證明。

□