

1. 已知歐拉公式為

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

其中 $i^2 = -1$ 為虛數， e 為自然常數。

(a) 試以 $\sin x$ 及 $\cos x$ 表述 e^{i2x} 和 e^{i3x} 。

(b) 利用M.I.，證明以下等式對所有整數 n 均成立：

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$$

[Hint:分case $n < 0, n = 0, n > 0$]

(c) 已知 $\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ 對任意 $z \in \mathbb{C}, z \neq 1$ 。運用(a), (b)及就你所知，求以下式的閉合式：

i. $\sum_{k=0}^n \cos kx$

ii. $\sum_{k=0}^n \sin kx$

iii. $\sum_{k=0}^n r^k \cos kx, |r| < 1$

iv. $\sum_{k=0}^n r^k \sin kx, |r| < 1$

(d) 已知 $|r| < 1$, 求

i. $\sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos kx, |r| < 1$

ii. $\sum_{k=0}^{\infty} r^k \sin kx, |r| < 1$

2. (a) 運用任意合理方法，求

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$.

(b) 利用單位圓的概念，證明 $|\sin x| \leq |x|$.

(c) 運用(a)和(b)，及就你所知，證明對於 x 符合 $0 < |x| < \delta(\varepsilon)$ ，均有

$$\left| \frac{\sin(e^x - 1) - \sin(\cos x - 1)}{x} - 1 \right| < \varepsilon$$

其中 $\delta(\varepsilon)$ 為受 ε 操控的數值， $\delta > 0, \varepsilon > 0$ 。

3. 設汎函 D 有以下定義：

定義 1. 對於任意連續函數 $f : A \rightarrow B$ ，給定 $a \in A$,

$$D_a f := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

定義 2.

$$Df := \{D_a f : a \in A, f : A \rightarrow B\}$$

(a) 證明若 $D_a f$ 存在，則 f 在 a 上連續。

(b) 若 f 為空集，是描述 f 的性質。

4. (a) 求以下極限：

$$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$$

(b) 證明以下極限發散：

$$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{xy}$$