

階乘

階乘為一種特別的乘積，定義如下：

定義 1 (階乘). 對任意正整數 n ，定義

$$n! = \prod_{i=1}^n i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

並定義 $0! = 1$.

小記. 對於 $0!$ 的定義，可以如此理解： $n! = n(n-1)!$ ，則 $(n-1)! = \frac{n!}{n}$ 。因此，

$$0! = (1-1)! = \frac{1!}{1} = 1$$

組合

定義 2 (組合數). 對於從 n 項物品中隨機抽取 r 項物品的組合數，定義為

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

定理. 設 n, k 為正整數， $0 \leq k \leq n$ ，則

$$C_k^n = C_{n-k}^n$$

定理. 設 n, k 為正整數， $0 \leq k < n$ ，則

$$C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}$$

二項式定理

對於二項式展開的係數，除了以帕斯卡三角為入門設想，我們亦可考慮

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)(a+b) \cdots (a+b) = \prod_{i=1}^n (a+b)$$

已知展開式中任意一項的表達式必為 ka^xb^y ，其中 $x+y=n$ 及 k 為常數。現求對應的 k 的值，考慮

$$a^xb^y = \left(\prod_{i=1}^x a\right) \left(\prod_{j=1}^y b\right)$$

換言之，我們需從 n 個括號中取 x 個 a 相乘，取 y 個 b 相乘，其組合數為 $C_x^n C_y^{n-x} = C_x^n$ 。

定理 (二項式定理). 設 a, b 為複數, n 為正整數, 則

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_k^n a^k b^{n-k}$$

從二項式定理延伸, 可得以下多項式定理:

定義 3 (多項式係數). 定義多項式係數為

$$\binom{n}{x_1, x_2, \dots, x_k} = \frac{n!}{x_1! x_2! \cdots x_k!}$$

小記. 對於二項式, 若將其視為多項式的特殊情況, 則可簡記 $\binom{n}{x_1, x_2}$ 為 $\binom{n}{x_1} = C_{x_1}^n$.

定理 (多項式定理). 設 a_1, a_2, \dots, a_m 為一組數, n 為正整數, 則

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_m=n} \binom{n}{i_1, i_2, \dots, i_m} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_m^{i_m}$$

習題

1. 求 $(3x^2 - \frac{7}{x})^6$ 的常數項及 x^2 的係數。
2. 設 $(2+5x)^n - (2-3x)^n$ 中 x^2 的係數為 10752, 求 x^3 的係數。
3. 已知 $(1+kx^3)^n = 1 - 8x^3 + 24x^6 + \cdots$, 求 k 和 n 的值, 其中 n 為正整數。
4. 已知 $(1-2x)^m(1+x)^n = 1 - 8x + 18x^2 + \cdots$, 求 m 和 n 的值, 其中 m, n 均為正整數。
5. 求 $(x + \frac{1}{x})^4(1 - \frac{1}{x})^6$ 的常數項。
6. 證明若 n, k 為正整數, $0 \leq k < n$, 則 $C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}$ 。
7. (a) 求 $\sum_{k=0}^n C_k^n$ 。[HINT: 考慮 $(1+1)^n$ 的展開式。]
 (b) 證明 $\sum_{\text{奇數 } k} C_k^n = \sum_{\text{偶數 } k} C_k^n$ 。[HINT: 考慮 $(1-1)^n$ 的展開式。]
8. 設 n 為正整數。
 (a) 設 r 為介乎 1 與 n 之間的正整數。證明 $\frac{C_{r+1}^{n+1}}{C_r^{n+1}} = \frac{n+1-r}{r+1}$ 。

(b) 由此，證明一下等式：

$$\begin{aligned} \text{i. } \sum_{k=0}^n (k+1) \cdot \frac{C_{k+1}^{n+1}}{C_k^{n+1}} &= \frac{An^2 + Bn + C}{2}; \\ \text{ii. } \prod_{k=0}^n (C_{k+1}^{n+1} + C_k^{n+1}) &= \frac{(n+D)^{n+E}}{[(n+F)!]} \cdot \left(\prod_{k=0}^n C_k^{n+1} \right). \end{aligned}$$

其中 A, B, C, D, E, F 為常數，並須在結論時明確指出其值。

9. 證明范德蒙定理：

定理. 設 p, q, r 為非負整數。若 $r \leq p + q$ ，則 $\sum_{k=0}^r C_k^p C_{r-k}^q = C_r^{p+q}$ 。

[HINT: 考慮 $(1+x)^{p+q} = (1+x)^p(1+x)^q$]

10. 求以下算式的值，並以 n 表示：

$$\begin{aligned} \text{(a) } \sum_{k=0}^n (C_k^n)^2. \\ \text{(b) } \sum_{k=0}^n (-1)^k (C_k^n)^2 \\ \text{(c) } \sum_{k=0}^n k (C_k^n)^2. \end{aligned}$$

[HINT: 考慮 $C_k^n = C_{n-k}^n$]

$$11. \text{ 記 } \binom{n}{x_1, x_2, \dots, x_k} = \frac{n!}{x_1! x_2! \cdots x_k!}.$$

(a) 證明對於任意正整數 n 及 $k \geq 2$ ，若 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ ，則

$$\binom{n}{x_1, x_2, \dots, x_k} = C_{x_1}^n C_{x_2}^{n-x_1} \cdots C_{x_{k-1}}^{n-x_1-x_2-\cdots-x_{k-2}}$$

(b) 由此，證明多項式定理。

12. 已知當 $-1 < r < 1$ 時，

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} r^k$$

證明對於任意正整數 n 及 $-1 < r < 1$ ，

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k^{n+k-1} r^k = \frac{1}{(1-r)^n}$$

[HINT: 習題1。]

13. 設 p 為實數且 $0 < p < 1$ 。設 n 為正整數。對 k 介乎1與 n 之間，定義 $a_k = C_k^n p^k (1-p)^{n-k}$ 。

(a) 證明 $\sum_{k=0}^n a_k = 1$ 。

(b) 證明對於任意 k 介乎1與 n 之間， $0 < a_k < 1$ 。

(c) 定義 $\mu = \sum_{r=0}^n r a_r$ 。證明 $\mu = np$ 。

(d) 再定義 $\sigma = \sqrt{\sum_{r=0}^n (r - \mu)^2 a_r}$ 。

i. 證明 $\sigma^2 = \sum_{r=0}^n r^2 a_r - \mu^2$ 。

ii. 證明 $\sum_{r=0}^n r(r-1)a_r = n(n-1)p^2$ ，由此證明 $\sigma^2 = np(1-p)$ 。