求和記法

求和記法的作用：避免混淆

定義 1 (求和號). 設$a_1, a_2, \ldots, a_n$是一組數，他們的**和**記爲$\sum_{i=1}^{n} a_i$，即

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

$\sum_{i=1}^{n} a_i$也可寫作$\sum_{1 \leq i \leq n} a_i$ 或 $\sum_{i \in S} a_i$，其中$S = \{1, 2, \ldots, n\}$；此爲**條件式求和**，即將符合條件的項加總。

當i的範圍不言自明（或無須定義）時，還可簡記為$\sum_i a_i$或$\sum a_i$。

小記 (啞變量). 求和變量i也可用j, k等其他代數表示，就像函數的自變量除了用x表示也可用u, t等代數表示一樣。因此，

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{s=1}^{n} a_s = \sum_{X=1}^{n} a_X = \cdots$$

定義 2 (雙重求和號). 若a_{ij}是同時由i, j定義的一組數，即若

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

爲一陣列數，則

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m} A_i$$

其中$A_i = \sum_{j}^{n} a_{ij}$。

雙重求和的順序由內而外，表示先對j進行求和，再對i進行求和。

設理 (求和號的性質). 求和號有以下性質：

1. $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$；

2. $c\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} ca_i$；

3. $(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{j=1}^{m} b_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_ib_j$；

4. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_ib_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_ib_j$。

證明. 留作習題，利用數學歸納法證明。 □

求積記法

定義 3 (求積號). 設$a_1, a_2, \ldots, a_n$是一組數，他們的積記爲$\prod_{i=1}^{n} a_i$，即

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1a_2\cdots a_n.$$

與求和號相同，$\prod_{i=1}^{n} a_i$也可寫作$\prod_{1\le i\le n} a_i$ 或 $\prod_{i\in S} a_i$，其中$S = \{1, 2, \ldots, n\}$；此爲**條件式求積**，即將符合條件的項乘積。

當i的範圍不言自明（或無須定義）時，還可簡記為$\prod_{i} a_i$或$\prod a_i$。

定義 4 (雙重求積號). 若a_{ij}是同時由i, j定義的一組數，即若

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

爲一陣列數，則

$$\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n} a_{ij} = \prod_{i=1}^{m} A_i$$

其中$A_i = \prod_{j=1}^{n} a_{ij}$。

設理 (求積號的性質). 求積號有以下性質：

1. $c^n\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} ca_i$；

2. $(\prod_{i=1}^{n} a_i)(\prod_{j=1}^{m} b_j) = \prod_{i=1}^{n+m} c_i$，其中$c_i = \begin{cases} a_i & i \leq n \\ b_{i-n} & i > n \end{cases}$;

3. $\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} a_i b_j = \prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n} a_i b_j$。

證明. 留作習題，利用數學歸納法證明。 □

數學歸納法原理

定義 5 (數學陳述). **數學陳述**是一種有關數學，並且能分辨對錯的句子。

例子. $1 = 2$是一種錯誤的數學陳述。

例子. $1 + 2 = 3$是一種正確的數學陳述。

定義 6 (判斷式). **判斷式**是一種牽涉變量，有待判斷對錯的數學句子。若闡明變量的值，則判斷式可有特定結果，並成爲數學陳述。

例子. $P(x)$為包含變量x的判斷式。

例子. $P(x, y)$為包含變量x, y的判斷式。

公設 (數學歸納法基本原理). 設$P(n)$為對於整數$n \geq 1$的判斷式。若以下條件同時成立:

- $P(1)$成立;
- 若$P(n)$對某$n \geq 1$成立，則$P(n+1)$成立。

則$P(n)$對所有整數$n \geq 1$成立。

例子. 設$P(n)$代表對假設$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$的值。

$P(1) : \sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$成立。

假定$P(k)$對某正整數k成立，則對於$P(k+1)$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = (k+1) + \sum_{i=1}^{k} i = (k+1) + \frac{k(k+1)}{2} = (k+1)(1+\frac{k}{2}) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$\therefore$根據基本原理，$P(n)$對於所有正整數n成立。

若歸納起點並非$n = 1$，則可拓展至以下原理：

公設 (數學歸納法第二原理). 設$P(n)$為對於整數$n \geq n_0$的判斷式。若以下條件同時成立：

- 基：$P(n_0)$成立；
- 渡：若$P(n)$對某$n \geq n_0$成立，則$P(n+1)$成立。

則$P(n)$對所有整數$n \geq n_0$成立。

衍理 (強歸納法原理). 設$P(n)$為對於整數$n \geq 1$的判斷式。若以下條件同時成立：

- 基：$P(1)$成立；
- 渡：若$P(k)$對所有$1 \leq k \leq n$成立，則$P(n+1)$成立。

則$P(n)$對所有整數$n \geq n_0$成立。

小記. 強歸納法原理等價於數學歸納法基本原理。

習題

1. 證明求和號的性質：
   (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)$；
   (b) $\displaystyle c\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} ca_i$；
   (c) $\displaystyle(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{j=1}^{m} b_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j$；
   (d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j$。
2. 證明求積號的性質：
   (a) $\displaystyle c^n\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} ca_i$；
   (b) $\displaystyle(\prod_{i=1}^{n} a_i)(\prod_{j=1}^{m} b_j) = \prod_{i=1}^{n+m} c_i$，其中$c_i = \begin{cases} a_i & i \leq n \\ b_{i-n} & i > n \end{cases}$；

(c) $\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} a_i b_j = \prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n} a_i b_j$。

3. 證明以下等式：

(a) $(\sum_{i=1}^{m} a_i c^i)(\sum_{i}^{n} b_i c^i) = \sum_{k=0}^{m+n}(\sum_{i+j=k} a_i b_j)c^k$；

(b) $a^n - b^n = (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} b^i$；

(c) $(\sum_{i=0}^{n-1} a_i)(\sum_{i=0}^{n+1} a_i) = (\sum_{i=0}^{n} a_i)^2 - a^n$；

(d) $(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_m=n} \frac{n!}{i_1!i_2!\cdots i_m!} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_m^{i_m}$。

4. (a) 證明對於所有正整數n，$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$；

(b) 由此，求

i. $101^2 + 102^2 + 103^2 + \cdots + 200^2$；

ii. $20^2 + 22^2 + 24^2 + \cdots + 40^2$；

iii. $3^2 + 5^2 + 7^2 + \cdots + 31^2$。

5. (a) 證明對於所有正整數n，$\sum_{i=0}^{n} 3^i = \frac{3^n - 1}{2}$；

(b) 證明對於所有正整數n，$\sum_{i=1}^{n} i3^i = \frac{3^{n+1}(2n-1)+3}{4}$；

(c) 由此，求$1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 3^2 + 4 \times 3^3 + \cdots + (n+1) \times 3^n$的公式。

6. 證明對於所有正整數n，$\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(6n-1)(6n+2)} = \frac{n}{6n+2}$。

7. 證明對於任意正整數n，

(a) $n < 2^n$；

(b) $n! \leq n^n$。

8. 證明對於任意正整數$n \geq 4$，$2^n < n!$。

9. 證明對於任意正整數$n \geq 5$，$2n - 3 < 2^{n-2}$。

10. 求出所有正整數n使得$n^2 < 2^n$，並予以證明。

11. 求最大的正整數m使得對於所有正整數n，$n^3 - n$均可被m整除，並予以證明。

12. 證明對於任意正整數n及$-1 < r < 1$，

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k^{n+k-1} r^k = \frac{1}{(1-r)^n}$$