1. 考慮一個隨機樣本集合X_n，其概率算法如下：

$$P(X_n = x) = C^n_x p^x (1-p)^x$$

其中$0 < p < 1$為實數，$n > 0$為整數。

(a) 證明X_n為概率空間，即證明$\sum_{k=0}^{n} P(X = x) = 1$。

(b) 設$E(X_n)$為X_n的期望值。已知期望值的算法為$\sum_{x=0}^{n}[x \cdot P(X = x)]$。

i. 證明對於任意整數n及$k < n$，

$$k \cdot C^n_k \equiv n \cdot C^{n-1}_{k-1}$$

ii. 化簡

$$x \cdot P(X = x)$$

iii. 由此，以p及n表$E(X_n)$。

(c) 已知$A = \{x \,|\, 0 \le x \le 2\}$及$B = \{x \,|\, x$為0至5以內的單數$\}$為$X_5$內的事件。設$A'$及$B'$分別爲對應的互補事件。

i. A及B是否互相獨立？

ii. 求$P(A|B)$的值。

iii. 求$P(A'|B')$的值。

2. 考慮一個隨機樣本集合X_λ，其概率算法如下：

$$P(X_\lambda = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

其中$\lambda > 0$為實數。

(a) 證明X_λ為概率空間，即證明$\sum_{x=0}^{\infty} P(X_\lambda = x) = 1$。

(b) i. 求$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} P(X_\lambda = x)$。

ii. 設$\Delta x = P(X_\lambda = x) - P(X_\lambda = x-1)$。求

$$\int_0^1 \Delta x d\lambda$$

(c) 若x為實數，則$P(X_\lambda = x)$屬於連續函數。如使用梯形法則計算$\int_1^2 P(X_\lambda = x)dx$，問計算結果屬於過高估算還是過低估算？試加以解釋。

3. 設某車輛的行駛速度$v(t)$在不同時間點$t>0$可以用以下函式估算：

$$v(t)=\frac{kt}{e^{at}+4}$$

其中k和a為常數。已知在行車記錄儀內有以下不同時間的數據：

t	5	10	15	20	25
$v(t)$	30.90	6.56	0.83	0.09	0.01

(a) 繪畫$\ln\left(\dfrac{kt}{v(t)}-4\right)$對$t$的圖像，並求出$a$和$k$的值。

(b) 求$v'(t)$及$v''(t)$，並求$v(t)$的極大值。

(c) $v(t)$會否小於0.0001？