因數分解

回顧因數分解概念，根據我們在小學學到的知識，某個數字（如18）的因數可用下列方式表示：

$$
\begin{aligned}
18 &= 1 \times 18 \\
&= 2 \times 9 \\
&= 3 \times 6
\end{aligned}
$$

因此，在這個例子中，我們有 $1, 2, 3, 6, 9, 18$ 作為 18 的因子。同樣地，當我們進入多項式的討論時，因數分解的概念仍然有效，但因式分解的運算會變得不清楚，而需要對多項式本質有更多理解。

觀察下列算式，已知

$$x \cdot x = x^2$$

因此

$$
\begin{aligned}
x^2 - 2x &= x(x-2) \\
x^3 + 4x^2 &= x^2(x+4)
\end{aligned}
$$

若認為上面的表達式有點含糊，回憶分配律：

$$
\begin{aligned}
a(b+c) &= ab + ac \\
(a+b)c &= ac + ab
\end{aligned}
$$

並將倒推表達式。注意：因式分解只是展開數式的反向操作。

$$
\begin{aligned}
x(x-2) &= x \cdot x - x \cdot 2 \\
&= x^2 - 2x \\
x^2(x+4) &= x^2 \cdot x + x^2 \cdot 4 \\
&= x^3 + 4x^2
\end{aligned}
$$

由於 $x^2 \cdot x$ 可被視爲 $x \cdot x \cdot x$, 因此 3 個 x 相乘可得 x^3.

然而，並非每個多項式都像我們所看到的那樣簡單。對於物理學中存在的一些表達式，我們會遇到類似這樣的情況：

$$x^2 + 3x + 4 = 0$$

我們有不同的方法以求x的值。接下來將使用之前學過的恆等式。

讓我們先溫習一下我們對因式分解的理解。

習題

1. 例出下列數字的所有因子，包括負數：

$a)$ 4 $b)$ 6 $c)$ 12 $d)$ 15
$e)$ 32 $f)$ 44 $g)$ 52 $h)$ 80

2. 對下列各項進行質因數分解：

$a)$ 4 $b)$ 6 $c)$ 12 $d)$ 15
$e)$ 32 $f)$ 44 $g)$ 52 $h)$ 80

3. 因式分解：

$a)\ x^2+x$ $b)\ x-xy$ $c)\ x^4+2x^2+2x$ $d)\ x^3-2x$

以恆等式進行因式分解

回顧以下展開式：

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$
$$(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$$
$$(x+y)(x-y) = x^2-y^2$$

我們應該注意到，等號是雙向有意義的，也就是說，每當左手邊等於右手邊，右手邊就立即等於左手邊。因此，我們可能會從相反的方向來看上面的情況。

$$x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2$$
$$x^2-2xy+y^2 = (x-y)^2$$
$$x^2-y^2 = (x+y)(x-y)$$

這稱為**恆等式因式分解**。

示例 1. *因式分解* $x^2+2x+1.$

解.

$$\begin{aligned} x^2+2x+1 &= (x)^2+2(x)(1)+(1)^2 \\ &= (x+1)^2 \end{aligned}$$

示例 2. 因式分解 $x^2 + 4x + 4$.

解.

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 4 &= (x)^2 + 2(x)(2) + (2)^2 \\ &= (x+2)^2 \end{aligned}$$

示例 3. 因式分解 $x^2 - 2x + 1$.

解.

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 &= (x)^2 - 2(x)(1) + (1)^2 \\ &= (x-1)^2 \end{aligned}$$

示例 4. 因式分解 $x^2 - 4x + 4$.

解.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 &= (x)^2 - 2(x)(2) + (2)^2 \\ &= (x-2)^2 \end{aligned}$$

示例 5. 因式分解 $x^2 - 1$.

解.

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= (x)^2 - (1)^2 \\ &= (x+1)(x-1) \end{aligned}$$

示例 6. 因式分解 $x^2 - 9$.

解.

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= (x)^2 - (3)^2 \\ &= (x+3)(x-3) \end{aligned}$$

讓我們運用恆等式做些簡單的因式分解練習。

習題

1. 因式分解：

$a)$ x^2+6x+9 $b)$ $x^2+8x+16$ $c)$ $x^2+10x+25$ $d)$ $x^2+16x+64$

$e)$ $2x^2+12x+18$ $f)$ $4x^2+32x+64$ $g)$ $6x^2+60x+150$ $h)$ $8x^2+128x+512$

$i)$ x^3+6x^2+9x $j)$ $x^5+8x^4+16x^3$ $k)$ $x^8+10x^6+25x^4$ $l)$ x^9+16x^5+64x

2. 因式分解：

$a)$ x^2-6x+9 $b)$ $x^2-8x+16$ $c)$ $x^2-10x+25$ $d)$ $x^2-16x+64$

$e)$ $2x^2-12x+18$ $f)$ $4x^2-32x+64$ $g)$ $6x^2-60x+150$ $h)$ $8x^2-128x+512$

$i)$ x^3-6x^2+9x $j)$ $x^5-8x^4+16x^3$ $k)$ $x^8-10x^6+25x^4$ $l)$ x^9-16x^5+64x

3. 因式分解：

$a)$ x^2-9 $b)$ x^2-16 $c)$ x^2-25 $d)$ x^2-64

$e)$ $2x^2-18$ $f)$ $4x^2-64$ $g)$ $6x^2-150$ $h)$ $8x^2-512$

$i)$ x^3-9x $j)$ x^5-16x^3 $k)$ x^8-25x^4 $l)$ x^9-64x

4. 因式分解：

$a)$ $x^2+2ax+a^2$ $b)$ $x^2+8x+16-b^2$

$c)$ $x^2+10x+25-y^2+2yc-c^2$ $d)$ $ax^2+16a^2x+64a^3$

$e)$ $2x^2+12xy+18y^2$ $f)$ $4(x+y)^2+32(x^2-y^2)+64(x-y)^2$

以更多恆等式進行因式分解

為提高對因式分解的認知，我們將學習更多恆等式式以更熟練地運用它們。
我們已有二次多項式，所以我們可以進階到三次多項式

$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$
$$(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$$
$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$$
$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$$

為清晰起見，我們將為其提供一個證明。

1. 對於 $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$:

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)^2 \\ &= (x+y)(x^2+2xy+y^2) \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\end{aligned}$$

2. 對於 $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$:

$$\begin{aligned}(x-y)^3 &= (x-y)(x-y)^2 \\ &= (x-y)(x^2-2xy+y^2) \\ &= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3\end{aligned}$$

3. 對於 $(x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3 + y^3$:

$$\begin{aligned}(x+y)(x^2-xy+y^2) &= x^3 + x^2y - x^2y - xy^2 + xy^2 + y^3 \\ &= x^3 + y^3\end{aligned}$$

4. 對於 $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 - y^3$:

$$\begin{aligned}(x-y)(x^2+xy+y^2) &= x^3 - x^2y + x^2y - xy^2 + xy^2 - y^3 \\ &= x^3 - y^3\end{aligned}$$

讓我們通過一些例子來提升我們對其原理的熟練度。

示例 7. 因式分解 $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

解.

$$\begin{aligned}x^3 + 3x^2 + 3x + 1 &= (x)^3 + 3(x)^2(1) + 3(x)(1)^2 + (1)^3 \\ &= (x+1)^3\end{aligned}$$

示例 8. 因式分解 $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

解.

$$\begin{aligned}x^3 + 6x^2 + 12x + 8 &= (x)^3 + 3(x)^2(2) + 3(x)(2)^2 + (2)^3 \\ &= (x+2)^3\end{aligned}$$

示例 9. 因式分解 $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

解.

$$\begin{aligned} x^3-3x^2+3x-1 &= (x)^3-3(x)^2(1)+3(x)(1)^2-(1)^3 \\ &= (x-1)^3 \end{aligned}$$

示例 10. 因式分解 $x^3-6x^2+12x-8$.

解.

$$\begin{aligned} x^3-6x^2+12x-8 &= (x)^3-3(x)^2(2)+3(x)(2)^2-(2)^3 \\ &= (x-2)^3 \end{aligned}$$

示例 11. 因式分解 x^3+1.

解.

$$\begin{aligned} x^3+1 &= (x)^3+(1)^3 \\ &= (x+1)(x^2-x+1) \end{aligned}$$

示例 12. 因式分解 x^3+8.

解.

$$\begin{aligned} x^3+8 &= (x)^3+(2)^3 \\ &= (x+2)(x^2-2x+4) \end{aligned}$$

示例 13. 因式分解 x^3-1.

解.

$$\begin{aligned} x^3-1 &= (x)^3-(1)^3 \\ &= (x-1)(x^2+x+1) \end{aligned}$$

示例 14. 因式分解 x^3-8.

解.

$$\begin{aligned} x^3-8 &= (x)^3-(2)^3 \\ &= (x-2)(x^2+2x+4) \end{aligned}$$

現在我們對3次多項式因式分解有了認識，讓我們做些基本的恆等式練習。

習題

1. 因式分解：

$a)$ $x^3+9x^2+27x+27$ $b)$ $x^3+12x^2+48x+64$ $c)$ $x^3+15x^2+75x+125$

$d)$ $2x^3+18x^2+54x+54$ $e)$ $3x^3+36x^2+144x+192$ $f)$ $5x^3+75x^2+375x+625$

2. 因式分解：

$a)$ $x^3-9x^2+27x-27$ $b)$ $x^3-12x^2+48x-64$ $c)$ $x^3-15x^2+75x-125$

$d)$ $2x^3-18x^2+54x-54$ $e)$ $3x^3-36x^2+144x-192$ $f)$ $5x^3-75x^2+375x-625$

3. 因式分解：

$a)$ x^3+27 $b)$ x^3+64 $c)$ x^3+125

$d)$ $2x^3+54$ $e)$ $3x^3+192$ $f)$ $5x^3+625$

4. 因式分解：

$a)$ x^3-27 $b)$ x^3-64 $c)$ x^3-125

$d)$ $2x^3-54$ $e)$ $3x^3-192$ $f)$ $5x^3-625$

以十字相乘法進行因式分解

從現在開始，我們將深入探究一個重要問題：如何解以下形式：

$$x^2+px+q$$

或為更廣汎的形式

$$ax^2+bx+c$$

的二次方程？假設 x^2+px+q 可被分解爲

$$(x+a)(x+b)$$

就相當於說

$$(x+a)(x+b)=x^2+px+q$$

也就是說

$$x+(a+b)x+ab=x^2+px+q$$

比較同類項，可見

$$\begin{cases} a+b=p \\ ab=q \end{cases}$$

這給了我們一個提示，我們應先分解常數 q 再利用$a+b=p$求得 a,b 的正確值。
總結步驟：

1. 通過比較同類項，求 p,q 的值。
2. 嘗試寫出q的每對因子。
3. 檢查每對因子的和。如符合 $a+b=p$，則為正確答案。
4. 寫下 $(x+a)(x+b)$。

示例 15. 因式分解 x^2+4x+3.

解.1：求 p 和q.

$$p=4, q=3$$

2：分解 q (包含負數因子對).

$$\begin{aligned} 3 &= 1\cdot 3 \\ &= (-1)\cdot(-3) \end{aligned}$$

3：檢查 $a+b=p$ (包括負數因子對).

$$\begin{aligned} 1+3 &= 4 \\ (-1)+(-3) &= -4 \end{aligned}$$

由於 $p=4$，所以 $a=1,b=3$為正確答案

4：總結。

$$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$$

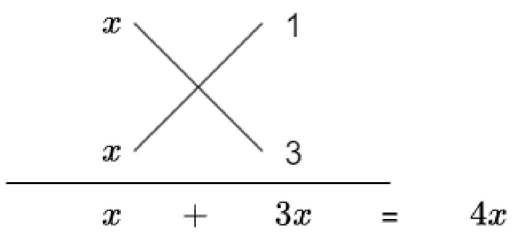
我們應確保因式分解後的表達式可以展開為原本的多項式。

$$\begin{aligned}(x+1)(x+3) &= x(x+3)+(x+3)\\ &= x^2+3x+x+3\\ &= x^2+4x+3\end{aligned}$$

這說明我們的步驟正確。有數學家認為上述步驟可以有更緊湊的表示方式。這個方法我們將其稱為**十字相乘法**。

示例 16. 利用十字相乘法因式分解 x^2+4x+3。

解.由於 $3=1\cdot 3=(-1)\cdot(-3)$，



即 $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$。

我們可以通過以下練習來熟習十字相乘法的運用。

習題

1. 以十字相乘法因式分解：

$a)$ x^2+6x+8	$b)$ $x^2+9x+18$	$c)$ x^2+7x+6
$d)$ x^2-6x+8	$e)$ $x^2-9x+18$	$f)$ x^2-7x+6
$g)$ $x^2+6x-27$	$h)$ $x^2+9x-22$	$i)$ $x^2+7x-30$
$j)$ $x^2-6x-27$	$k)$ $x^2-9x-22$	$l)$ $x^2-7x-30$

2. 以十字相乘法因式分解：

$a)$ $2x^2+12x+16$	$b)$ $3x^2+27x+54$	$c)$ $5x^2+35x+30$
$d)$ $7x^2-42x+56$	$e)$ $-11x^2+99x-198$	$f)$ $-3x^2+21x-18$

以因式分解法解二次方程

為解二次方程，我們得知以下幾點

定理. 若 $ab = 0$，則 $a = 0$ 或 $b = 0$。

從以上可見，若 $(x-\alpha)(x-\beta) = 0$，則 $x-\alpha = 0$ 或 $x-\beta = 0$。因此方程的 **解** 為 $x = \alpha$ 或 $x = \beta$.

示例 17. 解 $x^2 - 4x + 3 = 0$.

解. 通過因式分解，可得 $(x-1)(x-3) = 0$，因此 $x = 1$ 或 $x = 3$ 為方程的解。

示例 18. 解 $x^2 + 4x + 3 = 0$.

解. 通過因式分解，可得 $(x+1)(x+3) = 0$，因此 $x = -1$ 或 $x = -3$ 為方程的解。
當我遇到方程有兩個根，而兩個根是重複的話，我們只需列明其中一個根即可。

示例 19. 解 $x^2 + 4x + 4 = 0$.

解. 通過因式分解，可得 $(x+2)^2 = 0$，則 $x = -2$ 是唯一解

習題

1. 解方程：

   $a)$ $2x^2 + 12x + 16 = 0$ $b)$ $3x^2 + 27x + 54 = 0$ $c)$ $5x^2 + 35x + 30 = 0$
   $d)$ $7x^2 - 42x + 56 = 0$ $e)$ $-11x^2 + 99x - 198 = 0$ $f)$ $-3x^2 + 21x - 18 = 0$

2. 解方程：

   $a)$ $x^2 + 6x + 9 = 0$ $b)$ $x^2 + 8x + 16 = 0$ $c)$ $x^2 + 10x + 25 = 0$
   $d)$ $x^2 + 16x + 64 = 0$ $e)$ $2x^2 - 12x + 18 = 0$ $f)$ $4x^2 - 32x + 64 = 0$
   $g)$ $6x^2 - 60x + 150 = 0$ $h)$ $8x^2 - 128x + 512 = 0$ $i)$ $x^3 - 9x = 0$
   $j)$ $x^5 - 16x^3 = 0$ $k)$ $x^8 - 25x^4 = 0$ $l)$ $x^9 - 64x = 0$

使用公式求解二次方程

應注意，並不是所有二次多項式都可以完美分解。例如以下等式：

$$x^2 + 6x - 6 = 0$$

我們可以見到對於左側，如果$x=0$，則表達式計算結果大於 0; 若 $x=1$, 則表達式計算結果小於 0由此可想象存在$0<x<1$使等式成立。

至於準確解，我們引入根號 $\sqrt{k}$ 以解 $x^2=k$. 需要重要記得的一點是，正數和負數在平方后都等於正數。即 $(\sqrt{x})^2=x$ 及 $(-\sqrt{x})^2=x$ 當 $x>0$.

至於一般式 $ax^2+bx+c=0$，其解可以用以下形式表達：

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

其中加減號±同時表示一正一減兩個解。這代表只要x可滿足此二次方程，則：

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ 或 } x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

此表達方式來自配分法，其過程較爲複雜。為證明其真確性，我們將以抽象的方式的寫法展示過程，而確實證明可參閱稍後的二次多項式圖表部分。

此為二次方程的證明：

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c&=0\\
a(x^2+\frac{b}{a}x)+c&=0\\
a(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2})+c&=0\\
a(x+\frac{b}{2a})^2&=\frac{b^2-4ac}{4a}\\
(x+\frac{b}{2a})^2&=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\\
x+\frac{b}{2a}&=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\
x&=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

以下為一些二次方程的應用：

示例 20. 解$x^2+7x-9=0$。

解. $a=1$, $b=7$, $c=-9$

$$\begin{aligned}
x&=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\
&=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot1\cdot(-9)}}{2}\\
&=\frac{-7\pm\sqrt{85}}{2}
\end{aligned}$$

示例 21. 解 $2x^2+3x-4=0$ 。

解. $a=2,\ b=3,\ c=-4$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot(-4)}}{4} \\ &= \frac{-3\pm\sqrt{41}}{4} \end{aligned}$$

現在可以嘗試使用二次方程公式求解任何二次方程。

習題

1. 求解以下二次方程：

   $a)\ 3x^2-12x-26=0$　$b)\ 7x^2-27x+54=0$　$c)\ 4x^2+35x+1=0$

   $d)\ 2x^2-33x+6=0$　$e)\ -11x^2+89x-18=0$　$f)\ -3x^2+21x-18=0$

2. 求解以下二次方程，並以k表示答案：

   $a)\ 3kx^2-x-2=0$　$b)\ 7x^2-27x+k=0$　$c)\ kx^2+35x+1=0$

   $d)\ 2x^2-3kx+6=0$　$e)\ -11x^2+kx-k=0$　$f)\ -kx^2+21x-k^2=0$

實根的存在性

留意在二次方程公式中

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

開方部分 b^2-4ac對根的性質有很大的影響，我們稱其爲 **判別式**代表其可判斷根的特性。若此部分 ≥ 0則公式有實數答案；若此部分 <0, 則公式沒有實數答案。在以前，它殺死了很多數學家，但從現在開始，讓我們為它定義一個新的概念。

我們將定義一個新元素i，使其滿足方程：

$$i^2=-1$$

並對於所有正數 k可寫 $\sqrt{-k}=i\sqrt{k}$。我們稱 i 為虛數，因爲它不是實數。

從這個意義上說，當 $b^2-4ac<0$, 我們可以用一個更合適的書寫形式，即 $x+yi$, 使得每個解都可以完整表達。我們將這種形式的數字稱為**複數**，其中x,y是實數。

從這裡開始，讓我們用表格寫下根的性質的結論：

$\Delta = b^2 - 4ac$	根	性質
>0	$\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	相異實根
$=0$	$\dfrac{-b}{2a}$	重根
<0	$\dfrac{-b \pm \sqrt{-\Delta}i}{2a}$	沒有實根 (2 虛數根)

由此，我們現在可以在計算根值之前確定根的性質。

示例 22. 辨別下列根的性質。如果它有實根，則求解。

(a) $7x^2 + 5x - 10 = 0.$

(b) $81x^2 - 18x + 1 = 0.$

(c) $20x^2 + 19x + 10 = 0.$

解.

(a) 檢查判別式 $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4(7)(-10) = 305 > 0,$，因此它有 2 個不同的實根。代 Δ，

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{305}}{14}$$

(b) 檢查判別式 $\Delta = b^2 - 4ac = (-18)^2 - 4(81)(1) = 0$，因此它有 1 個實根。代 Δ

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{18}{162} = \frac{1}{9}$$

(c) 檢查判別式 $\Delta = b^2 - 4ac = 19^2 - 4(20)(10) = -439 < 0$，因此它沒有實根。

同時注意，如果我們知道一些未知二次方程的根的性質，我們可以根據判別式的命題來計算未知數。

示例 23. 已知二次方程 $kx^2 - 4x + k = 0$ 只有一個實數根，k為實數。解方程。

*解.*通過檢查判別式，我們得到以下結果：

$$\begin{aligned}(-4)^2 - 4 \cdot k \cdot k &= 0 \\ k &= \pm 2\end{aligned}$$

因此方程應該是 $2x^2 - 4x + 2 = 0$ 或 $-2x^2 - 4x - 2 = 0$，分別有 $x = 2$ 及 $x = -2$ 作爲根。

習題

1. 判斷下列二次方程根的性質：

$a)\ -390x^2-988x+794=0$ $b)\ 82x^2+290x+759=0$ $c)\ -924x^2-708x+959=0$
$d)\ -265x^2+336x-685=0$ $e)\ 845x^2+396x-501=0$ $f)\ -246x^2+16x-318=0$

2. 如果下列二次方程都只有一個實數根，求 k 的值。

$a)\ kx^2-2x+9=0$ $b)\ 82x^2+kx+79=0$ $c)\ -24x^2-70x+4k=0$
$d)\ -kx^2+36x-k=0$ $e)\ 8kx^2+3kx-51=0$ $f)\ 2kx^2+(3k-6)x-4k-8=0$

韋達定理：根和係數之間的關係

我們現在可以進一步深入探討比較抽象的內容，在上一部分中，我們發現判別式可告訴我們二次方程根的性質，當我們看到根以重數計算，根的數量始終等於2。這並不奇怪，因為我們總是可以想到將兩次方程分解為兩個線性因式的乘積，因此我們可以假設始終有2個根。

現在我們要研究根和係數之間的關係，因此我們有一個由數學家創建的新遊戲，稱為代數。假設我們有一個形式為$x^2+px+q=0$的二次方程，並且該方程有根α和β，這可能不是實數，但我們仍然可以用複數表示它們。如果我們將這些詞翻譯成數學表示：

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0=x^2+px+q$$

左方必定完全相等於右方，故此將左方展開可得

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=x^2+px+q$$

由此可得根與係數的關係

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-p\\ \alpha\beta=q\end{cases}$$

上述聯立方程稱爲 **韋達定理**，又稱**根的和**（上式）與**根的積**（下式）。

爲將韋達定理套用到 $ax^2+bx+c=0$ ，我們可通過下列變換

$$ax^2+bx+c=0 \implies x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

並取 $p=\frac{b}{a}$ 及$q=\frac{c}{a}$使其成爲前式。因此，對於一般式的韋達定理如下：

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\\ \alpha\beta=\frac{c}{a}\end{cases}$$

示例 24. 求 $3x^2+2x+9=0$ 的根的和與根的積。

解.設 α 和 β 為方程的根，利用韋達定理可得

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-\frac{2}{3} \\ \alpha\beta=\frac{9}{3}=3 \end{cases}$$

示例 25. 建立根為 $\frac{1}{2}$ 及 $\frac{2}{3}$ 的方程。

解.利用韋達定理可得

$$\begin{cases} \alpha+\beta=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{5}{6} \\ \alpha\beta=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \end{cases}$$

因此

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0 \implies x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{3}=0 \implies 6x^2-5x+2=0$$

習題

1. 求下列方程的根的和與根的積：

   $a)\ -390x^2-988x+794=0$ $b)\ 82x^2+290x+759=0$ $c)\ -924x^2-708x+959=0$
   $d)\ -265x^2+336x-685=0$ $e)\ 845x^2+396x-501=0$ $f)\ -246x^2+16x-318=0$
   $g)\ kx^2-2x+9=0$ $h)\ 82x^2+kx+79=0$ $i)\ -24x^2-70x+4k=0$
   $j)\ -kx^2+36x-k=0$ $k)\ 8kx^2+3kx-51=0$ $l)\ 2kx^2+(3k-6)x-4k-8=0$

2. 利用所提供的根，建立方程：

   (a) $\frac{2}{5}$ 及$-\frac{6}{7}$.
   (b) $\frac{3}{2}$ 及 $\frac{7}{4}$.
   (c) 4 及 -4.
   (d) 5 及 $-\frac{2}{7}$.

更多根的性質 (Optional)

在建立二次方程時，我們必先求出所需多項式的根。但許多時候我們不會得到確切的根，因而需要從其他給定信息演算。

示例 26. 已知 α 和 β 為方程 ax^2+bx+c的根。由此建立根為 α^2 及β^2 的方程，係數以 a,b,c表示。

解. 利用韋達定理可求出 $\alpha^2+\beta^2$ 及 $\alpha^2\beta^2$的值。已知

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\\ \alpha\beta=\frac{c}{a}\end{cases}$$

因此，

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\frac{b^2-2ac}{a^2}\\ \alpha^2\beta^2&=(\alpha\beta)^2=\frac{c^2}{a^2}\end{aligned}$$

並由此可知所需方程為

$$a^2x^2+(2ac-b^2)x+c^2$$

示例 27. 已知 $\begin{cases}\beta^2-3\beta+2=0\\ \alpha^2-3\alpha+2=0\end{cases}$，求 $(\alpha+1)(\beta+1)$的值。

解. 上述條件等同於 α 及 β 均爲方程 x^2-3x+2的根, 因此從韋達定理可得

$$\begin{cases}\alpha+\beta=3\\ \alpha\beta=2\end{cases}$$

而答案為

$$\begin{aligned}(\alpha+1)(\beta+1)&=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1\\ &=2+3+1\\ &=6\end{aligned}$$

示例 28. 已知 α 及 β 為方程 ax^2+bx+c 的實根，其中 $\alpha<\beta$求下列算式的值并以 a,b,c表示答案。

a) $\beta-\alpha$ *b*) $\alpha^2-\beta^2$ *c*) $\alpha^3+\beta^3$

d) $a\beta^2+b\beta$ *e*) $a\beta^2-b\alpha$ *f*) $a(\beta-\alpha)^2+b(\beta+\alpha)+c$

解.

(a)

$$\begin{aligned}(\beta-\alpha)^2 &= (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta \\ &= \frac{b^2-4ac}{a^2} \\ \beta-\alpha &= \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|} \qquad (\beta-\alpha>0)\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\alpha^2-\beta^2 &= (\alpha-\beta)(\alpha+\beta) \\ &= -\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}\cdot\frac{-b}{a} \\ &= \frac{b\sqrt{b^2-4ac}}{a|a|}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) \\ &= (\alpha+\beta)((\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta) \\ &= (-\frac{b}{a})((-\frac{b}{a})^2-3\frac{c}{a}) \\ &= \frac{3abc-b^3}{a^3}\end{aligned}$$

(d) $a\beta^2+b\beta = a\beta^2+b\beta+c-c=-c.$

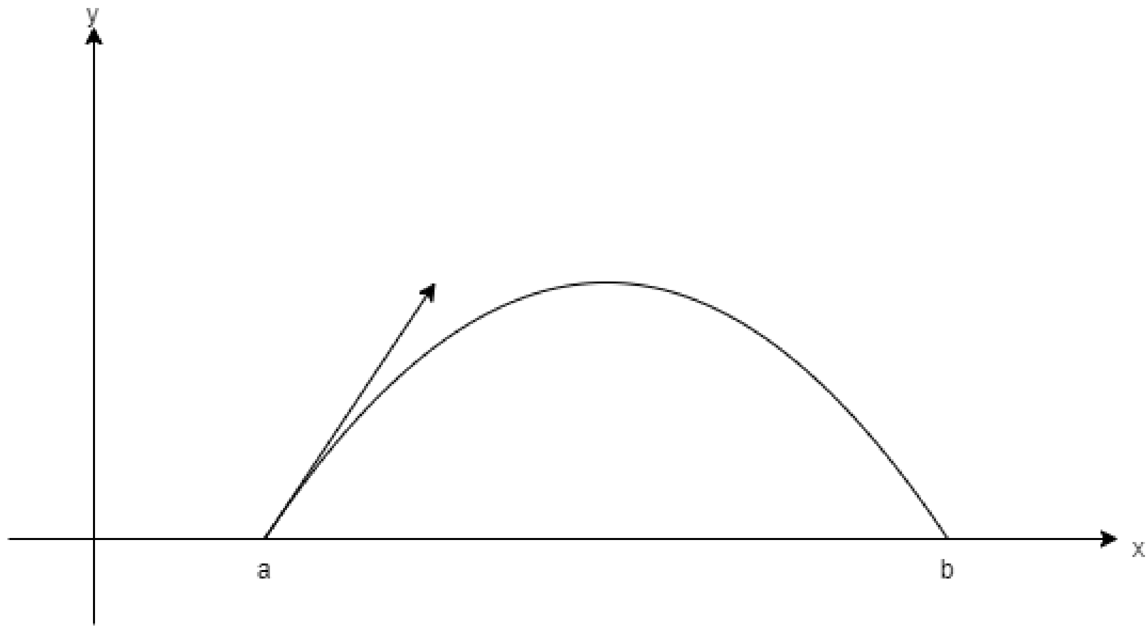
(e) $a\beta^2-b\alpha=(a\beta^2+b\beta+c)-b\alpha-b\beta-c=-b(\alpha+\beta)-c=\frac{b^2}{a}-c=\frac{b^2-ac}{a}.$

(f)

$$\begin{aligned}a(\beta-\alpha)^2+b(\beta+\alpha)+c &= a\beta^2-2a\alpha\beta+a\alpha^2+b\beta+b\alpha+c \\ &= (a\beta^2+b\beta+c)+(a\alpha^2+b\alpha+c)-2a\alpha\beta-c \\ &= 2b-c\end{aligned}$$

二次方程的圖像

二次方程來源於物理學中對拋物運動的研究，因此我們通常稱二次方程為**拋物綫**。



若將y軸視為高度，將x軸視為水平距離，我們獲得從$x = a$開始到$x = b$的拋物運動軌跡，方向如圖中箭頭所示。回顧速度和距離的關係，可得：

$$x - a = v_x t$$

其中v_x 代表水平速度。此算式符合當 $t = 0$時， $x = a$的條件，其中 v_x 為常數。設 t 代表時間，則可見垂直與水平運動均取同樣的參數t作爲時間參數。如此

$$v_y = u_y - gt$$

為能夠適當描述垂直運動的算式，g為重力加速度以在算式中表示減速。根據物理學的發現，有如下關係

$$y = \frac{u_y + v_y}{2} t$$

從而得出

$$y = u_y t - \frac{1}{2} g t^2$$

再代 $t = \frac{x-a}{v_x}$ 進上述 y 的方程可得如下形式的$x - y$關係以表示拋物綫：

$$y = ax^2 + bx + c$$

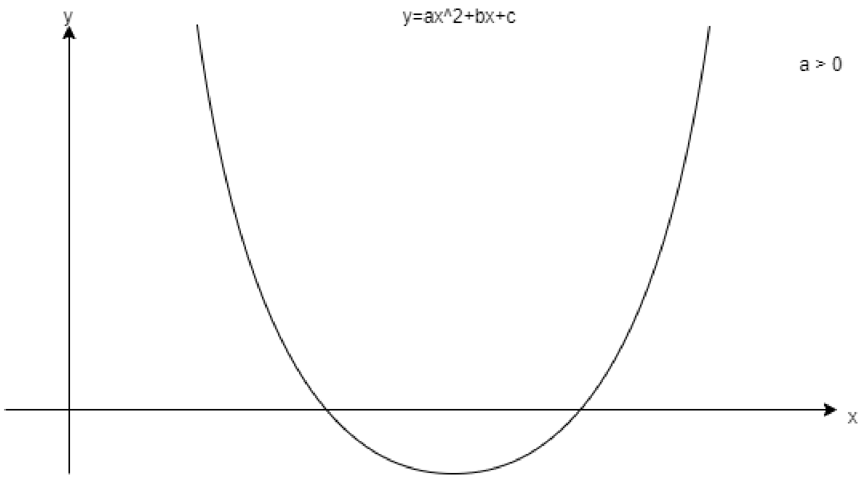
爲瞭解拋物綫的性質，引用 **配方法**:

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a(x^2+\frac{b}{a}x)+c \\
&= a(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2})+c \\
&= a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \\
&= a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}
\end{aligned}
$$

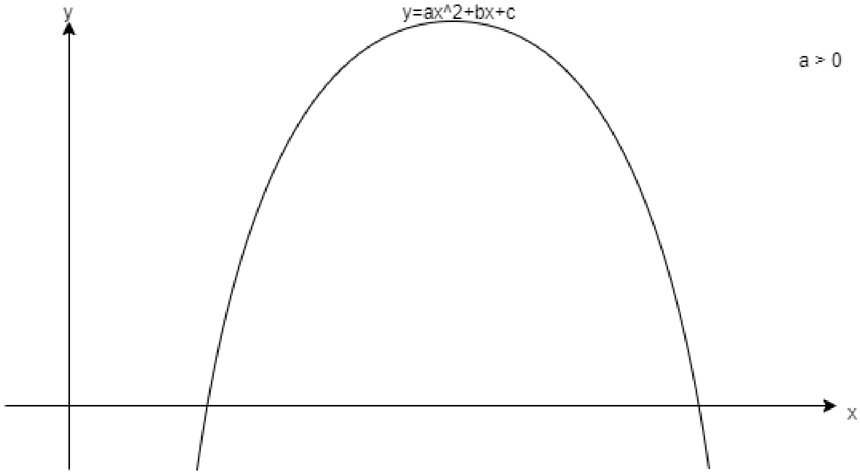
從上述可見當$x+\dfrac{b}{2a}0$時，多項式會到達極值 (極大值或極小值)因爲$(x+\frac{b}{2a})^2$ 的最小值爲 0，同時多項式受 $x+\frac{b}{2a}$所影響擁有頂點。配方法所得出的形式稱爲 **頂點式**。從頂點式可總結：

- **頂點** 位於 $(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a})$.
- **對稱軸** 在 $x=-\dfrac{b}{2a}$.
- **極值** 為 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

同時應留意，當圖像擁有極小值時，即有最低點，圖像的開口方向向上：



而有極大值時，則開口向下：



示例 29. 使用配方法，求$y = 2x^2 + 3x + 4$的圖像的開口方向，及頂點坐標、對稱軸和最小值。

解.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x + 4 &= 2(x^2 + \frac{3}{2}x) + 4 \\ &= 2(x^2 + 2\frac{3}{4}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16}) + 4 \\ &= 2(x + \frac{3}{4})^2 + \frac{23}{8} \end{aligned}$$

因此，圖像向上開口。其頂點位於$(-\frac{3}{4}, \frac{23}{8})$，對稱軸為 $x = -\frac{3}{4}$及最小值為 $\frac{23}{8}$。

示例 30. 以k 表$y = kx^2 + 4x + 6$ 的圖像的頂點、對稱軸及極值。

解. 根據以推導的公式，定點位於 $(-\frac{2}{k}, \frac{4k-4}{k})$，對稱軸位於 $x = -\frac{2}{k}$及極值為 $\frac{4k-4}{k}$。

習題

1. 使用配方法，求以下圖像的開口方向，及頂點坐標、對稱軸和最小值。

   $a)$ $y = 2x^2 + 12x + 16$　　$b)$ $y = 3x^2 + 27x + 54$　　$c)$ $y = 5x^2 + 35x + 30$

   $d)$ $y = 7x^2 - 42x + 56$　　$e)$ $y = -11x^2 + 99x - 198$　　$f)$ $y = -3x^2 + 21x - 18$

2. 以k 表以下圖像的頂點、對稱軸及極值。

   $a)$ $y = kx^2 - 2x + 9$　　$b)$ $y = 82x^2 + kx + 79$　　$c)$ $y = -24x^2 - 70x + 4k$

   $d)$ $y = -kx^2 + 36x - k$　　$e)$ $y = 8kx^2 + 3kx - 51$　　$f)$ $y = 2kx^2 + (3k-6)x - 4k - 8$

挑戰題

1. 解方程 $8x^2+2x+3=2x^2-4$。如有需要，以複數表示答案。

2. 解方程 $\dfrac{x-3}{2x-3}=\dfrac{7x+3}{2x-5}$。如有需要，以複數表示答案。

3. 若$x^2-2ax+a^2=0$，求$\dfrac{x}{a}$的值.

4. $\dfrac{x^{2002}+4x^{2001}}{4x^{2000}}=2449.25.$

5. 求$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots}}}}$的准確值。

6. 若α,β 為方程 $x^2-8x+11=0$的根，求 $\alpha^3+\alpha^2+\alpha+\beta^3+\beta^2+\beta$的值。

7. 若α,β為以x作代數的方程的根: $x^2-5x+a^2-2a+1=0$, 求 a 的值使得$\alpha\beta$達到其最小值。

8. 求$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$的值，其中 α,β,γ為方程 $3x^3-2x^2+5x-7=0$的根。

9. 求正實數 a的可能值使得
$$y=(a^2+1)x^2-2ax+10$$
的圖像有極小值$\dfrac{451}{50}$，已知$0<x<\dfrac{1}{2}$。