

ANNÉE 2024/2025



PROJET DE THÉORIE DES COPULES

Modélisation de la Credit Value-at-Risk d'un porte-feuille obligataire

Auteurs :

Jean Grivo ABOULA EDANG

Franck Delma DEBA WANDJI

Marilène KOUGOUM MOKO MANI

Sous la supervision de :

M. Ali ZERRAD

Contents

1	Mise en situation et identification des facteurs de risques	5
1.1	Description du portefeuille et modélisation de la perte	5
1.2	Identification des facteurs de risques	5
2	Caractérisation des taux de recouvrements	6
2.1	Modélisation des distributions marginales des variables de recouvrement	6
2.2	Analyse des lois de distribution calibrées pour les taux de recouvrement des créances BNP et SG	6
3	Modélisation des variables time-to-default	8
3.1	Caractérisation des lois marginales des variables de survenue de défaut	8
3.2	Évaluation des Intensités de Défaut et Probabilités Implicites sur 4 et 5 Ans . . .	8
3.3	Analyse de l'historique de données d'actions de BNP et société générale	9
4	Modélisation de la structure de dépendance	14
4.1	Présentation des copules	14
4.2	Méthodologie	14
4.3	Résultats	15
5	Calcul de la CVaR	17
6	Glossaire	20
7	Annexes	21
8	Iconographie	26

Abstract

This study focuses on modeling credit risk for a bond portfolio composed of a senior bond from BNP Paribas and a subordinated bond from Société Générale. The main objective is to estimate the **Credit Value at Risk (CVaR)** at a **99%** confidence level over a one-day horizon, taking into account the specific risk profiles of each bond, particularly recovery rates. The complexity of the problem lies in capturing the dependencies between risk factors, such as **default times** and **recovery rates**, which are crucial for an accurate risk assessment.

To achieve this, we use advanced modeling techniques, including **copulas**, to capture the **dependency structure** between risk factors. Recovery rates are modeled using **beta distributions**, reflecting the differences between senior and subordinated bonds. The dependency structure between the two bonds is modeled using a **Gumbel copula**, chosen for its ability to capture extreme dependencies.

Using Monte Carlo simulations, we estimate the CVaR at 99%, obtaining a robust measure of the portfolio's potential extreme loss. The results indicate a CVaR of approximately **1 287 euros**, with a 95% confidence interval of [**1 245.81; 1 327.01**] euros.

This study highlights the importance of accurately modeling the dependencies between risk factors in credit risk management and proposes a solid methodological framework for estimating extreme losses in bond portfolios. Despite some limitations, such as using proxies for modeling defaults and assuming independence between recovery rates, this approach provides valuable insights for managing credit risk in volatile markets.

Resumé

Cette étude se concentre sur la modélisation du risque de crédit pour un portefeuille obligataire composé d'une obligation senior de BNP Paribas et d'une obligation subordonnée de Société Générale. L'objectif principal est d'estimer la **Credit Value at Risk (CVaR)** à un niveau de confiance de 99 % sur un horizon d'un jour, en tenant compte des profils de risque spécifiques de chaque obligation, notamment les taux de recouvrement. La complexité du problème réside dans la capture des dépendances entre les facteurs de risque, tels que les moments de défaut et les taux de recouvrement, qui sont essentiels pour une évaluation précise du risque.

Pour y parvenir, nous utilisons des techniques de modélisation avancées, notamment les **copules**, pour capturer la structure de dépendance entre les facteurs de risque. Les taux de recouvrement sont modélisés à l'aide de **distributions bêta**, reflétant les différences entre les obligations senior et subordonnées. La structure de dépendance entre les deux obligations est modélisée à l'aide d'une **copule de Gumbel**, choisie pour sa capacité à capturer les dépendances extrêmes.

En utilisant des **simulations de Monte Carlo**, nous estimons la CVaR à 99 %, obtenant une mesure robuste du potentiel de perte extrême du portefeuille. Les résultats indiquent une CVaR d'environ **1 287 euros**, avec un intervalle de confiance à 95 % de [1 245.81 ; 1 327.01] euros.

Cette étude met en évidence l'importance de modéliser avec précision les dépendances entre les facteurs de risque dans la gestion du risque de crédit et propose un cadre méthodologique solide pour estimer les pertes extrêmes dans les portefeuilles obligataires. Malgré certaines limites, telles que l'utilisation de proxys pour la modélisation des défauts et l'hypothèse d'indépendance entre les taux de recouvrement, cette approche offre des perspectives intéressantes pour la gestion du risque de crédit dans des marchés volatils.

Introduction

Dans un environnement financier marqué par une volatilité accrue et des risques systémiques croissants, la gestion des risques de crédit est devenue un enjeu central pour les institutions financières. Les portefeuilles d'obligations, en particulier, sont exposés à des risques de défaut et de pertes potentielles qui nécessitent une modélisation rigoureuse. Parmi les outils d'évaluation des risques, la **Credit Value at Risk (CVaR)** s'impose comme une mesure robuste pour quantifier les pertes extrêmes dans des scénarios défavorables. Cette étude s'inscrit dans ce cadre en cherchant à évaluer la CVaR d'un portefeuille composé d'une obligation senior de BNP Paribas et d'une obligation subordonnée de Société Générale.

Les obligations senior et junior présentent des profils de risque distincts, notamment en terme de taux de recouvrement et de probabilités de défaut. Ces différences rendent complexe l'évaluation du risque global du portefeuille. De plus, les dépendances entre les facteurs de risque, tels que les moments de défaut et les taux de recouvrement, doivent être prises en compte pour une modélisation précise. La question centrale est donc : comment modéliser efficacement ces dépendances pour estimer de manière rigoureuse la CVaR à 99 % sur un horizon d'un jour ?

Cette étude se concentre sur la modélisation des risques de crédit en utilisant des méthodes avancées, notamment les copules, pour capturer les dépendances linéaires ou non entre les facteurs de risque. L'objectif est de fournir une estimation fiable de la CVaR, tout en tenant compte des spécificités des obligations qui composent notre portefeuille.

Afin d'estimer la CVaR à 99 % du portefeuille pour anticiper les pertes extrêmes on devra :

1. Caractériser les distributions des taux de recouvrement et des moments de défaut.
2. Modéliser la structure de dépendance entre les facteurs de risque à l'aide de copules.
3. Simuler des scénarios de pertes à l'aide de méthodes de Monte Carlo pour estimer la CVaR.

Le présent rapport est structuré en cinq parties principales. La première présente la mise en situation du problème ainsi qu'une transcription mathématique permettant d'identifier les différents facteurs de risques. La deuxième partie est dédiée à la modélisation des distributions des taux de recouvrement, suivie de la caractérisation des variables associées à la survenue du défaut des créances traitées. Dans la quatrième section, nous abordons la modélisation de la structure de dépendance entre les facteurs de risque à l'aide de copules. Enfin, la dernière section décrit le calcul du CVaR à 99% via la méthode de Monte-Carlo.

Les différentes implémentations réalisées sont accessibles sur le dépôt GitHub public, dont le lien est fourni ci-après: Implémentations gestion des risques multiples.

1 Mise en situation et identification des facteurs de risques

1.1 Description du portefeuille et modélisation de la perte

Le portefeuille étudié est constitué de deux créances :

- Une obligation senior BNP, avec un taux de recouvrement moyen de 60 % et une volatilité de 15 %.
- Une obligation subordonnée Société Générale (junior), avec un taux de recouvrement moyen de 30 % et une volatilité de 25 %.

Les taux de recouvrement des deux obligations sont supposés indépendants. Nous souhaitons évaluer la CVaR à 99 % sur un horizon d'un jour, définie comme suit :

$$\text{CVAR}_{99\%} = \inf\{x, P(L \leq x) \geq 99\%\},$$

où L représente la perte sur un horizon d'un jour pour ce portefeuille.

La perte L est exprimée par la formule suivante :

$$L = \text{EAD}_{BNP} \cdot (1 - R_{BNP}) \cdot 1_{\{\tau_{BNP} \leq 4\}} + \text{EAD}_{SG} \cdot (1 - R_{SG}) \cdot 1_{\{\tau_{SG} \leq 4\}},$$

où :

- EAD_{BNP} et EAD_{SG} représentent les expositions en cas de défaut, correspondant au montant nominal des obligations ;
- R_{BNP} et R_{SG} sont les taux de recouvrement des obligations ;
- τ_{BNP} et τ_{SG} désignent les moments de survenue des défauts.

Afin d'évaluer la CVaR, il est nécessaire de déterminer la probabilité $P(L \leq x)$, où x est un réel donné. Pour ce faire, il convient de simuler plusieurs scénarios de pertes, en prenant en compte les spécificités du portefeuille. Cela nécessite, au préalable, de modéliser la distribution de la variable de perte de manière à ce qu'elle soit cohérente avec les caractéristiques des créances du portefeuille. .

1.2 Identification des facteurs de risques

Deux facteurs contribuent à rendre la perte du portefeuille stochastique :

- Les taux de recouvrement R_{BNP} et R_{SG} , qui influencent directement la **sévérité** de la perte en cas de défaut ;
- Les variables τ_{BNP} et τ_{SG} , qui déterminent les moments de survenue des défauts des créances.

Pour mieux appréhender la variable de perte et ses fluctuations, il est nécessaire de caractériser complètement ces facteurs de risques.

2 Caractérisation des taux de recouvrements

Le **taux de recouvrement**, formellement, est défini comme le rapport, exprimé en pourcentage, entre la valeur actualisée des flux financiers récupérés après le défaut d'un emprunteur et le montant total de l'exposition en défaut avant recouvrement.

Ce taux est influencé par des facteurs exogènes aux émetteurs obligataires, tels que le cycle économique, ainsi que par des facteurs endogènes. Dans notre analyse, étant donné que les émetteurs des obligations étudiées appartiennent au même secteur et sont tous deux des banques systémiques, la séniorité des obligations constitue, en notre sens, le principal déterminant endogène susceptible d'expliquer la différence observée entre les taux de recouvrement moyens des deux obligations composant notre portefeuille (60% pour BNP contre 30% pour Société Générale).

L'hypothèse d'indépendance étant supposée, l'estimation des lois marginales suffit pour caractériser **complètement** la loi des taux de recouvrement.

2.1 Modélisation des distributions marginales des variables de recouvrement

Pour modéliser les taux de recouvrement, il est courant de les associer à une distribution **Bêta** ($B(\alpha, \beta)$) **7**, en raison de la grande flexibilité de cette loi. Elle permet d'ajuster différentes formes de distribution en fonction des données empiriques observées tout en étant particulièrement adaptée aux variables définies sur un intervalle de bornes 0 et 1, comme c'est le cas des taux de recouvrement.

Connaissant les taux de recouvrement moyens ($\hat{\mu}$) de chacune des obligations, ainsi que leurs variances ($\hat{\sigma}$), les paramètres de forme $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ de chacune des distributions sont calibrés à l'aide des résultats:

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{\mu}^2(1 - \hat{\mu})}{\hat{\sigma}^2} - \hat{\mu} \quad \text{et} \quad \hat{\beta} = \frac{\hat{\mu}^2(1 - \hat{\mu})^2}{\hat{\mu}\hat{\sigma}^2} - (1 - \hat{\mu})$$

2.2 Analyse des lois de distribution calibrées pour les taux de recouvrement des créances BNP et SG

Les paramètres de forme de la distribution des taux de recouvrement pour les obligations BNP sont $\hat{\alpha} = 5.80$ et $\hat{\beta} = 3.87$, avec $\hat{\alpha} > \hat{\beta}$, ce qui révèle une distribution asymétrique à droite. Cette asymétrie indique que la moyenne des taux de recouvrement est plus élevée que la médiane. En d'autres termes, la distribution présente une concentration de valeurs vers la droite (vers des taux plus élevés), ce qui tire la moyenne vers ces valeurs extrêmes. En revanche, la médiane, moins influencée par ces valeurs extrêmes, reste plus proche des valeurs centrales et fréquentes.

Pour la Société Générale, les paramètres de forme de la distribution des taux de recouvrement sont $\hat{\alpha} = 0.71$ et $\hat{\beta} = 1.65$, ce qui indique une distribution asymétrique vers la gauche, caractérisée par une concentration importante des taux de recouvrement autour de valeurs faibles.

La superposition des courbes de densité 1 permet d'illustrer de manière plus visuelle les différences de taux de recouvrement entre les obligations BNP et Société Générale. Il en ressort que, **toutes choses égales par ailleurs**, l'ampleur des pertes enregistrées en cas de défaut est vraisemblablement plus importante pour une obligation de la Société Générale que pour celle de BNP.

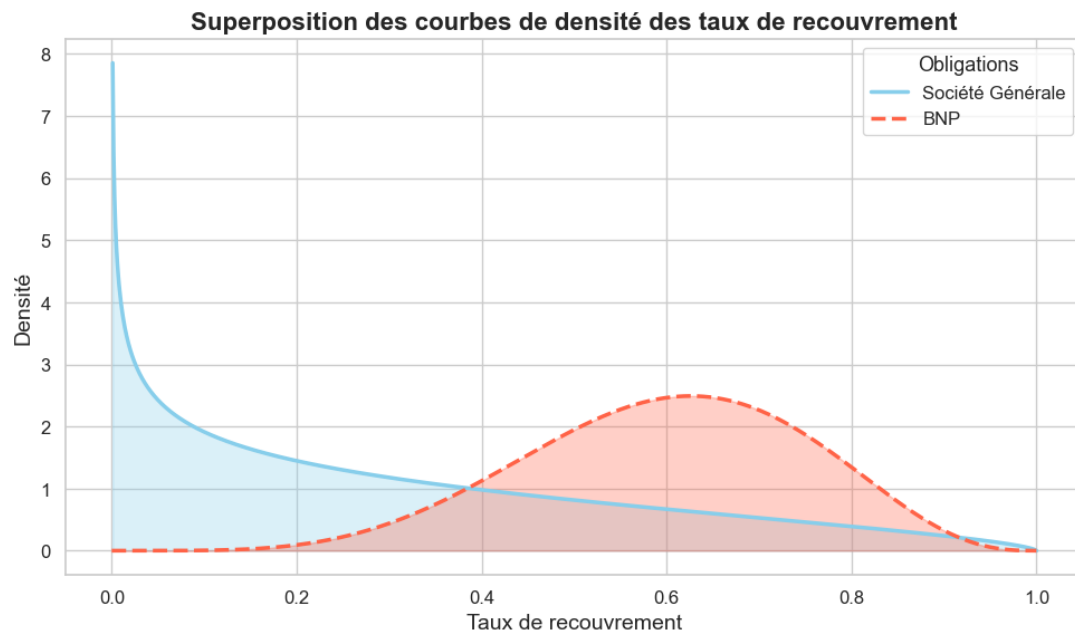


Figure 1: courbes de densité des taux de recouvrement des obligations de BNP et de Société générale

Cette conclusion est cohérente avec les caractéristiques de tendance centrale et de dispersion fournies dans le cadre de notre étude. En effet, le taux de recouvrement moyen des obligations BNP est de 60 %, avec une volatilité de 15 %. À l'inverse, pour les obligations de la Société Générale, le taux de recouvrement moyen est deux fois plus faible (environ 30 %), avec une volatilité plus élevée de 25 %.

3 Modélisation des variables time-to-default

Dans le cadre de cette analyse, un événement de défaut est défini comme la situation où un émetteur ne parvient pas à honorer ses engagements contractuels avant la maturité de l'obligation qu'il a émise; fixée ici à 4 ans.

Bien que les obligations du portefeuille aient des caractéristiques différentes (senior pour BNP et subordonnée pour Société Générale), elles appartiennent toutes deux au secteur bancaire et sont donc exposées aux mêmes risques systémiques. Par conséquent, on admettra ici l'existence d'une structure de dépendance entre les *times to default* des deux obligations.

Ainsi, pour caractériser complètement les variables de survenue du défaut (τ_{BNP} , τ_{SG}), il est nécessaire non seulement de déterminer les lois marginales associées à la survenue du défaut pour chaque obligation, mais aussi de modéliser explicitement leur structure de dépendance.

3.1 Caractérisation des lois marginales des variables de survenue de défaut

La variable de survenue du défaut, étant une variable de type *time-to-event*, est couramment modélisée par une loi exponentielle.

Nous considérons donc $\tau_i \sim \mathcal{E}(\lambda_i)$, où $i \in \{SG, BNP\}$, et où le paramètre λ_i est estimé à partir des données de marché.

Le paramètre λ_i se définit comme l'**intensité de défaut** et, permet de quantifier la "*vitesse*" avec laquelle un contrat est susceptible d'entrer en défaut.

Lorsqu'il existe des Credit Default Swaps (CDS) référencés sur les obligations émises par BNP et Société Générale (respectivement senior et junior), le paramètre λ_i peut être déterminé à partir du spread du CDS (S_i). Il est alors donné par la relation ci après découlant de l'égalité dite **triangle du crédit**, reliant le spread du CDS, le taux de recouvrement et l'intensité du défaut:

$$\lambda_i = \frac{S_i}{1 - R_i}$$

Lorsque de tels contrats n'existent pas sur le marché une alternative serait de trouver le paramètre λ_i qui égalise le prix théorique $\mathbf{P}_i = E(N\mathbf{1}_{\tau_i > T} + R_i N\mathbf{1}_{\tau_i \leq T})e^{-rT}$ d'obligations zéro coupons à ceux observées sur le marché.

Toutefois, il est important de garder à l'esprit que cette alternative a comme limite principale le fait que les obligations zero coupons sont généralement illiquides; leurs prix ne sont donc pas nécessairement fiables, l'estimation de λ_i peut être biaisée dans ce cas là.

Une fois ce paramètre obtenu, nous sommes à même, non seulement de caractériser la variable de survenue du défaut mais aussi d'évaluer la probabilité de défaut des émetteurs.

3.2 Évaluation des Intensités de Défaut et Probabilités Implicites sur 4 et 5 Ans

Les intensités de défaut pour BNP et Société Générale (SG) ont été calculées à partir des spreads de CDS observés. Les spreads de CDS de BNP et SG de maturité 4 ans sont respectivement 100 bp et 120 bp, et ceux de maturité 5 ans, 120 bp et 150 bp. Ces CDS ont été évalués avec un taux de recouvrement égal à 40%.

À partir de ces spreads, les intensités de défaut sont obtenues pour les maturités considérées. À horizon 4 ans, l'intensité de défaut est de 0,0167 pour BNP et 0,02 pour Société Générale. À horizon 5 ans, ces intensités sont respectivement de 0,02 et 0,025. Ces résultats indiquent une augmentation des intensités de défaut entre 4 et 5 ans, ce qui suggère une perception croissante du risque à mesure que l'horizon temporel s'allonge. Par ailleurs, les intensités de défaut sont plus élevées pour Société Générale (SG) que pour BNP. Cette différence est cohérente avec la

structure subordonnée des dettes de SG, qui la rend plus exposée au risque de défaut par rapport aux obligations seniors de BNP.

Les probabilités de défaut implicites, obtenues à partir des intensités de défaut, viennent renforcer cette distinction de risque. À horizon de 4 ans, la probabilité de défaut implicite pour SG est de 7,69 %, tandis que celle de BNP est de 6,45 %. À horizon de 5 ans, ces probabilités s’élèvent respectivement à 11,75 % pour SG et 9,52 % pour BNP. Ces résultats valident l’idée que l’obligation de SG détenue présente un risque de défaut plus élevé que celle BNP.

Pour caractériser la structure de dépendance entre les occurrences de défaut liées aux obligations émises par BNP et Société Générale, il est nécessaire de recourir à des proxys. En effet, il existe peu ou pas de données relatives aux défauts de ces banques, celles-ci n’ayant jamais, ou presque jamais, fait défaut.

Dans notre cas, nous nous intéressons à leur historique de données d’actions pour effectuer cette analyse.

3.3 Analyse de l’historique de données d’actions de BNP et société générale

Nous nous sommes intéressés aux prix bruts mais également aux log rendements des actions pour chacun des émetteurs. En effet, les log rendements permettent de compléter l’information apportée par les prix bruts sur la situation économique des émetteurs, en ce sens qu’ils offrent une mesure normalisée de la variation des prix, permettant ainsi de mieux évaluer la volatilité des prix et la performance relative des émetteurs. Le log rendement (LogR_t) pour une action à un instant t est défini comme suit :

$$\text{LogR}_t = \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right)$$

où P_t est le prix de l’action à l’instant t , et P_{t-1} est le prix à l’instant précédent.

3.3.1 Analyse exploratoire univariée des données d’actions de BNP

Le tableau 1 présente les principales tendances des prix et des rendements des actions de BNP sur une période de 1000 jours. Sur la période étudiée, le prix moyen d’une action de BNP Paribas s’élève à 31,90 euros. Cependant, cette valeur n’est pas stable, comme en témoigne un écart-type de 9,63, suggérant une dispersion relativement importante. Les prix varient considérablement, allant de 14,05 à 48,33 euros.

	Prix à la clôture	Log rendements
mean	31.90	-0.0008
std	9.63	0.0244
min	14.05	-0.1235
1st quartile	23.45	-0.0138
mediane	34.35	-0.0003
3rd quartile	40.25	0.0125
max	48.33	0.0832
skewness	-0.31	-0.3314
kurtosis	1.7	5.0169

Table 1: Résumé statistique des distributions des des prix des actions et des rendements des actions BNP

Quant aux log rendements, ceux-ci montrent une volatilité marquée. La moyenne est proche de zéro, précisément -0,0008, avec un écart-type de 0,0244, soit environ 30 fois plus élevé que

la moyenne en valeur absolue, ce qui témoigne d'une grande variabilité. Le kurtosis, évalué à 5, suggère la présence de rendements extrêmes, dont une grande majorité sont négatifs. En effet, l'asymétrie (skewness) de -0,33 indique une tendance à des rendements inférieurs à la moyenne, suggérant que les périodes de pertes sont plus fréquentes que celles de gains.

La figure 2 permet d'illustrer visuellement la volatilité présente dans les log rendements des actions de BNP Paribas sur la période étudiée.

La figure 2 permet d'illustrer visuellement la volatilité présente dans les log rendements des actions de BNP Paribas sur la période étudiée.

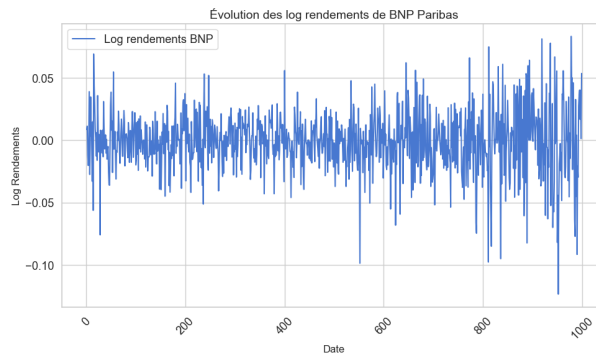


Figure 2: log rendements de BNP sur la période d'étude

3.3.2 Analyse exploratoire univariée des données actions de Société Générale

Le tableau 2 résume les statistiques des prix bruts et des log rendements des actions de Société Générale sur la même période de 1000 jours.

	Prix à la clôture	Rendements
mean	43.53	-0.0006
std	10.01	0.0207
min	21.67	-0.0982
1st quartile	36.06	-0.0118
median	46.82	-0.0005
3rd quartile	51.29	0.0112
max	60.68	0.0764
skewness	-0.48	-0.1797
kurtosis	2.06	5.0973

Table 2: Résumé statistique des distributions des des prix des actions et des rendements des actions SG.

Les prix moyens des actions de Société Générale s'élèvent à 43,53 euros avec un écart-type de 10,01, montrant une volatilité comparable à celle de BNP Paribas. Les prix varient de 21,67 à 60,68 euros.

Les log-rendements affichent une moyenne proche de zéro (-0,0006) et une forte variabilité, avec une dispersion plus de 30 fois supérieure à la valeur absolue de la moyenne. L'asymétrie (skewness) de -0,1797 suggère une tendance générale à des rendements négatifs, tandis que le kurtosis de 5,10 indique une fréquence élevée de valeurs extrêmes.

La Figure 3 illustre graphiquement les log rendements de Société Générale au cours de la période d'étude, mettant en évidence leur forte volatilité.

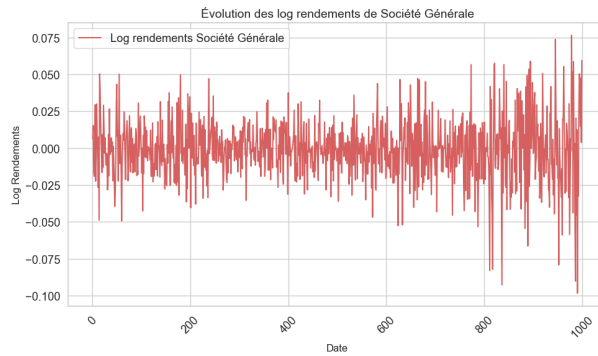


Figure 3: log rendements de Société Générale sur la période d'étude

Après cette analyse exploratoire, nous procédons à la modélisation de la loi régissant la distribution des log-rendements des actions des deux institutions, dans le but de compléter cette analyse et d'enrichir notre compréhension des facteurs de risque.

3.3.3 Modélisation des distributions univariées des rendements des prix des actions

Afin d'avoir un a priori sur les lois qui régissent les rendements logarithmiques des actions étudiées, nous commençons par représenter leurs histogrammes ainsi que les courbes de densité associées 4.

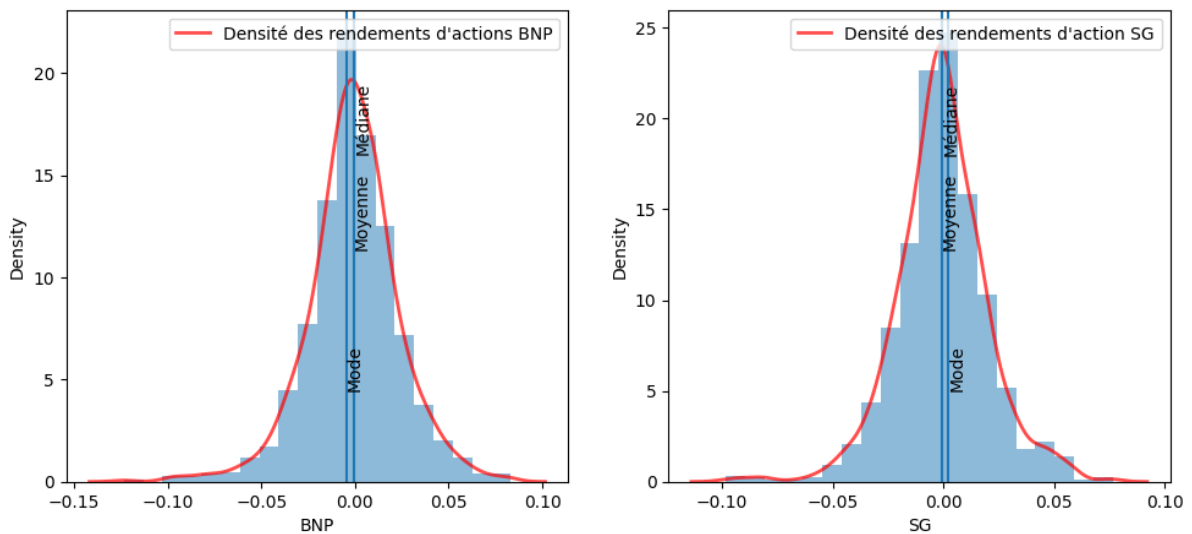


Figure 4: Histogramme et densité des log rendements des actions de BNP et SG

Dans le cas de BNP, comme pour la Société Générale, on observe des courbes en forme de cloche. L'asymétrie ne semble pas très marquée visuellement pour chacune des deux distributions, ce qui nous a conduit à ajuster une **gaussienne**. De plus, l'analyse exploratoire précédente a révélé des valeurs de kurtosis relativement élevées, supérieures à 5. Nous avons donc également ajusté des lois à queues lourdes, telles que la loi de **Student** et la loi de Student asymétrique **skew Student**.

L'adéquation de nos données aux lois théoriques considérées a été évaluée visuellement à l'aide de **QQ-plots**, qui nous ont permis d'examiner la correspondance entre les quantiles empiriques et ceux des lois théoriques associées (voir en annexe10). Il en ressort que la loi Skew Student et la loi Student semblent être celles qui s'ajustent le mieux aux données de BNP et de

Société Générale respectivement, parvenant notamment à mieux modéliser les quantiles extrêmes comparativement aux autres lois.

Cette analyse a été confirmée par des tests statistiques de Kolmogorov-Smirnov au seuil de 5 %. Les caractérisations des lois estimées et les résultats des tests statistiques effectués sont résumés dans le tableau suivant.

	Distribution	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\nu}$	$\hat{\gamma}$	Statistique de test	P -value
BNP	Gaussienne	-0.001	0.024			0.055	0.004
	Student	-0.001	0.019	4.533		0.026	0.487
	Skew-Student	0.002	0.019	4.587	-0.152	0.023	0.681
SG	Gaussienne	-0.001	0.021			0.049	0.015
	Student	-0.001	0.016	4.593		0.025	0.559
	Skew-Student	-0.002	0.016	4.585	0.073	0.029	0.373

Table 3: Caractérisation des lois des rendements et test d'adéquation des données (Kolmogorov-Smirnov)

Nous nous intéressons dans la suite la structure de dépendance entre les facteurs de risque. Pour ce faire, nous commençons par utiliser des outils non paramétriques.

3.3.4 Caractérisation de la structure de dépendance entre les facteurs de risques à l'aide de critères non paramétriques

Le nuage de points (figure 5) suggère que les rendements de BNP et de Société Générale sont corrélés positivement. En effet, on observe qu'ils sont distribués autour d'une droite, où de faibles rendements de BNP correspondent à de faibles rendements de Société Générale, et inversement. Cette observation semble indiquer l'existence d'une relation linéaire entre les rendements des deux entreprises.

L'analyse du dépendogramme tracé sur les pseudos-observations dans la figure 6 présente une structure plus ou moins elliptique entre les rendements de BNP et de Société Générale. De plus, on observe un regroupement du nuage en fines pointes dans les extrémités supérieure droite et inférieure gauche du graphique (plus marqué à droite) soutenant l'hypothèse d'une dépendance de queue à droite et à gauche respectivement.

Afin d'examiner plus en détail la structure de dépendance entre ces deux facteurs, on peut également utiliser le tau de Kendall et le rho de Spearman. Ces critères sont robustes aux valeurs extrêmes et permettent d'évaluer la dépendance entre les variables de manière plus souple que la corrélation classique.

Le rho de Spearman et le tau de Kendall mettent en évidence l'existence de relations monotones, même en présence de structures non linéaires. Avec un tau de Kendall d'environ 0.67 et un rho de Spearman proche de 0.87, il apparaît clairement que ces deux facteurs de risque présentent une dépendance significative.

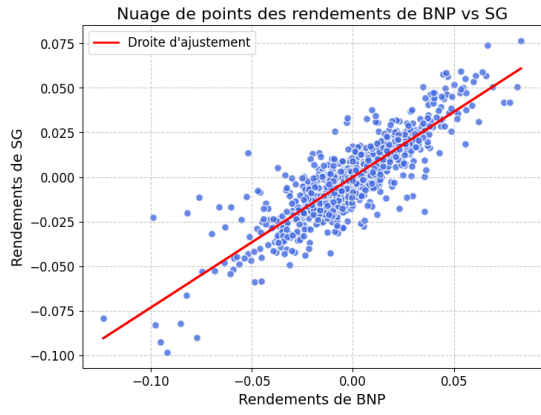


Figure 5: Nuage de points des rendements de BNP et de SG.

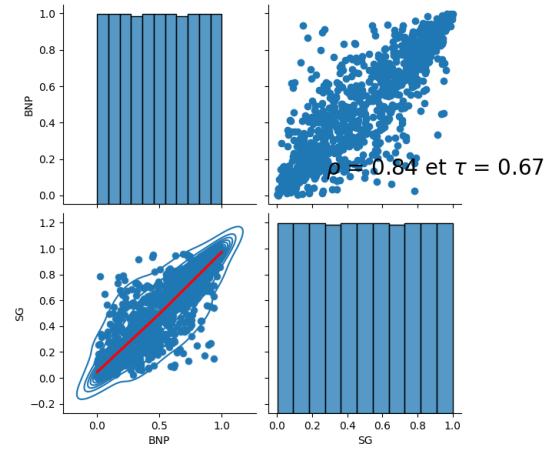


Figure 6: Dépendogramme des pseudo-observations

L'observation graphique et les mesures de concordance nous ayant suggéré l'existence d'une dépendance entre les facteurs de risque. Nous allons procéder à l'ajustement de cette structure à l'aide de copules elliptiques et archimédiennes dont la validité sera éprouvée par un test d'adéquation.

4 Modélisation de la structure de dépendance

Dans cette section, nous nous attelons à modéliser la structure de dépendance entre les séries des log-rendements de BNP et SG au moyen de copules paramétriques.

L'objectif est d'évaluer le risque de crédit conjoint du portefeuille en capturant les dépendances entre les actifs. Cela permet d'identifier avec plus de précision les scénarios de pertes extrêmes, étape cruciale du calcul de la CVaR.

4.1 Présentation des copules

La copule peut se définir comme une fonction de répartition multivariée qui décrit la structure de dépendance entre des variables aléatoires, indépendamment de leur distribution marginale. Formellement, une copule est une fonction de répartition multivariée dont les marges sont uniformes sur $[0, 1]$. Ainsi, pour deux variables $U_1, U_2 \sim U([0, 1])$, la copule C satisfait :

$$C(u_1, u_2) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2)$$

L'utilisation des copules s'impose à nous dans la mesure où les méthodes traditionnelles de capture de corrélations ne captent généralement que les corrélations linéaires sans tenir compte des **interdépendances extrêmes**. Ainsi, les copules offrent un cadre flexible permettant de modéliser la structure de dépendance linéaire ou non, idéale pour le calcul de la CVaR dans la mesure où l'objectif est de capter les scénarios de pertes extrêmes.

Pour mener à bien notre analyse, nous confronterons nos données à plusieurs types de copules, en nous restreignant au cadre des copules paramétriques. Ainsi, nous testerons les copules suivantes :

- **Copules Elliptiques :**

- Gaussienne : adaptée à des données symétriques, sans dépendance de queue, paramétrée par une matrice de corrélation ρ .
- Student-t : adaptée à des données symétriques avec dépendance de queue, paramétrée par ρ et les degrés de liberté ν .

- **Copules Archimédiennes :**

- Clayton : modélise la dépendance forte dans la queue inférieure (événements extrêmes simultanés à la baisse).
- Gumbel : modélise la dépendance forte dans la queue supérieure (événements extrêmes simultanés à la hausse).
- Frank : modélise la dépendance symétrique modérée, sans concentration dans les queues.

4.2 Méthodologie

Pour s'assurer de choisir la copule la mieux adaptée à la structure de dépendance des données, nous devons mettre en place une méthodologie rigoureuse. De ce fait, nous suivrons les étapes ci-dessous :

- **Prétraitement des données**

- Transformation en pseudo-observations : les rendements sont transformés en rangs normalisés pour obtenir des données uniformes sur $[0, 1]$:

$$u_i = \frac{\text{rang}(x_i)}{n+1}, \quad i = 1, \dots, n$$

Cela permet d'éliminer les biais liés aux distributions marginales pour ainsi isoler la structure de dépendance.

- **Analyse graphique :**

- Dépendogramme : permet de visualiser la structure de dépendance en comparant les données (pré-traitées) empiriques et des simulations via une copule.
- Kendall plot : permet de comparer les probabilités empiriques et théoriques basées sur le tau de Kendall.
- Densité empirique vs. densité théorique : permet de comparer la densité jointe estimée (KDE) et la densité théorique de la copule.
- Surface théorique vs. points empiriques : permet de comparer la surface de densité théorique et les données empiriques.

- **Estimation des copules : ajustement des paramètres**

- Pour les copules elliptiques (Gaussienne, Student-t), l'estimation repose sur la corrélation de Kendall.
- Pour les copules archimédiennes, le paramètre de dépendance θ est estimé par maximum de vraisemblance.

- **Critères d'évaluation**

- Log-vraisemblance : capte l'adéquation du modèle aux données. Plus elle est élevée, meilleur est l'ajustement.
- Erreurs absolues :
 - * τ de Kendall qui mesure la concordance non paramétrique.
 - * ρ_s de Spearman qui capte la corrélation des rangs.
- Test d'ajustement (blanket tests) : basé sur une statistique similaire à celle de Cramér-von Mises, ce test compare la fonction de répartition empirique $\hat{C}_n(u)$ à celle de la copule théorique $C_\theta(u)$ sous l'hypothèse nulle **H0** que la répartition théorique soit égale à la répartition empirique contre l'hypothèse alternative **H1** qu'elles sont différentes.

La statistique de test s'écrit:

$$T = \sum_{i=1}^n \left(\hat{C}_n(u_i) - C_\theta(u_i) \right)^2$$

La p-valeur est obtenue par bootstrap paramétrique, en considérant 1 000 répétitions.

4.3 Résultats

En observant les *dépendogrammes* (figure 12), il apparaît que les points simulés à l'aide des copules reproduisent globalement la dynamique des points réels. Les copules de Student, de Gumbel et gaussienne révèlent une forte concentration des points dans les queues de la distribution. Plus précisément, la copule de Gumbel montre une concentration plus marquée vers la droite, tandis

que la copule de Student présente une symétrie plus prononcée. Ces observations sont cohérentes avec les propriétés théoriques de chaque copule.

En revanche, la copule de Clayton, qui engendre un regroupement marqué des points sous forme d'une fine pointe dans l'extrémité gauche, ainsi que la copule de Frank, qui ne présente aucune concentration notable aux extrémités, semblent ne pas être compatibles avec la structure de nos données.

L'analyse des dépendogrammes est complétée par celle des *Kendall plots* (figure 7) pour évaluer avec précision l'adéquation des copules à nos données. Il en ressort que les copules de Student, de Gumbel et la copule gaussienne suivent étroitement la diagonale, confirmant ainsi leur adéquation avec la structure de dépendance observée. En revanche, le Kendall plot associé à la copule de Clayton s'écarte nettement de la diagonale dans la queue inférieure, tandis que celui de la copule de Frank présente un écart notable au centre, soulignant leur inadéquation.

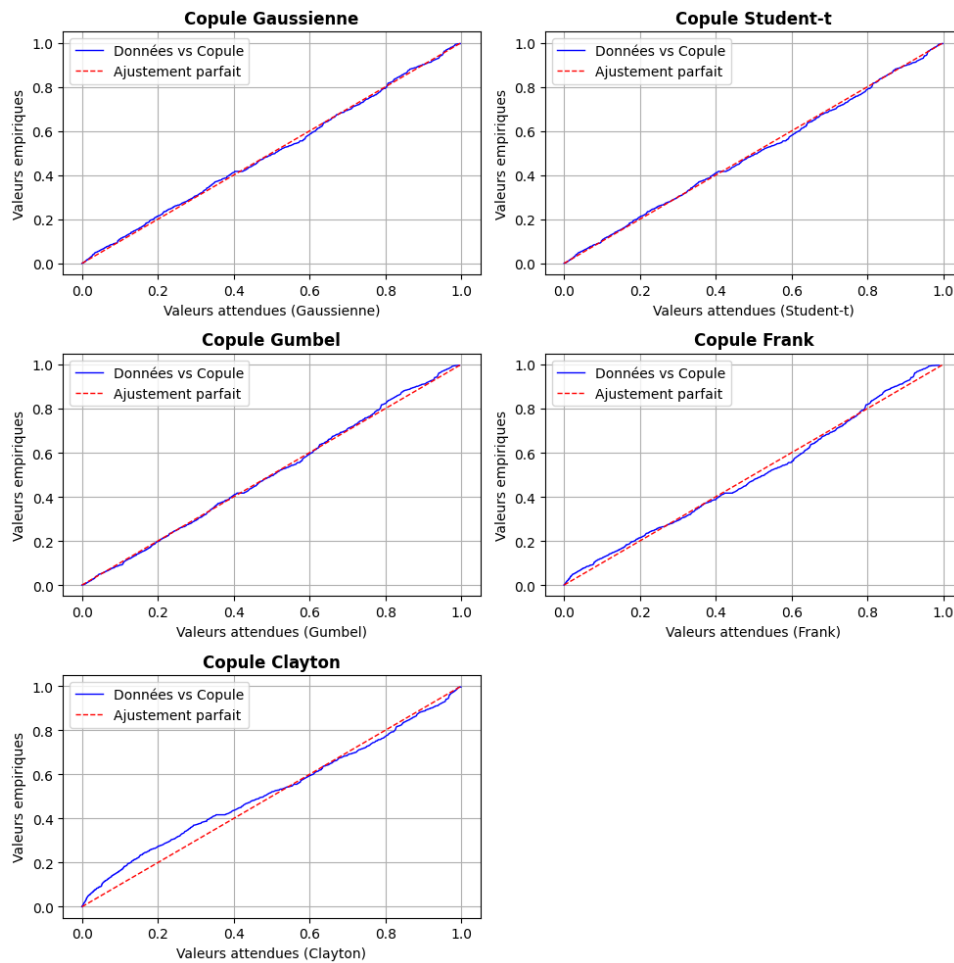


Figure 7: Kendall plots

Cette conclusion est corroborée par la confrontation entre la *densité théorique des copules* et la *densité empirique* (figure 13), ainsi que par la comparaison entre la *surface théorique et les points empiriques* (figure 14). Au vu de ces deux graphiques, il apparaît que les copules de Gumbel, de Student et la copule gaussienne épousent mieux la structure des données, alors que les copules de Frank et de Clayton semblent totalement inadaptées.

Par ailleurs, dans l'optique de comparer les copules par des mesures statistiques chiffrées, nous analysons la log-vraisemblance ainsi que les erreurs absolues entre les observations simulées par les différentes copules et les données réelles. Le tableau 4 fait état de ces résultats. Il en

ressort de l'analyse de ces résultats que la copule de **Student** s'avère être la mieux adaptée. En effet, elle présente la log-vraisemblance la plus élevée (720,84) et des erreurs modérées pour le coefficient de Kendall ($\tau = 0,021$) ainsi que pour celui de Spearman ($\rho = 0,012$).

Bien que la copule de **Gumbel** obtienne la deuxième meilleure log-vraisemblance, elle se distingue par des erreurs nettement plus faibles pour ces deux statistiques, en particulier pour le ρ de Spearman. Les autres copules affichent des performances intermédiaires, tandis que la copule de **Clayton** se révèle la moins adaptée, avec la log-vraisemblance la plus faible et les erreurs les plus élevées.

Copule	Log-vraisemblance	Erreur τ de Kendall	Erreur ρ de Spearman
Student-t	720.838328	0.021003	0.012025
Gumbel	703.146279	0.009095	0.000119
Gaussian	670.141798	0.025179	0.006367
Frank	630.219249	0.005055	0.018514
Clayton	517.723513	0.133970	0.121854

Table 4: Comparatif de l'ajustement des copules

Pour affiner notre choix de copule de manière plus rigoureuse et scientifique nous mettons en place le test décrit dans la sous-section 4.2, connu sous le nom de **blanket test**. Le tableau 5 résume les résultats obtenus. Il apparaît que *si la structure de dépendance des données est issue d'une copule de Gumbel, il y a 98,4% de chance d'obtenir la statistique de test observée, soit seulement 1,6% de chance que cette statistique soit le fruit du hasard*. **Nous retenons alors la copule de Gumbel étant donnée qu'elle présente la plus grande p-valeur.**

Copule	Statistique de test	P-valeur
Gumbel	0.0349	0.984
Gaussienne	0.0546	0.869
Student	0.0718	0.790
Frank	0.6029	0.184
Clayton	0.8648	0.002

Table 5: Résultats des tests d'ajustement

La figure 15 nous permet d'apprécier la statistique observée dans notre échantillon en comparaison à la distribution des statistique issues des 1000 échantillons bootstrap simulés selon la copule.

Les facteurs de risque ayant été entièrement modélisés, nous pouvons désormais évaluer la CVaR associée à notre portefeuille.

5 Calcul de la CVaR

Nous estimons la **Conditional Value at Risk (CVaR)** à 99% en utilisant **1 000 simulations de Monte Carlo** (figure 8). Chaque simulation repose sur **10 000 simulations** de perte potentielle du portefeuille constitué d'obligations des deux banques : BNP Paribas et Société Générale.

Nous utilisons une **copule de Gumbel** de paramètre $\theta = 2.99$ retenue dans la section précédente pour simuler la structure de dépendance entre les facteurs de risque (BNP et SG). Ensuite, nous simulons les taux de recouvrement via une distribution beta, avec une moyenne

et une variance respectivement de 60% et 15% pour BNP et 30% et 25% pour Société Générale. Nous déterminons les probabilités de défaut implicite à 4 ans en fonction des spreads de crédit (respectivement 1% et 1,2% pour BNP et SG).

Grâce à la copule ajustée, nous simulons des événements de défaut corrélés pour les deux banques et calculons la perte totale du portefeuille en tenant compte des expositions au défaut (*Exposure at Default, EAD*). Enfin, nous estimons la CVaR à 99% en prenant le quantile empirique des pertes simulées, obtenant ainsi une évaluation robuste du risque extrême du portefeuille.

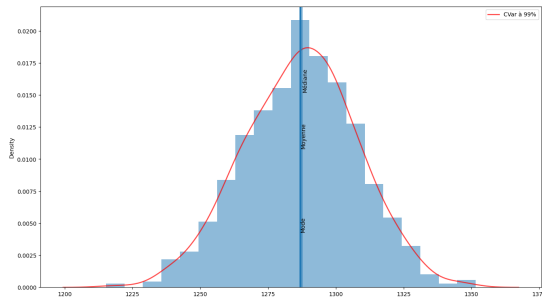


Figure 8: CVaR estimée sur des simulations de 10 000 scénarios de pertes.

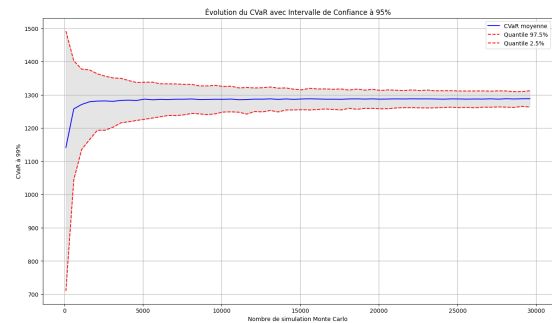


Figure 9: Convergence de la CVaR à 99% d'horizon 1 jour.

Rappelons que la CVaR s'écrit

$$\text{CVaR}_{99\%} = \inf\{x, P(L \leq x) \geq 99\%\},$$

où L représente la perte sur un horizon d'un jour pour ce portefeuille.

L'analyse montre que la convergence de la CVaR est atteinte autour de 10 000 simulations de pertes, garantissant ainsi la stabilité des résultats (figure 9). La **valeur estimée de CVaR à 99% est d'environ 1 287 euros** avec un intervalle de confiance à 95% de [1245.81, 1327.01] euros. Cela signifie qu'avec une probabilité de 99%, la perte maximale attendue sur le portefeuille ne dépassera pas 1287 euros. Cette estimation permet d'évaluer le risque financier avec une meilleure précision et d'anticiper les pertes potentielles dans des situations critiques.

Conclusion

Cette étude avait pour objectif d'évaluer la CVaR à 99 % d'un portefeuille composé d'une obligation senior de BNP Paribas et d'une obligation subordonnée de Société Générale. La complexité résidait dans la modélisation des dépendances entre les facteurs de risque, notamment les taux de recouvrement et les moments de défaut, ainsi que dans l'estimation des pertes extrêmes.

Les principaux résultats de cette étude sont les suivants :

- Les taux de recouvrement ont été modélisés à l'aide de distributions bêta, révélant que, toutes choses égales par ailleurs, les recouvrements en cas de défaut sont vraisemblablement plus faibles pour les obligations junior de Société Générale par rapport à celles senior de BNP.
- Les intensités de défaut ont été estimées à partir des spreads de CDS, révélant une probabilité de défaut plus élevée pour Société Générale.
- Les rendements de la Société générale ont été modélisés à l'aide d'une distribution de Student et celle de BNP à l'aide d'une skew-Student.
- La structure de dépendance entre les facteurs de risque a été capturée à l'aide d'une **copule de Gumbel**, retenu pour sa capacité à modéliser les dépendances extrêmes et sur la base d'un test d'adéquation.
- Avec une probabilité de 99%, la perte maximale attendue sur le portefeuille ne dépassera pas **1 287** euros. Cette perte maximale a 95% de chance d'être comprise entre 1 245.81 et 1 327.01 euros.

Les résultats de cette étude ont des implications concrètes pour les professionnels de la finance, en particulier pour les gestionnaires de risques et les analystes quantitatifs :

- Les résultats montrent l'importance de prendre en compte les spécificités des obligations senior et junior dans la construction de portefeuilles. Une meilleure allocation (notamment de type Markovitz) pourrait réduire l'exposition aux risques de crédit et améliorer la performance globale du portefeuille.
- Les estimations de la CVaR fournissent une base solide pour évaluer la rentabilité ajustée au risque des investissements. Cela permet aux investisseurs de prendre des décisions plus éclairées.
- Les résultats de cette étude peuvent être utilisés pour informer les parties prenantes (direction, régulateurs, investisseurs) sur les risques associés au portefeuille et sur les mesures prises pour les atténuer.

Malgré les résultats obtenus, cette étude présente certaines limites :

- L'utilisation de proxies basés sur les cours des actions pour modéliser les défauts peut introduire des biais.
- L'hypothèse d'indépendance entre les taux de recouvrement peut ne pas refléter entièrement la réalité.
- Les simulations de Monte Carlo, bien que robustes, dépendent de la qualité des modèles utilisés.

Somme toute, bien que cette étude présente plusieurs limites, notamment en raison des hypothèses simplificatrices formulées sur les distributions des facteurs de risque et sur la constitution du portefeuille, elle propose une méthodologie solide qui constitue un bon point de départ pour comprendre l'utilisation des copules dans l'évaluation des risques de crédit au sein d'un portefeuille.

6 Glossaire

- Une **obligation** : est un instrument financier émis par une entreprise, un gouvernement ou une organisation pour emprunter de l'argent. Lorsqu'une personne ou une entité achète une obligation, elle prête de l'argent à l'émetteur de l'obligation en échange du paiement de **coupons** (intérêts) périodiques pendant la durée de l'obligation, et du remboursement du **principal** (le montant nominal) à l'échéance.

Une **obligation zéro coupon** est un type d'obligation qui ne verse pas de paiements d'intérêts périodiques (coupons) durant sa durée de vie. À l'échéance, l'investisseur reçoit la valeur nominale de l'obligation.

- Un **Credit Default Swap (CDS)** : est un contrat financier dérivé permettant à un investisseur de se couvrir contre le risque de défaut d'un emprunteur, ou de spéculer sur ce risque. Il s'agit d'un accord de gré à gré, avec une durée et un montant (notionnel) spécifiés, et portant sur un emprunteur bien défini. Dans ce contrat, l'acheteur de protection paie périodiquement une prime, appelée *spread*, tandis que le vendeur de protection s'engage, en cas de défaut de l'emprunteur, à verser un montant compensant la perte liée au défaut, généralement équivalent au montant notionnel du contrat.
- La **liquidité** fait référence à la facilité avec laquelle un actif peut être converti en argent liquide sans affecter significativement son prix. Un actif est dit liquide s'il peut être rapidement vendu ou échangé avec peu de variation de sa valeur.
- L'**Exposure at Default (EAD)** : représente l'exposition d'un créancier à un emprunteur au moment du défaut de ce dernier. En d'autres termes, il s'agit du montant du crédit ou de l'engagement que le prêteur pourrait perdre si l'emprunteur venait à faire défaut.
- La **Credit Value at Risk (CVaR)** : est une mesure du risque de crédit qui évalue la perte potentielle maximale dans un portefeuille d'actifs en raison de défauts de paiement, dans un horizon temporel donné et à un niveau de confiance spécifique.
- La **concordance** : En statistique, la concordance désigne la situation où deux variables suivent un ordre relatif similaire. Plus précisément, pour deux observations (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) , les données sont concordantes si, lorsque $X_1 > X_2$, alors $Y_1 > Y_2$, ou lorsque $X_1 < X_2$, alors $Y_1 < Y_2$. Inversement, elles sont discordantes si les ordres relatifs sont inversés. La **concordance** est utilisée pour évaluer la relation entre des variables dans des mesures non paramétriques, comme le coefficient de Kendall (τ), qui quantifie cette relation par la différence entre paires concordantes et discordantes.

7 Annexes

Caractérisation de la loi Bêta

L'expression de la fonction de densité d'une loi Bêta de paramètres α et β est donnée par :

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où :

- $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ sont les paramètres de forme de la distribution Bêta,
- $B(\alpha, \beta)$ est la fonction bêta, qui est donnée par :

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt$$

La moyenne μ et la variance σ^2 sont données par :

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

Graphiques illustratifs

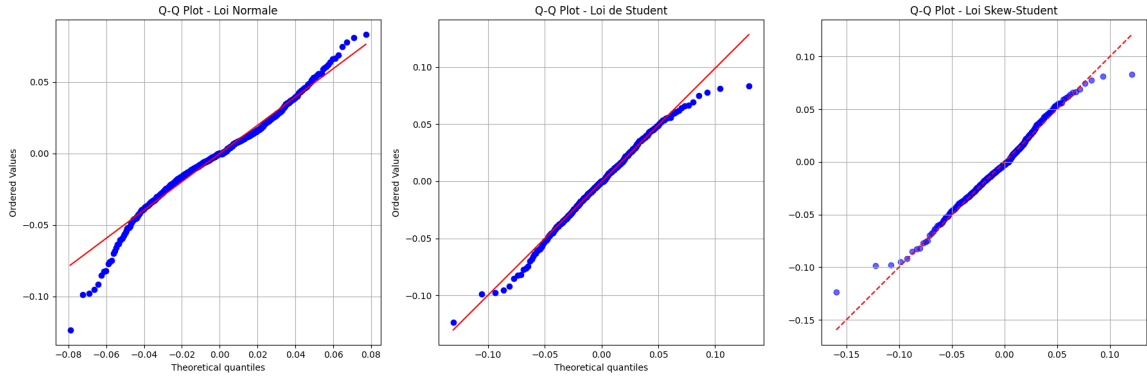


Figure 10: QQ-plot des lois ajustées pour les rendements de BNP

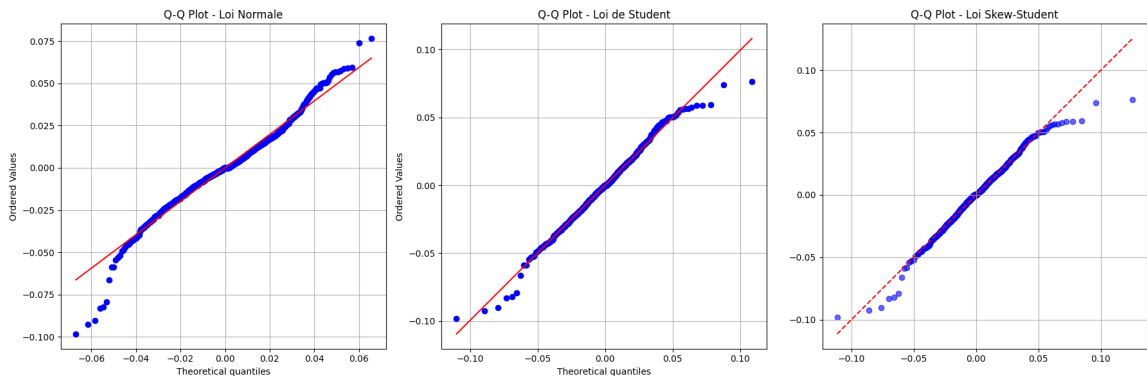


Figure 11: QQ-plot des lois ajustées pour les rendements de SG

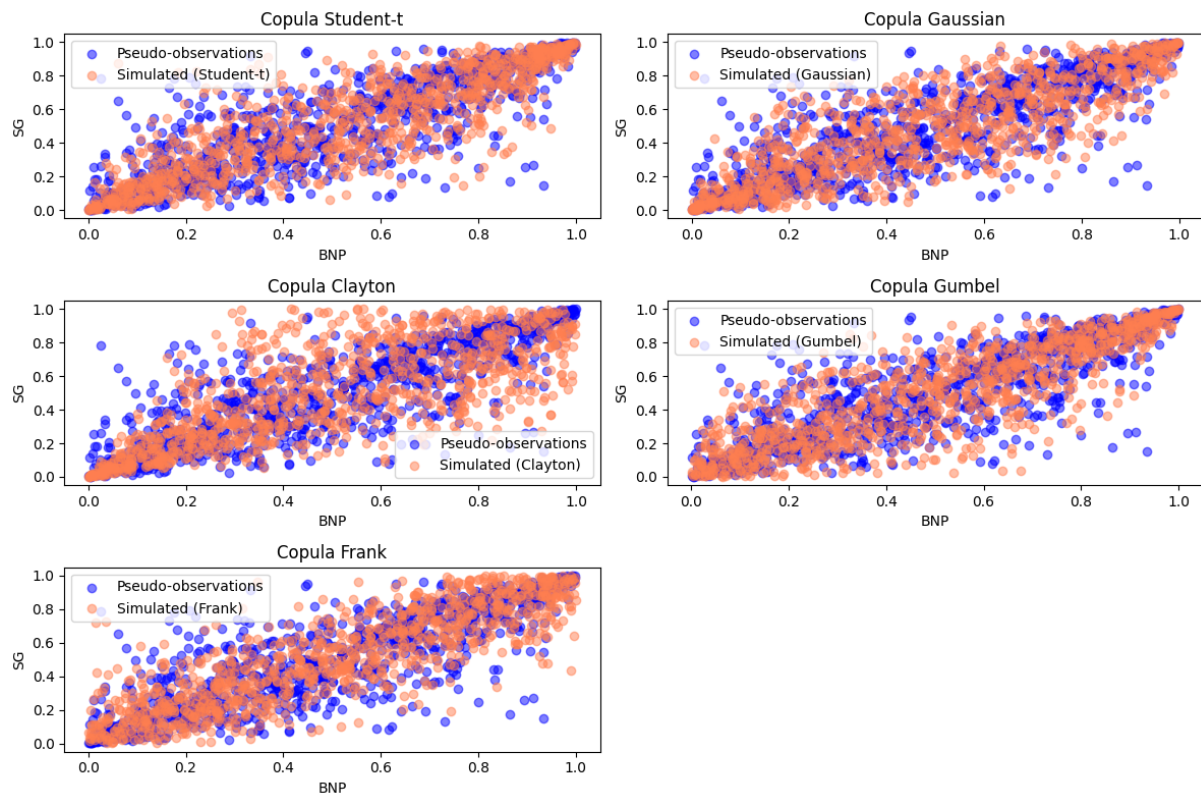


Figure 12: Dépendogrammes

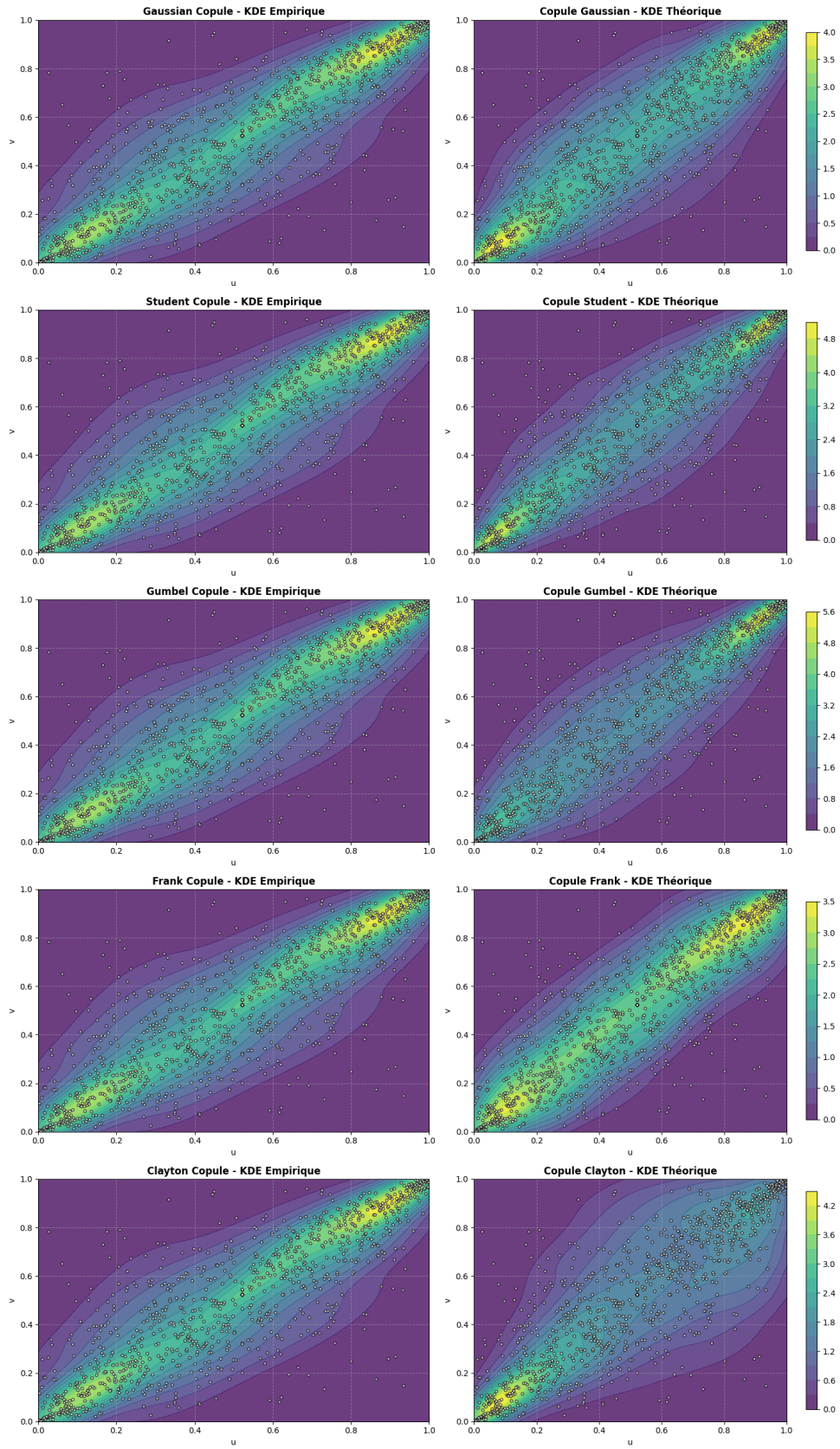


Figure 13: Comparaison des densités théoriques et empiriques

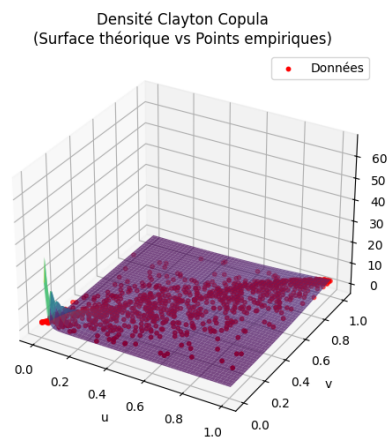
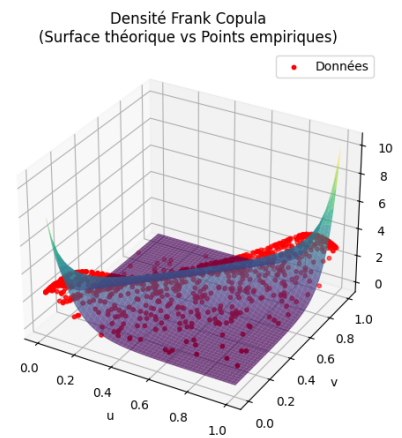
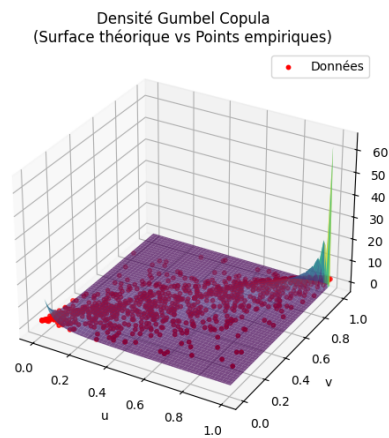
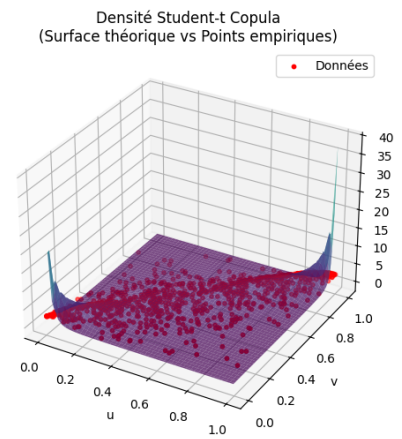
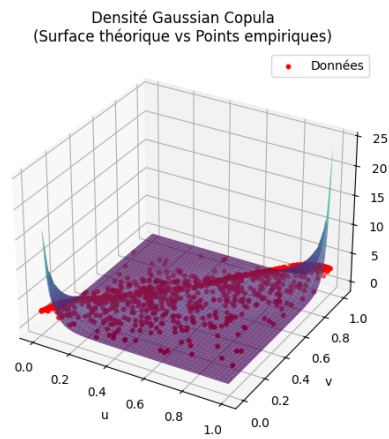


Figure 14: Surface théoriques et points empiriques

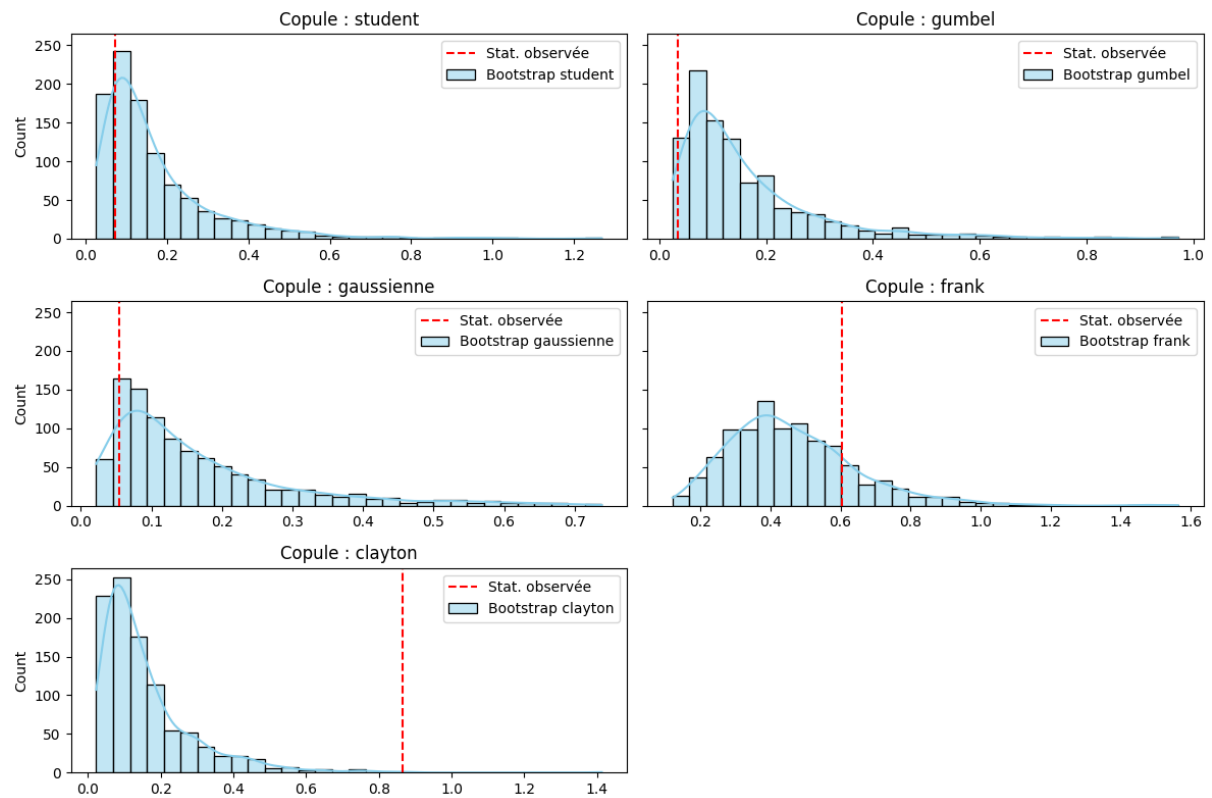


Figure 15: Résultats du test d'adéquation par bootstrap paramétrique

8 Iconographie

List of Figures

1	courbes de densité des taux de recouvrement des obligations de BNP et de Société générale	7
2	log rendements de BNP sur la période d'étude	10
3	log rendements de Société Générale sur la période d'étude	11
4	Histogramme et densité des log rendements des actions de BNP et SG	11
5	Nuage de points des rendements de BNP et de SG.	13
6	Dépendogramme des pseudo-observations	13
7	Kendall plots	16
8	CVaR estimée sur des simulations de 10 000 scénarios de pertes.	18
9	Convergence de la CVaR à 99% d'horizon 1 jour.	18
10	QQ-plot des lois ajustées pour les rendements de BNP	21
11	QQ-plot des lois ajustées pour les rendements de SG	21
12	Dépendogrammes	22
13	Comparaison des densités théoriques et empiriques	23
14	Surface théoriques et points empiriques	24
15	Résultats du test d'adéquation par bootstrap paramétrique	25

List of Tables

1	Resumé statistique des distributions des des prix des actions et des rendements des actions BNP	9
2	Resumé statistique des distributions des des prix des actions et des rendements des actions SG.	10
3	Caractérisation des lois des rendements et test d'adéquation des données (Kolmogorov-Smirnov)	12
4	Comparatif de l'ajustement des copules	17
5	Résultats des tests d'ajustement	17