Отчёт по проекту

Мокрий Юрий, 141

Ноябрь 2016

1 Модуль интегрирования

Реализация модуля находится в *integral.py*. Реализован метод Симпсона. Модуль тестирования - *test_integral.py*.

1.1 Метод Симпсона

Метод численного интегрирования с четвёртым порядком погрешности.
Формула Симпсона:

$$I_s = \frac{(b-a)}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$$

Составная формула Симпсона:

$$I_s = \sum_{1}^{n-1} \frac{(a_{i+1} - a_i)}{6}(f(a_i) + 4f(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}) + f(a_{i+1}))$$

Аналитическе выведенные оценки погрешности:

$$\text{Для простой формулы: } |E| <= \frac{(b-a)^5}{2880}||f^{(4)}||$$

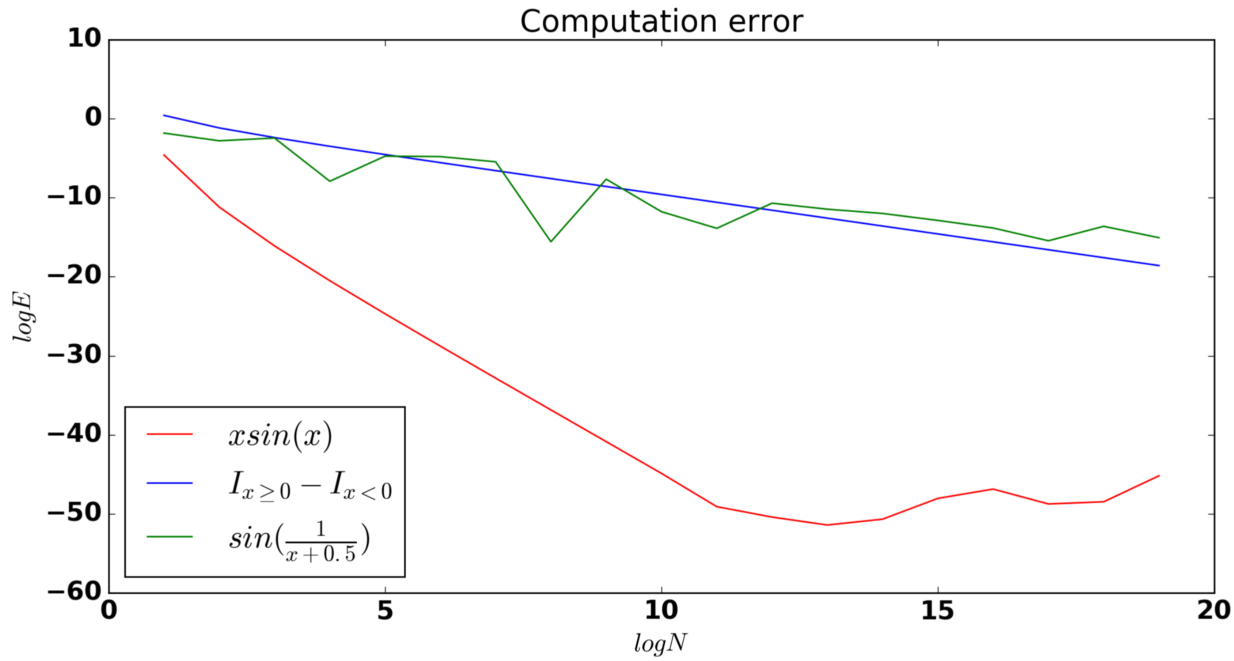
$$\text{Для составной: } |E| <= \frac{\tau_{max}^4}{2880}(b-a)||f^{(4)}||$$

В моей реализации используются равномерные сетки, поэтому $\tau_{max} = \frac{b-a}{N-1}$, где N - размер сетки.

1.2 Тестирование

Тестирование велось на трёх функциях на отрезке $\big[-1;+1\big]$, сетки брались размеров 2^n:

- Бесконечно дифференцируемая функция: $f_1(x) = xsin(x)$
- Разрывная функция(функция Хевисайда): $f_2(x) = I_{x\geq 0} - I_{x<0}$
- Осциллирующая функция: $f_3(x) = sin(\frac{1}{x+0.5}), f_3(-0.5) = 0$

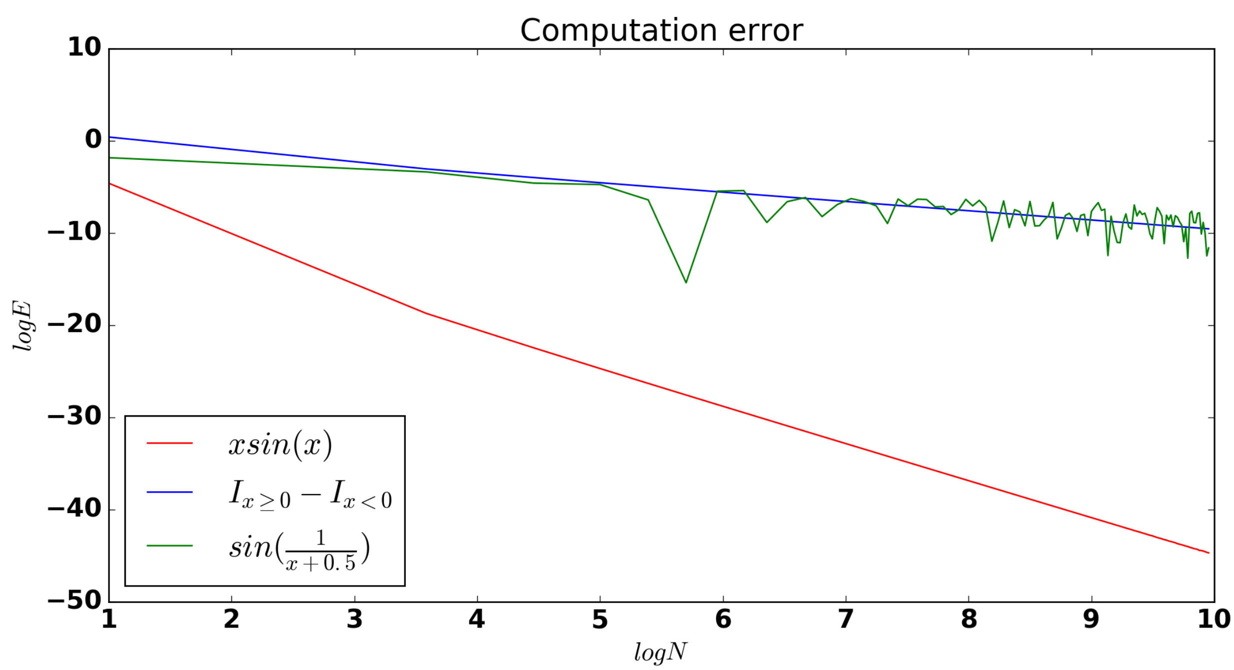


Основание логарифма - 2.

Как видно из графика метод хорошо работает для гладкой функции и не очень хорошо работает для разрывной функции и не работает для осциллирующей.

По графику красной кривой видно, что она до $logN \approx 10$ - прямая с наклоном -4, что как раз и показывает, что это метод с 4-ым порядком погрешности. При $logN = 1, logE \approx 4.5833$. Тогда константа в оценке погрешности будет примерно равна $e^{4.58333}/2^4 \approx 0.0026$. Аналитически выведенная верхняя оценка константы: $2 * ||f_1^{(4)}||/2880 = 2 * 4/2880 \approx 0.0028$.

Добавил, график с сеткой от 2 до 1000 с шагом 10.



2 Модуль решений СЛАУ

2.1 Метод Гаусса

Это прямой метод - находит точное решение системы алгебраических уравнений. Кол-во операций - $O(n^3)$. Приводит матрицу к верхнетреугольному виду с единицами на главной диагонали с помощью вычитаний строк из друг-друга и делению их на какой-то число. Алгоритм корректен, т.к. это линейные преобразования.

2.2 Тестирование

Тестирование производилось на трёх матрицах:
$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2.0001 & 3.999 & 6 \\ 15 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 10^6 & 2 \\ 10^{13} & 2 \end{bmatrix}$
В качестве вектора ответов бралось $(1, 2, 3)$ (для C - $(1, 2)$).
Результаты:
Вектора ответов:
$(0.07751938, 0.00775194, 0.30232558)$,
$(27, -192, 210)$,
$(1.00000010e - 13, 4.99999950e - 01)$
Определители: $0.0387, 0.000462962962963, -1.9999998e + 13$
Нормы: $24.0, 1.83333333333, 10000000000002$
Числа обусловленности: $72557.9534884, 748.0, 5.000001e + 12$
Невязка: $2.22044604925e - 16, 1.00485917356e - 14, 0.0$ - т.к. метод точный, погрешность только в вычислениях.

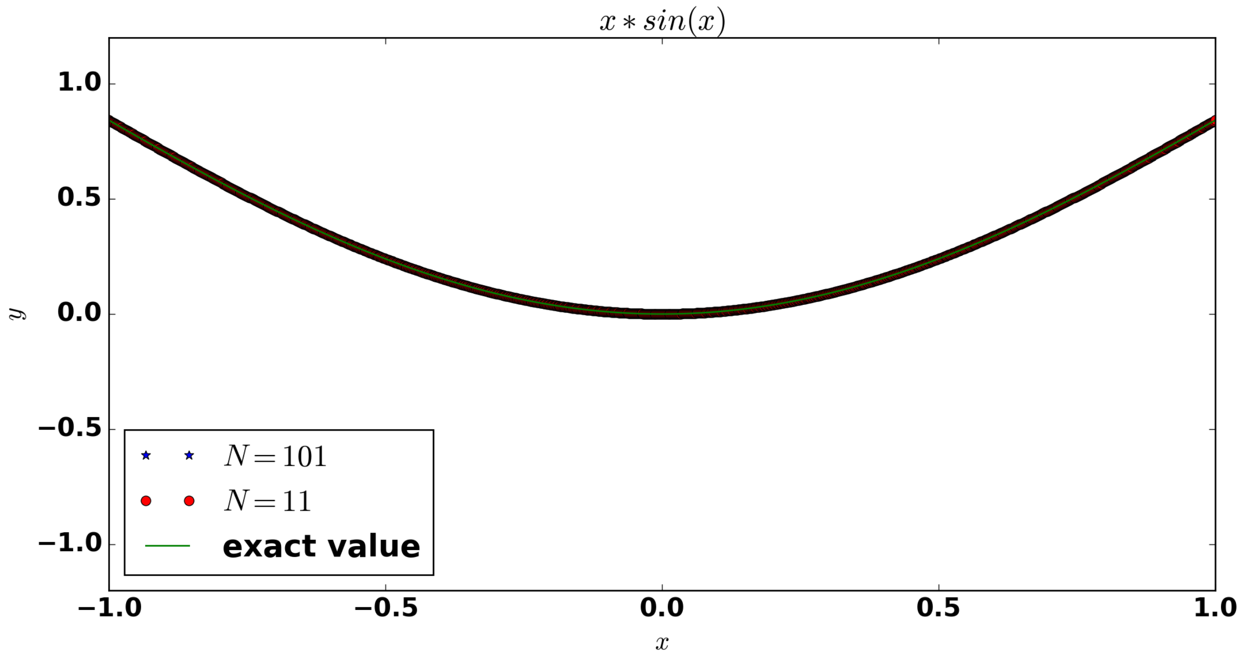
3 Модуль интерполяции

Здесь реализован кубический сплайн с дефектом 1 и нулевыми вторыми производными на концах отрезка.

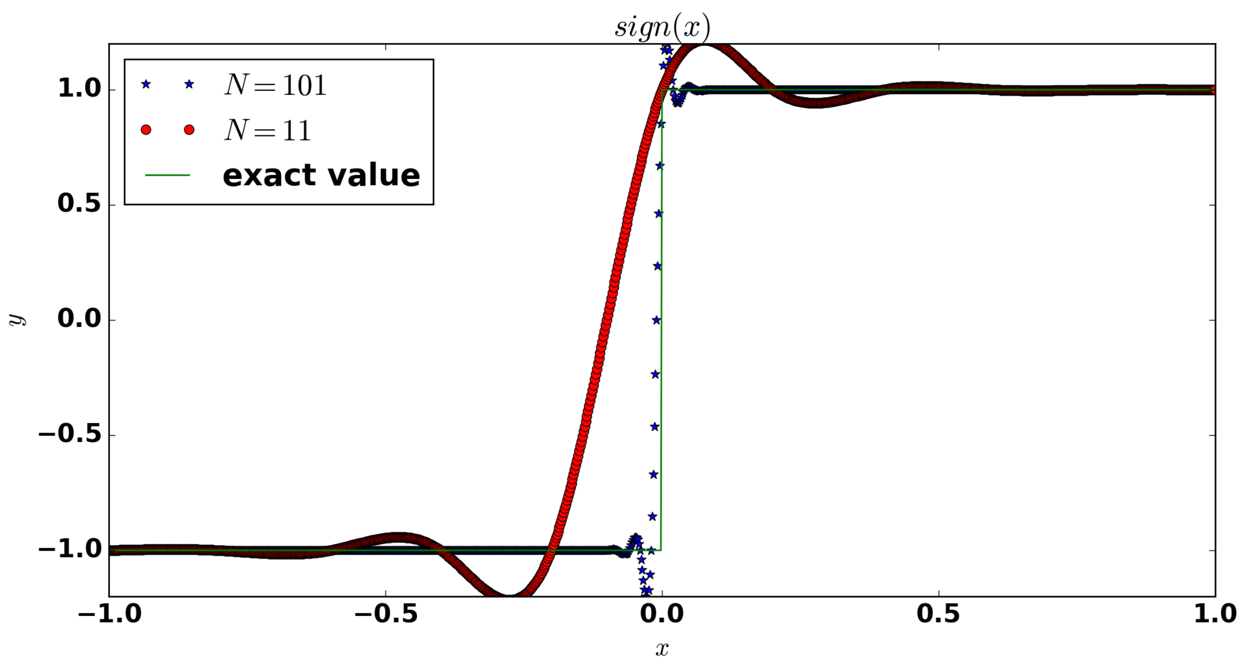
3.1 Тестирование

Тестирование проводилось на тех же функциях, что и интегрирование, на отрезке от -1 до 1. Размеры сеток - 11 и 101 точка.

Первая функция:



Вторая функция:



Третья функция:

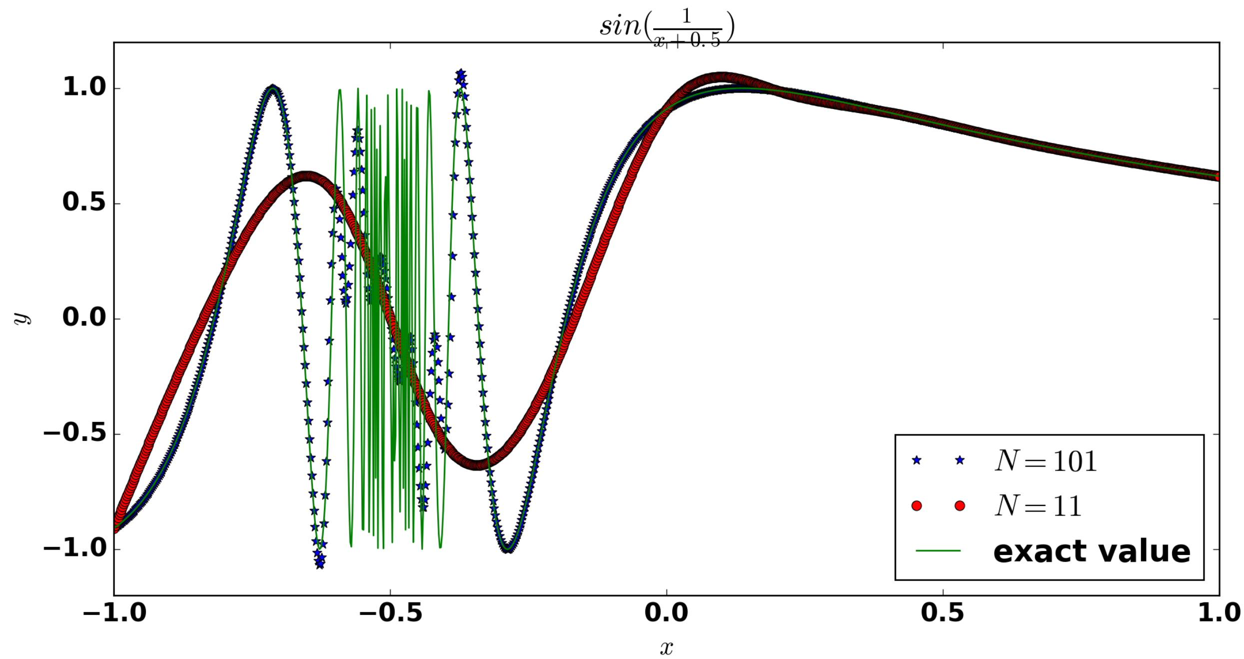
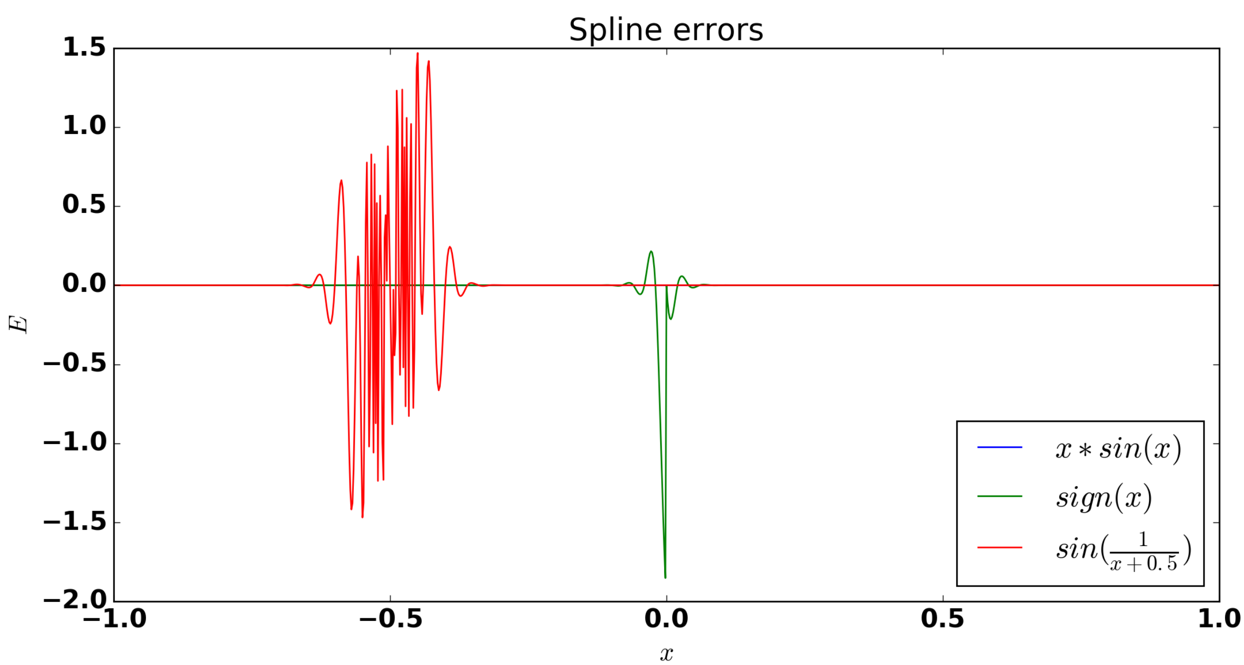


График ошибок:



4 Модуль решения задачи Коши

Здесь реализован стандартный метод Рунге-Кутта 4ого порядка.

Таблица 1: Таблица Бутчера

0				
1/2	1/2			
1/2	0	1/2		
1	0	0	1	
	1/6	1/3	1/3	1/6

Модуль тестировался на системе:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \\ x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

Аналитическое решение: $x = sin(t), y = cos(t)$.

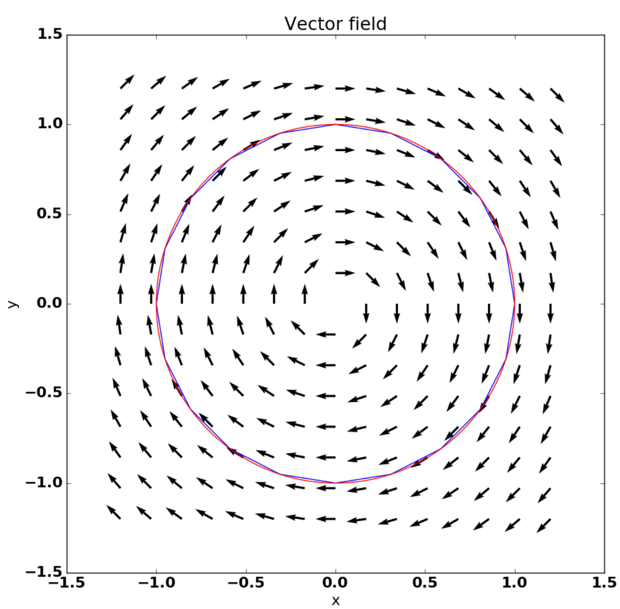
Для того, чтобы решение было единственным, нужно, чтобы функция $f(t,(x,y))$ была липщицева по (x,y), т.е. для $K : ||f(t,(x_1,y_1)) - f(t,(x_2,y_2))|| \leq ||(x_1,y_1) - (x_2,y_2)||$, для всех (x,y) из области решения.

$$||f(t,(x1,y1)) - f(t,(x2,y2))|| = ||(y_1,-x_1) - (y_2,-x_2)|| \leq ||(x_1 - x_2, y_1 - y_2)||$$

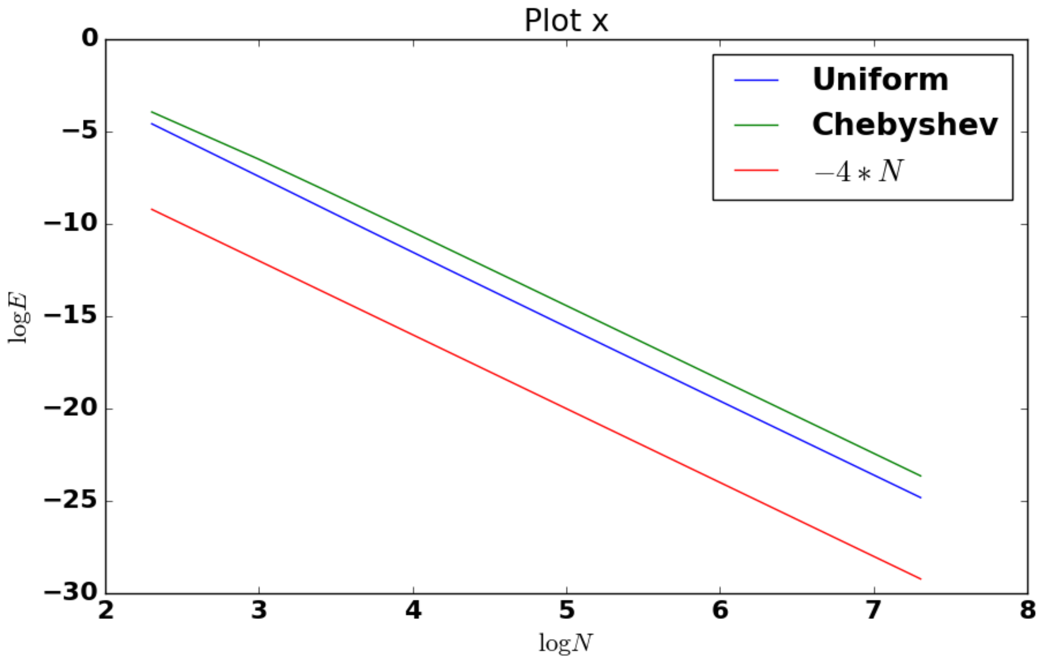
ч.т.д.

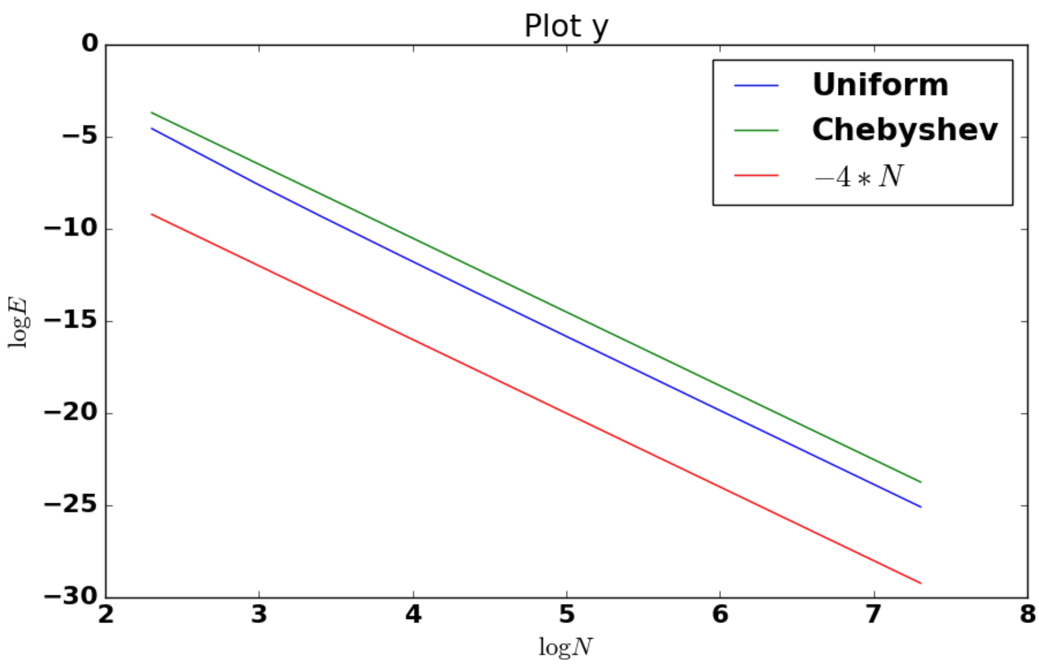
Решение искалось на отрезке $[0; 2\pi]$.

Фазовый портрет(красный - истинная траектория, синим - методом по 21 точке):



Графики логарифма ошибки от размера сетки для двух функций на разных типах сетки:





Из графиков видно, что это метод 4ого порядка.