Глава 1

Теория систем линейных алгебраических уравнений

Лекция 3

24.02

1.1 Основные определения

Пусть A $= (a_{ij})_m^n,\ a_{ij} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ $\quad \underset{\downarrow}{b} = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vdots \\ \vec{b}_m \end{pmatrix}$ − заданы , $\quad \underset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vdots \\ \vec{x}_n \end{pmatrix}$ − столбец неизвестных.

Рассмотрим $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ (1). Или в координатной форме $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ $(\tilde{1})$

$(1), (\tilde{1})$− СЛАУ. (1) - векторная форма записи. $(\tilde{1})$ - координатная форма записи.

Определение. Частным решением СЛАУ (1) называют $\underset{\downarrow}{\alpha} = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n \end{pmatrix}$ $A\underset{\downarrow}{\alpha} = \underset{\downarrow}{b}$ - верное векторное равенство (или это упорядоченный набор чисел $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$: при подстановке в $(\tilde{1})$ вместо набора $(x_1, \dots, x_n)$ получается верное равенство)

Определение. Совокупность всех частных решений называется общим решением СЛАУ.

Определение. СЛАУ называется <u>совместной</u>, если она имеет хотя бы одно решение. В противном случае СЛАУ <u>несовместена</u> (решений нет).

$$A' = (a_{ij})_{m'}^{n'},\ \underset{\downarrow}{b'} = \begin{pmatrix} \vec{b'}_1 \\ \vdots \\ \vec{b'}_m \end{pmatrix}$$

Определение. СЛАУ $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ и $A'\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b'}$ называются равносильными (эквивалентыми), если $\boxed{\text{n'=n}}$ и общие решения совпадают. При этом $(n' = n)$ несовместные СЛАУ также эквиваленты.

Замечание. m' не обязательно совпадает с m

1.2 Квадратные СЛАУ. Правило Крамера.

Пусть $\boxed{\text{m=n}}$, т.е $A = (a_{ij})_n^n$ - квадратная матрица. $\underset{\downarrow}{b} = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vdots \\ \vec{b}_n \end{pmatrix} \quad \underset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vdots \\ \vec{x}_n \end{pmatrix}$

Теорема 1.1 (Теорема Крамера)**.** *Если $\Delta = detA \neq 0$, то СЛАУ $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ (1) имеет единственное решение, причем его можно найти по правилу Крамера:* $\boxed{x_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}}$, *$k = \overline{1,n}$, где $\Delta_k = detA_k, A_k$ получена из $A = \begin{pmatrix} \underset{\downarrow}{a_1} \dots \underset{\downarrow}{a_n} \end{pmatrix}$ заменой $\underset{\downarrow}{a_k}$ и $\underset{\downarrow}{b}$*

Доказательство. $\Delta = detA \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$. Тогда $A^{-1}(A\underset{\downarrow}{x}) = A^{-1}\underset{\downarrow}{b} \Rightarrow (\underbrace{A^{1}A}_{E})\underset{\downarrow}{x} = A^{-1}\underset{\downarrow}{b} \Rightarrow \underset{\downarrow}{x} = A^{-1}\underset{\downarrow}{b}$. Проверим, что $\underset{\downarrow}{x} = A^{-1}\underset{\downarrow}{b}$ является решением (1). $A(A^{-1}\underset{\downarrow}{b}) = (AA^{-1})\underset{\downarrow}{b} = E\underset{\downarrow}{b} = \underset{\downarrow}{b}$ - верно. Проверим единственность. Пусть $A\underset{\downarrow}{\alpha'} = \underset{\downarrow}{b}$ и $A\underset{\downarrow}{\alpha''} = \underset{\downarrow}{b}$. Тогда $A(\underset{\downarrow}{\alpha'} - \underset{\downarrow}{\alpha''}) = A\underset{\downarrow}{\alpha'} - A\underset{\downarrow}{\alpha''} = \underset{\downarrow}{b} - \underset{\downarrow}{b} = \underset{\downarrow}{0}$. Тогда $\underset{\downarrow}{\alpha'} - \underset{\downarrow}{\alpha''} = A^{-1}\underset{\downarrow}{0} = \underset{\downarrow}{0}$, т.е $\underset{\downarrow}{\alpha'} = \underset{\downarrow}{\alpha''}$, т.е решение одно.

Имеем $\underset{\downarrow}{x} = A^{-1}\underset{\downarrow}{b} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vdots \\ \vec{b}_n \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} A_{k1}b_k \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} A_{kn}b_k \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ \vdots \\ \dfrac{\Delta_n}{\Delta} \end{pmatrix}$

Для $k = 1 \qquad \Delta_k = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \underset{\text{по 1-му столбцу}}{=} b_1A_{11} + \dots + b_nA_{n1}$

Остальные Δ_k аналогично (самостоятельно) □

Следствие 1. *Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из $\Delta_k \neq 0$, то квадратная СЛАУ $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ несовместна.*

Доказательство. Рассмотрим $A^T(A\underset{\downarrow}{x}) = (A^TA)\underset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\underset{\downarrow}{x} \underset{\text{1 сем}}{=} \begin{pmatrix} \Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \Delta \end{pmatrix}\underset{\downarrow}{x}$

$= \Delta \cdot E\underset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} \Delta \cdot x_1 \\ \vdots \\ \Delta \cdot x_n \end{pmatrix}$. С другой стороны $A^T\underset{\downarrow}{b} = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix}$, т.е $\begin{cases} \Delta x_1 = \Delta 1, \\ \dots \\ \Delta x_n = \Delta n \end{cases}$, но $\Delta = 0$. Если хотя бы один из $\Delta_k \neq 0$, то $x_k \cdot 0 = \Delta_k \neq 0$, что невозможно. □

1.3 Метод Гаусса (Гаусса-Жордана) исследования СЛАУ

Рассмотрим прямоугольную СЛАУ $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}, A = (a_{ij})_m^n$ - основная матрица системы. $\underset{\downarrow}{b}$ - столбец правых частей. $(A|\underset{\downarrow}{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} \underset{\downarrow}{a_1} & \dots & \underset{\downarrow}{a_n} & \underset{\downarrow}{b} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ - <u>расширенная матрица СЛАУ</u>

Определение. Элементарными операциями с СЛАУ называются следующие операции:

1. перестановка местами уравнений системы.

2. умножение обеих частей на число, отличное от нуля.

3. прибавление к одному уравнению СЛАУ другого ее уравнения

Теорема 1.2. *Элементарные операция СЛАУ приводят к эквивалентой ей СЛАУ.*

Доказательство. Самостоятельно. □

Обозначение. Пусть $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ приводятся элементарными операциями к $A'\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$, то что эти СЛАУ эквиваленты (равносильны) обозначается $A\underset{\downarrow}{x} \Leftrightarrow A'\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b'}$ либо $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b} \sim A'\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$.
Легко заметить, что элементарные операции с СЛАУ взаимно однозначно можно сопоставить элементарные операции со строками расширенной матрицы СЛАУ.

Идея метода Гаусса-Жордана. $(A|\underset{\downarrow}{b}) \sim (\underbrace{A'}_{\text{ТФ}}|\underset{\downarrow}{b'})$. Прямой ход $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \sim$ эл. преобр. только строк $\sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} a'_{11} & \dots & a'_{1r} & \dots & a'_{1n} & b_1 \\ 0 & \ddots & \dots & \dots & a'_{1n} & \vdots \\ 0 & \dots & a'_{rr} & \dots & a'_{rn} & b_r \\ \hline \multicolumn{5}{c|}{\text{НУЛИ}} & b_{r+1} \\ \hline \multicolumn{5}{c|}{\text{НУЛИ}} & 0 \end{array}\right) \quad (2)$$

Замечание. Мы считаем, что переменные СЛАУ занумерованы таким образом, что не требуется при приведение к ТФ переставлять столбцы. Столбцы A можно переставлять, $\underset{\downarrow}{b}$ закреплен.

Рассмотрим расширеннную матрицу (2) $\left(\begin{array}{ccccc|c} a'_{11} & \dots & a'_{1r} & \dots & a'_{1n} & b_1 \\ 0 & \ddots & \dots & \dots & a'_{1n} & \vdots \\ 0 & \dots & a'_{rr} & \dots & a'_{rn} & b_r \\ \hline \multicolumn{5}{c|}{\text{НУЛИ}} & b_{r+1} \\ \hline \multicolumn{5}{c|}{\text{НУЛИ}} & 0 \end{array}\right)$ Тогда в эквивалентной СЛАУ будет уравнение $0\cdot x_1 + \dots + 0\cdot x_n = b_{r+1}$. Если $b_{r+1} \neq 0$, то эквивалентная СЛАУ несовместна $\Rightarrow$ исходная СЛАУ несовместна. Если же $b_{r+1} = 0$, то $(A'|\underset{\downarrow}{b'})$ имеет ТФ и ее $Rg(A'|\underset{\downarrow}{b'}) = Rg(A') = r$. Тогда обратным ходом приводим расширенную матрицу к виду: $\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & \dots & 0 & a''_{1r+1} & \dots & a''_{1n} & b''_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a''_{rr+1} & \dots & a''_{rr} & b''_r \\ \hline \multicolumn{6}{c|}{\text{НУЛИ}} & b''_{r+1} \\ \hline \multicolumn{6}{c|}{\text{НУЛИ}} & 0 \end{array}\right)$

Т.е фактически: $A\underset{\downarrow}{x}=\underset{\downarrow}{b} \sim A'\underset{\downarrow}{x}=\underset{\downarrow}{b'} \sim A''\underset{\downarrow}{x}=\underset{\downarrow}{b''}$ в коорд. форме: $\begin{cases} x_1 + a''_{1r+1}x_{r+1} + \dots + a''_{1n}x_n = b''_1 \\ \dots \\ x_r + a''_{rr+1}x_{r+1} + \dots + a''_{rn}x_n = b''_r \end{cases}$

Тогда переменные $x_1, \dots, x_r$ назовем <u>главными</u>, а $x_{r+1}, \dots, x_n$ - <u>свободными</u>. Перенесем свободные в правую часть: $\begin{cases} x_1 = b''_1 - a''_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a''_{1n}x_n \\ \dots \\ x_r = b''_r - a''_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a''_{rn}x_n \end{cases}$ Видим, что при особых значениях свободных переменных $x_{r+1}, \dots, x_n$ можно отыскать значения главных $x_1, \dots, x_r$ и таким образом получить различные решения СЛАУ $A''\underset{\downarrow}{x}=\underset{\downarrow}{b''}$, т.е решения $A\underset{\downarrow}{x}=\underset{\downarrow}{b}$ (т.к они эквиваленты)

Покажем, что $\begin{cases} x_1 = b''_1 - a''_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a''_{1n}x_n \\ \dots \\ x_r = b''_r - a''_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a''_{rn}x_n \\ x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \end{cases}$ (3) исчерпывает всевозможные решения $A''\underset{\downarrow}{x}=\underset{\downarrow}{b}$ (а значит и исходной СЛАУ $A\underset{\downarrow}{x}=\underset{\downarrow}{b}$)

Пусть $\exists \underset{\downarrow}{\alpha} = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n \end{pmatrix}$ – решение $A\underset{\downarrow}{x}=\underset{\downarrow}{b}$. Поскольку $A\underset{\downarrow}{x}=\underset{\downarrow}{b} \sim A''\underset{\downarrow}{x}=\underset{\downarrow}{b''}$, то $A''\underset{\downarrow}{\alpha}=\underset{\downarrow}{b''}$. Тогда в (3) положим

$x_{r+1}=\alpha_{r+1}, \dots, x_n = \alpha_n$ и найдем из (3) $x_1 = \beta_1, \dots x_r = \beta_r$. Тогда $\underset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \\ \alpha_{r+1} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ - решение $A''\underset{\downarrow}{x}=\underset{\downarrow}{b''}$ Тогда

$A''(\underset{\downarrow}{x}-\underset{\downarrow}{\alpha}) = A''\underset{\downarrow}{x} - A''\underset{\downarrow}{\alpha} = \underset{\downarrow}{b''} - \underset{\downarrow}{b''} = \underset{\downarrow}{0}$. Тогда: $\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 - 0 - a''_{1r+1}\cdot 0 - \dots - a''_{1n}\cdot 0 = 0 \\ \beta_r - \alpha_r = 0 - a''_{rr+1}\cdot 0 - \dots - a''_{rn}\cdot 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 \\ \dots \\ \beta_r = \alpha_r \end{cases}$,

т. к $\underset{\downarrow}{x} - \underset{\downarrow}{\alpha} = \begin{pmatrix} \beta_1 - \alpha_1 \\ \vdots \\ \beta_r - \alpha_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ то чтобы получить решение $\underset{\downarrow}{\alpha}$ исходной СЛАУ $A\underset{\downarrow}{x}=\underset{\downarrow}{b}$, нужно свободные переменным придать значения $x_{11}=\alpha_{11}, \dots, x_n = \alpha_n$. Таким образом (3) исчерпывает все решения СЛАУ $A\underset{\downarrow}{x}=\underset{\downarrow}{b}$ и такой вид решения называется общим решением по методу Гаусса (Г-Ж) $\boxed{\underset{\downarrow\text{общ}}{x} = \underset{\downarrow}{x}(C_1, \dots, C_{n-r})}$

Замечание. Иногда свободным переменным придают значения $C_1, \dots, C_{n-r}$, т.е $x_{r+1} = C_1, \dots, x_n = C_{n-r}$ и в (3) вместо $x_{r+1}, \dots, x_n$ пишут $C_1, \dots, C_{n-r}$

Таким образом, в случаях совместности СЛАУ ее общее решение является $n-r$ параметрическим множеством.

tg: @moksimqa

Лекция 4 3.03

Пример $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=4 \\ x_1+x_2+ \qquad\quad =2 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$RgA=2, n=4$

Общее решение в координатной форме: $\begin{cases} x_1=2-C_1 \\ x_3=2-C_2 \\ x_2=C_1 \\ x_4=C_2 \end{cases}$

Исходная СЛАУ$\sim \begin{cases} x_1=2-x_2 \\ x_3=2-x_4 \end{cases}$

В векторной форме: $\underset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} 2-C_1 \\ C_1 \\ 2-C_2 \\ C_2 \end{pmatrix}$ $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

1.4 Теорема Кронекера-Капелли.

Теорема 1.3 (Критейрий совместности СЛАУ). *СЛАУ (1) $A\underset{\downarrow}{x}=\underset{\downarrow}{b}$ совместна $\Leftrightarrow RgA=Rg(A|\underset{\downarrow}{b})$ $(Rg(\underset{\downarrow}{a_1},\dots,\underset{\downarrow}{a_n}) = Rg(\underset{\downarrow}{a_1},\dots,\underset{\downarrow}{a_n}|\underset{\downarrow}{b}))$*

Доказательство. СЛАУ (1) можно записать в виде эквивалентой форме: (2) $x_1\underset{\downarrow}{a_1}+\dots+x_n\underset{\downarrow}{a_n}=\underset{\downarrow}{b}$

$\Rightarrow$ Пусть СЛАУ (1) совместна $\Rightarrow \exists x_1,\dots,x_n$: выполнено (2) $\Rightarrow \underset{\downarrow}{b}$ является ЛК $\underset{\downarrow}{a_1},\dots,\underset{\downarrow}{a_n} \Rightarrow \underset{\downarrow}{b}$ линейно зависит от $\underset{\downarrow}{a_1},\dots,\underset{\downarrow}{a_n} \Rightarrow$ число ЛНЗ столбцов в системах $\{\underset{\downarrow}{a_1},\dots,\underset{\downarrow}{a_n}\}$ и $\{\underset{\downarrow}{a_1}\dots,\underset{\downarrow}{a_n}|\underset{\downarrow}{b}\}$ одинаковое $\Rightarrow RgA = Rg(A|\underset{\downarrow}{b})$

$\Leftarrow$ $RgA=Rg(A|\underset{\downarrow}{b})=r \Rightarrow$ в области матрицы A $\exists M_r \neq 0$, его столбцы ЛНЗ и любые столбцы матрицы A являются ЛК столбцов, входящих в этот базисный минор $\Rightarrow \underset{\downarrow}{b}=\alpha_1\underset{\downarrow}{a}_{i1}+\dots+a_r\underset{\downarrow}{a}_{ir} \Rightarrow$ (2) имеет решение $\Rightarrow$ (1) совместна. $\square$

1.5 Однородные СЛАУ.

Определение. СЛАУ $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ называется <u>однородной</u>, если $\underset{\downarrow}{b} = \underset{\downarrow}{0}$, т.е $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{0}$ (1_0) - ОСЛАУ

Замечание. ОСЛАУ всегда совместна. Ее решение $\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{0}$ называется <u>тривиальным</u>. Прочие решения, если они имеются, называются <u>нетривиальными</u>.

Теорема 1.4 (О ЛК решений ОСЛАУ)**.** *Если $\underset{\downarrow}{x}^{(1)}, \dots, \underset{\downarrow}{x}^{(k)}$ - любые решение ОСЛАУ, то $\forall C_1, \dots, C_k \in$ $\in \mathbb{R}(\acute{\ }) \Rightarrow C_1\underset{\downarrow}{x}^{(1)} + \dots + C_k\underset{\downarrow}{x}^{(k)} = \underset{\downarrow}{\alpha}$ - тоже решение этой ОСЛАУ.*

Доказательство. $A\underset{\downarrow}{a} = A(C_1\underset{\downarrow}{x}^{(1)} + \dots + C_k\underset{\downarrow}{x}^{(k)}) = C_1A\underset{\downarrow}{x}^{(1)} + \dots C_kA\underset{\downarrow}{x}^{(k)} = C_1 \cdot \underset{\downarrow}{0} + \dots C_k \cdot \underset{\downarrow}{0} = \underset{\downarrow}{0}$ □

Следствие 1. *Если ОСЛАУ имеет хотя бы одно нетривиальное решение, то их будет бесконечно много.*

Теорема 1.5.
1)*Если $RgA = r = n$ (число неизвестных), то ОСЛАУ обладает только тривиальным решением.*
2)*Если $RgA = r < n$, то ОСЛАУ имеет нетривиальные решения.*

Доказательство. ② $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ $(1_0) \sim$ эл. преобр. только строк $\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} a'_{11} & \dots & a'_{1r} & \dots & a'_{1n} & 0 \\ 0 & \ddots & \dots & \dots & a'_{1n} & \vdots \\ 0 & \dots & a'_{rr} & \dots & a'_{rn} & 0 \\ \hline & & \text{НУЛИ} & & & 0 \\ \hline & & \text{НУЛИ} & & & 0 \end{array}\right)$ (2_0)

$x_1, \dots, x_r -$ главные, $x_{r+1}, \dots, x_n -$ свободные $\begin{cases} x_1 = -a''_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a''_{1n}x_n \\ \qquad\qquad \dots \\ x_r = -a''_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a''_{rn}x_n \\ x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \end{cases}$

Методом Г-Ж (1_0) приводится к (2_0), причем $n - r > 0 \Rightarrow$ свободные переменные имеются.

Положим $x_{r+1} = x_{n-1} = 0, x_n = 1$. Тогда получим $\underset{\downarrow}{\alpha} = \begin{pmatrix} -a''_{1n} \\ \vdots \\ -a''_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ - нетривиальное решение.

② Если $r = n$, то в (2_0) не будет свободных переменных: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$, т.е $(1_0) \sim (3_0)$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$

т.е имеется только тривиальное решение.

□

1.6 Фундаментальная система решений ОСЛАУ.

Рассмотрим ОСЛАУ. (1_0) $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{0}$

Определение. Упорядоченная, ЛНЗ система этой ОСЛАУ (1_0) $\underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)}, \dots, \underset{\downarrow}{\varphi}^{(k)}$ называется фундаментальной системой решений (ФСР), если для любого решения ОСЛАУ $(1_0) \Rightarrow \exists C_1, \dots, C_k \in \mathbb{R}(\acute{}) : \underset{\downarrow}{\alpha} =$
$= C_1\underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)} + \dots + C_k\underset{\downarrow}{\varphi}^{(k)}$

Теорема 1.6 (О нормальной системе решений (НСР)). *Если $RgA = r < n$, то ОСЛАУ (1_0) имеет $(n-r)$ ЛНЗ решений, через которые выражаются любое решения.*

Доказательство. Пусть $RgA = r < n$ (число неизвестных). Тогда $(1_0) \sim (2_0)$ с $(n-r)$ свободных переменных, которым придадим следующие наборы значений:

$$\begin{gathered} x_{r+1} = 1, x_{r+2} = 0, \dots, x_n = 0 \\ x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 1, \dots, x_n = 0 \\ \dots \\ x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 0, \dots, x_n = 1 \end{gathered}$$

По этим наборам найдем значения главных переменных, получим $(n-r)$ решений:

$$\underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)} = \begin{pmatrix} -a''_{1r+1} \\ \vdots \\ -a''_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underset{\downarrow}{\varphi}^{(2)} = \begin{pmatrix} -a''_{1r+2} \\ \vdots \\ -a''_{rr+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \underset{\downarrow}{\varphi}^{(n-r)} = \begin{pmatrix} -a''_{1n} \\ \vdots \\ -a''_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим $\varPhi = (\underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)}, \dots, \underset{\downarrow}{\varphi}^{(n-r)}) = r \begin{pmatrix} -a''_{1r+1} & -a''_{1r+2} & \dots & -a''_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a''_{rr+1} & -a''_{rr+2} & \dots & -a''_{rn} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

В нижней части $\varPhi$ имеется $M_{n-r} = detE = 1 \neq 0$, у $\varPhi$ $(n-r)$ столбцов $\Rightarrow Rg\varPhi = n - r \Rightarrow$ ее столбцы ЛНЗ $\Rightarrow \underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)}, \dots, \underset{\downarrow}{\varphi}^{(n-r)}$ - ЛНЗ система решений □

Определение. Построенная таким образом система решений называется нормальной (НСР)

Покажем теперь, что $\forall \underset{\downarrow}{\alpha} -$ решение (1_0) можно представить в виде ЛК $\underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)}, \ldots, \underset{\downarrow}{\varphi}^{(n-r)}$. Пусть $\underset{\downarrow}{\alpha} = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n \end{pmatrix}$ - любое решение (1_0). Рассмотрим $\underset{\downarrow}{y} = \underset{\downarrow}{\alpha_1} - \alpha_{r+1}\underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)} + \cdots + \alpha_n \underset{\downarrow}{\varphi}^{(n-r)} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Поскольку $\underset{\downarrow}{y}$ является ЛК решений ОСЛАУ (1_0), то $\underset{\downarrow}{y}$ тоже является решением $(1_0) \Rightarrow$ его компаненты удовлетворяют (2_0). Откуда, учитывая, что все свободные переменные равны 0, получим (см. (2_0)) $\begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \vdots \\ \beta_r = 0 \end{cases}$, т.е $\underset{\downarrow}{y} = \underset{\downarrow}{0} \Rightarrow \underset{\downarrow}{\alpha} = \alpha_{r+1}\underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)} + \cdots + \alpha_n \underset{\downarrow}{\varphi}^{(n-r)}$. Заметим, что отсюда следует, что бóльшего, чем $(n-r)$ количества ЛНЗ решений быть не может.

Теорема 1.7 (О ФСР)**.** *Если $RgA = r = n$, то ФСР ОСЛАУ не существует, если $RgA = r < n$, то*

1)$\exists$ *ФСР ОСЛАУ* (1_0)

2)*Любая ФСР ОСЛАУ* (1_0) *содержит ровно* $(n-r)$ *элементов*

3)*Любые* $(n-r)$ *ЛНЗ решений ОСЛАУ* (1_0) *образуют ее ФСР*

4)*Если* $\underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)}, \ldots, \underset{\downarrow}{\varphi}^{(n-r)} -$ *некоторая ФСР ОСЛАУ* (1_0), *то ее общее решение имеет вид:*

$$\underset{\downarrow}{x_{oo}} = C_1 \underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)} + \cdots + C_{n-r}\underset{\downarrow}{\varphi}^{(n-r)}, \text{ где } C_1, \ldots, C_{n-r} - \text{ произвольные числа } \mathbb{R}(\acute{)}$$

Доказательство. $RgA = r = n \Rightarrow$ имеется только тривиальное решение (оно всегда ЛЗ) $\Rightarrow$ нет ФСР.

$RgA = r < n \Rightarrow$

1) Уже доказано, т.к $\exists$ НСР, она является частным случаем ФСР.

2) Будет доказано позже.

3) Будет доказано позже.

4) $\Leftarrow$ Поскольку $\underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)}, \ldots, \underset{\downarrow}{\varphi}^{(n)}$ - решение ОСЛАУ, то любая их ЛК также является решением (см. выше).

$\Rightarrow$ Пусть $\underset{\downarrow}{y}$ - произвольное решение ОСЛУ. По определению ФСР $\exists \tilde{C}_1, \ldots, \tilde{C}_n : \underset{\downarrow}{y} = \tilde{C}_1 \underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)} + \cdots + \tilde{C}_{n-r}\underset{\downarrow}{\varphi}^{(n-r)}$

□

tg: @moksimqa

Лекция 5

10.03

$$\text{Пример: } \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2=0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad RgA = 2 = r, n = 4.$$

$$\begin{array}{c|c|c} x_1 & -1 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & -1 \\ x_4 & 0 & 1 \end{array} \quad \text{ФСР: } \underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \ \underset{\downarrow}{\varphi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \underset{\downarrow}{x}_{oo} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}()$$

1.7 Общее решение неоднородной СЛАУ.

(1) $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ называется неоднородной (НСЛАУ), если $\underset{\downarrow}{b} \neq \underset{\downarrow}{0}$. НСЛАУ (1) отвечает ОСЛАУ (1_0) $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{0}$

Теорема 1.8. *Пусть $RgA = r = Rg(A|\underset{\downarrow}{b})$ (т.е НСЛАУ совместна), тогда:*

1. Если $r = n$, то $\exists!$ решение (1)

2. Если $r < n$, то $\underset{\downarrow}{x}_{он} = \underset{\downarrow}{x}_{oo} + \underset{\downarrow}{x}_{чн}$

Доказательство. 1.$RgA = r = n$ (число неизвестных), то элементарными преобразованиями строк $(A|\underset{\downarrow}{b}) \sim$

$$(A'|\underset{\downarrow}{b}'): \begin{cases} a'_{11}x_1 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \dots \\ a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases} \quad (A'|\underset{\downarrow}{b}') = \left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & \dots & a'_{1n} & & b'_1 \\ 0 & \dots & a'_{2n} & & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & \dots & a'_{nn} & & b'_n \\ \hline 0 & \dots & 0 & & 0 \end{array}\right) \text{ Тогда } detA' \neq 0 \Rightarrow \exists! \text{ решение.}$$

2. Пусть $r < n$. Тогда $\Rightarrow$ $A\underset{\downarrow}{x}_{он} = A(\underset{\downarrow}{x}_{oo} + \underset{\downarrow}{x}) = A\underset{\downarrow}{x}_{oo} + A\underset{\downarrow}{x}_{чн} = \underset{\downarrow}{0} + \underset{\downarrow}{b} \Rightarrow \underset{\downarrow}{x}_{он}$ решение (1).

$\Leftarrow$ Пусть $\underset{\downarrow}{y}$ - произвольное решение. Тогда $A(\underset{\downarrow}{y} - \underset{\downarrow}{x}_{чн}) = A\underset{\downarrow}{y} - A\underset{\downarrow}{x}_{чн} = \underset{\downarrow}{b} - \underset{\downarrow}{b} = \underset{\downarrow}{0} \Rightarrow \exists \tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_{n-r}$: $\underset{\downarrow}{y} - \underset{\downarrow}{x}_{чн} = \tilde{C}_1\underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)} + \dots + \tilde{C}_{n-r}\underset{\downarrow}{\varphi}^{(n-r)}$, $\underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)}, \dots, \underset{\downarrow}{\varphi}^{(n-r)}$ - произвольная ФСР ОСЛАУ $(1_0) \Rightarrow \underset{\downarrow}{y} = \tilde{C}_1\underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)} + \dots + \tilde{C}_{n-r}\underset{\downarrow}{\varphi}^{(n-r)} + \underset{\downarrow}{x}_{чн}$, т.е $\forall \underset{\downarrow}{y}$ - частного решения, такие числа найдутся. Таким образом, $C_1\underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)} + \dots + C_{n-r}\underset{\downarrow}{\varphi}^{(n-r)} + \underset{\downarrow}{x}_{чн}$ исчерпывают все решения. $\underset{\downarrow}{x}_{он} = C_1\underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)} + \dots + C_{n-r}\underset{\downarrow}{\varphi}^{(n-r)} + \underset{\downarrow}{x}_{чн} = \underset{\downarrow}{x}_{oo} + \underset{\downarrow}{x}_{чн}$

□

$$\text{Пример: } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \underset{\downarrow}{x}_{oo} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\underset{\downarrow}{x}_{чн}$ найдется при любых частных значениях свободных переменных, например $x_2 = x_4 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underset{\downarrow}{x}_{чн} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = 2 - x_2 \\ x_3 = 2 - x_4 \end{cases}$$

А если $x_2 = x_4 = 1 \Rightarrow \underset{\downarrow}{x_{\text{чн}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ любое из них можно брать.

$$\underset{\downarrow}{x_{\text{он}}} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underset{\downarrow}{x_{\text{он}}} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$