Глава 1

Матрицы

Лекция 1

10.02

1.1 ЛЗ и ЛНЗ строк(столбцов) матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a_1} \\ \vdots \\ \vec{a_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{\downarrow}{a_1} & \dots & \underset{\downarrow}{a_n} \end{pmatrix} \qquad \vec{a_i} = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \qquad \underset{\downarrow}{a_j} = \begin{pmatrix} a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Определение. Система столбцов $\underset{\downarrow}{a_{j1}} \dots \underset{\downarrow}{a_{jn}}$ называется ЛЗ, если $\exists$ нетривиальная ЛК этих столбцов, дающая нулевой столбец. $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) : |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n| \neq 0,$ причем $\alpha_1 \underset{\downarrow}{a_{j1}} + \dots + \alpha_k \underset{\downarrow}{a_{jk}} = \underset{\downarrow}{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Если это равенство возможно только при $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, то система столбцов называется ЛНЗ.

Определение. Аналогично определяется ЛЗ и ЛНЗ строк матрицы.

Лемма 1.1. *Если система столбцов содержит нулевой столбец, то она ЛЗ.*

Лемма 1.2. *Если система столбцов содержит ЛЗ подсистему, то она тоже ЛЗ.*

Лемма 1.3. *Любая подсистема ЛНЗ системы столбцов является ЛНЗ.*

Теорема 1.4 (Критерий ЛЗ)**.** *Система столбцов ЛЗ $\Leftrightarrow$ один из них является ЛК комбинацией остальных.*

Для строк аналогично

1.2 Ранг матрицы.

$A = (a_{ij})_m^n$. $\quad 1 \leqslant k \leqslant min(m,n)$. Выберем в матрице A произвольно k строк: $i_1, \dots, i_k$ и k столбцов и рассмотрим матрицу B, распологающуюся на этих строк и и в этих столбцах.

Определение. Число $M^{j_1 \cdots j_k}_{i_1 \cdots i_k} = detB$ называется минором k-ого порядка матрицы A. Краткое обозначение M_k

Лемма 1.5. *Если в матрице* A *все* $M_k = 0$, *то все* $M_{k+1} = 0$ *(если они имеются).*

Доказательство. поскольку любой M_{k+1} является ЛК $(k+1)$ минора M_k, а все $M_k = 0, \Rightarrow M_{k+1} = 0.$ □

Определение. Рангом ненулевой матрицы $A = (a_{ij})_m^n$ называется такое число $r \in \mathbb{N}$:

$1) \exists M_r \neq 0$ $\quad 2) \forall M_{r+1} = 0$(если они имеются)

Определение. Ранг нулевой матрицы по определению полагают равным нулю.

Обозначение. $RgA, rgA, rangA, rankA$

Пример. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 9 & 9 & 9 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} = M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -4 \quad \exists M_{12} \neq 0 \forall M_3 = 0,$ т.к $\vec{a_3} = \vec{a_2} = \vec{a_1} \Rightarrow$

$RgA = 2$

Определение. Пусть $RgA = r$. Любой ненулевой M_r называется базисным, а строки и столбцы, на которых он располагается соотвественно называются базисными строками и базисными столбцами.

Теорема 1.6.

1.*Базисные строки и базисные столбцы матрицы A ЛНЗ.*

2.*Любые строки(столбцы) матрицы Аявляются ЛК базиса.*

Доказательство. 1.(от противного)(для столбцов). Пусть базисные столбцы ЛЗ. Тогда один из них является ЛК остальных. Тогда в M_r, который располагается в этих столбцах. Один столбец также является ЛК остальных$\Rightarrow M_r = 0$ (по свойству det) - противоречие $\Rightarrow$ базисные столбцы ЛНЗ.

2. Пусть $M\begin{matrix} i_1 \dots i_r \\ \\ j_1 \dots j_r \end{matrix} \neq = 0$ Рассмотрим $D = \begin{pmatrix} a_{i1j1} & \dots & a_{i1jr} & \dots & a_{i_1 j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{irj1} & \dots & a_{irjr} & \dots & a_{i_r j} \\ a_{ij_1} & \dots & a_{ij_r} & \dots & a_{ij} \end{pmatrix}$. Возможны случаи:

а)$\begin{cases} i \notin i_1 \dots i_r \\ i \notin j_1 \dots j_r \end{cases} \Rightarrow detD = M_{r+1} = 0$

б) $\left[\begin{matrix} i \in i_1 \dots i_r \\ j \in j_1 \dots j_r \end{matrix}\right. \Rightarrow detD = 0$ (по свойству det).

С другой стороны $detD =$ (по последней стркое) $= c_{j1} a_{ij1} + \dots + c_{jr} a_{ijr} + \dots + c_j a_{ij} = 0$

c_{jl} - алгебраическое дополнение j_l элемента последней строки.(не зависит от i) $c_j = M\begin{matrix} i_1 \dots i_r \\ \\ j_1 \dots j_r \end{matrix} \Rightarrow \underset{\downarrow}{c_{j_1} a_{j_1}} +$ $\dots + c_{jr} a_{jr} + M_r a_j = 0 \Rightarrow a_j = -\frac{c_{j_1}}{M_r} a_{j_1} - \dots - \frac{c_{jr}}{M_r} a_{jr}$, т.е $\forall j = 1, n \quad j-$тый столбей является ЛК базисных. Для строк аналогично.

□

Следствие 1. *Квадратная A вырожденная* $\Leftrightarrow$ *ее строки (столбцы) ЛЗ.*

Доказательство. $\Rightarrow A = (a_{ij})_m^n -$вырожденная, т.е $detA = 0 \Rightarrow$ ед. $M_r = detA = 0 \Rightarrow RgA = r < n \Rightarrow$ $\exists M_r \neq 0 -$ базисный минор $\Rightarrow \exists$ строка матрицы A, являющаяся ЛК базисных $\Rightarrow$ строки ЛЗ.

$\Leftarrow$ строки ЛЗ $\Rightarrow detA = 0$, т.е $A-$вырожденная.(Для столбцов аналогично.) $\square$

Пример. $Rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 9 & 9 & 9 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} = 2.$ $M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = \neq 0 \Rightarrow$ 1 и 2 строки ЛНЗ и 1 и 2 столбец ЛНЗ. .$M_{12}^{45} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 9 & 9 \end{vmatrix} = 0$ отсюда не следует, что 1 и 2 строки ЛЗ. Но 4 и 5 столбцы ЛЗ. Любой минор 2-го порядка на них будет нулевым.

Следствие 2. *Если $RgA = r$, то любые $(r+1)$ строка или $(r+1)$(если они найдутся) столбец являются ЛЗ.*

Доказательство. Пусть имеется $(r+1)$ ЛНЗ столбец $\underset{\downarrow}{a_{j_1}} \dots a_{j_{r+1}}$. Допустим $m \geqslant r+1$. Тогда $\exists M_{r+1}$, расположенный на $M_{r+1} \neq 0 \Rightarrow RgA \geqslant r+1$ – противоречие.

Пусть $m = r$ и имеется $(r+1)$ ЛНЗ столбец $\underset{\downarrow}{a_{j_1}} \dots a_{r+1}$. Тогда если среди этих столбцов имееются базисные (т.е на них $\exists M_r \neq 0$), то оставшийся столбец является их ЛК $\Rightarrow$ система столбцов ЛЗ. Если же на этих столбцах $\forall M_r = 0$, то система r столбцов - ЛЗ. $\Rightarrow$ система $r+1$ столбцов тоже ЛЗ. $\square$

Теорема 1.7. *Ранг матрицы A равен максимальному числу ЛНЗ строк (равен максимальному числу ЛНЗ столбцов)*

Доказательство. Самостоятельно. $\square$

Следствие 1. *max число ЛНЗ строк = max числу ЛНЗ столбцов в любой матрице.*

1.3 Элементарные преобразования строк и столбцов матрицы.

К элементарным преобразованиям строк матрицы А относятся следующие операции:

1. Обмен местами двух строк матрицы.
2. Умножение строки на ненулевое число.
3. Прибавление к одной строке другой строки, умноженной на любое число.

Для столбцов аналогично.

Тот факт, что B получена из A элементарными преобразованиям обозначается так:$A \sim B$

Теорема 1.8. *Если $A \sim B$, то $B \sim A$*

Теорема 1.9. *Если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$*

Доказательство. Самостоятельно. $\square$

Теорема 1.10. *Если $A \sim B$, то $RgA = RgB$*

Доказательство. 1,2 не изменяет колв-о ЛНЗ строк (столбцов).

3. БОО можно считать, что B получена из A путем добавления ко 2-ой строке первой строки, умноженной на α.

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a_1} \\ \vec{a_2} \\ \vdots \\ \vec{a_m} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vdots \\ \vec{b}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a_1} \\ \vec{a_2} + \lambda \vec{a_1} \\ \vdots \\ \vec{a_m} \end{pmatrix}$$ Пусть $RgA = r$. M − минор матрицы A

$\tilde{M}$ − минор матрицы B

Возможны три случая:

1) Если $\tilde{M}_{r+1}$ не содержит $\vec{b}_2$, то $\tilde{M}_{r+1} = M_{r+1} = 0$

2)Если $\tilde{M}_{r+1}$ содержит $\vec{b}_2$, но не содержит $\vec{b}_1$, тогда $\tilde{M}_{r+1} = \underset{\substack{\text{минор } A\text{, который} \\ \text{содержит } \vec{a}_1, \\ \text{но не содержит } \vec{a}_2}}{M_{r+1}} + \lambda \underset{\substack{\text{минор } A\text{, который} \\ \text{содержит } \vec{a}_2, \\ \text{но не содержит } \vec{a}_1}}{M_{r+1}} =$
$0 + \lambda * 0 = 0$

3)Если $\tilde{M}_{r+1}$ содержит $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$, то $\tilde{M}_{r+1} = \underset{\substack{\text{минор } A, \\ \text{содержащий } \vec{a}_1 \text{ и } \vec{a}_2}}{M_{r+1}} + \lambda \underset{\substack{\text{имеет две} \\ \text{одинаковые строки}}}{detC}$

Отсюда $RgB \leqslant RgA$. Далее поскольку $A \sim B$, то $B \sim A \Rightarrow$ рассуждая аналогично, получим $RgA \leqslant RgB \Rightarrow \begin{cases} RgA \leqslant RgB \\ RgB \leqslant RgA \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{RgA=RgB}}$ $\square$

tg: @moksimqa

Лекция 2

17.02

Пусть $A = (a_{ij})_m^n \neq \Theta$

Определение. A имеет трацпецевидную форму (ТФ), если $\exists r \in \mathbb{N} : 1 \leqslant r \leqslant min(m,n)$, причем $\begin{cases} a_{ii} \neq 0, i = \overline{1,r} \\ a_{ij} = 0, i > r \\ a_{ij} = 0, i > j \end{cases}$

Примеры: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Очевидно, что если A имеет ТФ, то $RgA = r$.

Определение. Если $A = \Theta$, считаем, что она имеет ТФ.

Теорема 1.11. *Любую $A = (a_{ij})_m^n$ можно элементарными преобразованиями привести к ТФ.*

Доказательство. Если $A = \Theta$, то она уже имеет ТФ. Пусть $A \neq \Theta$. $\exists a_{ij} \neq 0$. Переставим строки i и 1 и столбцы j и 1, добиваемся, что $A \sim \tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1} & \dots & \tilde{a}_{mn} \end{pmatrix}$, где $\tilde{a}_{11} = a_{ij} \neq 0$.

Далее для $i = \overline{2,m}$ $\quad \tilde{\vec{a_i}} \sim \tilde{\tilde{\vec{a_i}}} = \vec{a_i} - \dfrac{\tilde{\tilde{a}}_{i1}}{\tilde{\tilde{a}}_{11}} \tilde{\vec{a}}_1$. В результате этого получим: $\tilde{A} \sim \tilde{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & & \\ \vdots & \begin{pmatrix} A_1 \end{pmatrix} & \\ 0 & & \end{pmatrix}$

Если $A_1 = \Theta$, то $\tilde{\tilde{A}}$ имеет ТФ . Если $A_1 \neq \Theta$, то аналогичные действия производим со строками и столбцами с номерами $\geqslant 2 \dots$ За конечно число шагов получим ТФ. $\square$

Отсюда получаем метод элементарных преобразований вычисления ранга матрицы. $A \sim B$ - имеет ТФ. $RgA = RgB = r$

1.4 Вычисление обратной матрицы методом элементарных преобразований.

Пусть $A = (a_{ij})_n^n$.

Теорема 1.12. *A приводится к E элементарными преобразованиями <u>только лишь строк</u> $\Leftrightarrow detA \neq 0$*

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть $A \sim E$. Тогда $detE = 1 \neq 0$, то $detA \neq 0$ (если предположить, что $detA = 0$, то из свойств определителя будет следовать, что $detE = 0 -$ противоричe)

$\Leftarrow$ Пусть $detA \neq 0$, тогда $\underset{\downarrow}{a_1} \neq 0$. Тогда $\exists a_{i1} \neq 0$. Путем перестановки 1-ой и i-ой строки получаеем $A \sim B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$ $b_{11} = a_{i1} \neq 0$. Далее делим $\vec{b_1}$ на $b_{11} \neq 0$. Тогда $B \sim C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$.

Далее для $i = \overline{2,n}$ делаем $\vec{c_i} \sim \vec{d_i} = \vec{c_i} - c_{i1}\vec{c_1}$. Тогда $C \sim D = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & \begin{pmatrix} A_1 \end{pmatrix} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

$|detA| = |b_{11}||detC| = |b_{11}||detD| = |b_{11}| * 1|detA_1| \Rightarrow detA_1 \neq 0$. Далее аналогичным образом $A_1 \sim B_1 \sim C_1 \sim D_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \vdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \begin{pmatrix} A_2 \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$ $detA_2 \neq 0$. За конечное число шагов (n) придем к $A \sim D_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Мы осуществили прямой ход алгоритма Гауссова исключения (обнулили элементы ниже главной диагонали.) Сделаем обратный ход симметричным образом (обнуляем элементы выше главной диагонали).

$D_n = \begin{pmatrix} 1 & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \ddots & d_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ Для строк $i = \overline{n-1}, \overline{1}$ $\quad \vec{d_i} \sim \vec{f_i} = \vec{d_i} - \vec{d_n} d_{in}$. Тогда $D_n - F_N = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

За конечное (n-1) число шагов придем к $F_n \sim F_{n-1} \dots \sim F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ $\square$

Рассмотрим $B_{pq} = (b_{ij})_m^n : b_{ij} = \delta_{ip}\delta_{jq} \ \forall i, j = \overline{1,n}$ $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ (единственный отличный от нуля элемент находится в p-ой строке и q-том столбце)

Пусть $A = (a_{ij})_n^n$, $C = B_{pq}A = (c_{ij})_m^n$. Тогда $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{n} \delta_{ip}\delta_{kq}a_{kj} = \delta_{ip}a_{qj}$.

Отсюда: $\begin{aligned} &\vec{c_i} = \vec{0}, \text{ если } i \neq p. \\ &i = p \Rightarrow c_{pj} = a_{qj} \ \forall j = \overline{1,n}, \text{ т.е } \vec{c_p} = \vec{a_q} \end{aligned}$

Т.е $B_{pq}A = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \\ \vdots \\ \vec{a_q} \\ \vdots \\ \vec{0} \end{pmatrix}$ ($\vec{a_q}$ находится на p-ой строке) Как поменять местами строки k и l?

$(E - B_{kk} - B_{ll} + B_{lk} + B_{kl})A = \underbrace{EA}_{A} - \underbrace{B_{kk}A}_{\text{вычитает k-ую строку из k-ой строки}} - B_{ll}A + B_{lk}A + \underbrace{B_{kl}A}_{\text{прибавляет k-ую строку к l-ой строке}}$ Т.е перестановка двух строк k и l матрицы A осуществляется умножением ее слева на $\boxed{P = E - B_{kk} - B_{ll} + B_{lk} + B_{kl}}$.

Умножение k-ой строки на число λ реализуется матрицей $\boxed{P = E - B_{kk} + \lambda B_{kk} = E + (\lambda - 1)B_{kk}}$

Добавление k-ой строки l-ой строки, умноженной на λ, осуществляется матрицей $\boxed{P = E + \lambda B_{kl}}$

Теорема 1.13. *Пусть матрица A некоторыми преобразованиями только лишь строк приводится к E. Тогда E <u>этими же</u> преобразованиями приводится к A^{-1}*

Доказательство. Пусть $P_1 \dots P_k$ - матрицы элементарных преобразований строк, которыми A приводится к E, т.е $P_k(\dots P_2(P_1 A)) = E$.

По свойству ассоциативности матричного умножения, получим $(P_k \dots P_2 P_1)A = E \quad (*)$.

$A \sim E \Rightarrow det A \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$. Домножим обе части (*) справа на A^{-1}.

$((P_k \dots P_2 P_1)A)A^{-1} = EA^{-1} = A^{-1} \Rightarrow (P_k \dots P_2 P_1)(AA^{-1}) = A^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow (P_k \dots P_2 P_1)E = A^{-1} \Rightarrow P_k(\dots P_2(P_1 E)) = A^{-1}$.

$\square$

Примеры реализации: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Запишем $(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{строк}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -8 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -\frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Краткая запись $(A|E) \underset{\text{строк}}{\sim} (E|A^{-1})$

Следствие 1. $A = (a_{ij})_n^n,\ det A \neq 0, B = (b_{ij})_n^n . \underset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, *тогда:* $\begin{matrix} (A|B) \underset{\textit{строк}}{\sim} (E|A^{-1}B) \\ (A|\underset{\downarrow}{x}) \underset{\textit{строк}}{\sim} (E|A^{-1}\underset{\downarrow}{x}) \end{matrix}$

Доказательство. Самостоятельно доказать с помощью матриц P. $\square$

tg: @moksimqa

Глава 2

Теория систем линейных алгебраических уравнений

Лекция 3

24.02

2.1 Основные определения

Пусть А $= (a_{ij})_m^n,\ a_{ij} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ $\quad \underset{\downarrow}{b} = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vdots \\ \vec{b}_m \end{pmatrix}$ – заданы , $\quad \underset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vdots \\ \vec{x}_n \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных.

Рассмотрим $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ (1). Или в координатной форме
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (\tilde{1})$$

$(1), (\tilde{1})$– СЛАУ. (1) - векторная форма записи. $(\tilde{1})$ - координатная форма записи.

Определение. Частным решением СЛАУ (1) называют $\underset{\downarrow}{\alpha} = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n \end{pmatrix}$ $\ A\underset{\downarrow}{\alpha} = \underset{\downarrow}{b}$ - верное векторное равенство (или это упорядоченный набор чисел $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$: при подстановке в $(\tilde{1})$ вместо набора $(x_1, \dots, x_n)$ получается верное равенство)

Определение. Совокупность всех частных решений называется общим решением СЛАУ.

Определение. СЛАУ называется <u>совместной</u>, если она имеет хотя бы одно решение. В противном случае СЛАУ <u>несовместена</u> (решений нет).

$$A' = (a_{ij})_{m'}^{n'},\ \underset{\downarrow}{b'} = \begin{pmatrix} \vec{b'}_1 \\ \vdots \\ \vec{b'}_m \end{pmatrix}$$

Определение. СЛАУ $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ и $A'\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b'}$ называются равносильными (эквивалентыми), если $\boxed{\text{n'=n}}$ и общие решения совпадают. При этом $(n' = n)$ несовместные СЛАУ также эквиваленты.

Замечание. m' не обязательно совпадает с m

2.2 Квадратные СЛАУ. Правило Крамера.

Пусть $\boxed{\text{m=n}}$, т.е $A = (a_{ij})_n^n$ - квадратная матрица. $\underset{\downarrow}{b} = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vdots \\ \vec{b}_n \end{pmatrix}$ $\quad \underset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vdots \\ \vec{x}_n \end{pmatrix}$

Теорема 2.1 (Теорема Крамера)**.** *Если* $\Delta = detA \neq 0$, *то СЛАУ* $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ (1) *имеет единственное решение, причем его можно найти по правилу Крамера:* $\boxed{x_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}}$, $k = \overline{1, n}$, *где* $\Delta_k = detA_k, A_k$ *получена из* $A = \begin{pmatrix} \underset{\downarrow}{a_1} \dots \underset{\downarrow}{a_n} \end{pmatrix}$ *заменой* $\underset{\downarrow}{a_k}$ *и* $\underset{\downarrow}{b}$

Доказательство. $\Delta = detA \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$. Тогда $A^{-1}(A\underset{\downarrow}{x}) = A^{-1}\underset{\downarrow}{b} \Rightarrow (\underbrace{A^{1}A}_{E})\underset{\downarrow}{x} = A^{-1}\underset{\downarrow}{b} \Rightarrow \underset{\downarrow}{x} = A^{-1}\underset{\downarrow}{b}$. Проверим, что $\underset{\downarrow}{x} = A^{-1}\underset{\downarrow}{b}$ является решением (1). $A(A^{-1}\underset{\downarrow}{b}) = (AA^{-1})\underset{\downarrow}{b} = E\underset{\downarrow}{b} = \underset{\downarrow}{b}$ - верно. Проверим единственность. Пусть $A\underset{\downarrow}{\alpha'} = \underset{\downarrow}{b}$ и $A\underset{\downarrow}{\alpha''} = \underset{\downarrow}{b}$. Тогда $A(\underset{\downarrow}{\alpha'} - \underset{\downarrow}{\alpha''}) = A\underset{\downarrow}{\alpha'} - A\underset{\downarrow}{\alpha''} = \underset{\downarrow}{b} - \underset{\downarrow}{b} = \underset{\downarrow}{0}$. Тогда $\underset{\downarrow}{\alpha'} - \underset{\downarrow}{\alpha''} = A^{-1}\underset{\downarrow}{0} = \underset{\downarrow}{0}$, т.е $\underset{\downarrow}{\alpha'} = \underset{\downarrow}{\alpha''}$, т.е решение одно.

Имеем $\underset{\downarrow}{x} = A^{-1}\underset{\downarrow}{b} = \dfrac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vdots \\ \vec{b}_n \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} A_{k1}b_k \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} A_{kn}b_k \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ \vdots \\ \dfrac{\Delta_n}{\Delta} \end{pmatrix}$

Для $k = 1 \qquad \Delta_k = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \underset{\text{по 1-му столбцу}}{=} b_1A_{11} + \dots + b_nA_{n1}$

Остальные Δ_k аналогично (самостоятельно) □

Следствие 1. *Если* $\Delta = 0$, *а хотя бы один из* $\Delta_k \neq 0$, *то квадратная СЛАУ* $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ *несовместна.*

Доказательство. Рассмотрим $A^T(A\underset{\downarrow}{x}) = (A^TA)\underset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \underset{\downarrow}{x} \underset{\text{1 сем}}{=} \begin{pmatrix} \Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \Delta \end{pmatrix} \underset{\downarrow}{x}$

$= \Delta \cdot E\underset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} \Delta \cdot x_1 \\ \vdots \\ \Delta \cdot x_n \end{pmatrix}$. С другой стороны $A^T\underset{\downarrow}{b} = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix}$, т.е $\begin{cases} \Delta x_1 = \Delta 1, \\ \dots \\ \Delta x_n = \Delta n \end{cases}$, но $\Delta = 0$. Если хотя бы один из $\Delta_k \neq 0$, то $x_k \cdot 0 = \Delta_k \neq 0$, что невозможно. □

2.3 Метод Гаусса (Гаусса-Жордана) исследования СЛАУ

Рассмотрим прямоугольную СЛАУ $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}, A = (a_{ij})_m^n$ - основная матрица системы. $\underset{\downarrow}{b}$ - столбец правых частей. $(A|\underset{\downarrow}{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} \underset{\downarrow}{a_1} & \dots & \underset{\downarrow}{a_n} & \underset{\downarrow}{b} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ - <u>расширенная матрица СЛАУ</u>

Определение. Элементарными операциями с СЛАУ называются следующие операции:

1. перестановка местами уравнений системы.

2. умножение обеих частей на число, отличное от нуля.

3. прибавление к одному уравнению СЛАУ другого ее уравнения

Теорема 2.2. *Элементарные операция СЛАУ приводят к эквивалентой ей СЛАУ.*

Доказательство. Самостоятельно. □

Обозначение. Пусть $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ приводятся элементарными операциями к $A'\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$, то что эти СЛАУ эквиваленты (равносильны) обозначается $A\underset{\downarrow}{x} \Leftrightarrow A'\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b'}$ либо $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b} \sim A'\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$.

Легко заметить, что элементарные операции с СЛАУ взаимно однозначно можно сопоставить элементарные операции со строками расширенной матрицы СЛАУ.

Идея метода Гаусса-Жордана. $(A|\underset{\downarrow}{b}) \sim (\underbrace{A'}_{\text{ТФ}}|\underset{\downarrow}{b'})$. Прямой ход $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \sim$ эл. преобр. только строк $\sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} a'_{11} & \dots & a'_{1r} & \dots & a'_{1n} & b_1 \\ 0 & \ddots & \dots & \dots & a'_{1n} & \vdots \\ 0 & \dots & a'_{rr} & \dots & a'_{rn} & b_r \\ \hline \multicolumn{5}{c|}{\text{НУЛИ}} & b_{r+1} \\ \hline \multicolumn{5}{c|}{\text{НУЛИ}} & 0 \end{array}\right) (2)$$

Замечание. Мы считаем, что переменные СЛАУ занумерованы таким образом, что не требуется при приведение к ТФ переставлять столбцы. Столбцы A можно переставлять, $\underset{\downarrow}{b}$ закреплен.

Рассмотрим расширеннную матрицу (2) $\left(\begin{array}{ccccc|c} a'_{11} & \dots & a'_{1r} & \dots & a'_{1n} & b_1 \\ 0 & \ddots & \dots & \dots & a'_{1n} & \vdots \\ 0 & \dots & a'_{rr} & \dots & a'_{rn} & b_r \\ \hline \multicolumn{5}{c|}{\text{НУЛИ}} & b_{r+1} \\ \hline \multicolumn{5}{c|}{\text{НУЛИ}} & 0 \end{array}\right)$ Тогда в эквивалентной СЛАУ будет уравнение $0\cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = b_{r+1}$. Если $b_{r+1} \neq 0$, то эквивалентная СЛАУ несовместна $\Rightarrow$ исходная СЛАУ несовместна. Если же $b_{r+1} = 0$, то $(A'|\underset{\downarrow}{b'})$ имеет ТФ и ее $Rg(A'|\underset{\downarrow}{b'}) = Rg(A') = r$. Тогда обратным ходом приводим расширенную матрицу к виду: $\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & \dots & 0 & a''_{1r+1} & \dots & a''_{1n} & b''_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a''_{rr+1} & \dots & a''_{rr} & b_r \\ \hline \multicolumn{6}{c|}{\text{НУЛИ}} & 0 \\ \hline \multicolumn{6}{c|}{\text{НУЛИ}} & 0 \end{array}\right)$

Т.е фактически: $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b} \sim A'\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}' \sim A''\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}''$ в коорд. форме: $\begin{cases} x_1 + a''_{1r+1}x_{r+1} + \dots + a''_{1n}x_n = b''_1 \\ \dots \\ x_r + a''_{rr+1}x_{r+1} + \dots + a''_{rn}x_n = b''_r \end{cases}$

Тогда переменные $x_1, \dots, x_r$ назовем <u>главными</u>, а $x_{r+1}, \dots, x_n$ - <u>свободными</u>. Перенесем свободные в правую часть: $\begin{cases} x_1 = b''_1 - a''_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a''_{1n}x_n \\ \dots \\ x_r = b''_r - a''_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a''_{rn}x_n \end{cases}$ Видим, что при особых значениях свободных переменных $x_{r+1}, \dots, x_n$ можно отыскать значения главных $x_1, \dots, x_r$ и таким образом получить различные решения СЛАУ $A''\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}''$, т.е решения $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ (т.к они эквиваленты)

Покажем, что $\begin{cases} x_1 = b''_1 - a''_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a''_{1n}x_n \\ \dots \\ x_r = b''_r - a''_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a''_{rn}x_n \\ x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \end{cases}$ (3) исчерпывает всевозможные решения $A''\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ (а значит и исходной СЛАУ $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$)

Пусть $\exists \underset{\downarrow}{\alpha} = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n \end{pmatrix}$ – решение $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$. Поскольку $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b} \sim A''\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}''$, то $A''\underset{\downarrow}{\alpha} = \underset{\downarrow}{b}''$. Тогда в (3) положим $x_{r+1} = \alpha_{r+1}, \dots, x_n = \alpha_n$ и найдем из (3) $x_1 = \beta_1, \dots x_r = \beta_r$. Тогда $\underset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \\ \alpha_{r+1} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ - решение $A''\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}''$ Тогда

$A''(\underset{\downarrow}{x} - \underset{\downarrow}{\alpha}) = A''\underset{\downarrow}{x} - A''\underset{\downarrow}{\alpha} = \underset{\downarrow}{b}'' - \underset{\downarrow}{b}'' = \underset{\downarrow}{0}$. Тогда: $\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 - 0 - a''_{1r+1} \cdot 0 - \dots - a''_{1n} \cdot 0 = 0 \\ \beta_r - \alpha_r = 0 - a''_{rr+1} \cdot 0 - \dots - a''_{rn} \cdot 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 \\ \dots \\ \beta_r = \alpha_r \end{cases}$,

т. к $\underset{\downarrow}{x} - \underset{\downarrow}{\alpha} = \begin{pmatrix} \beta_1 - \alpha_1 \\ \vdots \\ \beta_r - \alpha_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ то чтобы получить решение $\underset{\downarrow}{\alpha}$ исходной СЛАУ $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$, нужно свободные переменным придать значения $x_{11} = \alpha_{11}, \dots, x_n = \alpha_n$. Таким образом (3) исчерпывает все решения СЛАУ $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ и такой вид решения называется общим решением по методу Гаусса (Г-Ж)

Замечание. Иногда свободным переменным придают значения $C_1, \dots, C_{n-r}$, т.е $x_{r+1} = C_1, \dots, x_n = C_{n-r}$ и в (3) вместо $x_{r+1}, \dots, x_n$ пишут $C_1, \dots, C_{n-r}$

Таким образом, в случаях совместности СЛАУ ее общее решение является $n-r$ параметрическим множеством.

tg: @moksimqa