

Конспект лекций по линейной алгебре

(2й семестр 2024-2025 учебного года)

Лектор:

Иванова Т. М.

Верстка:

Белоусов М.

Оглавление

1	Матрицы	4
1.1	ЛЗ и ЛНЗ строк(столбцов) матриц	4
1.2	Ранг матрицы.	4
1.3	Элементарные преобразования строк и столбцов матрицы.	6
1.4	Вычисление обратной матрицы методом элементарных преобразований.	8
2	Теория систем линейных алгебраических уравнений	11
2.1	Основные определения	11
2.2	Квадратные СЛАУ. Правило Крамера.	12
2.3	Метод Гаусса (Гаусса-Жордана) исследования СЛАУ	13
2.4	Теорема Кронекера-Капелли.	15
2.5	Однородные СЛАУ.	16
2.6	Фундаментальная система решений ОСЛАУ.	17
2.7	Общее решение неоднородной СЛАУ.	19
3	Линейные пространства	21
3.1	Определение и примеры ЛП	21
3.2	Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов	23
3.3	Базис и размерность линейного пространства	24
3.4	Подпространства линейного пространства. Линейная оболочка системы векторов	26
3.5	Координаты вектора в базисе	27
3.6	Изоморфизм линейных пространств	28
3.7	Сумма и пересечение линейных пространств	29
3.8	Матрица перехода.	31
3.9	Линейные формы в ЛП. Сопряженное пространство, его базис и размерность. Преобразование коэффициентов линейной формы при смене базиса.	32
4	Линейные операторы в линейных пространствах	35
4.1	Определение линейного оператора (ЛО). Линейное пространство линейных операторов(ЛПЛО).	35
4.2	Матрица ЛО	37
4.3	Обратный оператор и его свойства	40

4.4	Образ и ядро ЛО	41
4.5	Собственные векторы и собственные значения ЛО	42
4.6	Свойства собственных векторов и собственных значений ЛО.	44
5	Билнейные и квадратичные формы в вещественном ЛП	46
5.1	Билейные формы	46
5.2	Квадратичные формы в вещественном ЛП	47
5.3	Закон инерции КФ	48
5.3.1	Классификация КФ	49
6	Полуторалинейные формы в комплексных ЛП	51
6.1	Определение и общий вид ПФ в комплексном ЛП	51
6.2	Матрица ПФ. Преобразование матрицы ПФ при смене базиса	51
7	Евклидовы и унитарные пространства	53
7.1	Определение и примеры унитарных и евклидовых пространств	53
7.2	Нормированное ЛП	54
7.3	Общий вид СП	55
7.4	ОНБ в $\mathbb{E}(U)$	56

Глава 1

Матрицы

Лекция 1

10.02

1.1 ЛЗ и ЛНЗ строк(столбцов) матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1\downarrow} & \dots & a_{n\downarrow} \end{pmatrix} \quad \vec{a}_i = (a_{i1} \quad \dots \quad a_{in}) \quad a_{j\downarrow} = \begin{pmatrix} a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Определение. Система столбцов $a_{j1} \dots a_{jn}$ называется ЛЗ, если \exists нетривиальная ЛК этих столбцов, дающая

нулевой столбец. $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) : |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n| \neq 0$, причем $\alpha_1 a_{j1} + \dots + \alpha_n a_{jn} = \underset{\downarrow}{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Если

это равенство возможно только при $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, то система столбцов называется ЛНЗ.

Определение. Аналогично определяется ЛЗ и ЛНЗ строк матрицы.

Лемма 1.1. Если система столбцов содержит нулевой столбец, то она ЛЗ.

Лемма 1.2. Если система столбцов содержит ЛЗ подсистему, то она тоже ЛЗ.

Лемма 1.3. Любая подсистема ЛНЗ системы столбцов является ЛНЗ.

Теорема 1.4 (Критерий ЛЗ). Система столбцов ЛЗ \Leftrightarrow один из них является ЛК комбинацией остальных.

Для строк аналогично

1.2 Ранг матрицы.

$A = (a_{ij})_m^n$. $1 \leq k \leq \min(m, n)$. Выберем в матрице A произвольно k строк: i_1, \dots, i_k и k столбцов и рассмотрим матрицу B , располагающуюся на этих строк и в этих столбцах.

Определение. Число $M_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} = \det B$ называется минором k -ого порядка матрицы A . Краткое обозначение

чение $\bigcirc M_k$

Лемма 1.5. Если в матрице A все $\bigcirc M_k = 0$, то все $\bigcirc M_{k+1} = 0$ (если они имеются).

Доказательство. поскольку любой $\bigcirc M_{k+1}$ является ЛК $(k+1)$ минора $\bigcirc M_k$, а все $\bigcirc M_k = 0 \Rightarrow \bigcirc M_{k+1} = 0$. \square

Определение. Рангом ненулевой матрицы $A = (a_{ij})_m^n$ называется такое число $r \in \mathbb{N}$:

$$1) \exists M_r \neq 0 \quad 2) \forall \bigcirc M_{r+1} = 0 \text{ (если они имеются)}$$

Определение. Ранг нулевой матрицы по определению полагают равным нулю.

Обозначение. $RgA, rgA, rangA, rankA$

Пример. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 9 & 9 & 9 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} = M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -4 \quad \exists M_{12} \neq 0 \forall M_3 = 0$, т.к. $\vec{a}_3 = \vec{a}_2 = \vec{a}_1 \Rightarrow$

$$RgA = 2$$

Определение. Пусть $RgA = r$. Любой ненулевой $\bigcirc M_r$ называется базисным, а строки и столбцы, на которых он располагается соответственно называются базисными строками и базисными столбцами.

1. Базисные строки и базисные столбцы матрицы A ЛНЗ.

Теорема 1.6.

2. Любые строки(столбцы) матрицы A являются ЛК базиса.

Доказательство. 1. (от противного) (для столбцов). Пусть базисные столбцы ЛЗ. Тогда один из них является ЛК остальных. Тогда в $\bigcirc M_r$, который располагается в этих столбцах. Один столбец также является ЛК остальных $\Rightarrow \bigcirc M_r = 0$ (по свойству \det) - противоречие \Rightarrow базисные столбцы ЛНЗ.

2. Пусть $M_{\substack{i_1 \dots i_r \\ j_1 \dots j_r}} \neq 0$ Рассмотрим $D = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_r} & \dots & a_{i_1 j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_r j_1} & \dots & a_{i_r j_r} & \dots & a_{i_r j} \\ a_{i j_1} & \dots & a_{i j_r} & \dots & a_{i j} \end{pmatrix}$. Возможны случаи:

$$\text{а) } \begin{cases} i \notin i_1 \dots i_r \\ i \notin j_1 \dots j_r \end{cases} \Rightarrow \det D = \bigcirc M_{r+1} = 0$$

$$\text{б) } \begin{cases} i \in i_1 \dots i_r \\ j \in j_1 \dots j_r \end{cases} \Rightarrow \det D = 0 \text{ (по свойству } \det \text{)}.$$

С другой стороны $\det D =$ (по последней строке) $= c_{j_1} a_{i j_1} + \dots + c_{j_r} a_{i j_r} + \dots + c_j a_{i j} = 0$

c_{j_l} - алгебраическое дополнение j_l элемента последней строки. (не зависит от i) $c_j = M_{\substack{i_1 \dots i_r \\ j_1 \dots j_r}}^{i_1 \dots i_r} \Rightarrow c_{j_1} a_{j_1} +$

$$\dots + c_{j_r} a_{j_r} + \bigcirc M_r a_j = 0 \Rightarrow a_j = -\frac{c_{j_1}}{\bigcirc M_r} a_{j_1} - \dots - \frac{c_{j_r}}{\bigcirc M_r} a_{j_r}, \text{ т.е. } \forall j = 1, n \quad j\text{-тый столбец является ЛК}$$

базисных. Для строк аналогично.

\square

Следствие 1. Квадратная A вырожденная \Leftrightarrow ее строки (столбцы) ЛЗ.

Доказательство. $\Rightarrow A = (a_{ij})_m^n$ - вырожденная, т.е. $\det A = 0 \Rightarrow$ ед. $\bigcirc M_r = \det A = 0 \Rightarrow RgA = r < n \Rightarrow \exists \bigcirc M_r \neq 0$ - базисный минор $\Rightarrow \exists$ строка матрицы A , являющаяся ЛК базисных \Rightarrow строки ЛЗ.

\Leftarrow строки ЛЗ $\Rightarrow \det A = 0$, т.е. A — вырожденная. (Для столбцов аналогично.) \square

Пример. $Rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 9 & 9 & 9 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} = 2$. $M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ 1 и 2 строки ЛНЗ и 1 и 2 столбец ЛНЗ. $M_{12}^{45} =$

$\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 9 & 9 \end{vmatrix} = 0$ отсюда не следует, что 1 и 2 строки ЛЗ. Но 4 и 5 столбцы ЛЗ. Любой минор 2-го порядка на них будет нулевым.

Следствие 2. Если $Rg A = r$, то любые $(r+1)$ строка или $(r+1)$ (если они найдутся) столбец являются ЛЗ.

Доказательство. Пусть имеется $(r+1)$ ЛНЗ столбец $a_{j_1} \dots a_{j_{r+1}}$. Допустим $m \geq r+1$. Тогда $\exists M_{r+1}$ расположенный на этих столбцах: $M_{r+1} \neq 0 \Rightarrow Rg A \geq r+1$ — противоречие.

Пусть $m = r$ и имеется $(r+1)$ ЛНЗ столбец $a_{j_1} \dots a_{j_{r+1}}$. Тогда если среди этих столбцов имеются базисные (т.е. на них $\exists M_r \neq 0$), то оставшийся столбец является их ЛК \Rightarrow система столбцов ЛЗ. Если же на этих столбцах $\forall M_r = 0$, то система r столбцов — ЛЗ. \Rightarrow система $r+1$ столбцов тоже ЛЗ. \square

Теорема 1.7. Ранг матрицы A равен максимальному числу ЛНЗ строк (равен максимальному числу ЛНЗ столбцов)

Доказательство. Самостоятельно. \square

Следствие 1. \max число ЛНЗ строк = \max число ЛНЗ столбцов в любой матрице.

1.3 Элементарные преобразования строк и столбцов матрицы.

К элементарным преобразованиям строк матрицы A относятся следующие операции:

1. Обмен местами двух строк матрицы.
2. Умножение строки на ненулевое число.
3. Прибавление к одной строке другой строки, умноженной на любое число.

Для столбцов аналогично.

Тот факт, что B получена из A элементарными преобразованиями обозначается так: $A \sim B$

Теорема 1.8. Если $A \sim B$, то $B \sim A$

Теорема 1.9. Если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$

Доказательство. Самостоятельно. \square

Теорема 1.10. Если $A \sim B$, то $Rg A = Rg B$

Доказательство. 1,2 не изменяет кол-во ЛНЗ строк (столбцов).

3. БОО можно считать, что B получена из A путем добавления ко 2-ой строке первой строки, умноженной на α .

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vdots \\ \vec{b}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 + \lambda \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{pmatrix} \quad \text{Пусть } RgA = r. \quad \begin{matrix} \textcircled{M} - \text{ минор матрицы } A \\ \textcircled{\tilde{M}} - \text{ минор матрицы } B \end{matrix}$$

Возможны три случая:

1) Если $\textcircled{\tilde{M}_{r+1}}$ не содержит \vec{b}_2 , то $\textcircled{\tilde{M}_{r+1}} = \textcircled{M_{r+1}} = 0$

2) Если $\textcircled{\tilde{M}_{r+1}}$ содержит \vec{b}_2 , но не содержит \vec{b}_1 , тогда $\textcircled{\tilde{M}_{r+1}} = \textcircled{M_{r+1}} + \lambda \textcircled{M_{r+1}} =$

минор A, который
содержит \vec{a}_1 ,
но не содержит \vec{a}_2

минор A, который
содержит \vec{a}_2 ,
но не содержит \vec{a}_1

$$0 + \lambda * 0 = 0$$

3) Если $\textcircled{\tilde{M}_{r+1}}$ содержит \vec{b}_1 и \vec{b}_2 , то $\textcircled{\tilde{M}_{r+1}} = \textcircled{M_{r+1}} + \lambda \textcircled{\det C}$

минор A,
содержащий \vec{a}_1 и \vec{a}_2

имеет две
одинаковые строки

Отсюда $RgB \leq RgA$. Далее поскольку $A \sim B$, то $B \sim A \Rightarrow$ рассуждая аналогично, получим

$$RgA \leq RgB \Rightarrow \begin{cases} RgA \leq RgB \\ RgB \leq RgA \end{cases} \Rightarrow \boxed{RgA = RgB} \quad \square$$

tg: @moksimga

Лекция 2

17.02

Пусть $A = (a_{ij})_m^n \neq \Theta$

Определение. A имеет трапецевидную форму (ТФ), если $\exists r \in \mathbb{N} : 1 \leq r \leq \min(m, n)$, причем

$$\begin{cases} a_{ii} \neq 0, i = \overline{1, r} \\ a_{ij} = 0, i > r \\ a_{ij} = 0, i > j \end{cases}$$

Примеры: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Очевидно, что если A имеет ТФ, то $RgA = r$.

Определение. Если $A = \Theta$, считаем, что она имеет ТФ.

Теорема 1.11. Любую $A = (a_{ij})_m^n$ можно элементарными преобразованиями привести к ТФ.

Доказательство. Если $A = \Theta$, то она уже имеет ТФ. Пусть $A \neq \Theta$. $\exists a_{ij} \neq 0$. Переставим строки i и 1 и

столбцы j и 1, добиваемся, что $A \sim \tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1} & \dots & \tilde{a}_{mn} \end{pmatrix}$, где $\tilde{a}_{11} = a_{ij} \neq 0$.

Далее для $i = \overline{2, m}$ $\tilde{a}_i \sim \tilde{\tilde{a}}_i = \tilde{a}_i - \frac{\tilde{a}_{i1}}{\tilde{a}_{11}} \tilde{a}_1$. В результате этого получим: $\tilde{A} \sim \tilde{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & & \\ \vdots & (A_1) & \\ 0 & & \end{pmatrix}$

Если $A_1 = \Theta$, то $\tilde{\tilde{A}}$ имеет ТФ. Если $A_1 \neq \Theta$, то аналогичные действия производим со строками и столбцами с номерами $\geq 2 \dots$ За конечно число шагов получим ТФ. \square

Отсюда получаем метод элементарных преобразований вычисления ранга матрицы. $A \sim B$ - имеет ТФ. $RgA = RgB = r$

1.4 Вычисление обратной матрицы методом элементарных преобразований.

Пусть $A = (a_{ij})_n^n$.

Теорема 1.12. A приводится к E элементарными преобразованиями только лишь строк $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Доказательство. \Rightarrow Пусть $A \sim E$. Тогда $\det E = 1 \neq 0$, то $\det A \neq 0$ (если предположить, что $\det A = 0$, то из свойств определителя будет следовать, что $\det E = 0$ — противоречие)

\Leftarrow Пусть $\det A \neq 0$, тогда $a_{11} \neq 0$. Тогда $\exists a_{i1} \neq 0$. Путем перестановки 1-ой и i -ой строки получаем

$A \sim B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$ $b_{11} = a_{i1} \neq 0$. Далее делим \vec{b}_1 на $b_{11} \neq 0$. Тогда $B \sim C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$.

Далее для $i = \overline{2, n}$ делаем $\vec{c}_i \sim \vec{d}_i = \vec{c}_i - c_{i1}\vec{c}_1$. Тогда $C \sim D = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & (A_1) & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

$|det A| = |b_{11}| |det C| = |b_{11}| |det D| = |b_{11}| * 1 |det A_1| \Rightarrow det A_1 \neq 0$. Далее аналогичным образом $A_1 \sim B_1 \sim$

$$C_1 \sim D_1 = \begin{pmatrix} 1 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \vdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & (A_2) \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} \quad det A_2 \neq 0. \text{ За конечное число шагов (n) приходим к } A \sim D_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Мы осуществили прямой ход алгоритма Гауссова исключения (обнулили элементы ниже главной диагонали.) Сделаем обратный ход симметричным образом (обнуляем элементы выше главной диагонали).

$$D_n = \begin{pmatrix} 1 & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \ddots & d_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Для строк } i = \overline{n-1, 1} \quad \vec{d}_i \sim \vec{f}_i = \vec{d}_i - \vec{d}_n d_{in}. \text{ Тогда } D_n \sim F_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

За конечное (n-1) число шагов приходим к $F_n \sim F_{n-1} \dots \sim F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ □

Рассмотрим $B_{pq} = (b_{ij})_m^n : b_{ij} = \delta_{ip}\delta_{jq} \quad \forall i, j = \overline{1, n}$

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{единственный отличный}$$

от нуля элемент находится в p -ой строке и q -том столбце)

Пусть $A = (a_{ij})_n^n$, $C = B_{pq}A = (c_{ij})_n^n$. Тогда $c_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^n \delta_{ip}\delta_{kq}a_{kj} = \delta_{ip}a_{qj}$.

$$\vec{c}_i = \vec{0}, \text{ если } i \neq p.$$

Отсюда:

$$i = p \Rightarrow c_{pj} = a_{qj} \quad \forall j = \overline{1, n}, \text{ т.е. } \vec{c}_p = \vec{a}_q$$

Т.е. $B_{pq}A = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \\ \vdots \\ \vec{a}_q \\ \vdots \\ \vec{0} \end{pmatrix}$ (\vec{a}_q находится на p -ой строке) Как поменять местами строки k и l ?

$$(E - B_{kk} - B_{ll} + B_{ik} + B_{kl})A = \underbrace{EA}_A - \underbrace{B_{kk}A}_{\text{вычитает } k\text{-ую строку из } k\text{-ой строки}} - B_{ll}A + B_{lk}A + \underbrace{B_{kl}A}_{\text{прибавляет } k\text{-ую строку к } l\text{-ой строке}} \quad \text{Т.е. перестановка двух}$$

строк k и l матрицы A осуществляется умножением ее слева на $\boxed{P = E - B_{kk} - B_{ll} + B_{lk} + B_{kl}}$.

Умножение k -ой строки на число λ реализуется матрицей $\boxed{P = E - B_{kk} + \lambda B_{kk} = E + (\lambda - 1)B_{kk}}$

Добавление k -ой строки l -ой строки, умноженной на λ , осуществляется матрицей $\boxed{P = E + \lambda B_{kl}}$

Теорема 1.13. Пусть матрица A некоторыми преобразованиями только лишь строк приводится к E .

Тогда E этими же преобразованиями приводится к A^{-1}

Доказательство. Пусть $P_1 \dots P_k$ - матрицы элементарных преобразований строк, которыми A приводится к E , т.е. $P_k(\dots P_2(P_1 A)) = E$.

По свойству ассоциативности матричного умножения, получим $(P_k \dots P_2 P_1)A = E \quad (*)$.

$A \sim E \Rightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$. Домножим обе части $(*)$ справа на A^{-1} .

$$((P_k \dots P_2 P_1)A)A^{-1} = EA^{-1} = A^{-1} \Rightarrow (P_k \dots P_2 P_1)(AA^{-1}) = A^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (P_k \dots P_2 P_1)E = A^{-1} \Rightarrow P_k(\dots P_2(P_1 E)) = A^{-1}.$$

□

Примеры реализации: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Запишем $(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \underset{\text{строк}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -8 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -\frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{Краткая запись } (A|E) \underset{\text{строк}}{\sim} (E|A^{-1})$$

Следствие 1. $A = (a_{ij})_n^n$, $\det A \neq 0$, $B = (b_{ij})_n^n$. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, тогда:

$$(A|B) \underset{\text{строк}}{\sim} (E|A^{-1}B)$$

$$(A|x) \underset{\text{строк}}{\sim} (E|A^{-1}x)$$

Доказательство. Самостоятельно доказать с помощью матриц P .

□

tg: @moksimga

Глава 2

Теория систем линейных алгебраических уравнений

Лекция 3

24.02

2.1 Основные определения

Пусть $A = (a_{ij})_m^n$, $a_{ij} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ \downarrow $b = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vdots \\ \vec{b}_m \end{pmatrix}$ – заданы, $x = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vdots \\ \vec{x}_n \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных.

Рассмотрим $Ax = b$ (1). Или в координатной форме $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ (1̃)

(1), (1̃) – СЛАУ. (1) – векторная форма записи. (1̃) – координатная форма записи.

Определение. Частным решением СЛАУ (1) называют $\alpha = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n \end{pmatrix}$ $A\alpha = b$ – верное векторное равенство (или это упорядоченный набор чисел $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$: при подстановке в (1̃) вместо набора (x_1, \dots, x_n) получается верное равенство)

Определение. Совокупность всех частных решений называется общим решением СЛАУ.

Определение. СЛАУ называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение. В противном случае

СЛАУ несовместна (решений нет).

$$A' = (a_{ij})_{m'}^{n'}, \quad b' = \begin{pmatrix} \vec{b}'_1 \\ \vdots \\ \vec{b}'_{m'} \end{pmatrix}$$

Определение. СЛАУ $Ax = b$ и $A'x = b'$ называются равносильными (эквивалентными), если $\boxed{n'=n}$ и общие решения совпадают. При этом $(n' = n)$ несовместные СЛАУ также эквивалентны.

Замечание. m' не обязательно совпадает с m

2.2 Квадратные СЛАУ. Правило Крамера.

Пусть $\boxed{m=n}$, т.е. $A = (a_{ij})_n^n$ - квадратная матрица. $\downarrow b = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vdots \\ \vec{b}_n \end{pmatrix}$ $\downarrow x = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vdots \\ \vec{x}_n \end{pmatrix}$

Теорема 2.1 (Теорема Крамера). Если $\Delta = \det A \neq 0$, то СЛАУ $\downarrow Ax = \downarrow b$ (1) имеет единственное решение, причем его можно найти по правилу Крамера: $\boxed{x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}}$, $k = \overline{1, n}$, где $\Delta_k = \det A_k$, A_k получена

из $A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$ заменой $\downarrow a_k$ и $\downarrow b$

Доказательство. $\Delta = \det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$. Тогда $\downarrow A^{-1}(Ax) = \downarrow A^{-1}b \Rightarrow \underbrace{(A^{-1}A)}_E \downarrow x = \downarrow A^{-1}b \Rightarrow \downarrow x = \downarrow A^{-1}b$.

Проверим, что $\downarrow x = \downarrow A^{-1}b$ является решением (1). $\downarrow A(\downarrow A^{-1}b) = \downarrow (AA^{-1})b = \downarrow Eb = \downarrow b$ - верно. Проверим единственность. Пусть $\downarrow A\alpha' = \downarrow b$ и $\downarrow A\alpha'' = \downarrow b$. Тогда $\downarrow A(\alpha' - \alpha'') = \downarrow A\alpha' - \downarrow A\alpha'' = \downarrow b - \downarrow b = \downarrow 0$. Тогда $\downarrow \alpha' - \downarrow \alpha'' = \downarrow A^{-1}0 = \downarrow 0$, т.е. $\downarrow \alpha' = \downarrow \alpha''$, т.е. решение одно.

$$\text{Имеем } \downarrow x = \downarrow A^{-1}b = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vdots \\ \vec{b}_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n A_{k1}b_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n A_{kn}b_k \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \vdots \\ \frac{\Delta_n}{\Delta} \end{pmatrix}$$

$$\text{Для } k=1 \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \underset{\text{по 1-му столбцу}}{=} b_1 A_{11} + \dots + b_n A_{n1}$$

Остальные Δ_k аналогично (самостоятельно) □

Следствие 1. Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из $\Delta_k \neq 0$, то квадратная СЛАУ $\downarrow Ax = \downarrow b$ несовместна.

$$\text{Доказательство. Рассмотрим } \downarrow A^T(Ax) = \downarrow (A^T A)x = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \downarrow x \stackrel{1 \text{ сем}}{=} \begin{pmatrix} \Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \Delta \end{pmatrix}$$

$$= \Delta \cdot \downarrow Ex = \begin{pmatrix} \Delta \cdot x_1 \\ \vdots \\ \Delta \cdot x_n \end{pmatrix}. \text{ С другой стороны } \downarrow A^T b = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix}, \text{ т.е. } \begin{cases} \Delta x_1 = \Delta_1, \\ \dots \\ \Delta x_n = \Delta_n \end{cases}, \text{ но } \Delta = 0. \text{ Если хотя бы один}$$

из $\Delta_k \neq 0$, то $x_k \cdot 0 = \Delta_k \neq 0$, что невозможно. □

2.3 Метод Гаусса (Гаусса-Жордана) исследования СЛАУ

Рассмотрим прямоугольную СЛАУ $Ax = b$, $A = (a_{ij})_m^n$ - основная матрица системы. b - столбец

правых частей. $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$ - расширенная матрица СЛАУ

Определение. Элементарными операциями с СЛАУ называются следующие операции:

1. перестановка местами уравнений системы.
2. умножение обеих частей на число, отличное от нуля.
3. прибавление к одному уравнению СЛАУ другого ее уравнения

Теорема 2.2. Элементарные операция СЛАУ приводят к эквивалентной ей СЛАУ.

Доказательство. Самостоятельно. □

Обозначение. Пусть $Ax = b$ приводятся элементарными операциями к $A'x = b'$, то что эти СЛАУ эквивалентны (равносильны) обозначается $Ax \Leftrightarrow A'x = b'$ либо $Ax = b \sim A'x = b'$.

Легко заметить, что элементарные операции с СЛАУ взаимно однозначно можно сопоставить элементарные операции со строками расширенной матрицы СЛАУ.

Идея метода Гаусса-Жордана. $(A|b) \sim \underbrace{(A'|b')}_{\text{ТФ}}$. Прямой ход $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \sim \text{эл. преобр. только строк} \sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} a'_{11} & \dots & a'_{1r} & \dots & a'_{1n} & b_1 \\ 0 & \ddots & \dots & \dots & a'_{1n} & \vdots \\ 0 & \dots & a'_{rr} & \dots & a'_{rn} & b_r \\ \hline \text{НУЛИ} & & & & & b_{r+1} \\ \hline \text{НУЛИ} & & & & & 0 \end{array} \right) \quad (2)$$

Замечание. Мы считаем, что переменные СЛАУ занумерованы таким образом, что не требуется при приведении к ТФ переставлять столбцы. Столбцы A можно переставлять, b закреплён.

Рассмотрим расширенную матрицу (2) $\left(\begin{array}{ccccc|c} a'_{11} & \dots & a'_{1r} & \dots & a'_{1n} & b_1 \\ 0 & \ddots & \dots & \dots & a'_{1n} & \vdots \\ 0 & \dots & a'_{rr} & \dots & a'_{rn} & b_r \\ \hline \text{НУЛИ} & & & & & b_{r+1} \\ \hline \text{НУЛИ} & & & & & 0 \end{array} \right)$ Тогда в эквивалентной СЛАУ

будет уравнение $0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = b_{r+1}$. Если $b_{r+1} \neq 0$, то эквивалентная СЛАУ несовместна \Rightarrow исходная СЛАУ несовместна. Если же $b_{r+1} = 0$, то $(A'|b')$ имеет ТФ и ее $Rg(A'|b') = Rg(A') = r$. Тогда обратным

ходом приводим расширенную матрицу к виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & \dots & 0 & a''_{1r+1} & \dots & a''_{1n} & b''_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a''_{rr+1} & \dots & a''_{rn} & b''_r \\ \hline \text{НУЛИ} & & & & & & b''_{r+1} \\ \hline \text{НУЛИ} & & & & & & 0 \end{array} \right)$$

Т.е фактически: $Ax = b \sim A'x = b' \sim A''x = b''$ в коорд. форме:
$$\begin{cases} x_1 + a''_{1r+1}x_{r+1} + \dots + a''_{1n}x_n = b''_1 \\ \dots \\ x_r + a''_{rr+1}x_{r+1} + \dots + a''_{rn}x_n = b''_r \end{cases}$$

Тогда переменные x_1, \dots, x_r назовем главными, а x_{r+1}, \dots, x_n - свободными. Перенесем свободные в правую часть:

$$\begin{cases} x_1 = b''_1 - a''_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a''_{1n}x_n \\ \dots \\ x_r = b''_r - a''_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a''_{rn}x_n \end{cases} \quad \text{Видим, что при особых значениях свободных переменных}$$

x_{r+1}, \dots, x_n можно отыскивать значения главных x_1, \dots, x_r и таким образом получить различные решения

СЛАУ $A''x = b''$, т.е. решения $Ax = b$ (т.к. они эквивалентны)

Покажем, что
$$\begin{cases} x_1 = b''_1 - a''_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a''_{1n}x_n \\ \dots \\ x_r = b''_r - a''_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a''_{rn}x_n \\ x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3) \text{ исчерпывает всевозможные решения } A''x = b$$

(а значит и исходной СЛАУ $Ax = b$)

Пусть $\exists \alpha = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n \end{pmatrix}$ - решение $Ax = b$. Поскольку $Ax = b \sim A''x = b''$, то $A''\alpha = b''$. Тогда в (3) положим

$$x_{r+1} = \alpha_{r+1}, \dots, x_n = \alpha_n \text{ и найдем из (3) } x_1 = \beta_1, \dots, x_r = \beta_r. \text{ Тогда } x = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \\ \alpha_{r+1} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ - решение } A''x = b'' \text{ Тогда}$$

$$A''(x - \alpha) = A''x - A''\alpha = b'' - b'' = 0. \text{ Тогда: } \begin{cases} \beta_1 - \alpha_1 = 0 - a''_{1r+1} \cdot 0 - \dots - a''_{1n} \cdot 0 = 0 \\ \beta_r - \alpha_r = 0 - a''_{rr+1} \cdot 0 - \dots - a''_{rn} \cdot 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 \\ \dots \\ \beta_r = \alpha_r \end{cases},$$

т. к. $x - \alpha = \begin{pmatrix} \beta_1 - \alpha_1 \\ \vdots \\ \beta_r - \alpha_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ то чтобы получить решение α исходной СЛАУ $Ax = b$, нужно свободным переменным

придать значения $x_{r+1} = \alpha_{r+1}, \dots, x_n = \alpha_n$. Таким образом (3) исчерпывает все решения СЛАУ $Ax = b$

и такой вид решения называется общим решением по методу Гаусса (Г-Ж)
$$\boxed{x_{\downarrow \text{общ}} = x_{\downarrow}(C_1, \dots, C_{n-r})}$$

Замечание. Иногда свободным переменным придают значения C_1, \dots, C_{n-r} , т.е. $x_{r+1} = C_1, \dots, x_n = C_{n-r}$

и в (3) вместо x_{r+1}, \dots, x_n пишут C_1, \dots, C_{n-r}

Таким образом, в случаях совместности СЛАУ ее общее решение является $n - r$ параметрическим множеством.

tg: @moksimga

Лекция 4

3.03

Пример
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$RgA = 2, n = 4$$

Общее решение в координатной форме:
$$\begin{cases} x_1 = 2 - C_1 \\ x_3 = 2 - C_2 \\ x_2 = C_1 \\ x_4 = C_2 \end{cases}$$

Исходная СЛАУ $\sim \begin{cases} x_1 = 2 - x_2 \\ x_3 = 2 - x_4 \end{cases}$

В векторной форме:
$$x = \begin{pmatrix} 2 - C_1 \\ C_1 \\ 2 - C_2 \\ C_2 \end{pmatrix} \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

2.4 Теорема Кронекера-Капелли.

Теорема 2.3 (Критерий совместности СЛАУ). СЛАУ (1) $Ax = b$ совместна $\Leftrightarrow RgA = Rg(A|b)$
 $(Rg(a_1, \dots, a_n) = Rg(a_1, \dots, a_n|b))$

Доказательство. СЛАУ (1) можно записать в виде эквивалентной форме: (2) $x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = b$

\Rightarrow Пусть СЛАУ (1) совместна $\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_n$: выполнено (2) $\Rightarrow b$ является ЛК $a_1, \dots, a_n \Rightarrow b$ линейно зависит от $a_1, \dots, a_n \Rightarrow$ число ЛНЗ столбцов в системах $\{a_1, \dots, a_n\}$ и $\{a_1, \dots, a_n|b\}$ одинаковое $\Rightarrow RgA = Rg(A|b)$

$\Leftarrow RgA = Rg(A|b) = r \Rightarrow$ в области матрицы $A \exists (M_r) \neq 0$, его столбцы ЛНЗ и любые столбцы матрицы A являются ЛК столбцов, входящих в этот базисный минор $\Rightarrow b = \alpha_1 a_{i1} + \dots + \alpha_r a_{ir} \Rightarrow$ (2) имеет решение \Rightarrow (1) совместна. \square

2.5 Однородные СЛАУ.

Определение. СЛАУ $Ax = b$ называется однородной, если $b = 0$, т.е. $Ax = 0$ (1_0) - ОСЛАУ

Замечание. ОСЛАУ всегда совместна. Ее решение $x = 0$ называется тривиальным. Прочие решения, если они имеются, называются нетривиальными.

Теорема 2.4 (О ЛК решений ОСЛАУ). Если $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ - любые решение ОСЛАУ, то $\forall C_1, \dots, C_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \Rightarrow C_1 x^{(1)} + \dots + C_k x^{(k)} = \alpha$ - тоже решение этой ОСЛАУ.

Доказательство. $A\alpha = A(C_1 x^{(1)} + \dots + C_k x^{(k)}) = C_1 A x^{(1)} + \dots + C_k A x^{(k)} = C_1 \cdot 0 + \dots + C_k \cdot 0 = 0$ \square

Следствие 1. Если ОСЛАУ имеет хотя бы одно нетривиальное решение, то их будет бесконечно много.

1) Если $RgA = r = n$ (число неизвестных), то ОСЛАУ обладает только тривиальным решением.

Теорема 2.5.

2) Если $RgA = r < n$, то ОСЛАУ имеет нетривиальные решения.

Доказательство. ② $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) (1_0) \sim \text{эл. преобр. только строк} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} a'_{11} & \dots & a'_{1r} & \dots & a'_{1n} & 0 \\ 0 & \ddots & \dots & \dots & a'_{1n} & \vdots \\ 0 & \dots & a'_{rr} & \dots & a'_{rn} & 0 \\ \hline & & \text{НУЛИ} & & & 0 \\ \hline & & \text{НУЛИ} & & & 0 \end{array} \right) (2_0)$

$$x_1, \dots, x_r - \text{главные}, x_{r+1}, \dots, x_n - \text{свободные} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -a''_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a''_{1n}x_n \\ \dots \\ x_r = -a''_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a''_{rn}x_n \\ x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Методом Г-Ж (1_0) приводится к (2_0), причем $n - r > 0 \Rightarrow$ свободные переменные имеются.

Положим $x_{r+1} = x_{n-1} = 0, x_n = 1$. Тогда получим $\alpha = \begin{pmatrix} -a''_{1n} \\ \vdots \\ -a''_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ - нетривиальное решение.

② Если $r = n$, то в (2_0) не будет свободных переменных: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right)$, т.е. $(1_0) \sim (3_0) \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{array} \right.$

т.е. имеется только тривиальное решение.

\square

2.6 Фундаментальная система решений ОСЛАУ.

Рассмотрим ОСЛАУ. $(1_0) \begin{matrix} Ax = 0 \\ \downarrow \end{matrix}$

Определение. Упорядоченная, ЛНЗ система этой ОСЛАУ $(1_0) \begin{matrix} \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)} \\ \downarrow \end{matrix}$ называется фундаментальной системой решений (ФСР), если для любого решения ОСЛАУ $(1_0) \Rightarrow \exists C_1, \dots, C_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) : \alpha = \begin{matrix} \downarrow \\ = C_1 \varphi^{(1)} + \dots + C_k \varphi^{(k)} \\ \downarrow \end{matrix}$

Теорема 2.6 (О нормальной системе решений (НСР)). Если $RgA = r < n$, то ОСЛАУ (1_0) имеет $(n-r)$ ЛНЗ решений, через которые выражаются любое решения.

Доказательство. Пусть $RgA = r < n$ (число неизвестных). Тогда $(1_0) \sim (2_0)$ с $(n-r)$ свободных пере-

$$x_{r+1} = 1, x_{r+2} = 0, \dots, x_n = 0$$

$$x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 1, \dots, x_n = 0$$

менных, которым придадим следующие наборы значений:

...

$$x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 0, \dots, x_n = 1$$

По этим наборам найдем значения главных переменных, получим $(n-r)$ решений:

$$\begin{matrix} \varphi^{(1)} = \\ \downarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} -a''_{1r+1} \\ \vdots \\ -a''_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \varphi^{(2)} = \\ \downarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} -a''_{1r+2} \\ \vdots \\ -a''_{rr+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \begin{matrix} \varphi^{(n-r)} = \\ \downarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} -a''_{1n} \\ \vdots \\ -a''_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Рассмотрим } \Phi = \begin{pmatrix} \varphi^{(1)} & \dots & \varphi^{(n-r)} \end{pmatrix} = \begin{matrix} \downarrow & & \downarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} -a''_{1r+1} & -a''_{1r+2} & \dots & -a''_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a''_{rr+1} & -a''_{rr+2} & \dots & -a''_{rn} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

В нижней части Φ имеется $\bigcirc M_{n-r} = \det E = 1 \neq 0$, у Φ $(n-r)$ столбцов $\Rightarrow Rg\Phi = n-r \Rightarrow$ ее столбцы ЛНЗ $\Rightarrow \begin{matrix} \varphi^{(1)} \\ \downarrow \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} \varphi^{(n-r)} \\ \downarrow \end{matrix}$ - ЛНЗ система решений □

Определение. Построенная таким образом система решений называется нормальной (НСР)

Покажем теперь, что $\forall \alpha_{\downarrow}$ – решение (1_0) можно представить в виде ЛК $\varphi_{\downarrow}^{(1)}, \dots, \varphi_{\downarrow}^{(n-r)}$. Пусть

$$\alpha_{\downarrow} = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n \end{pmatrix} - \text{любое решение } (1_0). \text{ Рассмотрим } y_{\downarrow} = \alpha_{\downarrow} - \alpha_{r+1\downarrow} \varphi_{\downarrow}^{(1)} + \dots + \alpha_n \varphi_{\downarrow}^{(n-r)} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Поскольку y_{\downarrow} является ЛК решений ОСЛАУ (1_0) , то y_{\downarrow} тоже является решением $(1_0) \Rightarrow$ его компоненты удовлетворяют (2_0) . Откуда, учитывая, что все свободные переменные равны 0, получим (см. (2_0))

$$\begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \vdots \\ \beta_r = 0 \end{cases}, \text{ т.е. } y_{\downarrow} = 0 \Rightarrow \alpha_{\downarrow} = \alpha_{r+1\downarrow} \varphi_{\downarrow}^{(1)} + \dots + \alpha_n \varphi_{\downarrow}^{(n-r)}. \text{ Заметим, что отсюда следует, что б\oльшего, чем}$$

$(n-r)$ количества ЛНЗ решений быть не может.

Теорема 2.7 (О ФСР). *Если $RgA = r = n$, то ФСР ОСЛАУ не существует, если $RgA = r < n$, то*

1) \exists ФСР ОСЛАУ (1_0)

2) Любая ФСР ОСЛАУ (1_0) содержит ровно $(n-r)$ элементов

3) Любые $(n-r)$ ЛНЗ решений ОСЛАУ (1_0) образуют ее ФСР

4) Если $\varphi_{\downarrow}^{(1)}, \dots, \varphi_{\downarrow}^{(n-r)}$ – некоторая ФСР ОСЛАУ (1_0) , то ее общее решение имеет вид:

$$x_{oo\downarrow} = C_1 \varphi_{\downarrow}^{(1)} + \dots + C_{n-r} \varphi_{\downarrow}^{(n-r)}, \text{ где } C_1, \dots, C_{n-r} - \text{произвольные числа } \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

Доказательство. $RgA = r = n \Rightarrow$ имеется только тривиальное решение (оно всегда ЛЗ) \Rightarrow нет ФСР.

$RgA = r < n \Rightarrow$

1) Уже доказано, т.к \exists НСР, она является частным случаем ФСР.

2) Будет доказано позже.

3) Будет доказано позже.

4) \Leftrightarrow Поскольку $\varphi_{\downarrow}^{(1)}, \dots, \varphi_{\downarrow}^{(n)}$ – решение ОСЛАУ, то любая их ЛК также является решением (см. выше).

\Rightarrow Пусть y_{\downarrow} – произвольное решение ОСЛУ. По определению ФСР $\exists \tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_n : y_{\downarrow} = \tilde{C}_1 \varphi_{\downarrow}^{(1)} + \dots + \tilde{C}_{n-r} \varphi_{\downarrow}^{(n-r)}$

□

tg: @moksimga

Лекция 5

10.03

Пример: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right) \sim$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad RgA = 2 = r, n = 4.$$

$$\begin{array}{c|c|c} x_1 & -1 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & -1 \\ x_4 & 0 & 1 \end{array} \quad \Phi\text{СР: } \varphi^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \varphi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_{\text{оо}} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

2.7 Общее решение неоднородной СЛАУ.

(1) $Ax = b$ называется неоднородной (НСЛАУ), если $b \neq 0$. НСЛАУ (1) отвечает ОСЛАУ $(1_0) Ax = 0$

Теорема 2.8. Пусть $RgA = r = Rg(A|b)$ (т.е. НСЛАУ совместна), тогда:

1. Если $r = n$, то $\exists!$ решение (1)

2. Если $r < n$, то $x_{\text{он}} = x_{\text{оо}} + x_{\text{чн}}$

Доказательство. 1. $RgA = r = n$ (число неизвестных), то элементарными преобразованиями строк $(A|b) \sim$

$$(A'|b') : \begin{cases} a'_{11}x_1 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \dots \\ a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases} \quad (A'|b') = \left(\begin{array}{ccc|c} a'_{11} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a'_{nn} & b'_n \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{Тогда } \det A' \neq 0 \Rightarrow \exists! \text{ решение.}$$

2. Пусть $r < n$. Тогда $\Leftrightarrow Ax_{\text{он}} = A(x_{\text{оо}} + x) = Ax_{\text{оо}} + Ax_{\text{чн}} = 0 + b \Rightarrow x_{\text{он}}$ решение (1).

\Leftrightarrow Пусть y - произвольное решение. Тогда $A(y - x_{\text{чн}}) = Ay - Ax_{\text{чн}} = b - b = 0 \Rightarrow \exists \tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_{n-r} :$
 $y - x_{\text{чн}} = \tilde{C}_1 \varphi^{(1)} + \dots + \tilde{C}_{n-r} \varphi^{(n-r)}, \quad \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n-r)}$ - произвольная ФСР ОСЛАУ $(1_0) \Rightarrow y = \tilde{C}_1 \varphi^{(1)} + \dots + \tilde{C}_{n-r} \varphi^{(n-r)} + x_{\text{чн}}$, т.е. $\forall y$ - частного решения, такие числа найдутся. Таким образом, $C_1 \varphi^{(1)} + \dots + C_{n-r} \varphi^{(n-r)} + x_{\text{чн}}$ исчерпывают все решения. $x_{\text{он}} = C_1 \varphi^{(1)} + \dots + C_{n-r} \varphi^{(n-r)} + x_{\text{чн}} = x_{\text{оо}} + x_{\text{чн}}$

□

Пример: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad x_{\text{оо}} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$x_{\text{чн}}$ найдется при любых частных значениях свободных переменных, например $x_2 = x_4 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_{\text{чн}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = 2 - x_2 \\ x_3 = 2 - x_4 \end{cases}$$

А если $x_2 = x_4 = 1 \Rightarrow x_{\text{чн}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ любое из них можно брать.

$$x_{\text{он}} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_{\text{он}} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Глава 3

Линейные пространства

Непустое множество k элементов называется полем, если в нем определены две операции "+" и "." (не выводящие из k) и выполнены следующие свойства:

1. $\forall a, b \in k \Rightarrow a + b = b + a$ (коммутативность)
2. $\forall a, b, c \in k \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность)
3. $\exists \theta \in k : \forall a \Rightarrow a + \theta = a$ (нейтральный элемент)
4. $\forall a \in k \exists a' \in k : a + a' = \theta$ (противоположный элемент)
5. $\forall a, b \in k \Rightarrow a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность)
6. $\forall a, b, c \in k \Rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативность)
7. $\exists e \in k : \forall a \in k \Rightarrow a \cdot e = a$ (нейтральный элемент)
8. $\forall a \in k : a \neq \theta \Rightarrow \exists \tilde{a} : a \cdot \tilde{a} = e$ (обратный элемент)
9. $\forall a, b, c \in k \Rightarrow (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (дистрибутивность)

Примеры: $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$ - поля, $\{1, 0, -1\}$ - поле. \mathbb{Z} - не поле.

3.1 Определение и примеры ЛП

Пусть \mathbb{V} - множество элементов произвольной природы, для которых определены операции сложения и умножения на элементы из поля k , не выводящие из \mathbb{V} , т.е.

$$\forall a, b \in \mathbb{V} \Rightarrow a + b \in \mathbb{V}$$

$$\forall a \in \mathbb{V} \forall \alpha \in k \Rightarrow \alpha \cdot a \in \mathbb{V}$$

Определение. \mathbb{V} называется линейным пространством (ЛП) над полем k (\mathbb{R} или \mathbb{C}), если выполнены следующие свойства (аксиомы) линейного пространства:

1. $\forall a, b \in \mathbb{V} \Rightarrow a + b = b + a$
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{V} \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$
3. $\exists \theta \in \mathbb{V} : \forall a \in \mathbb{V} \Rightarrow a + \theta = a$
4. $\forall a \in \mathbb{V} \exists a' \in \mathbb{V} : a + a' = \theta$

θ называется нейтральным элементом, a' называется элементом, противоположным к a

5. $\forall a, b \in \mathbb{V} \forall \alpha \in k \Rightarrow \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$
6. $\forall a \in \mathbb{V} \forall \alpha, \beta \in k \Rightarrow (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
7. $\forall a \in \mathbb{V} \forall \alpha, \beta \in k \Rightarrow \alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$

8. $\forall a \in \mathbb{V} \Rightarrow 1 \cdot a = a$

Если $k = \mathbb{R}$, то \mathbb{V} - вещественное ЛП (ВЛП), если $k = \mathbb{C}$, то \mathbb{V} - комплексное ЛП (КЛП)

Далее элементы \mathbb{V} будем называть векторами и обозначать (чаще всего) латинскими буквами без стрелок, а элементы поля k - скалярами и обозначать (чаще всего) греческими буквами.

Примеры: 1. ЛПВ, ЛПВпл, ЛПВпр

2. Множество всевозможных столбцов или строк фиксированной высоты (длины) с обычными операциями

сложения и умножения на числа. $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}, \quad x + y \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \xi_1 + \eta_1 \\ \vdots \\ \xi_n + \eta_n \end{pmatrix}, \quad \alpha x \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \alpha \xi_1 \\ \vdots \\ \alpha \xi_n \end{pmatrix}$

1, 2, 5-8 - очевидно

$\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad x' = \begin{pmatrix} -\xi_1 \\ \vdots \\ -\xi_n \end{pmatrix}$ Для строк $\vec{x} = (\xi_1 \quad \dots \quad \xi_n), \vec{y} = (\eta_1 \quad \dots \quad \eta_n)$ аналогично

3. P_n - совокупность всевозможных многочленов степени $\leq n$. $P_n = \{\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n, \alpha_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), i = \overline{1, n}\}$

$\theta = x(t) \equiv 0 \quad x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n, \quad x'(t) = -\alpha_0 - \dots - \alpha_n t^n$

4. $\mathfrak{M}_{m \times n}$ - всевозможные прямоугольные матрицы $(m \times n)$. $\theta = \Theta = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

$A = (a_{ij})_m^n, \quad A' = (-a_{ij})_m^n$

Остальное - самостоятельно.

5. Всевозможные решения ОСЛАУ $x_{oo} = \{x_{oo}\}, \quad \theta = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{то } x' = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$

6. $C[a, b] \quad (f+g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha f(x)$

$\theta = (f(x) \equiv 0) \quad \tilde{f}(x) = -f(x)$

7. Декартово произведение ЛП. Пусть \mathbb{V}, \mathbb{W} - ЛП. Тогда $\mathbb{V} \times \mathbb{W} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) : x \in \mathbb{V}, y \in \mathbb{W}\}$ - совокупность всевозможных пар элементов.

Сумма: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \text{умножение на скаляр: } \alpha(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha x, \alpha y). \quad \theta = (0, 0).$

Свойства (θ и a')

1. θ - единственный.

2. a' - единственный. ($\forall a \in \mathbb{V}$)

3. $\forall a \in \mathbb{V} \Rightarrow a \cdot \theta = \theta$

4. $\forall \alpha \in k \Rightarrow \alpha \cdot \theta = \theta$

5. $\forall a \in \mathbb{V} \Rightarrow a' = -1 \cdot a$

Лекция 6

- Доказательство.* 1. Пусть $\exists \theta_1$ и θ_2 - нейтральные элементы \mathbb{V} . Тогда $\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_2$.
2. Пусть у некоторого $a \in \mathbb{V}$ имеются противоположные элементы a' и a'' . Тогда $a' = a' + \theta = a' + (a + a'') = (a' + a) + a'' = \theta + a'' = a'' + \theta = a''$.
3. $0 \cdot a = 0 \cdot a + \theta = 0 \cdot a + (a + a') = (0 \cdot a + a) + a' = (0 \cdot a + 1 \cdot a) + a' = (0 + 1) \cdot a + a' = 1 \cdot a + a' = a + a' = \theta$.
4. $\lambda \cdot \theta = \lambda \cdot \theta + \theta = \lambda \cdot \theta + (\lambda \theta + (\lambda \theta)') = (\lambda \theta + \lambda \theta) + (\lambda \theta)' = \lambda(\theta + \theta) + (\lambda \theta)' = \lambda \theta + (\lambda \theta)' = \theta$
5. $(-1) \cdot a = (-1) \cdot a + \theta = (-1) \cdot a + (a + a') = ((-1) \cdot a + a) + a' = ((-1) \cdot a + 1 \cdot a) + a' = ((-1 + 1) \cdot a) + a' = 0 \cdot a + a' = \theta + a' = a' + \theta = a'$.

□

3.2 Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов

Понятия ЛЗ и ЛНЗ для уже вводили неоднократно. Напомним следующие определения и утверждения: Пусть \mathbb{V} - ЛП над k .

Определение. Упорядоченная совокупность не обязательно различных элементов из \mathbb{V} называется системой элементов (векторов). Любые подмножества системы элементов называются подсистемами элементов (векторов). Обозначение: $\{x_1, \dots, x_m\} = \{x_i\}_{i=1}^m = X \subset \mathbb{V}$.

Определение. Система X называется линейно зависимой (ЛЗ), если \exists нетривиальный набор $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in k : (1) \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = \theta$. Если же (1) выполняется только при $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = \theta$, то система X называется линейно независимой (ЛНЗ).

Теорема 3.1. Если $\theta \in X$, то X - ЛЗ.

Доказательство. Самостоятельно.

□

Теорема 3.2. Если X содержит ЛЗ подсистему, то X - ЛЗ.

Доказательство. Самостоятельно.

□

Теорема 3.3. Любая подсистема линейно независимой системы является линейно независимой.

Доказательство. Самостоятельно.

□

Теорема 3.4 (Критерий ЛЗ). X - ЛЗ \Leftrightarrow один из ее элементов является линейной комбинацией остальных.

Доказательство. Самостоятельно.

□

Примеры:

1. \mathbb{R}^n

Рассмотрим, например, строки длины n . $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ - ЛНЗ.

Доказательство. $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \theta \Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

□

2. $P_n : e_0 = 1, e_1 = t, \dots, e_n = t^n$ - ЛНЗ.

Доказательство. $\lambda_0 e_0 + \dots + \lambda_n e_n = \lambda_0 + \lambda_1 t + \dots + \lambda_n t^n = \theta \Leftrightarrow \lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$ (иначе бы многочлен степени n обращался бы в ноль более, чем в n точках, это невозможно) \square

3. $\mathfrak{M}_{m \times n}$

Рассмотрим набор матриц $B_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Единственный ненулевой элемент находится на пересечении i -ой строки и j -ого столбца.

Доказательство. Доказать, что система матриц $\{B_{ij}\}_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$ - ЛНЗ. \square

4. ФСР ОСЛАУ. Элементы ФСР линейной независимы по определению.

3.3 Базис и размерность линейного пространства

Рассмотрим \mathbb{V} - ЛП над k .

Определение. Если в ЛП \mathbb{V} имеется система ЛНЗ элементов из n ($n \in \mathbb{N}$) элементов, а любая система из $(n+1)$ элемента является ЛЗ, то говорят, что размерность \mathbb{V} равна n . Обозначение: $\dim \mathbb{V} = n$.

Замечание. Если в \mathbb{V} нет ни одной ЛНЗ системы, то по определению считают, что $\dim \mathbb{V} = 0$.

Замечание. Если $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ в \mathbb{V} найдется ЛНЗ система из n элементов, то \mathbb{V} называется бесконечномерным.

В курсе ЛА будем рассматривать конечномерные ЛП.

Определение. Упорядоченная система ЛНЗ элементов $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ называется базисом ЛП \mathbb{V} , если $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow \exists \xi_1, \dots, \xi_n \in k : x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$ (1).

Представление (1) называется разложением вектора x по базису \mathcal{E} , коэффициенты этого разложения называются координатами вектора x в базисе \mathcal{E} .

Теорема 3.5 (О связи базиса и размерности). $\dim \mathbb{V} = n \Leftrightarrow$ (в нем \exists базис из n элементов).

Доказательство. (\Rightarrow) Пусть $\dim \mathbb{V} = n \Rightarrow \exists$ ЛНЗ $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{V}$. Пусть $x \in \mathbb{V}$ - произвольный элемент. Тогда $\{x_1, \dots, x_n, x\}$ - ЛЗ $\Rightarrow \exists$ нетривиальный набор $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in k : (2) \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x = \theta$, причем $\lambda_{n+1} \neq 0$ (т.е. X - ЛНЗ) $\Rightarrow x = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} x_1 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} x_n = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n \Rightarrow X$ - базис из n элементов.

(\Leftarrow) Пусть $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ - базис в \mathbb{V} из n элементов. Рассмотрим произвольную систему $\mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_{n+1}\} \subset \mathbb{V}$. Проверим возможно ли, чтобы нетривиальная ЛК элементов \mathcal{Y} давала бы θ ? Имеем разложение по

$$\mathcal{E} : \begin{cases} y_1 = \xi_{11} e_1 + \dots + \xi_{1n} e_n \\ \vdots \\ y_{n+1} = \xi_{n+11} e_1 + \dots + \xi_{n+1n} e_n \end{cases} \quad \text{Берем ЛК } \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_{n+1} y_{n+1} = \theta \text{ (4). Подставим (3) в (4):}$$

$$\theta = \lambda_1 (\xi_{11} e_1 + \dots + \xi_{1n} e_n) + \dots + \lambda_{n+1} (\xi_{n+11} e_1 + \dots + \xi_{n+1n} e_n) = (\lambda_1 \xi_{11} + \dots + \lambda_{n+1} \xi_{n+11}) e_1 + \dots + (\lambda_1 \xi_{1n} + \dots + \lambda_{n+1} \xi_{n+1n}) e_n \text{ (5)}.$$

Поскольку $\{e_1, \dots, e_n\}$ - ЛНЗ, то (5) возможно \Leftrightarrow все коэффициенты ЛК - нулевые,
$$\begin{cases} \lambda_1 \xi_{11} + \dots + \lambda_{n+1} \xi_{n+11} = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 \xi_{1n} + \dots + \lambda_{n+1} \xi_{n+1n} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Но (6) - это ОСЛАУ относительно $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$, вида $A\lambda = 0$, причем $RgA \leq n < n+1 \Rightarrow \exists$ нетривиальное решение, т.е. \exists нетривиальный набор $\lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_{n+1}^{(0)}$, удовлетворяющий ОСЛАУ (6), но для этого же нетривиального набора выполнено (4) \Rightarrow любая система \mathcal{U} из $(n+1)$ элемента будет ЛЗ. $\Rightarrow \dim \mathbb{V} = n$ \square

Следствие 1. Если $\dim \mathbb{V} = n$, то любой базис состоит из n элементов.

Следствие 2. Если $\dim \mathbb{V} = n$, то любая система из n ЛНЗ элементов образует его базис.

Доказательство. Самостоятельно. \square

Примеры базисов:

1. $k^n (\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$ - строки длины n , столбцы высоты n .

$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$. выше было показано, что $\{e_1, \dots, e_n\}$ - ЛНЗ. Далее $\forall x \in k^n \Rightarrow x = (\xi_1, \dots, \xi_n) = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n \Rightarrow \{e_1, \dots, e_n\}$ - базис. $\boxed{\dim k^n = n}$ Его еще называют n - мерным координатным пространством.

2. P_n - многочлены степени $\leq n$

$e_0 = 1, e_1 = t, \dots, e_n = t^n$. ЛНЗ показана выше. $\forall x(t) \in P_n \Rightarrow x(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n = a_0 e_0 + \dots + a_n e_n \Rightarrow \{e_0, \dots, e_n\}$ - базис. $\boxed{\dim P_n = n+1}$

3. $\mathfrak{M}_{m \times n}$.

$$\left\{ e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \right\}_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}} \quad (\text{Единственный ненулевой элемент находится на пересечении } i\text{-ой строки и } j\text{-ого столбца.})$$
 - ЛНЗ системы матрицы. $\forall A \in \mathfrak{M}_{m \times n} \Rightarrow A = (a_{ij})_m^n = a_{11}e_{11} + \dots + a_{1n}e_{1n} + \dots + a_{m1}e_{m1} + \dots + a_{mn}e_{mn} \Rightarrow \{e_{ij}\}$ - базис. $\boxed{\dim \mathfrak{M}_{m \times n} = m \cdot n}$.

4. Множество всевозможных решений ОСЛАУ \mathbb{V}_{sol} (6) $Ax = 0$ (\equiv общее решение ОСЛАУ).

Пусть $A = (a_{ij})_m^n, RgA = r$. При $r < n \exists$ ФСР ОСЛАУ (6), например НСР, состоящая из $(n-r)$ элементов $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n-r)}$. Эта система упорядоченная, ЛНЗ и любое решение через нее выражается \Rightarrow это базис в общем решении $\Rightarrow \boxed{\dim \mathbb{V}_{sol} = n-r}$

Таким образом: доказательство теоремы о ФСР и структуре общего решения (где не были доказаны 2 и 3 пункты.)

Доказательство. 2. $\dim \mathbb{V}_{sol} = n-r \Rightarrow$ любой базис содержит $(n-r)$ элементов. Всякая ФСР представляет собой базис \Rightarrow всякая ФСР содержит $(n-r)$ элементов.

3. Любые $(n-r)$ ЛНЗ упорядоченных элементов \mathbb{V}_{sol} , т.е. любые $(n-r)$ ЛНЗ упорядоченных решений, образуют базис $\mathbb{V}_{sol} \Rightarrow$ образуют ФСР. \square

Замечание. Видим, что можно дать альтернативное определение ФСР: фактически ФСР - это произвольный базис в ЛП всевозможных решений ОСЛАУ.

3.4 Подпространства линейного пространства. Линейная оболочка системы векторов

Пусть \mathbb{V} - ЛП над k . Рассмотрим множество $L : L \subset \mathbb{V}$.

Определение. L называется линейным подпространством (ЛПП) линейного пространства \mathbb{V} ,

если:

$$1. \forall x, y \in L \Rightarrow x + y \in L$$

$$2. \forall x \in L, \forall \alpha \in k \Rightarrow \alpha x \in L$$

Теорема 3.6. Всякое ЛПП является ЛП (над тем же полем k)

Доказательство. Линейные операции в L определяются так же, как в основном ЛП \mathbb{V} , и они не выводят из L (по определению ЛПП). Требуется доказать свойства 1-8 линейного пространства:

1,2 выполняются, т.к. $L \subset \mathbb{V}$

3. $\theta \in L$, т.к. $0 \cdot x \in L$, но $0 \cdot x = \theta$.

4. $\forall x \in L \Rightarrow \exists x' \in L : x + x' = \theta$, т.к. $(-1) \cdot x \in L$, а $(-1) \cdot x = x'$.

5-8 выполняются, т.к. $L \subset \mathbb{V}$.

1,2,5-8 проверить самостоятельно еще раз. □

Рассмотрим систему $X = \{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathbb{V}$.

Определение. Совокупность всевозможных ЛК элементов системы X называется линейной оболочкой (ЛО) на системе X (или на элементах x_1, \dots, x_m). Обозначение: $\text{span}(x), \text{span}(x_1, \dots, x_m)$,

то $\boxed{\text{span}(x) = \{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m; \alpha_1, \dots, \alpha_m \in k\}}$. Говорят, что система X порождает ЛО $\text{span}(x)$.

Пусть $L = \text{span}(x)$. Очевидно, $L \subset \mathbb{V}$.

Теорема 3.7 (О линейной оболочке). L является ЛПП of ЛП \mathbb{V} .

Доказательство. $x, y \in L \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m \\ y = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_m x_m \end{array} \right\} \Rightarrow x + y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_m x_m = (\alpha_1 + \beta_1)x_1 + \dots + (\alpha_m + \beta_m)x_m \in L$.

$$\alpha x = \alpha(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m) = (\alpha \alpha_1)x_1 + \dots + (\alpha \alpha_m)x_m \in L. \quad \square$$

Теорема 3.8 (О размерности ЛО). Пусть $L = \text{span}(x), x = \{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathbb{V}$. Тогда $\dim L = \max$ количеству ЛНЗ элементов в системе X .

Доказательство. Пусть \max количество ЛНЗ элементов в X равно p . БОО можно считать, что $\{x_1, \dots, x_p\}$ - ЛНЗ (иначе перенумеруем элементы X). Тогда каждая из системы $\{x_1, \dots, x_p, x_{p+1}\}, \dots, \{x_1, \dots, x_p, x_m\}$

- ЛЗ \Rightarrow по критерию линейной зависимости (1) $\left\{ \begin{array}{l} x_{p+1} = \alpha_{p+1}x_1 + \dots + \alpha_{p+1}x_p, \dots \\ x_m = \alpha_mx_1 + \dots + \alpha_mx_p \end{array} \right.$

Рассмотрим произвольный $y \in L : y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = (1) = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p + \lambda_{p+1}(\alpha_{p+1}x_1 + \dots + \alpha_{p+1}x_p) + \dots + \lambda_m(\alpha_mx_1 + \dots + \alpha_mx_p) = (\lambda_1 + \lambda_{p+1}\alpha_{p+1} + \dots + \lambda_m\alpha_{m1})x_1 + \dots + (\lambda_p + \lambda_{p+1}\alpha_{p+1p} + \dots +$

$\lambda_m \alpha_{mp})x_p = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p$. Таким образом, $\{x_1, \dots, x_p\}$ ЛНЗ и $\forall y \in L$ представляется их линейной комбинацией $\Rightarrow \{x_1, \dots, x_p\}$ - базис в $L \Rightarrow \dim L = p$. \square

Теорема 3.9 (О неполном базисе). Пусть $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ - ЛНЗ в ЛП \mathbb{V} , $\dim \mathbb{V} = n > m$. Тогда $\exists x_{m+1}, \dots, x_n \in \mathbb{V} : \{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n\}$ - базис в \mathbb{V} . То есть всякую ЛНЗ систему в \mathbb{V} можно дополнить до базиса.

Доказательство. Рассмотрим $L = \text{span}(x) = \text{span}(x_1, \dots, x_m)$, $\dim L = m < n = \dim \mathbb{V} \Rightarrow L \neq \mathbb{V} \Rightarrow$

$$\exists x_{m+1} : \begin{cases} x_{m+1} \in \mathbb{V} \\ x_{m+1} \notin L \end{cases} \Rightarrow x_{m+1} \text{ не является линейной комбинацией элементов } X \Rightarrow \text{система } \{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}\}$$

- ЛНЗ. Если $m+1 = n$, то теорема доказана. Если $m+1 < n$, то дальше действуем аналогично. $\exists x_{m+\alpha} :$

$$\begin{cases} x_{m+\alpha} \in \mathbb{V} \\ x_{m+\alpha} \notin \text{span}(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) \end{cases} \quad \text{и т.д. За конечное число шагов получим базис } \{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n\}.$$

\square

3.5 Координаты вектора в базисе

Пусть \mathbb{V} - ЛП над k , $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ - базис в \mathbb{V} . Тогда $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow (1) x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$ - разложение по базису.

Лемма 3.10. Разложение по базису единственно.

Доказательство.
$$\left. \begin{aligned} x &= \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n \\ x &= \xi'_1 e_1 + \dots + \xi'_n e_n \end{aligned} \right\} \Rightarrow \theta = (\xi_1 - \xi'_1)e_1 + \dots + (\xi_n - \xi'_n)e_n (*)$$
 Базис - ЛНЗ система, то $(*)$ возможно $\Leftrightarrow \xi_1 - \xi'_1 = \dots = \xi_n - \xi'_n = 0$, т.е. $\xi_1 = \xi'_1, \dots, \xi_n = \xi'_n$. \square

Таким образом координаты вектора в данном базисе определены единственным образом и \exists взаимно однозначное соответствие между элементами ЛП \mathbb{V} и их координатами в заданном базисе. Обозначим это $x \leftrightarrow (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Теорема 3.11 (О координатах суммы векторов и произведении вектора на скаляр). Пусть в \mathbb{V} фиксирован базис \mathcal{E} .

$$\text{Если } x \leftrightarrow (\xi_1, \dots, \xi_n), y \leftrightarrow (\eta_1, \dots, \eta_n), \text{ то } \begin{aligned} x + y &\leftrightarrow (\xi_1 + \eta_1, \dots, \xi_n + \eta_n) \\ \alpha x &\leftrightarrow (\alpha \xi_1, \dots, \alpha \xi_n) \end{aligned}$$

Доказательство. $x \leftrightarrow (\xi_1, \dots, \xi_n)$, т.е. $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$, тогда $x + y = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n + \eta_1 e_1 + \dots + \eta_n e_n = (\xi_1 + \eta_1)e_1 + \dots + (\xi_n + \eta_n)e_n \leftrightarrow (\xi_1 + \eta_1, \dots, \xi_n + \eta_n)$. Самостоятельно доказать для αx . \square

Итак, координаты суммы векторов равны сумме соответствующих координат, координаты произведения вектора на скаляр равны произведению координат на этот скаляр. Поскольку ВОС между векторами и координатами сохраняет линейные операции часто вместо знака \leftrightarrow пишут знак $=$.

$x = (\xi_1, \dots, \xi_n), y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ и т.д. На самом деле это означает, что $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$ формально

$$= (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = [\mathcal{E}] \underset{\downarrow}{\xi}.$$

$$y = \eta_1 e_1 + \dots + \eta_n e_n = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = [\mathcal{E}] \underset{\downarrow}{\eta}.$$

Т.е записи $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$, $x = [\mathcal{E}] \underset{\downarrow}{\xi}$ означают одно и то же: вектор x имеет в базисе \mathcal{E} координаты (ξ_1, \dots, ξ_n)

В этих обозначениях $[\mathcal{E}] = (e_1, \dots, e_n)$ - строка базисных векторов. Замечание о так называемом "сокраще-

нии на базис". Поскольку векторы равны \Leftrightarrow совпадают их координаты, то имеем: $x = y \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = \eta_1 \\ \vdots \\ \xi_n = \eta_n \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{\eta}$$

С другой стороны $x = [\mathcal{E}] \underset{\downarrow}{\xi}$, $y = [\mathcal{E}] \underset{\downarrow}{\eta}$, т.е. $\boxed{[\mathcal{E}] \underset{\downarrow}{\xi} = [\mathcal{E}] \underset{\downarrow}{\eta} \Leftrightarrow \underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{\eta}}$ Это формально значит, что в равенстве

$[\mathcal{E}] \underset{\downarrow}{\xi} = [\mathcal{E}] \underset{\downarrow}{\eta}$ на базис $[\mathcal{E}]$ можно "сократить": $\underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{\eta}$

Этим свойством "сокращения на базис" будем пользоваться в дальнейшем.

3.6 Изоморфизм линейных пространств

Пусть \mathbb{V}, \mathbb{W} - ЛП над k . Пусть \exists правило φ , по которому каждому элементу из \mathbb{V} ставится в

соответствие элемент из \mathbb{W} , так что выполнены следующие условия:

$$1. \forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow \exists! y \in \mathbb{W} : y = \varphi(x)$$

$$2. \forall y \in \mathbb{W} \Rightarrow \exists! x \in \mathbb{V} : y = \varphi(x)$$

Иными словами, установлено взаимно однозначное соответствие между элементами ЛП \mathbb{V} и \mathbb{W} с помощью правила φ .

Определение. Такое соответствие называется изоморфизмом, если

$$1. \forall x_1, x_2 \in \mathbb{V} \Rightarrow \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2),$$

$$2. \forall x \in \mathbb{V}, \forall \lambda \in k \Rightarrow \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$$

т.е сохраняются линейные операции.

При этом говорят, что \mathbb{V} изоморфно \mathbb{W} и обозначают $\mathbb{V} \sim \mathbb{W}$

Замечание. Очевидно, что φ^{-1} тоже изоморфизм, т.е $\mathbb{W} \sim \mathbb{V}$, то ЛП \mathbb{V} и \mathbb{W} изоморфны друг другу.

Замечание. Выше мы фактически доказали, что если $\dim \mathbb{V} = n$, то $\mathbb{V} \sim k^n$, т.е \exists ВОС между элементами ЛП \mathbb{V} и n -мерным координатным пространством, сохраняющее линейные операции.

Свойства изоморфизма:

1. $\mathbb{V} \sim \mathbb{V}$ (рефлексивность)
2. Если $\mathbb{V} \sim \mathbb{W}$, то $\mathbb{W} \sim \mathbb{V}$ (симметричность)
3. Если $\mathbb{V} \sim \mathbb{U}$, $\mathbb{U} \sim \mathbb{W}$, то $\mathbb{V} \sim \mathbb{W}$ (транзитивность)

4. Пусть $\mathbb{V} \sim \mathbb{W}$, тогда если $\theta_{\mathbb{V}}$ — нейтральный элемент \mathbb{V} , то $\theta_{\mathbb{V}} \sim \theta_{\mathbb{W}}$, где $\theta_{\mathbb{W}}$ — нейтральный элемент \mathbb{W}

Доказательство. $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow 0 \cdot x = \theta_{\mathbb{V}}, \varphi(0 \cdot x) = 0 \cdot \varphi(x) = 0 \cdot y = \theta_{\mathbb{W}}$. В силу ВОС $\theta_{\mathbb{V}} \sim \theta_{\mathbb{W}}$ □

5. Пусть $\mathbb{V} \sim \mathbb{W}$, тогда если $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ - ЛНЗ в \mathbb{V} , то $Y = \{y_1, \dots, y_m\} : \forall i = \overline{1, m} y_i = \varphi(x_i)$ - ЛНЗ в \mathbb{W} .

Доказательство. Самостоятельно. \square

6. Пусть $\mathbb{V} \sim \mathbb{W}$, тогда если $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ - ЛЗ в \mathbb{V} , то $Y = \{y_1, \dots, y_m\} : \forall i = \overline{1, m} y_i = \varphi(x_i)$ - ЛЗ в \mathbb{W} .

Доказательство. Самостоятельно. \square

7. Если \mathbb{V}, \mathbb{W} конечномерны, то $\boxed{\mathbb{V} \sim \mathbb{W} \Leftrightarrow \dim \mathbb{V} = \dim \mathbb{W}}$ критерий изоморфизма конечномерных ЛП.

Доказательство. $\Leftrightarrow \mathbb{V} \sim \mathbb{W} \Rightarrow$ их базисы содержат равное количество элементов (см. свойства 5 и 6)
 $\Rightarrow \dim \mathbb{V} = \dim \mathbb{W}$
 $\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \dim \mathbb{V} = n \Rightarrow \mathbb{V} \sim k^n \\ \dim \mathbb{W} = n \Rightarrow \mathbb{W} \sim k^n \end{array} \right\} \xrightarrow{2,3} \mathbb{V} \sim \mathbb{W}.$ \square

Видим, что изоморфизм между ЛП устанавливается путем установления ВОС между элементами базисов этих ЛП.

Замечание. С точки зрения свойств, связанных с линейными операциями, элементы всех изоморфных ЛП равной размерности ведут себя одинаково (так же как и элементы k^n).

Следствие 1 (О размерности ЛО). Пусть \mathbb{V} - ЛП над k , $\dim \mathbb{V} = n$. Пусть $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ - базис в \mathbb{V}
 $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ - система в \mathbb{V}
 $x_1 = [\mathcal{E}] \xi_1, \dots, x_m = [\mathcal{E}] \xi_m$. Пусть $L = \text{span}(X)$. Тогда $\dim L = \text{Rg}(\xi_1 \dots \xi_m)$

Доказательство. $\dim L = \max$ количеству ЛНЗ векторов в системе $X = (\mathbb{V} \sim k^n) = \max$ количеству ЛНЗ столбцов в системе $\{\xi_1, \dots, \xi_m\} = \text{т. о ранге матрицы} = \text{Rg}(\xi_1 \dots \xi_m)$ \square

3.7 Сумма и пересечение линейных пространств

Пусть \mathbb{V} - ЛП над k . $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ - его ЛПП.

Определение. Суммой ЛПП \mathbb{V}_1 и \mathbb{V}_2 называется $\boxed{S = \{x \in \mathbb{V} : x = x_1 + x_2, x_1 \in \mathbb{V}_1, x_2 \in \mathbb{V}_2\}}$ - совокупность всевозможных сумм элементов из \mathbb{V}_1 и \mathbb{V}_2 . Обозначение: $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$

Определение. Пересечением ЛПП \mathbb{V}_1 и \mathbb{V}_2 называется $\boxed{D = \{x \in \mathbb{V} : x \in \mathbb{V}_1, x \in \mathbb{V}_2\}}$ - совокупность общих элементов \mathbb{V}_1 и \mathbb{V}_2 . Обозначение: $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$

Теорема 3.12 (О сумме и пересечении ЛПП). S, D являются ЛПП of ЛП \mathbb{V} .

Доказательство. Самостоятельно. \square

Следствие 1. S, D являются ЛП над тем же полем k , что и \mathbb{V} .

Теорема 3.13 (О размерности S и D). $\boxed{\dim(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2) = \dim \mathbb{V}_1 + \dim \mathbb{V}_2 - \dim(\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2)}$

Доказательство. Без доказательства. \square

Определение. Говорят, что ЛП \mathbb{V} раскладывается в прямую сумму своих ЛПП \mathbb{V}_1 и \mathbb{V}_2 , если

$$\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists! x_1 \in \mathbb{V}_1 \\ \exists! x_2 \in \mathbb{V}_2 \end{array} : x = x_1 + x_2 \right.$$

Обозначение: $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$ (т.е каждый элемент из \mathbb{V} единственным

образом представляется в виде суммы элементов из \mathbb{V}_1 и \mathbb{V}_2)

Теорема 3.14 (Необходимое и достаточное условие разложения \mathbb{V} в прямую сумму \mathbb{V}_1 и \mathbb{V}_2). $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus$

$$\mathbb{V}_2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1. \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 = \mathbb{V} \\ 2. \mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = \{\theta\} \end{array} \right.$$

Доказательство. Без доказательства.

□

tg: @moksimga

Лекция 7

17.03

3.8 Матрица перехода.

Пусть \mathbb{V} - ЛП над k . $\dim \mathbb{V} = n$, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\mathcal{E}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ - базисы в \mathbb{V} .

$$\text{Разложим элементы базиса } \mathcal{E}' \text{ по базису } \mathcal{E}: \begin{cases} e'_1 = t_{11}e_1 + \dots + t_{n1}e_n, \\ \dots \\ e'_n = t_{1n}e_1 + \dots + t_{nn}e_n \end{cases} \quad (1). \text{ Тогда } T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

- матрица, в столбцах которой записаны координаты векторов базиса \mathcal{E}' в базисе \mathcal{E} , называется матрицей перехода от базиса \mathcal{E} к базису \mathcal{E}' . Введем $[\mathcal{E}] = (e_1, \dots, e_n)$ - строку векторов базиса \mathcal{E} и $[\mathcal{E}'] = (e'_1, \dots, e'_n)$ - строку векторов базиса \mathcal{E}' . Тогда соотношение (1) можно переписать в виде $(e'_1, \dots, e'_n) =$

$$(e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}. \text{ Или еще короче: } [\mathcal{E}'] = [\mathcal{E}]T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'} \quad (3). \quad (1), (2) \text{ и } (3) \text{ означают одно и то же.}$$

Теорема 3.15. $\det T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'} \neq 0$.

Доказательство. От противного. Допустим, что $\det \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} = 0$. Тогда столбцы $T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$ линейно

зависимы. В силу изоморфизма $\mathbb{V} \sim k^n$, это означает, что $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ тоже линейно зависима, но это невозможно, т.к. \mathcal{E}' - базис - противоречие, а значит $\Rightarrow \det T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'} \neq 0$. \square

Следствие 1. $T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$ - обратима. (т.е. $\exists T_{\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}}^{-1}$)

Доказательство. Из критерия обратимости. \square

Лемма 3.16 (О матрице обратного перехода). $T_{\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}} = T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}^{-1}$.

Доказательство. Пусть $[\mathcal{E}'] = [\mathcal{E}]T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$. Тогда $[\mathcal{E}'] \cdot T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}^{-1} = ([\mathcal{E}]T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}) \cdot T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}^{-1} = (\text{ассоциативность матричного умножения}) = [\mathcal{E}](T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'} \cdot T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}^{-1}) = [\mathcal{E}] \cdot E = [\mathcal{E}]$. Таким образом $[\mathcal{E}] = [\mathcal{E}'] \cdot T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}^{-1}$, но $[\mathcal{E}] = [\mathcal{E}'] \cdot T_{\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}}$, т.е. $[\mathcal{E}] = [\mathcal{E}'] \cdot T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}^{-1} = [\mathcal{E}]T_{\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}}$, "сокращая" на базис матрицы, получаем: $T_{\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}} = T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}^{-1}$.

В качестве упражнения посмотреть, что свойства ассоциативности верно для строк векторов. \square

Теорема 3.17 (О преобразовании координат вектора при смене базиса). Если $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ - базисы в \mathbb{V} и $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n = [\mathcal{E}]\xi$, $x' = \xi'_1 e'_1 + \dots + \xi'_n e'_n = [\mathcal{E}']\xi'$, то $\xi' = T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}^{-1}\xi$, где $T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$ - матрица перехода от базиса \mathcal{E} к базису \mathcal{E}' .

Доказательство. $[\mathcal{E}'] = [\mathcal{E}]T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$. Тогда $x = [\mathcal{E}']\xi' = [\mathcal{E}]\xi = ([\mathcal{E}']T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'})\xi =$ ассоциативность матричного умножения со строкой векторов (Упр.) $= [\mathcal{E}'](T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}^{-1}\xi)$. Получаем, что $[\mathcal{E}']\xi' = [\mathcal{E}'](T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}^{-1}\xi)$, сокращая на базис, получаем $\xi' = T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}^{-1}\xi$. \square

Замечание. Закон преобразования координат называют контравариантным и если (базисы связаны матрицей T , то координаты - матрицей T^{-1})

Следствие 1. $\boxed{\begin{matrix} \xi = T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}\xi' \\ \downarrow \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} \xi' = T_{\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}}\xi \\ \downarrow \end{matrix}}$

3.9 Линейные формы в ЛП. Сопряженное пространство, его базис и размерность. Преобразование коэффициентов линейной формы при смене базиса.

Пусть \mathbb{V} - ЛП над k , $\dim \mathbb{V} = n$.

Определение (Закон (правило)). f , ставящий каждому элементу \mathbb{V} (вектору) единственный скаляр из поля k ($\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow \exists! f(x) \in k$) таким образом, что выполняется:

$$1) \forall x, y \in \mathbb{V} \Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$2) \forall x \in \mathbb{V}, \forall \alpha \in k \Rightarrow f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

называется линейным функционалом или линейной формой (ЛФ).

Примеры:

1. $\mathbb{V} = C[a, b] = \{x(t) - \text{непрерывные на } [a, b]\}$. Тогда $f(x) = \int_a^b x(t) dt$.

2. Пусть \mathcal{E} - базис в \mathbb{V} , $x = [\mathcal{E}] \xi = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$. Тогда $f(x) = \xi_1$.

Определение. ЛФ f_1 и f_2 назовем равными, если $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow f_1(x) = f_2(x)$.

Определение. f называется суммой ЛФ f_1 и f_2 (обозначается $f = f_1 + f_2$), если $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

Определение. f называется произведением f_1 на скаляр $\alpha \in k$ (обозначается $f = \alpha f_1$), если $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow f(x) = \alpha f_1(x)$.

Определение. Совокупность всевозможных ЛФ, действующих в ЛП \mathbb{V} , обозначим \mathbb{V}^*

Теорема 3.18. \mathbb{V}^* с введенными операциями сложения и умножения на скаляры образует ЛП.

Доказательство.

Лемма 3.19. $f = \boxed{f_1 + f_2}$ - ЛФ.

$$f(x+y) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(x+y) + f_2(x+y) \stackrel{\text{def ЛФ}}{=} f_1(x) + f_1(y) + f_2(x) + f_2(y) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + f(y).$$

Аналогично доказывается, что $f(\lambda x) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(\lambda x) + f_2(\lambda x) \stackrel{\text{def ЛФ}}{=} \lambda f_1(x) + \lambda f_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f(x)$.

$f = \alpha f_1$ - ЛФ. Доказывается аналогично - самостоятельно.

Далее доказываем свойства 1–8 ЛП. 1,2,5-8 - очевидны (самостоятельно). Докажем 3,4. Рассмотрим так называемую "нуль-форму". $\Phi(x) : \forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow \Phi(x) = 0$. ($\Phi(x+y) = 0, \Phi(x) + \Phi(y) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y)$). Аналогично $\Phi(\alpha x) = 0, \alpha \cdot \Phi(x) + \alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow \Phi(\alpha x) = \alpha \cdot \Phi(x)$, Φ - ЛФ.

$f + \Phi \forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow (f + \Phi)(x) = f(x) + \Phi(x) = f(x) + 0 = f(x) \Rightarrow \boxed{f + \Phi = f}$, т.е. Φ - нейтральный элемент \mathbb{V}^*

Рассмотрим $f' = -1 \cdot f$, т.е. $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow f(x) = -f'(x), f' - \text{ЛФ}$ (очевидно) и $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow (f + f')(x) = f(x) + f'(x) = f(x) - f(x) = 0 = \Phi(x) \Rightarrow \boxed{f + f' = \Phi}$ Тогда f' - противоположная ЛФ.

Из выполнения свойств 1–8 $\Rightarrow \mathbb{V}^* - \text{ЛП}$, которое назовем линейным пространством, сопряженным к \mathbb{V} (сопряженным пространством) \square

Теорема 3.20. Если $\dim \mathbb{V} = n < +\infty$, то $\dim \mathbb{V}^* = n$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ - некоторый базис в \mathbb{V} . Рассмотрим систему $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ из $\mathbb{V}^* : \forall i = \overline{1, n}, \forall j = \overline{1, n} \Rightarrow \boxed{g_i(e_j) = \delta_{ij}}$. Тогда $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow x = [\mathcal{E}] \xi = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n, g_i(x) = g_i(\xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n) = \xi_1 g_i(e_1) + \dots + \xi_n g_i(e_n) = \xi_1 \cdot 0 + \dots + \xi_i g_i(e_i) + \dots + \xi_n \cdot 0 = \xi_i$. Покажем, что система $\{g_1, \dots, g_n\}$ линейной независима в \mathbb{V}^* . По определению рассмотрим ЛК $\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n = \Phi$ (1). Тогда

$\forall i = \overline{1, n} \Rightarrow (\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n)(e_i) = \lambda_1 g_1(e_i) + \dots + \lambda_n g_n(e_i) = \lambda_1 \cdot 0 + \dots + \lambda_i g_i(e_i) + \dots + \lambda_n \cdot 0 = \lambda_i = \Phi(e_i) = 0 \Rightarrow ((1) \text{ выполнена} \Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0) \Rightarrow G = \{g_1, \dots, g_n\}$ - ЛНЗ в \mathbb{V}^* . Пусть $f \in \mathbb{V}^*$ - произвольная ЛФ. Тогда $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow f(x) = f(\xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n) = \xi_1 f(e_1) + \dots + \xi_n f(e_n) = g_1(x) \alpha_1 + \dots + g_n(x) \alpha_n = (\alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_n g_n)(x) \Rightarrow \boxed{f = \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_n g_n}$, где $\alpha_1 = f(e_1), \dots, \alpha_n = f(e_n)$ - коэффициенты ЛФ f в базисе \mathcal{E} .

Мы доказали, что ① любая ЛФ может быть разложена по упорядоченной ЛНЗ системе $G \Rightarrow G$ - базис. И ②, что действие ЛФ полностью определяется ее действием на базисные векторы ЛП \mathbb{V} . Можно заключить,

что $\boxed{\dim \mathbb{V}^* = n}$ $f = \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_n g_n = \begin{pmatrix} g_1 & \dots & g_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = [G] \alpha_{\downarrow}$.

$f(x) = f(\xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n) = \xi_1 f(e_1) + \dots + \xi_n f(e_n) = \vec{\alpha} \xi_{\downarrow}$

□

Замечание. Базис G , построенный в доказательстве теоремы ($g_i(e_j) = \delta_{ij}$) называется биортogonalным к базису \mathcal{E} .

Теорема 3.21 (О преобразовании коэффициентов ЛФ при смене базиса). Пусть $f \in \mathbb{V}^*, \mathcal{E}, \mathcal{E}'$ - базисы в $\mathbb{V} : [\mathcal{E}'] = [\mathcal{E}] T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$, и $x = [\mathcal{E}] \xi = [\mathcal{E}'] \xi'$. $f(x) = \vec{\alpha} \xi = \vec{\alpha}' \xi'$. Тогда коэффициенты $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ формы f в базисах \mathcal{E} и \mathcal{E}' соответственно, связаны следующим образом: $\boxed{\vec{\alpha}' = \vec{\alpha} T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}}$ (ковариантный закон преобразования)

Доказательство.

Следствие 1. Если $\forall \xi \Rightarrow \vec{\alpha} \xi = \vec{\beta} \xi$, то $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

Доказательство. $\vec{\alpha} \xi = \vec{\beta} \xi \Rightarrow (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \xi = 0$. Возьмем $\xi = (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$, тогда $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \xi = (\vec{\alpha} - \vec{\beta})(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = (\vec{\alpha} - \vec{\beta})(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = |\alpha_1 - \beta_1|^2 + \dots + |\alpha_n - \beta_n|^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$, т.е. $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$. □

$f(\alpha) = \vec{\alpha} \xi = \vec{\alpha}' \xi' \Rightarrow \vec{\alpha} (T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'} \xi') = \text{ассоциативность} = (\vec{\alpha} T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}) \xi'$, т.е. для $\forall x \in \mathbb{V}$ (а значит и для $\forall \xi'$) выполнено $\vec{\alpha}' \xi' = (\vec{\alpha} T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}) \xi' \Rightarrow \vec{\alpha}' = \vec{\alpha} T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$.

□

tg: @moksimga

Теорема 3.22. $f : \mathbb{V} \rightarrow k$ является ЛФ $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow f(x) = \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k$ - определенные числа (не зависящие от x), а (ξ_1, \dots, ξ_n) - координаты x в некотором базисе.

Доказательство. Пусть \mathcal{E} - базис, в котором заданы координаты x , т.е. $x = [\mathcal{E}] \xi$.

$\Rightarrow \alpha_k = f(e_k)$ $k = \overline{1, n}$ (см. выше)

$\Leftarrow f : \mathbb{V} \rightarrow k$. Пусть $x = [\mathcal{E}] \xi, y = [\mathcal{E}] \eta$, тогда $f(x) = \vec{\alpha} \xi, f(y) = \vec{\alpha} \eta, f(x+y) = \vec{\alpha}(\xi+\eta) = \vec{\alpha} \xi + \vec{\alpha} \eta = f(x) + f(y)$.

$f(\lambda x) = \lambda f(x)$ - аналогично. Самостоятельно. \square

Глава 4

Линейные операторы в линейных пространствах

Лекция 8

24.03

4.1 Определение линейного оператора (ЛО). Линейное пространство линейных операторов (ЛПЛО).

Пусть \mathbb{V}, \mathbb{W} - ЛП над k (одним и тем же)

Определение. Правило (закон) A , по которому каждому $x \in \mathbb{V}$ ставится в соответствие единственный $y \in \mathbb{W}$, называется оператором с областью определения \mathbb{V} и множеством значений \mathbb{W} .

Обозначение: $A : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$.

Определение. Если $A : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ и $\begin{matrix} 1. \forall x, y \in \mathbb{V} \Rightarrow A(x+y) = A(x) + A(y) \\ 2. \forall x \in \mathbb{V}, \forall \alpha \in k \Rightarrow A(\alpha x) = \alpha A(x) \end{matrix} \Rightarrow A$ называется линейным оператором (ЛО)

Замечание. 1. Если $\mathbb{W} = k$, то A - линейный функционал.

2. Если $\mathbb{V} = \mathbb{W}$, то A - линейное преобразование.

Далее мы будем рассматривать преимущественно линейные преобразования, но называть их будем более общим названием (линейными операторами).

Примеры:

1. $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ - ЛО поворота.

$A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2), A(\alpha x) = \alpha A(x)$. Самостоятельно проверить.

2. $D : P_n \rightarrow P_{n-1}, n \geq 1$ - ЛО дифференцирования.

$$D = \frac{d}{dt} \quad \forall x(t) \in P_n \Rightarrow D(x) = \frac{dx}{dt}$$

$$D(x_1 + x_2) = D(x_1) + D(x_2), D(\alpha x) = \alpha D(x).$$

3. Пусть $\mathbb{V} = V_1 \oplus V_2$

$A : \mathbb{V} \rightarrow V_1$ - оператор параллельного проектирования.

$\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow x = x_1 + x_2, x_1 \in V_1, x_2 \in V_2, A(x) = x_1$. Тогда $A(x+y) = A(x) + A(y), A(\alpha x) = \alpha A(x) = \alpha x_1$

Обозначим совокупность всех ЛО, действующих из \mathbb{V} в \mathbb{V} через $L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$.

Определение. Пусть $A, B \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$. Говорят, что $A = B$, если $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow A(x) = B(x)$.

Определение. Пусть $A, B \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$. Говорят, что C - сумма A и B (об. $C = A + B$), если $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow C(x) = A(x) + B(x)$. (иными словами, $(A + B)(x) \stackrel{\text{def}}{=} A(x) + B(x)$)

Самостоятельно показать, что $A + B \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$.

Определение. Пусть $A \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V}), \alpha \in k, C = \alpha A$ (C является произведением A на скаляр α), если $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow C(x) = \alpha A(x)$. (иными словами, $(\alpha A)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha A(x)$)

Самостоятельно показать, что $\alpha A \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$.

Теорема 4.1. C введенными линейными операциями $L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ образует ЛП, называемое линейным пространством линейных операторов (ЛПЛО).

Доказательство. 1, 2, 5-8 доказать самостоятельно.

3. Введем \mathcal{O} - нулевой оператор: $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow \mathcal{O}(x) = \theta$. Самостоятельно проверить, что $\mathcal{O}(x + y) = \mathcal{O}(x) + \mathcal{O}(y)$, $\mathcal{O}(\alpha x) = \alpha \mathcal{O}(x)$, т.е. \mathcal{O} - ЛО. ($\mathcal{O} \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$). Тогда $\forall A \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V}) \Rightarrow A + \mathcal{O} = A$, т.к. $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow (A + \mathcal{O})(x) \stackrel{\text{def суммы}}{=} A(x) + \mathcal{O}(x) = A(x) + \theta = A(x) \Rightarrow L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ имеет нейтральный элемент.

4. Введем для $\forall A \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ $A' = -1 \cdot A$. Покажем, что всегда $A + A' = \mathcal{O}$, т.е. A' - противоположный элемент. $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow (A + A')(x) \stackrel{\text{def суммы}}{=} A(x) + A'(x) = A(x) + (-1) \cdot A(x) \stackrel{\text{def произв.}}{=} A(x) - A(x) = \theta = \mathcal{O}(x) \Rightarrow$ в $L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ каждый элемент имеет противоположный. \square

Определение. $I : \forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow I(x) = x$ называется тождественным оператором.

Самостоятельно показать, что $I \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$.

Далее в $L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ можно ввести операторы композиции.

Определение. Говорят, что C является композицией A и B (обозначается $C = A \circ B$), если $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow C(x) = A(B(x))$, т.е. $(A \circ B)(x) \stackrel{\text{def}}{=} A(B(x))$.

Самостоятельно показать, что $A \circ B \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$.

Свойства композиции:

1. $\forall A, B \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ и $\forall \alpha \in k \Rightarrow (\alpha A) \circ B = A \circ (\alpha B) = \alpha(A \circ B)$.
2. $\forall A, B, C \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V}) \Rightarrow (A + B) \circ C = A \circ C + B \circ C$.
3. $\forall A, B, C \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V}) \Rightarrow A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C$.
4. $\forall A, B, C \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V}) \Rightarrow (A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$.

Доказательство. 1, 3, 4 - самостоятельно.

2. $\forall x \in \mathbb{V} ((A+B) \circ C)(x) \stackrel{\text{def}}{=} (A+B)(C(x)) \stackrel{\text{def суммы}}{=} A(C(x)) + B(C(x)) \stackrel{\text{def комп}}{=} (A \circ C)(x) + (B \circ C)(x) \stackrel{\text{def суммы}}{=} (A \circ C + B \circ C)(x)$. \square

5. Вообще говоря, $A \circ B \neq B \circ A$. (примеры позже)

Определение. $A, B \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V}) : A \circ B = B \circ A$ называется коммутирующими.

4.2 Матрица ЛО

Пусть $A \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$, \mathbb{V} - ЛП над k , $\dim \mathbb{V} = n$, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ - некоторый базис в \mathbb{V} .

Рассмотрим строку $\begin{pmatrix} A(e_1) & \dots & A(e_n) \end{pmatrix}$, образованных базисных векторов под действием A . Введем обозначение $\begin{pmatrix} A(e_1) & \dots & A(e_n) \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} [A\mathcal{E}]$

Пусть $x \in \mathbb{V}$, $x = [\mathcal{E}] \underset{\downarrow}{\xi}$, т.е. $x = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$

Теорема 4.2 (О преобразовании вектора под действием ЛО). Если $x = [\mathcal{E}] \underset{\downarrow}{\xi}$, то $A(x) = [A\mathcal{E}] \underset{\downarrow}{\xi}$

Доказательство. $A(x) = A(\xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n) = \xi_1 A(e_1) + \dots + \xi_n A(e_n) = \begin{pmatrix} A(e_1) & \dots & A(e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = [A\mathcal{E}] \underset{\downarrow}{\xi}.$ □

Таким образом, имеет место равенство $\boxed{A([\mathcal{E}] \underset{\downarrow}{\xi}) = [A\mathcal{E}] \underset{\downarrow}{\xi}} \quad (1)$

Теорема 4.3 (О задании ЛО). Пусть $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ - произвольная система векторов в ЛП \mathbb{V} . Тогда $\exists! A \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V}) : \forall i = \overline{1, n} \Rightarrow A(e_i) = v_i$, где $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ - произвольный базис в \mathbb{V} .

Доказательство. Рассмотрим $A : \forall x \in \mathbb{V} (x = [\mathcal{E}] \underset{\downarrow}{\xi} \Rightarrow A(x) = [\mathcal{V}] \underset{\downarrow}{\xi} = \xi_1 v_1 + \dots + \xi_n v_n$, т.е. $A([\mathcal{E}] \underset{\downarrow}{\xi}) = [\mathcal{V}] \underset{\downarrow}{\xi}$. $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}$ - строка векторов из условия. Покажем, что $A \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$. $x = [\mathcal{E}] \underset{\downarrow}{\xi}, y = [\mathcal{E}] \underset{\downarrow}{\eta}$, тогда $x + y = [\mathcal{E}] \underset{\downarrow}{(\xi + \eta)}$, $A(x + y) = A([\mathcal{E}] \underset{\downarrow}{(\xi + \eta)}) = [\mathcal{V}] \underset{\downarrow}{(\xi + \eta)} = [\mathcal{V}] \underset{\downarrow}{\xi} + [\mathcal{V}] \underset{\downarrow}{\eta} = A(x) + A(y)$.

Аналогично (самостоятельно) показать, что $A(\alpha x) = \alpha A(x)$, то $A \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$. Далее, $\forall i = \overline{1, n} \Rightarrow A(e_i) =$

$$A \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot i \right) = [\mathcal{V}] \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot i = v_i.$$

Докажем единственность. Пусть $A, B \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V}) : \forall i = \overline{1, n} \rightarrow A(e_i) = v_i, B(e_i) = v_i$.

Тогда $\forall x \in \mathbb{V} (x = [\mathcal{E}] \underset{\downarrow}{\xi} \Rightarrow A(x) = A([\mathcal{E}] \underset{\downarrow}{\xi}) = [A\mathcal{E}] \underset{\downarrow}{\xi} = [\mathcal{V}] \underset{\downarrow}{\xi} = [B\mathcal{E}] \underset{\downarrow}{\xi} = B([\mathcal{E}] \underset{\downarrow}{\xi}) = B(x)$, т.е. $A = B$ □

Следствие 1. Действие любого ЛО однозначно определяется его действием на базисные векторы.

$$\text{Рассмотрим векторы } A(e_1), \dots, A(e_n) \text{ и разложим их по базису } \mathcal{E}: \begin{cases} A(e_1) = a_{11}e_1 + \dots + a_{n1}e_n \\ A(e_2) = a_{12}e_1 + \dots + a_{n2}e_n \\ \dots \\ A(e_n) = a_{1n}e_1 + \dots + a_{nn}e_n \end{cases} \quad (2)$$

Определение. Матрица $M_A^\mathcal{E} = \begin{pmatrix} A(e_1) & A(e_2) & \dots & A(e_n) \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ в столбцах которой записаны координаты базисных векторов в этом базисе, называется матрицей линейного оператора A в базисе \mathcal{E} .

Тогда (2) примет вид: (3) $\begin{pmatrix} A(e_1) & \dots & A(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ или (4) $[A\mathcal{E}] = [\mathcal{E}] \cdot M_A^\mathcal{E}$

Теорема 4.4. Если $x = [\mathcal{E}]\xi$, $A(x) = y$ и $y = [\mathcal{E}]\eta$, то $\boxed{\eta = M_A^\mathcal{E} \cdot \xi}$ или $A([\mathcal{E}]\xi) = [\mathcal{E}]M_A^\mathcal{E}\xi$

Доказательство.
$$\left. \begin{aligned} A(x) &= A([\mathcal{E}]\xi) \downarrow \xrightarrow{\text{т. о. преобр вектора под действием } A} [A\mathcal{E}]\xi \downarrow \stackrel{(4)}{=} ([\mathcal{E}]M_A^\mathcal{E})\xi \downarrow = \text{ассоц.} = [\mathcal{E}](M_A^\mathcal{E} \cdot \xi) \downarrow \\ A(x) &= y = [\mathcal{E}]\eta \downarrow \end{aligned} \right\} \Rightarrow [\mathcal{E}]\eta = [\mathcal{E}](M_A^\mathcal{E} \cdot \xi) \Rightarrow \eta = M_A^\mathcal{E} \cdot \xi. \quad y = A(x), \eta = M_A^\mathcal{E} \cdot \xi. \quad \square$$

Лекция 9

31.03

Ранее было показано, что каждому ЛО $A \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ однозначно ставится в соответствие его матрица в фиксированном базисе $M_A^\mathcal{E} \in \mathfrak{M}_{n \times n}$ $A \rightarrow M_A^\mathcal{E}$. $\begin{pmatrix} A(e_1) & \dots & A(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} M_A^\mathcal{E}$ $[A\mathcal{E}] = [\mathcal{E}]M_A^\mathcal{E}$

Теорема 4.5. $\forall M \in \mathfrak{M}_{n \times n} \exists! A \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V}) : M_A^\mathcal{E} = M$ (\mathcal{E} - некоторый базис)

Доказательство. Рассмотрим $\mathcal{E} = (e_1 \dots e_n)$. Пусть $M = (m_{ij})_n^n$.

Рассмотрим систему векторов $\mathcal{V} \begin{cases} v_1 = m_{11}e_1 + \dots + m_{1n}e_n \\ \dots \\ v_n = m_{n1}e_1 + \dots + m_{nn}e_n \end{cases}$, т.е. $[\mathcal{V}] = [\mathcal{E}]M$. Ранее было доказано, что

$\exists! A \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V}) : A(e_i) = v_i \quad i = \overline{1, n}$. Пусть A такой ЛО, но тогда из того, что $[\mathcal{V}] = [\mathcal{E}]M_A^\mathcal{E} \Rightarrow \boxed{M_A^\mathcal{E} = M}$

То есть M будет матрицей ЛО A в базисе \mathcal{E} .

Докажем единственность. Пусть $A, B : M_A^\mathcal{E} = M_B^\mathcal{E} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow A(x) = A([\mathcal{E}]\xi) = [A\mathcal{E}]\xi = [\mathcal{E}]M_A^\mathcal{E}\xi = [\mathcal{E}]M_B^\mathcal{E}\xi = \dots = B(x) \Leftrightarrow A = B \quad \square$

Теорема 4.6. $M_{A+B}^\mathcal{E} = M_A^\mathcal{E} + M_B^\mathcal{E}$, \mathcal{E} - фиксированный базис.

Доказательство. $(A+B)(x) = (A+B)([\mathcal{E}]\xi) = [\mathcal{E}]M_{A+B}^\mathcal{E}\xi$. С другой стороны $A(x) + B(x) = [\mathcal{E}]M_A^\mathcal{E}\xi + [\mathcal{E}]M_B^\mathcal{E}\xi = [\mathcal{E}](M_A^\mathcal{E} + M_B^\mathcal{E})\xi \Rightarrow [\mathcal{E}]M_{A+B}^\mathcal{E}\xi = [\mathcal{E}](M_A^\mathcal{E} + M_B^\mathcal{E})\xi \quad \square$

Лемма 4.7. Если $\forall \xi \Rightarrow M_1\xi = M_2\xi$, то $M_1 = M_2$

Доказательство. Самостоятельно. Совет: рассмотреть $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Далее сокращаем на столбец (в случае произвольности ξ). $M_{A+B}^\mathcal{E} = M_A^\mathcal{E} + M_B^\mathcal{E}$ \square

Теорема 4.8. $M_{\alpha A}^\mathcal{E} = \alpha M_A^\mathcal{E}$

Доказательство. Самостоятельно. \square

Таким образом, установлено ВОС $A \leftrightarrow M$, сохраняющее линейные операции. Т.е. установлен изоморфизм $L(\mathbb{V}, \mathbb{V}) \sim \mathfrak{M}_{m \times n}$

Следствие 1. $\dim L(\mathbb{V}, \mathbb{V}) = n^2$

Теорема 4.9 (О преобразовании матрицы ЛО при смене базиса). Пусть $A \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$, $\mathcal{E} = (e_1 \dots e_n)$, $\mathcal{E}' = (e'_1 \dots e'_n)$ - базисы в \mathbb{V} . Тогда $M_A^{\mathcal{E}'} = T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}^{-1} M_A^\mathcal{E} T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$, где $[\mathcal{E}'] = [\mathcal{E}] T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$, т.е. $T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$ - матрица перехода от \mathcal{E} к \mathcal{E}' .

Доказательство. $x = [\mathcal{E}] \xi = [\mathcal{E}'] \xi$. $A(x) = A([\mathcal{E}] \xi) = [A\mathcal{E}] \xi = [\mathcal{E}] M_A^\mathcal{E} \xi = [\mathcal{E}] M_A^\mathcal{E} (T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'} \xi') = [\mathcal{E}] (M_A^\mathcal{E} T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}) \xi'$
 $A(x) = A([\mathcal{E}'] \xi') = \dots = [\mathcal{E}'] M_A^{\mathcal{E}'} \xi' = ([\mathcal{E}] T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}) M_A^{\mathcal{E}'} \xi' = [\mathcal{E}] (T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'} M_A^{\mathcal{E}'}) \xi' \Rightarrow [\mathcal{E}] (M_A^\mathcal{E} T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}) \xi' = [\mathcal{E}] (T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'} M_A^{\mathcal{E}'}) \xi'$,
 в силу произвольности $\xi' \Rightarrow M_A^\mathcal{E} T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'} M_A^{\mathcal{E}'} \Big| \cdot T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}^{-1} \Rightarrow T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}^{-1} M_A^\mathcal{E} T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'} = T^{-1} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}' (T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'} \rightarrow \mathcal{E}' M_A^\mathcal{E}) =$
 $(T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}^{-1} T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}) M_A^{\mathcal{E}'} = E \cdot M_A^{\mathcal{E}'} = M_A^{\mathcal{E}'}$ \square

Следствие 1. $\det M_A^\mathcal{E}$ не зависит от выбора базиса.

Доказательство. $\det M_A^{\mathcal{E}'} = \det (T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}^{-1} M_A^\mathcal{E} T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}) = \frac{1}{\det T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}} \det M_A^\mathcal{E} \cdot \det T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'} = \det M_A^\mathcal{E}$ \square

Определение. Определителем ЛО A называется $\det M_A^\mathcal{E}$ в любом базисе.

Теорема 4.10. $M_{A \circ B}^\mathcal{E} = M_A^\mathcal{E} \cdot M_B^\mathcal{E}$

Доказательство. Берем любой $x \in \mathbb{V}$. $(A \circ B)(x) = \dots = [\mathcal{E}] M_{A \circ B}^\mathcal{E} \xi$
 $A(B(x)) = A([\mathcal{E}] M_B^\mathcal{E} \xi) = [A\mathcal{E}] M_B^\mathcal{E} \xi = ([\mathcal{E}] M_A^\mathcal{E}) M_B^\mathcal{E} \xi = [\mathcal{E}] (M_A^\mathcal{E} \cdot M_B^\mathcal{E}) \xi \Rightarrow [\mathcal{E}] M_{A \circ B}^\mathcal{E} \xi = [\mathcal{E}] (M_A^\mathcal{E} \cdot M_B^\mathcal{E}) \xi$
 В силу произвольности $\xi \Rightarrow M_{A \circ B}^\mathcal{E} = M_A^\mathcal{E} \cdot M_B^\mathcal{E}$ \square

Примеры: $M_A^\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 \\ e'_2 = 2e_1 - e_2 \end{cases} \quad M_A^{\mathcal{E}'} = ?$$

$$T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad M_A^{\mathcal{E}'} = T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}^{-1} \cdot M_A^\mathcal{E} \cdot T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$$

$$(A|B) \underset{\text{строк}}{\sim} (E|A^{-1}B)$$

$$(T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'} | M_A^\mathcal{E}) \underset{\text{строк}}{\sim} (E | T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}^{-1} M_A^\mathcal{E}) \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

$$M_A^{\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Пример:

1. I - тождественный оператор, $\mathcal{E} = (e_1 \dots e_n)$ - любой базис.

$$\forall i = \overline{1, n} \Rightarrow I_{e_i} = e_i \Rightarrow M_I^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E$$

2. A - поворот на φ против часовой на плоскости. $A(\vec{i}) = \vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi$, $A(\vec{j}) = -\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi$. $M_A^{\{\vec{i}, \vec{j}\}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ Самостоятельно: $M_A^{\{\vec{i}+\vec{j}, \vec{i}-\vec{j}\}}$ - ?. Указание: восполнить матрицы перехода.

4.3 Обратный оператор и его свойства

Пусть \mathbb{V} ЛП над k , $A \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$, \mathcal{E} - базис в \mathbb{V} .

Определение. Оператор B называется обратным к A , если $A \circ B = B \circ A = I$. Обозначение: $B = A^{-1}$

Определение. Если A имеет обратный, то A называется обратимым.

1. $A^{-1} \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$, т. е. A^{-1} - ЛО

Теорема 4.11. Если A обратим, то

2. A^{-1} - единственный.

Доказательство. ① 1) $A^{-1}(x+y) = A^{-1}(I(x)+I(y)) = A^{-1}((A \circ A^{-1})(x) + (A \circ A^{-1})(y)) = A^{-1}(A(A^{-1}(x)) + A(A^{-1}(y))) = A^{-1}(A(A^{-1}(x) + A^{-1}(y))) = (A^{-1} \circ A)(A^{-1}(x) + A^{-1}(y)) = I(A^{-1}(x) + A^{-1}(y)) = A^{-1}(x) + A^{-1}(y) \Rightarrow A^{-1}(x+y) = A^{-1}(x) + A^{-1}(y)$

2) $A^{-1}(\alpha x) = \alpha(A^{-1}(x))$. Самостоятельно.

② Пусть B_1, B_2 - обратимые к A , тогда $B_1 = B_1 \circ I = B_1 \circ (A \circ B_2) = (B_1 \circ A) \circ B_2 = I \circ B_2 = B_2$ \square

Теорема 4.12. Если A обратим, то $M_{A^{-1}}^{\mathcal{E}} = (M_A^{\mathcal{E}})^{-1}$

Доказательство. $A \circ A^{-1} = A^{-1} \circ A = I$. $M_{A \circ A^{-1}}^{\mathcal{E}} = M_{A^{-1} \circ A}^{\mathcal{E}} = M_I^{\mathcal{E}}$

$M_A^{\mathcal{E}} \cdot M_{A^{-1}}^{\mathcal{E}} = M_{A^{-1}}^{\mathcal{E}} \cdot M_A^{\mathcal{E}} = M_I^{\mathcal{E}} = E \Rightarrow M_{A^{-1}}^{\mathcal{E}}$ - обратимая к $M_A^{\mathcal{E}}$, т.е. $M_{A^{-1}}^{\mathcal{E}} = (M_A^{\mathcal{E}})^{-1}$ \square

Следствие 1. Если A обратим, то в любом базисе $\det M_A^{\mathcal{E}} \neq 0$

Доказательство. $\exists A^{-1} \Rightarrow \exists (M_A^{\mathcal{E}})^{-1} \Leftrightarrow \det M_A^{\mathcal{E}} \neq 0$ \square

Теорема 4.13 (Критерий обратимости). Следующие утверждения эквивалентны:

1. $\exists A^{-1}$, т.е. A обратим

2. В некотором базисе \mathcal{E} $\det M_A^{\mathcal{E}} \neq 0$

3. A биективна (т.е. взаимно однозначно) отображает \mathbb{V} на всё \mathbb{V}

(Биекция $\mathbb{V} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{V} \exists! y \in \mathbb{V} : y = A(x), \forall y \in \mathbb{V} \exists! x \in \mathbb{V} : y = A(x)$)

Доказательство. $1^\circ \Rightarrow 2^\circ \Rightarrow 3^\circ \Rightarrow 1^\circ$

$1^\circ \Rightarrow 2^\circ$ уже доказано.

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$. $\det M_A^{\mathcal{E}} \neq 0 \Rightarrow$ СЛАУ $M_A^{\mathcal{E}} \xi = \eta$ всегда имеет единственное решение, т.е. $\forall \eta = [\mathcal{E}] \eta \exists! x = [\mathcal{E}] \xi :$

$y = A(x)$ и $\forall x = [\mathcal{E}] \xi \exists! y = [\mathcal{E}] \eta : y = A(x)$, т.е. $\eta = M_A^{\mathcal{E}} \xi$

$3^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Пусть A - биекция \mathbb{V} на \mathbb{V} . Тогда $\forall y \in \mathbb{V} \Rightarrow \exists! x : y = A(x)$. Тогда определим оператор B

следующим образом: $B : y \rightarrow x : y = A(x)$, т.е. тот x , из которого этот y получен. Тогда $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow (B \circ A)(x) = B(A(x)) = B(y) = x = I(x) \Rightarrow B \circ A = I$ и $\forall y \in \mathbb{V} \Rightarrow (A \circ B)(y) = A(B(y)) = A(x) = y = I(y) \Rightarrow A \circ B = I \Rightarrow B = A^{-1}$, т.е. A обратим. \square

Пусть \mathbb{V} - ЛП над k , $A \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ - базис. $M_A^{\mathcal{E}} = (a_{ij})_n^n$ - матрица A в базисе \mathcal{E}

$$\text{Рассмотрим } P_n(\lambda) = \det(M_A^{\mathcal{E}} - \lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^n (\lambda^n + C_1 \lambda^{n-1} + \dots + C_n)$$

Определение. $P_n(\lambda)$ называется характеристическим многочленом ЛО A .

Теорема 4.14. $P_n(\lambda) = \text{inv}$, т.е. не зависит от выбора базиса.

Доказательство. Пусть $\tilde{\mathcal{E}}$ - другой базис, тогда $\tilde{P}_n(\lambda) = \det(M_A^{\tilde{\mathcal{E}}} - \lambda E) = \det(T_{\mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}}^{-1} \cdot M_A^{\mathcal{E}} T_{\mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}} - T_{\mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}}^{-1}(\lambda E) T_{\mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}}) = \det((T_{\mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}}^{-1} - \lambda E) T_{\mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}}) = \frac{1}{\det T_{\mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}}} \cdot \det(M_A^{\mathcal{E}} - \lambda E) \det T_{\mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}} = \det(M_A^{\mathcal{E}} - \lambda E) = P_n(\lambda)$ \square

Лекция 10

07.04

Для справок: $C_k = (-1)^k \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} M_{j_1 \dots j_k}^{j_1 \dots j_k}$

В частности $C_1 = - \sum_j M_j = - \sum_{jj} a_{jj} \equiv_{\text{об}} -\text{Tr}(M_A^{\mathcal{E}}) \equiv_{\text{об}} -\text{Sp}(M_A^{\mathcal{E}})$ $\boxed{a_{11} + \dots + a_{nn}}$ - след матрицы.

Замечание. Tr, Sp любой квадратной матрицы не зависит от выбора базиса.

$$C_n = (-1)^n \det M_A^{\mathcal{E}}$$

4.4 Образ и ядро ЛО

Пусть \mathbb{V} - ЛП над k , $A \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$, $\mathcal{E} = \{e_1 \dots e_n\}$ - базис в \mathbb{V} .

Определение. $\text{Im } A = \{y \in \mathbb{V} : y = A(x), x \in \mathbb{V}\}$. Образ ЛО - совокупность образов всех элементов ЛП.

Определение. $\ker A = \{x \in \mathbb{V} : A(x) = \theta\}$. Ядро ЛО - совокупность всех элементов ЛП, которые A обращает в θ .

$$1. \text{Im } A = \text{span}(e_1), \dots, A(e_n)$$

Теорема 4.15. 2. $\text{Im } A$ - ЛППП of \mathbb{V}

$$3. \ker A - \text{ЛППП of } \mathbb{V}$$

Доказательство. 1° $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow x = [\mathcal{E}]\xi$.

$$\begin{aligned} A(x) &= A([\mathcal{E}]\xi) = [A\mathcal{E}]\xi \downarrow [A\mathcal{E}] = \left(A(e_1) \dots A(e_n) \right) \Rightarrow A(x) - \text{есть ЛК элементов строки } [A\mathcal{E}] \Rightarrow \\ &\Rightarrow A(x) \in \text{span}(A\mathcal{E}). \end{aligned}$$

С другой стороны $\forall y \in \text{span}(A\mathcal{E}) \Rightarrow \exists \alpha = [A\mathcal{E}]\alpha \downarrow = A([\mathcal{E}]\alpha) = A(x), x \in \mathbb{V}$.

2° $\text{Im } A = \text{span}(A\mathcal{E})$, всякая линейная оболочка есть ЛППП of $\mathbb{V} \Rightarrow \text{Im } A$ - ЛППП of \mathbb{V} .

3° а) $\forall x_1, x_2 \in \ker A \Rightarrow A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2) = \theta + \theta = \theta \Rightarrow x_1 + x_2 \in \ker A$.

б) $\forall x \in \ker A, \forall \lambda \in k \Rightarrow A(\lambda x) = \lambda A(x) = \lambda \theta = \theta \Rightarrow \lambda x \in \ker A$.

 \square

Пример: Пусть $\mathbb{V} = V_1 \oplus V_2 (\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow \exists! x_1 \in V_1, \exists! x_2 \in V_2 : x = x_1 + x_2)$

Оператор параллельного проектирования на V_1 . $\mathcal{P}(x) = x_1$. $\text{Im } \mathcal{P} = V_1, \ker \mathcal{P} = V_2$

$\tilde{\mathcal{P}}(x) = x_2$ - проектирование V_2 . $\text{Im } \tilde{\mathcal{P}} = V_2, \ker \tilde{\mathcal{P}} = V_1$. (рисунки добавлю позже)

Ранее было доказано, что $\det M_A^{\mathcal{E}} = \text{inv}$.

Определение. Поэтому число $\det M_A^{\mathcal{E}}$ обозначаем $\det A$ и назовем определителем ЛО A .

Определение. Рангом ЛО A назовем размерность его образа. $\text{Rg } A \stackrel{\text{def}}{=} \dim \text{Im } A$.

Теорема 4.16. $\text{Rg } A = \text{Rg } M_A^{\mathcal{E}}, \mathcal{E}$ - любой базис.

Доказательство. $\text{Rg } A = \dim \text{Im } A = \dim \text{span}(A\mathcal{E}) = \max$ число ЛНЗ элементов = (изоморфизм) = \max числу ЛНЗ столбцов $M_A^{\mathcal{E}} = \text{Rg } M_A^{\mathcal{E}} ([A\mathcal{E}] = [\mathcal{E}]M_A^{\mathcal{E}})$

После перехода в другой базис - есть изоморфизм, то $\text{Rg } M_A^{\mathcal{E}'} = \text{Rg } M_A^{\mathcal{E}}$. \square

Определение. Дефект ЛО A это размерность его ядра. $\text{def } A \stackrel{\text{def}}{=} \dim \ker A$

Теорема 4.17. $\dim \text{Im } A + \dim \ker A = \dim \mathbb{V}$

Доказательство. Пусть $\dim \mathbb{V} = n, \dim \text{Im } A = r$. Возьмем произвольный базис \mathcal{E} . Тогда $\forall x \in \ker A \Rightarrow x = [\mathcal{E}]\xi$ и $A(x) = [A\mathcal{E}]\xi = [\mathcal{E}]M_A^{\mathcal{E}}\xi = \theta = [\mathcal{E}]0$. Получили, что $[\mathcal{E}]M_A^{\mathcal{E}}\xi = [\mathcal{E}]0$, сокращая на базис, получим: $M_A^{\mathcal{E}}\xi = 0$ - ОСЛАУ. Ее общее решение - координаты всевозможных векторов, принадлежащих ядру. Общее решение есть ЛП \mathbb{V}_{sol} . $\mathbb{V}_{\text{sol}} = \text{span}(\Phi\text{CP}) \Rightarrow \dim V_{\text{sol}} = n - r \Rightarrow \dim \ker A = (\text{изоморфизм}) = \dim \mathbb{V}_{\text{sol}} = n - r = \dim \mathbb{V} - \dim \text{Im } A$. \square

1. A - обратим ($\exists A^{-1}$)

Теорема 4.18 (Доп. критерии обратимости). Следующие условия эквивалентны: 2. $\text{Im } A = \mathbb{V}$

3. $\ker A = \{\theta\}$

Замечание. Такие ядра (3°) называются тривиальными.

Доказательство. $1^\circ \Rightarrow 3^\circ \Rightarrow 2^\circ$.

$1^\circ \rightarrow 3^\circ$. A - обратим $\Rightarrow \det M_A^{\mathcal{E}} \neq 0 \Rightarrow M_A^{\mathcal{E}}\xi = 0$ имеет только тривиальное решение $\Rightarrow \ker A = \{\theta\}$.

$3^\circ \rightarrow 2^\circ$. $\ker A = \{\theta\} \Rightarrow \dim \ker A = 0 \Rightarrow \dim \text{Im } A = n \Rightarrow \text{Im } A = \mathbb{V}$.

$2^\circ \rightarrow 1^\circ$. $\text{Im } A = \mathbb{V} \Rightarrow \ker A = \{\theta\} \Rightarrow M_A^{\mathcal{E}}$ - невырожденная $\Rightarrow \exists (M_A^{\mathcal{E}})^{-1} \Rightarrow \exists A^{-1}$. \square

4.5 Собственные векторы и собственные значения ЛО

Пусть \mathbb{V} - ЛП над $k, A \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V}), \mathcal{E} = \{e_1 \dots e_n\}$ - базис в \mathbb{V} .

Определение. $h \in \mathbb{V}$ называется собственным вектором ЛО A , если $h \neq \theta$ и $\exists \lambda \in k : A(h) = \lambda h$, при этом λ называется собственным значением ЛО A . Говорят, что СВ h отвечает СЗ λ . Обозначение $h \sim \lambda$

Замечание. Если $h \sim \lambda$, то $\forall C \in k : C \neq 0 \Rightarrow Ch \sim \lambda$.

Доказательство. $1^\circ Ch \neq \theta$

$2^\circ A(Ch) = CA(h) = C\lambda h = \lambda(Ch)$ \square

Определение. Совокупность всевозможных СЗ of ЛО A называется его спектром. Обозначение $\sigma(A)$.

Пусть $P_n(\lambda) = \det(M_A^\mathcal{E} - \lambda E)$ - характеристический многочлен ЛО A .

Определение. Уравнение $P_n(\lambda) = 0$, т.е $\det M_A^\mathcal{E} - \lambda E = 0$ называется характеристическим уравнением.

Теорема 4.19. $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \in k \\ P_n(\lambda) = 0 \end{cases}$

Доказательство. $\Rightarrow \lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \begin{cases} \lambda \in k \\ \exists h \in \mathbb{V} : \begin{cases} h \neq \theta \\ A(h) = \lambda h \end{cases} \end{cases} \quad A(h) = \lambda h \Leftrightarrow (A - \lambda E)(h) = \theta \Leftrightarrow (\text{изоморфизм})$

$\Leftrightarrow (M_A^\mathcal{E} - \lambda E)\xi = 0$. Таким образом координаты СВ - это всевозможные нетривиальные решения этой квадратной ОСЛАУ. Оно обладает нетривиальным решением $\Leftrightarrow \det(M_A^\mathcal{E} - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow P_n(\lambda) = 0$

\Leftarrow Пусть $\begin{cases} \lambda \in k \\ P_n(\lambda) = 0 \end{cases} \Rightarrow (M_A^\mathcal{E} - \lambda E)\xi = 0$ обладает нетривиальным решением ξ^* . Тогда $h = [\mathcal{E}]\xi^*$ - есть

СВ, т.к $A(h) = A([\mathcal{E}]\xi^*) = [A\mathcal{E}]\xi^* = [\mathcal{E}]M_A^\mathcal{E}\xi^* = [\mathcal{E}](\lambda E\xi^*) = \lambda[\mathcal{E}]\xi^* = \lambda h \Rightarrow \lambda$ - СЗ.

Замечание. В поле \mathbb{C} характеристическое уравнение всегда имеет n корней с учетом их кратности (следствие основной теоремы алгебры). В поле \mathbb{R} характеристический многочлен может иметь менее n корней, или не иметь их вовсе. Т.е у ЛО в \mathbb{V} над полем \mathbb{C} всегда есть СЗ, а у ЛО в \mathbb{V} над \mathbb{R} может не быть СЗ.

Пример: A_φ - оператор поворота на плоскости на угол φ . $M_{A_\varphi}^{\{\vec{i}\vec{j}\}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} \cos \varphi - \lambda & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi - \lambda \end{vmatrix} = (\cos \varphi - \lambda)^2 + \sin^2 \varphi = 0 \Rightarrow \lambda = \cos \varphi \pm i \sin \varphi = e^{\pm i\varphi} \notin \mathbb{R} \text{ (если } \varphi \neq \pi k \text{)}$

$\varphi = 2\pi m \Rightarrow M_{A_\varphi}^{\{\vec{i}\vec{j}\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$

$(M_{A_\varphi} - \lambda E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{любой } \vec{h} \neq \vec{\theta} \text{ является СВ.}$

$\varphi = \pi + 2\pi m \Rightarrow M_{A_\varphi}^{\{\vec{i}\vec{j}\}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1$

$(M_{A_\varphi} - \lambda E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{любой } \vec{h} \neq \vec{\theta} \text{ является СВ.}$

□

Определение. Говорят, что $\lambda_0 \in \sigma(A)$ имеет алгебраическую кратность, равную $k \in \mathbb{N}$, если $P_n(\lambda_0) = P'(\lambda_0) = \dots = P^{(k-1)}(\lambda_0) = 0, P_n^{(k)}(\lambda_0) \neq 0$. Обозначени: $\text{AK}(\lambda_0) = k$.

Самостоятельно проверить, что это равносильно $P_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k Q_{n-k}(\lambda), Q_{n-k}(\lambda_0) \neq 0$

Определение. Геометрической кратностью $\lambda_0 \in \sigma(A)$ называется количество ЛНЗ СВ, отвечающих ему. Обозначение $\text{ГК}(\lambda)$

tg: @maksimqa

Лекция 11

Теорема 4.20. $\forall \lambda \in \sigma(A) \Rightarrow AK(\lambda) \geq GK(\lambda) \geq 1$.

Алгоритм нахождения СЗ и СВ:

1. Выбрать базис \mathcal{E} (произвольный) и записать $M_A^{\mathcal{E}}$.
2. Записать характеристическое уравнение и найти все его корни $\det(M_A^{\mathcal{E}} - \lambda E) = 0$. $P_n(\lambda) = 0$ и найти все его корни из поля k . Получим $\sigma(A)$
3. $\forall \lambda \in \sigma(A)$ решаем ОСЛАУ $(M_A^{\mathcal{E}} - \lambda E)\xi = 0$. Ее общее решение, за исключением нулевого столбца, дает координаты всевозможных СВ, отвечающих λ , в базисе \mathcal{E} .

4.6 Свойства собственных векторов и собственных значений ЛО.

Определение. Квадратная матрица $M = (m_{ij})_n$ называется диагональной, если $m_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Определение. $A \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ называется диагонализуемым, если \exists базис в \mathbb{V} : $M_A^{\mathcal{E}}$ — диагональная.

Теорема 4.21 (Критерий диагонализуемости). A - диагонализуем $\Leftrightarrow \exists$ базис из СВ $\mathcal{H} = \{h_1, \dots, h_n\}$ оператора A .

Доказательство. \Rightarrow Пусть A диагонализуем. Тогда $\exists \mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ - базис: $M_A^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$

тогда по определению матрицы ЛО:

$$\left. \begin{array}{l} A(e_1) = \alpha_1 e_1 + 0e_2 + \dots + 0e_n = \alpha_1 e_1 \\ A(e_2) = 0e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + 0e_n = \alpha_2 e_2 \\ \dots \\ A(e_n) = 0e_1 + 0e_2 + \dots + \alpha_n e_n = \alpha_n e_n \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \sigma(A) \text{ и}$$

$e_1 \sim \alpha_1, \dots, e_n \sim \alpha_n$ - СВ.

\Leftarrow Пусть $\mathcal{H} = \{h_1, \dots, h_n\}$ - базис из СВ. Тогда

$$\left. \begin{array}{l} A(h_1) = \lambda_1 h_1 \\ A(h_2) = \lambda_2 h_2 \\ \dots \\ A(h_n) = \lambda_n h_n \end{array} \right\} \Rightarrow M_A^{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ - диагональ-}$$

ная.

Обозначим $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda$

□

Теорема 4.22. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ - попарно различные СЗ ЛО A ; $\lambda_1 \sim h_1, \dots, \lambda_m \sim h_m$. Тогда $\{h_1, \dots, h_m\}$ - ЛНЗ.

Доказательство. Методом математической индукции.

Если $\boxed{m=1}$ то $\lambda_1 \sim h_1 \neq \theta \Rightarrow h_1$ - ЛНЗ, т.е для $m=1$ утверждение верно. (База)

Шаг: Пусть утверждение верно для $m=k$, т.е $\{h_1, \dots, h_k\}$ - ЛНЗ, покажем, что тогда $\{h_1, \dots, h_k, h_{k+1}\}$ -

ЛНЗ. Пусть $\underbrace{\alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_k h_k + \alpha_{k+1} h_{k+1}}_{\substack{\text{обращается в } \theta \\ \text{только в трив. случае}}} = \theta$ (1)

Тогда $A(\alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_k h_k + \alpha_{k+1} h_{k+1}) = A(\theta) = \theta$; $\alpha_1 A(h_1) + \dots + \alpha_k A(h_k) + \alpha_{k+1} A(h_{k+1}) = \theta$.

$\alpha_1 \lambda_1 h_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k h_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} h_{k+1} = \theta$ (2)

Вычтем из (2) (1) $\cdot \lambda_{k+1}$: $\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) h_1 + \dots + \alpha_k (\lambda_k - \lambda_{k+1}) h_k \neq 0$ (3).

Поскольку $\{h_1, \dots, h_k\}$ - ЛНЗ и $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - попарно различны, то (3) возможно $\Leftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_{k+1} = 0 \Leftrightarrow \{h_1, \dots, h_{k+1}\}$ - ЛНЗ. \square

Следствие 1 (Из критерия диагонализуемости). В комплексном ЛП A диагонализуем $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \sigma(A) \Rightarrow AK(\lambda) = GK(\lambda)$

Следствие 2. В вещественном ЛП A диагонализуем \Leftrightarrow все корни характеристического уравнения вещественны ($\forall \lambda : P_n(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$) и $\forall \lambda \in \sigma(A) \Rightarrow AK(\lambda) = GK(\lambda)$.

Пример: 1) ЛО поворота на плоскости; при $\varphi \neq \pi k$ не диагонализуем.

$$2) M_A^\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{cc} 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda \end{array} \right| = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$$

$$(M_A^\varepsilon - \lambda E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 0\xi_1 + 1\xi_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = C, \xi_1 \neq 0 \\ \xi_2 = 0 \end{cases} \quad h = C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} AK(1) = 2 \\ GK(1) = 1 \end{array}$$

Замечание. Если $\forall \lambda \in \sigma(A) \Rightarrow AK(\lambda) = GK(\lambda)$. Оператор может не диагонализироваться в вещественном ЛП, но диагонализироваться в комплексном ЛП. (Если характеристическое уравнение имеет не только вещественные корни)

Глава 5

Биленейные и квадратичные формы в вещественном ЛП

5.1 Биленейные формы

Пусть \mathbb{V} - ЛП над k .

Определение. Правило $B : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ (т.е. $\forall x, y \in \mathbb{V} \xrightarrow{B} B(x, y) \in \mathbb{R}$) : $\forall x, y, z \in \mathbb{V}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ выполнено:

$$\left. \begin{array}{l} 1^\circ B(\alpha x + \beta y, z) = \alpha B(x, z) + \beta B(y, z) \\ 2^\circ B(x, \alpha y + \beta z) = \alpha B(x, y) + \beta B(x, z) \end{array} \right\} \text{называется биленейной формой (БФ)}$$

Пусть $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ - базис в \mathbb{V} , $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n = [\mathcal{E}]\xi$, $y = \eta_1 e_1 + \dots + \eta_n e_n = [\mathcal{E}]\eta$.

$$B(x, y) = B([\mathcal{E}]\xi, [\mathcal{E}]\eta) = (\text{см. файл}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \eta_j \underbrace{B(e_i, e_j)}_{\in \mathbb{R}}. B(e_i, e_j) \stackrel{\text{об.}}{=} b_{ij}$$

$$\text{Определение. Матрицей БФ } B \text{ в базисе } \mathcal{E} \text{ называется } M_B^\mathcal{E} = \begin{pmatrix} B(e_1, e_1) & B(e_1, e_2) & \dots & B(e_1, e_n) \\ B(e_2, e_1) & B(e_2, e_2) & \dots & B(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_n, e_1) & B(e_n, e_2) & \dots & B(e_n, e_n) \end{pmatrix} =$$

$$= (b_{ij})_n^n$$

$$\text{С помощью нее получаем } \boxed{B(x, y) = \xi \vec{M}_B^\mathcal{E} \eta}_{\downarrow}$$

Определение. Общим видом БФ называется вид $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \xi_i \eta_j$, что кратко записывается $\xi \vec{M}_B^\mathcal{E} \eta$.

Определение. БФ B_1 и B_2 называются равными, если $\forall x, y \in \mathbb{V} \Rightarrow B_1(x, y) = B_2(x, y)$

Теорема 5.1. Если БФ B действуют в вещественном ЛП $\mathbb{V} : \dim V = n$, то $\exists \text{ БОС } B \leftrightarrow M$, где $M \in \mathfrak{M}_{n \times n}$

Доказательство. $\Leftrightarrow B \xrightarrow{\mathcal{E}} \exists! M = (b_{ij})_n^n$.

$$\Leftrightarrow M \xrightarrow{\mathcal{E}} B(x, y) = \xi \vec{M} \eta \quad (\text{более подробно см. файл})$$

□

Определение. БФ B называется симметричной, если $\forall x, y \in \mathbb{V} \Rightarrow B(x, y) = B(y, x)$

Теорема 5.2. БФ B симметрична $\Leftrightarrow (\exists \mathcal{E} \Rightarrow M_B^\mathcal{E} - \text{симметричная})$

Следствие 1. Симметричная БФ B в любом базисе имеет симметричную матрицу.

Теорема 5.3 (Преобразование БФ при смене базиса). Если $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ - базисы в \mathbb{V} и $[\mathcal{E}'] = [\mathcal{E}]T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$, то $M_B^{\mathcal{E}'} = T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}^t M_B^{\mathcal{E}} T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$.

Доказательство. $B(x, y) = \vec{\xi} M_B^{\mathcal{E}} \eta = (\vec{\xi})_{\downarrow}^t M_B^{\mathcal{E}} \eta_{\downarrow} = \left(T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}^t \xi'_{\downarrow} \right)^t M_B^{\mathcal{E}} \left(T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'} \eta'_{\downarrow} \right) = \left((\xi')_{\downarrow}^t T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}^t \right) M_B^{\mathcal{E}} \left(T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'} \eta'_{\downarrow} \right) =$
ассоц. $= \vec{\xi}' (T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}^t M_B^{\mathcal{E}} T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}) \eta'_{\downarrow}$
С другой стороны $B(x, y) = \vec{\xi}' M_B^{\mathcal{E}'} \eta'_{\downarrow}$, т.е. $\forall \vec{\xi}', \eta'_{\downarrow} \Rightarrow \vec{\xi}' M_B^{\mathcal{E}'} \eta'_{\downarrow} = \vec{\xi}' (T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}^t M_B^{\mathcal{E}} T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}) \eta'_{\downarrow}$. В силу произвольности $\vec{\xi}', \eta'_{\downarrow}$ (т.к. x, y - произвольные) $\Rightarrow M_B^{\mathcal{E}'} = T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}^t M_B^{\mathcal{E}} T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$. \square

5.2 Квадратичные формы в вещественном ЛП

Пусть \mathbb{V} - ЛП над \mathbb{R} .

Определение. Правило $g : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ (т.е. $\forall x \in \mathbb{V} \xrightarrow{\text{единств.}} g(x) \in \mathbb{R}$) называется квадратичной формой (КФ), если \exists симметричная БФ $B : g(x) = B(x, x)$ (т.е. симметричная БФ B порождает КФ g). При этом симметричную БФ B называют полярной к КФ g .

Теорема 5.4. $\exists \text{ ВОС } g \leftrightarrow \text{симметричная } B$

Доказательство. $(\Leftarrow) B \rightarrow g : \forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow g(x) = B(x, x)$

Замечание. g_1 и g_2 называются равными, если $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow g_1(x) = g_2(x)$.

(\Rightarrow) Пусть B - симметричная БФ, тогда $B(x+y, x+y) = B(x, x) + B(y, y) + B(x, y) + B(y, x) = B(x, x) + 2B(x, y) + B(y, y)$. Тогда, если B порождает g , то $g(x+y) = g(x) + 2B(x, y) + g(y) \Rightarrow B(x, y) = \frac{1}{2}(g(x+y) - g(x) - g(y))$, т.е. по любой КФ однозначно восстанавливается симметричная БФ, ее породившая. \square

Общий вид КФ: Если \mathcal{E} - базис в \mathbb{V} , $x = [\mathcal{E}]_{\downarrow} \xi$; $g(x) = B(x, x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \xi_j \underbrace{B(e_i, e_j)}_{b_{ij} \in \mathbb{R}} = \left| b_{ij} = b_{ji} \right| =$
 $= \sum_{i=1}^n b_{ii} (\xi_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n b_{ij} \xi_i \xi_j$

Определение. $M_g^{\mathcal{E}} \stackrel{\text{def}}{=} M_{B_{\text{пол}}}^{\mathcal{E}} = (b_{ij})_n^n$ - симметричная. Соответствующая $g(x) = \vec{\xi} M_g^{\mathcal{E}} \xi_{\downarrow}$.

Теорема 5.5. $M_g^{\mathcal{E}'} = T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}^t M_g^{\mathcal{E}} T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$.

Доказательство. Следует из связи КФ с полярной БФ (см. файл) \square

Определение. Базис \mathcal{E}' , в котором КФ имеет диагональную матрицу, т.е. $M_g^{\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$

называется каноническим, в нем КФ имеет вид $g(x) = \alpha_1 (\xi'_1)^2 + \dots + \alpha_n (\xi'_n)^2$, который также называется каноническим.

Теорема 5.6 (Лагранжа). Любая КФ невырожденным преобразованиями координат приводится к каноническому виду. $\forall g(x) = \sum_{i=1}^n b_{ij} \xi_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n b_{ij} \xi_i \xi_j \exists M = (m_{ij})_n^n : \det M \neq 0$ и $\xi' = M \xi$ дает $g(x) = \alpha_1 (\xi'_1)^2 + \dots + \alpha_n (\xi'_n)^2$.

Лекция 12

21.04

Доказательство. ММИ, см. файл + практические занятия. \square

Следствие 1. Невырожденное преобразование координат задает переход в другой базис, т.к. фактически $x = M \xi$ означает, что $M = T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}}^{-1}$, где \mathcal{F} - канонический базис. $[\mathcal{F}] = [\mathcal{E}] M^{-1}$. - формула перехода к каноническому базису.

Следствие 2. Для любой симметрической матрицы $B = (b_{ij})_n^n$ ($B^T = B$) существует невырожденная матрица $T = (t_{ij})_n^n$ ($\det T \neq 0$) : $T^t B T = \Lambda$ - диагональная матрица.

Доказательство. $B \leftrightarrow g = \xi^t B \xi = \chi^t \Lambda \chi$. Λ = по законам преобразования матрицы КФ при смене базисе $= T^t B T$, где $B = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}, [\mathcal{F}] = [\mathcal{E}] T$, при этом $T = M^{-1}$, $x = M \xi$. \square

5.3 Закон инерции КФ

Подробно см. файл. Кратко: пусть в исходном базисе $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}, x = [\mathcal{E}] \xi, g(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \xi_i \xi_j$.

Переходим невырожденными преобразованиями в канонический базис $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$. Тогда $x = [\mathcal{F}] \alpha, g(x) =$

$\sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i^2$. Рассмотрим базис $\mathcal{H} = \{h_1, \dots, h_n\}$. Будем считать, что $h_i = \begin{cases} f_i, & \text{если } \lambda_i = 0 \\ \frac{f_i}{\sqrt{|\lambda_i|}}, & \text{если } \lambda_i \neq 0 \end{cases}$

Тогда $g(x) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \tau_i^2$ (*), где $\chi = [\mathcal{H}] \tau$ и $\forall i = \overline{1, n} \Rightarrow \varepsilon_i \in \{-1; 0; +1\}$ $\left(\tau_i = \begin{cases} \chi_i, & \text{если } \lambda_i = 0 \\ \sqrt{|\lambda_i|} \chi_i, & \text{если } \lambda_i \neq 0 \end{cases} \right)$

Представление (*) называется нормальным видом КФ, а базис \mathcal{H} , в котором КФ имеет нормальный вид - нормальным Гауссом.

Можно заключить, что любая КФ в вещественном ЛП невырожденным преобразованием координат приводится к нормальному виду.

Определение. $p = N(\varepsilon_i = 1)$ - положительный индекс инерции, $q = N(\varepsilon_i = -1)$ - отрицательный индекс инерции, $d = N(\varepsilon_i = 0)$ - дефект КФ.

Ясно, что $p + q + d = n = \dim \mathbb{V}$

Поскольку канонический, а значит, и нормальный базисы определены неоднозначно, то возникает вопрос о корректности определения p, q, d .

Теорема 5.7 (Закон инерции квадратичных форм). $p, q, d = \text{inv}$, т.е. не зависят от выбора базиса.

Доказательство. Без доказательства, для справок Сандаков, стр. 250. \square

5.3.1 Классификация КФ

Знакоопределенные:

Определение. g называется положительно определенной, если $\forall x \in \mathbb{V} : x \neq \theta \Rightarrow g(x) > 0$

Определение. g называется отрицательно определенной, если $\forall x \in \mathbb{V} : x \neq \theta \Rightarrow g(x) < 0$

Квазизнакоопределенные:

Определение. g называется квазиположительно определенной, если $\forall x \in \mathbb{V} : x \neq \theta \Rightarrow g(x) \geq 0$ и $\exists x \neq \theta : g(x) = 0$

Определение. g называется квазиотрицательно определенной, если $\forall x \in \mathbb{V} : x \neq \theta \Rightarrow g(x) \leq 0$ и $\exists x \neq \theta : g(x) = 0$

Определение. g называется знакопеременной, если $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{V} : g(x_1) \cdot g(x_2) < 0$

Теорема 5.8. Пусть g - КФ в вещественном ЛП \mathbb{V} ($\dim \mathbb{V} = n$),

g - положительно определенная $\Leftrightarrow p = n; q, d = 0$ (1)

g - отрицательно определенная $\Leftrightarrow q = n; p, d = 0$ (2)

тогда g - квазиположительно определенная $\Leftrightarrow q = 0; p, d > 0$ (3)

g - квазиотрицательно определенная $\Leftrightarrow p = 0; q, d > 0$ (4)

g - знакопеременная $\Leftrightarrow p, q > 0$ (5)

Доказательство. Рассмотрим (1)

\Rightarrow Пусть g - положительно определенная. Тогда $\forall x \in \mathbb{V}, x \neq \theta \Rightarrow g(x) > 0$. Рассмотрим нормальный базис

$\mathcal{H} = \{h_1, \dots, h_n\}$. В нем $x = [\mathcal{H}]_{\downarrow}^T$ и $g(x) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \tau_i^2$.

Тогда $g(h_1) = \varepsilon_1 > 0, g(h_2) = \varepsilon_2 > 0, \dots, g(h_n) = \varepsilon_n > 0 \Rightarrow p = n$ ($q = d = 0$)

\Leftarrow Пусть $p = n$ ($q = d = 0$) \Rightarrow в нормальном базисе \mathcal{H} получим $\forall x \in \mathbb{V} g(x) = \tau_1^2 + \dots + \tau_n^2$. Поскольку $x \neq \theta$, то $\tau_1^2 + \dots + \tau_n^2 > 0 \Rightarrow g(x)$ - положительно определенная.

(2) - (5) - самостоятельно. □

Теорема 5.9 (Критерий Сильвестра (Критерий знакоопределенности КФ)). Пусть g действует в вещественном ЛП \mathbb{V} .

Тогда 1. g - положительно определенная $\Leftrightarrow \bigcirc M_1 > 0, \dots, \bigcirc M_n > 0$ (все главные угловые миноры M_g^ε положительны)

$$M_g^\varepsilon = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \quad \bigcirc M_1 = M_1^1 = b_{11} > 0, \bigcirc M_2 = M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \bigcirc M_n = M_{12\dots n}^{12\dots n} = \det M_g^\varepsilon > 0$$

2. g - отрицательно определенная $\Leftrightarrow \bigcirc M_1 < 0, \bigcirc M_2 > 0, \dots$ (знаки главных угловых миноров чередуются, начиная с отрицательного)

Доказательство. Для произвольного базиса - без доказательства. В нормальном базисе \mathcal{H}

$$g \text{ - положительно определенная } \Leftrightarrow p = n \Leftrightarrow M_g^{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E,$$

$$\textcircled{M_1} = \textcircled{M_2} = \dots = \textcircled{M_n} = 1 > 0$$

$$g \text{ - отрицательно определенная } \Leftrightarrow q = n \Leftrightarrow M_g^{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} = -E,$$

$$\textcircled{M_1} = \textcircled{M_3}; \dots = -1 < 0; \textcircled{M_2} = \textcircled{M_4}; \dots = 1 > 0 .$$

□

Глава 6

Полуторалинейные формы в комплексных ЛП

Лекция 12

21.04

6.1 Определение и общий вид ПФ в комплексном ЛП

Пусть \mathbb{V} - ЛП над \mathbb{C}

Определение. Закон (правило, функция) $B : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{C}$ (упорядоченная пара элементов $x, y \in \mathbb{V}$ ставит в соответствие комплексное число) называется полуторалинейной формой (ПФ), если $\forall x, y, z \in \mathbb{V}$

$$\begin{aligned} &1^\circ B(\alpha x + \beta y, z) = \alpha B(x, z) + \beta B(y, z) \\ &\text{и } \forall \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow 2^\circ B(x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha} B(x, y) + \bar{\beta} B(x, z) \quad (\bar{\alpha}, \bar{\beta} - \text{ комплексно сопряженные числа к } \alpha, \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Пусть } \mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\} - \text{ базис в } \mathbb{V}, x = [\mathcal{E}] \underset{\downarrow}{\xi}, y = [\mathcal{E}] \underset{\downarrow}{\eta}. \text{ Тогда } B(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \bar{\eta}_j \underbrace{B(e_i, e_j)}_{b_{ij}} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \xi_i \bar{\eta}_j - \text{ общий вид ПФ} \end{aligned}$$

6.2 Матрица ПФ. Преобразование матрицы ПФ при смене базиса

$$\textbf{Определение. } M_B^{\mathcal{E}} = (b_{ij})_n^n = \begin{pmatrix} B(e_1, e_1) & \dots & B(e_1, e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_n, e_1) & \dots & B(e_n, e_n) \end{pmatrix} \text{ называется матрицей ПФ } B \text{ в базисе } \mathcal{E}$$

С помощью нее получаем, что $B(x, y) = \vec{\xi} M_B^{\mathcal{E}} \bar{\eta}$

Теорема 6.1. Если $[\mathcal{E}'] = [\mathcal{E}] T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$, $\mathcal{E}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ - другой базис в \mathbb{V} , то $M_B^{\mathcal{E}'} = T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}^t M_B^{\mathcal{E}} T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$

Доказательство. См. файл. □

Существует ВОС между ПФ и квадратными комплекснозначными матрицами.

Доказательство. См. файл □

Определение. $B_1 = B_2$, если $\forall x, y \in \mathbb{V} \Rightarrow B_1(x, y) = B_2(x, y)$

Определение. ПФ называется эрмитовой, если $\forall x, y \in \mathbb{V} \Rightarrow B(x, y) = \overline{B(y, x)}$

Определение. $M = (m_{ij})_n^n$ называется эрмитовой (эрмитово симметричной), если $M^T = \overline{M}$

Пример:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}}$$

Теорема 6.2. ПФ B - эрмитова \Leftrightarrow в некотором базисе ее матрица является эрмитово симметричной.

Следствие 1. У эрмитовой ПФ в любом базисе матрица является эрмитово симметричной.

tg: @moksimga

Глава 7

Евклидовы и унитарные пространства

Лекция 13

28.04

7.1 Определение и примеры унитарных и евклидовых пространств

Определение. \mathbb{V} - ЛП над \mathbb{R} называется евклидовым (вещественным евклидовым пространством - ВЕП), если в нем определена функция $(,) : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R} : \forall x, y, z \in \mathbb{V}$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ выполнены следующие свойства:
 $1^\circ (x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

2° коммутативность: $(y, x) = (x, y)$

3° линейность по первому аргументу: $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$

Сама функция $(,)$ называется скалярным произведением (СП), а свойства $1^\circ - 3^\circ$ - аксиомами СП.

Замечание. Из 2° и $3^\circ \Rightarrow$ линейность по второму аргументу, т.е. $(x, \alpha y + \beta z) = \alpha(x, y) + \beta(x, z)$

Примеры: 1. ЛПВ(геом) $|\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \neq 0 \quad (\vec{x}, \vec{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} |\vec{x}| |\vec{y}| \cos(\angle \vec{x}, \vec{y}) \\ 0, |\vec{x}| |\vec{y}| = 0 \end{cases}$

2. \mathbb{R}^n (вещественные строки или столбцы длины или высоты n) $x = (\xi_1, \dots, \xi_n), y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$
 $(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \dots + \xi_n \eta_n, 1^\circ - 3^\circ$ - очевидно (самостоятельно)

3. $C[a, b]$ - вещественные функции, непрерывные на $[a, b]$ $(x(t), y(t)) = \int_a^b x(t)y(t)dt, 1^\circ - 3^\circ$ - очевидно (самостоятельно)

Определение. \mathbb{V} - ЛП над \mathbb{C} называется евклидовым (комплексным евклидовым пространством - КЕП), если в нем определена функция $(,) : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{C} : \forall x, y, z \in \mathbb{V}$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ выполнены следующие свойства:
 $1^\circ (x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

2° коммутативность: $(y, x) = \overline{(x, y)}$

3° линейность по первому аргументу: $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$

Сама функция $(,)$ называется скалярным произведением (СП), а свойства $1^\circ - 3^\circ$ - аксиомами СП.

Замечание. Из 2° и $3^\circ \Rightarrow$ линейность по второму аргументу, т.е. $(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}(x, y) + \overline{\beta}(x, z)$

Примеры:

1. \mathbb{C}^n (комплексные строки или столбцы длины или высоты n) $x = (\xi_1, \dots, \xi_n), y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$
 $(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \xi_1 \overline{\eta_1} + \xi_2 \overline{\eta_2} + \dots + \xi_n \overline{\eta_n}$, $1^\circ - 3^\circ$ - очевидно (самостоятельно)

2. $\mathbb{C}[a, b]$ - комплексно-значные функции вещественных переменных, непрерывные на $[a, b]$

$(x(t), y(t)) = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt$, $1^\circ - 3^\circ$ - очевидно (самостоятельно)

$x(t) = e^{int} = \cos nt + i \sin nt$, $\mathbb{C}[0, 2\pi], m, n \in \mathbb{Z}$

$y(t) = e^{imt} = \cos mt + i \sin mt$

$$(x(t), y(t)) = \int_0^{2\pi} e^{int} e^{-imt} dt = \begin{cases} m = n \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \\ m \neq n \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} dt = \frac{1}{i(n-m)} e^{i(n-m)t} \Big|_0^{2\pi} = 0 \end{cases}$$

\mathbb{E} - ВЕП (\equiv евклидово)

Дальнейшее обозначение:

\mathbb{U} - КЕП (\equiv унитарное)

7.2 Нормированное ЛП

Пусть \mathbb{V} - ЛП над k

Определение. \mathbb{V} называется нормированным ЛП (НЛП), если в нем определена функция $\|\cdot\| : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$1^\circ \|x\| > 0, \text{ причем } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

причем $\forall x, y \in \mathbb{V} \forall \alpha \in k$ выполнены: 2° Однородность: $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

$$3^\circ \text{ Неравенство треугольника: } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Сама функция $\|\cdot\|$ называется нормой, а свойства $1^\circ - 3^\circ$ - аксиомами нормы.

В \mathbb{E} и \mathbb{U} нормой называют число $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, свойства $1^\circ - 2^\circ$ - очевидно (самостоятельно)

Примеры:

1. ЛПВ (геом.) $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = |\vec{x}|$

2. \mathbb{R}^n $\|x\| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}$ \mathbb{C}^n $\|x\| = \sqrt{|\xi_1|^2 + \dots + |\xi_n|^2}$

3. $C[a, b]$ $\|x(t)\| = \sqrt{\int_a^b x^2(t) dt}$ $\mathbb{C}[a, b]$ $\|x(t)\| = \sqrt{\int_a^b |x^2(t)| dt}$. В частности $\|e^{imt}\| = \sqrt{2\pi}$

Лемма 7.1. Если $x \neq \theta$, то $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$

Доказательство. $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|^2 \stackrel{2^\circ}{=} \frac{1}{\|x\|} \|x\| = 1$

□

Теорема 7.2 (Неравенство Коши-Буняковского). $\forall x, y \in \mathbb{E}(\mathbb{U}) \Rightarrow |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Доказательство. Для \mathbb{E} (для \mathbb{U} в файле)

Если $y = \theta$, то равенство выполнено. Пусть $y \neq \theta$. Рассмотрим $0 \leq (x - \lambda y, x - \lambda y) = (x, x) - \lambda(y, x) - \lambda(x, y) + \lambda^2(y, y) = \|x\|^2 - 2\lambda(x, y) + \lambda^2 \underbrace{\|y\|^2}_{>0}$ - квадратный многочлен от $\lambda \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{D}{4} = (x, y)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0 \Rightarrow (x, y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 \Rightarrow |(x, y)| \leq \|x\| \|y\| \quad \square$$

Замечание. $(x - \lambda y, x - \lambda y) = 0 \Leftrightarrow x - \lambda y = \theta$, т.е. $\{x, y\}$ - ЛЗ, т.е. равенство в неравенстве Коши-Буняковского достигается $\Leftrightarrow \{x, y\}$ - ЛЗ.

Замечание. В евклидовом пространстве можно ввести понятие угла между ненулевыми векторами $x, y : x, y \stackrel{\text{def}}{=} \arccos \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}$

Примеры. Реализация неравенства Коши-Буняковского в различных НЛП:

$$1. \text{ ЛПВ } |(\vec{x}, \vec{y})| \leq |\vec{x}| |\vec{y}|$$

$$2. \mathbb{R}^n (\xi_1 \eta_1 + \dots + \xi_n \eta_n)^2 \leq (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)(\eta_1^2 + \dots + \eta_n^2)$$

$$\mathbb{C}^n |\xi_1 \bar{\eta}_1 + \dots + \xi_n \bar{\eta}_n|^2 \leq (|\xi_1|^2 + \dots + |\xi_n|^2)(|\eta_1|^2 + \dots + |\eta_n|^2)$$

$$3. C[a, b] \left(\int_a^b x(t) y(t) dt \right)^2 \leq \int_a^b x^2(t) dt \leq \int_a^b y^2(t) dt$$

$$\mathbb{C}[a, b] \left| \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt \right|^2 \leq \int_a^b |x(t)|^2 dt \int_a^b |y(t)|^2 dt$$

Докажем теперь 3° (неравенство треугольника)

Доказательство. В \mathbb{E} (для \mathbb{U} см. файл)

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq \|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2 \stackrel{\text{К-Б}}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = \\ &= \underbrace{(\|x\| + \|y\|)^2}_{\geq 0} \Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \square \end{aligned}$$

7.3 Общий вид СП

Пусть $\mathbb{V} = \mathbb{E}$, $\dim V = n$, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ - некоторый базис в \mathbb{V} ,

$$\begin{aligned} x &= [\mathcal{E}] \xi = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \\ y &= [\mathcal{E}] \eta = \sum_{j=1}^n \eta_j e_j \end{aligned}$$

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i, \sum_{j=1}^n \eta_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \xi_i (e_i, \sum_{j=1}^n \eta_j e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \eta_j \underbrace{(e_i, e_j)}_{\gamma_{ij}} \quad \gamma_{ij} = (e_i, e_j) = (e_j, e_i) = \gamma_{ji}$$

Определение. $\Gamma^{\mathcal{E}} = (\gamma_{ij})_n^n$ называется матрицей Грама базиса \mathcal{E}

$$\text{Общий вид СП: } (x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \eta_j \gamma_{ij} = \xi \underset{\downarrow}{\Gamma^{\mathcal{E}}} \eta - \text{симметрическая БФ.}$$

Какими свойствами должна обладать БФ $B(x, y)$, чтобы она порождала СП?

Любая БФ, удовлетворяющая свойству 3° (и линейности по второму аргументу) свойства 2° выполнены \Leftrightarrow БФ симметрическая.

Свойство 1° выполнено \Leftrightarrow симметрическая БФ $B(x, y)$ порождает положительно определенную КФ \Leftrightarrow матрица симметрической БФ имеет положительные главные угловые миноры.

Итог: любая симметрическая БФ, порождающая положительно определенную КФ, порождает в вещественном ЛП скалярное произведение $\Rightarrow \Gamma^{\mathcal{E}}$ симметрическая и ее главные угловые миноры > 0 .

$$\begin{aligned} \text{Пусть } \mathbb{V} = \mathbb{U}, \dim V = n, \mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\} - \text{некоторый базис в } \mathbb{V}, \\ x = [\mathcal{E}] \xi = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \\ y = [\mathcal{E}] \eta = \sum_{j=1}^n \eta_j e_j \end{aligned}$$

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i, \sum_{j=1}^n \eta_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \xi_i \left(e_i, \sum_{j=1}^n \eta_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \underbrace{\eta_j}_{\gamma_{ij}} (e_i, e_j) \quad \gamma_{ij} = (e_i, e_j) = \overline{(e_j, e_i)} = \overline{\gamma_{ji}}$$

Общий вид СП в \mathbb{U} : $(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \overline{\eta_j} \gamma_{ij} = \xi \downarrow \Gamma^{\mathcal{E}} \overline{\eta}$ - эрмитова ПФ.

Какими свойствами должна обладать ПФ $B(x, y)$, чтобы она порождала СП в комплексном ЛП?

Любая ПФ, удовлетворяющая свойству 3° (и линейности по второму аргументу) свойства 2° выполнены

\Leftrightarrow ПФ эрмитова (эрм. симм.) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$ - эрмитово симм. матрица ($M^T = \overline{M} \Leftrightarrow M^* = M$)

Свойство 1° выполнено \Leftrightarrow эрмитова ПФ $B(x, y)$ порождает положительно определенную КФ \Leftrightarrow матрица эрмитово ПФ имеет положительные главные угловые миноры.

Итог: любая эрмитово ПФ, порождающая положительно определенную КФ, порождает в комплексном ЛП скалярное произведение $\Rightarrow \Gamma^{\mathcal{E}}$ эрмитова и ее главные угловые миноры > 0 .

7.4 ОНБ В $\mathbb{E}(\mathbb{U})$

Пусть $\mathbb{V} = \mathbb{E}$ (или \mathbb{U})

Определение. $x, y \in \mathbb{V}$ называются ортогональными, если $(x, y) = 0$. Обозначение: $x \perp y$

Определение. Базис $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ называется ортогональным (ОБ), если $\forall i, j = \overline{1, n} : i \neq j \Rightarrow (e_i, e_j) = 0$

Определение. Базис \mathcal{E} называется ортонормированным (ОНБ), если $\forall i, j = \overline{1, n} \Rightarrow (e_i, e_j) = \delta_{ij}$

Определение. Система векторов $\{a_1, \dots, a_m\}$ называется ортогональной (ОС), если $\forall i, j = \overline{1, m} : i \neq j \Rightarrow (a_i, a_j) = 0$

Определение. Система векторов $\{a_1, \dots, a_m\}$ называется ортонормированной (ОНС), если $\forall i, j = \overline{1, m} \Rightarrow (a_i, a_j) = \delta_{ij}$

Замечание. ОС = ОБ, если она является базисом. ОНС = ОНБ, если она является базисом.

$$\text{Замечание. } \Gamma_{\text{ОБ}} = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \forall i = \overline{1, n} \Rightarrow \lambda_i > 0$$

$$\Gamma_{\text{ОНБ}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E \Rightarrow \text{вид СП в ОБ:}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(x, y) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i \eta_i & \mathbb{E}(x, y) &= \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i \\ \mathbb{U}(x, y) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i \overline{\eta_i} & \mathbb{U}(x, y) &= \sum_{i=1}^n \xi_i \overline{\eta_i} \end{aligned}$$

Вид СП в ОНБ:

tg: @moksimqa