Глава 1

Теория систем линейных алгебраических уравнений

Лекция 3

24.02

1.1 Основные определения

Пусть А $= (a_{ij})^n_m,\ a_{ij} \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \quad \underset{\downarrow}{b} = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vdots \\ \vec{b}_m \end{pmatrix} - , \quad \underset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vdots \\ \vec{x}_n \end{pmatrix}.$

Рассмотрим $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ (1). ИЛи в координатной форме $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ $(\tilde{1}).(1),(\tilde{1})-$ СЛАУ. (1) - векторная форма записи. $(\tilde{1})$ - координатная форма записи.

Определение. Частным решением СЛАУ (1) называют $\underset{\downarrow}{\alpha} = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_m \end{pmatrix}$ $A\underset{\downarrow}{\alpha} = \underset{\downarrow}{b}$ - верное векторное равенство. (или это упорядоченный набор чисел $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$: при подстановке в $(\tilde{1})$ вместо набора $(x_1, \dots, x_n)$ получается верное равенство)

Определение. Совокупность всех частных решений называется общим решением СЛАУ.

Определение. СЛАУ называется <u>совместной</u>, если она имеет хотя бы одно решение. В противном случае СЛАУ <u>несовместена</u> (решений нет).

$A' = (a_{ij})^{n'}_{m'},\ \underset{\downarrow}{b'} = \begin{pmatrix} \vec{b'}_1 \\ \vdots \\ \vec{b'}_m \end{pmatrix}$

Определение. СЛАУ $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ и $A'\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b'}$ называются равносильными (эквивалентыми), если $\boxed{\text{n'=n}}$ и общие решения совпадают. При этом $(n' = n)$ несовместные СЛАУ также эквиваленты.

Замечание. m' не обязательно совпадает с m

1.2 Квадратные СЛАУ. Правило Крамера.

Пусть $\boxed{\text{m=n}}$, т.е $A = (a_{ij})_n^n$ - квадратная матрица. $\underset{\downarrow}{b} = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vdots \\ \vec{b}_n \end{pmatrix}$ $\underset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vdots \\ \vec{x}_n \end{pmatrix}$

Теорема 1.1 (Теорема Крамера). *Если $\Delta = detA \neq 0$, то СЛАУ $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ (1) имеет единственное решение, причем его можно найти по правилу Крамера:* $\boxed{x_k = \frac{\Delta k}{\Delta}}$, *$k = \overline{1,n}$, где $\Delta_k = detA_k, A_k$ получена из $A = \begin{pmatrix} \underset{\downarrow}{a_1} \dots \underset{\downarrow}{a_n} \end{pmatrix}$ путем заменой $\underset{\downarrow}{a_k}$ и $\underset{\downarrow}{b}$*

Доказательство. $\Delta = detA \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$. Тогда $A^{-1}(A\underset{\downarrow}{x}) = A^{-1}\underset{\downarrow}{b}$. $(A^{1}A)\underset{\downarrow}{x} = A^{-1}\underset{\downarrow}{b}.\underset{\downarrow}{x} = A^{-1}\underset{\downarrow}{b}$. Проверим, что $\underset{\downarrow}{x} = A^{1}\underset{\downarrow}{b}$ является решением (1). $A(A^{-1}\underset{\downarrow}{b}) = (AA^{-1})\underset{\downarrow}{b} = E\underset{\downarrow}{b} = \underset{\downarrow}{b}$ - верно. Проверим единственность. Пусть $A\underset{\downarrow}{\alpha'} = \underset{\downarrow}{b}$ и $A\underset{\downarrow}{\alpha''} = \underset{\downarrow}{b}$. Тогда $A(\underset{\downarrow}{\alpha'} - \underset{\downarrow}{\alpha''}) = A\underset{\downarrow}{\alpha'} - A\underset{\downarrow}{\alpha''} = \underset{\downarrow}{b} - \underset{\downarrow}{b} = \underset{\downarrow}{0}$. Тогда $\underset{\downarrow}{\alpha'} - \underset{\downarrow}{\alpha''} = A^{-1}\underset{\downarrow}{0} = \underset{\downarrow}{0}$, т.е $\underset{\downarrow}{\alpha'} = \underset{\downarrow}{\alpha''}$, т.е решение одно

Имеем $\underset{\downarrow}{x} = A^{-1}\underset{\downarrow}{b} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n_1} \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vdots \\ \vec{b}_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} A_{k1}b_k \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} A_{kn}b_k \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \vec{\Delta}_1 \\ \vdots \\ \vec{\Delta}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\Delta}_1}{\Delta} \\ \vdots \\ \frac{\vec{\Delta}_n}{\Delta} \end{pmatrix}$

для $k = 1\Delta_k = \begin{matrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix} = b_1A_{11} + \dots + b_nA_{n1}$ Остальные Δ_k аналогично □

Следствие 1. *Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из $\Delta_k \neq 0$, то квадратная СЛАУ $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ несовместна.*

Доказательство. Рассмотрим $A^T(A\underset{\downarrow}{x}) = (A^TA)\underset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\underset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \Delta & 0 \end{pmatrix}\underset{\downarrow}{x} =$ $\Delta E\underset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} \Delta\vec{x}_1 \\ \vdots \\ \Delta\vec{x}_n \end{pmatrix}$. С другой стороны $A^T\underset{\downarrow}{b} = \begin{pmatrix} \vec{\Delta}_1 \\ \vdots \\ \vec{\Delta}_n \end{pmatrix}$, т.е $\begin{cases} \Delta x_1 = \Delta 1, \\ \dots \\ \Delta x_n = \Delta n \end{cases}$, но $\Delta = 0$. Если хотя бы один из $\Delta_k \neq 0$, то $x_k * 0 = \Delta_k \neq 0$, что невозможно. □

1.3 Метод Гаусса (Гаусса-Жордана Ийордана) исследования СЛАУ

Рассмотрим прямоугольную СЛАУ $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}, A = (a_{ij})_m^n$ - основная матрица системы. $\underset{\downarrow}{b}$ - столбец правых частей. $(A|\underset{\downarrow}{b}) = \begin{pmatrix} [ccc|c]\underset{\downarrow}{a_1} & \dots & \underset{\downarrow}{a_n} & \underset{\downarrow}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [ccc|c]a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ - <u>расширенная матрица СЛАУ</u>

Определение. Элементарными операциями с СЛАУ называются следующие операции: 1. перестановка местами уравнений системы.

2. умножение обеих частей на число, отличное от нуля.

3. прибавление к одному уравнению СЛАУ другого ее уравнения

Теорема 1.2. *Элементарные операция СЛАУ приводят к эквивалентой ей СЛАУ.*

Обозначение. Пусть $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ приводятся элементарными операция к $A'\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$, то что эти СЛАУ эквиваленты(равносильны) обоззначатся $A\underset{\downarrow}{x} \Leftrightarrow A'\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b'}$ либо $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b} \sim A'\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$.
Легко знаметить, что элементарные операции с СЛАУ взаимно однозначно можно сопоставить элементарные операции со строками расширенной матрицы СЛАУ.

Идея метода Г-Ж. $(A|\underset{\downarrow}{b}) \sim (\underbrace{A'}_{\text{ТФ}}|\underset{\downarrow}{b'})$. Прямой ход $\begin{pmatrix} [ccc|c]a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ $\sim$ эл. преобр. только строк $\sim$

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1r} & \dots & a'_{1n} & b_1 \\ 0 & \dots & & \dots & a'_{1n} & b_1 \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix} (2)$$

Замечание. Мы считаем, что переменные СЛАУ занумерованы таким образом, что не требуется при приведение к ТФ переставлять столбцы. Столбцы A можно прееставлять, $\underset{\downarrow}{b}$ закреплен.

Рассмотрим расширеннную мтарицу $(2)\left(a'_{11}\right)$. Тогда в эквивалентной СЛАУ будет уравнение $0 * x_1 + \dots + 0 * x_n = b_{r+1}$. Если $b_{r+1} \neq 0$, то эквивалентная СЛАУ несовместна $\Rightarrow$ исходная СЛАУ несовместна. Если же $b_{r+1} = 0$, то $(A'|\underset{\downarrow}{b'})$ имеет ТФ и ее $Rg(A'|\underset{\downarrow}{b'}) = Rg(A') = r$. Тогда обратнымх одом приводим расширенную матрицу к виду: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Т.е фактически: $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b} \sim A'\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b'} \sim$

$$\underbrace{A''\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b''}}_{\text{в коорд. форме:}\begin{cases} x_1 + a''_{1r+1}x_{r+1} + \dots + a''_{rn}x_n = b''_1 \\ \dots \\ x_r + a''_{rr+1}x_{r+1} + \dots + a''_{rn}x_n = b''_r \end{cases}}$$

Тогда переменные $x_1, \dots, x_r$ назовем главными, а $x_{r+1}, \dots, x_n$ - свободными. Перенесем свободные в правую часть: $\begin{cases} x_1 = b''_1 - a''_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a''_{1n}x_n \\ \dots \\ x_r = b''_r - a''_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a''_{rn}x_n \end{cases}$ Видим, что при особых значениях свободных переменных $x_{r+1}, \dots, x_n$ можно отыскать значения главных $x_1, \dots, x_r$ и таким образом получить различные решения СЛАУ $A''\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b''}$, т.е решения $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$(т.к они эквиваленты)

Покажем, что $\begin{cases} x_1 = b_1'' - a_{1r+1}'' x_{r+1} - \dots - a_{1n}'' x_n \\ \dots \\ x_r = b_r'' - a_{rr+1}'' x_{r+1} - \dots - a_{rn}'' x_n \\ x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \end{cases}$ Исчерпывая всевозможные решения $A'' \underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ (а значит и исходной СЛАУ $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$)

Пусть $\exists \underset{\downarrow}{\alpha} = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n \end{pmatrix}$ – решение $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$. Поскольку $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b} \sim A''\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b''}$, то $A''\underset{\downarrow}{\alpha} = \underset{\downarrow}{b''}$. Тогда в (3) положим $x_{r+1} = \alpha_{r+1}, \dots x_n = \alpha_n$ и найдем из (3) $x_1 = \beta_1, \dots x_r = \beta_r$. Тогда $\underset{\downarrow}{x} = cvec$- решение $A''\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b''}$

Тогда $A''(\underset{\downarrow}{x} - \underset{\downarrow}{\alpha}) = A''\underset{\downarrow}{x} - A''\underset{\downarrow}{\alpha} = \underset{\downarrow}{b''} - \underset{\downarrow}{b''} = \underset{\downarrow}{0}$. Тогда: $\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 = 0 - a_{r+1}'' * 0 - \dots - a_{1n}'' * 0 = 0 \\ \beta_r - \alpha_r = 0 - a_{rr+1}'' * 0 - \dots - a_{rn}'' * 0 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 \\ \dots \\ \beta_r = \alpha_r \end{cases}$, т.к $\underset{\downarrow}{x} - \underset{\downarrow}{\alpha} = cvec$ То чтобы получить решение $\underset{\downarrow}{\alpha}$ исходной СЛАУ $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$, нужно свободные переменным придать значения $x_{11} = \alpha_{11}, \dots, x_n = \alpha_n$. Таким образом (3) исчерпывает все решения СЛАУ $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ и такой вид решения называется общим решением по методу Гаусса(Г-Ж.)
Замечание. Иногда свободным переменным придают значения $C_1, \dots, C_{n-r}$, т.е

Таким образом, в случаях совместности СЛАУ ее общее решение является $n - r$ параметрическим множеством.

1cm

tg: @moksimqa