Глава 1

Матрицы

Лекция 1

10.02

1.1 ЛЗ и ЛНЗ строк(столбцов) матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a_1} \\ \vdots \\ \vec{a_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{\downarrow}{a_1} & \dots & \underset{\downarrow}{a_n} \end{pmatrix} \qquad \vec{a_i} = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \qquad \underset{\downarrow}{a_j} = \begin{pmatrix} a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Определение. Система столбцов $\underset{\downarrow}{a_{j1}} \dots \underset{\downarrow}{a_{jn}}$ называется ЛЗ, если $\exists$ нетривиальная ЛК этих столбцов, дающая нулевой столбец. $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) : |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n| \neq 0$, причем $\alpha_1 \underset{\downarrow}{a_{j1}} + \dots + \alpha_k \underset{\downarrow}{a_{jk}} = \underset{\downarrow}{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Если это равенство возможно только при $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, то система столбцов называется ЛНЗ.

Определение. Аналогично определяется ЛЗ и ЛНЗ строк матрицы.

Лемма 1.1. *Если система столбцов содержит нулевой столбец, то она ЛЗ.*

Лемма 1.2. *Если система столбцов содержит ЛЗ подсистему, то она тоже ЛЗ.*

Лемма 1.3. *Любая подсистема ЛНЗ системы столбцов является ЛНЗ.*

Теорема 1.4 (Критерий ЛЗ)**.** *Система столбцов ЛЗ $\Leftrightarrow$ один из них является ЛК комбинацией остальных.*

Для строк аналогично

1.2 Ранг матрицы.

$A = (a_{ij})_m^n$. $1 \leqslant k \leqslant min(m, n)$. Выберем в матрице A произвольно k строк: $i_1, \dots, i_k$ и k столбцов и рассмотрим матрицу B, распологающуюся на этих строк и и в этих столбцах.

Определение. Число $M\begin{matrix} j_1 \cdots j_k \\ i_1 \cdots i_k \end{matrix} = detB$ называется минором k-ого порядка матрицы A. Краткое обозначение M_k

Лемма 1.5. *Если в матрице A все* $M_k = 0$, *то все* $M_{k+1} = 0$ *(если они имеются).*

Доказательство. поскольку любой M_{k+1} является ЛК $(k+1)$ минора M_k, а все $M_k = 0, \Rightarrow M_{k+1} = 0.$ □

Определение. Рангом ненулевой матрицы $A = (a_{ij})_m^n$ называется такое число $r \in \mathbb{N}$:

1)$\exists M_r \neq 0$ 2)$\forall M_{r+1} = 0$(если они имеются)

Определение. Ранг нулевой матрицы по определению полагают равным нулю.

Обозначение. $RgA, rgA, rangA, rankA$

Пример. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 9 & 9 & 9 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} = M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -4 \quad \exists M_{12} \neq 0 \forall M_3 = 0,$ т.к $\vec{a_3} = \vec{a_2} = \vec{a_1} \Rightarrow$ $RgA = 2$

Определение. Пусть $RgA = r$. Любой ненулевой M_r называется базисным, а строки и столбцы, на которых он располагается соотвественно называются базисными строками и базисными столбцами.

Теорема 1.6.
1.*Базисные строки и базисные столбцы матрицы A ЛНЗ.*
2.*Любые строки(столбцы) матрицы Аявляются ЛК базиса.*

Доказательство. 1.(от противного)(для столбцов). Пусть базисные столбцы ЛЗ. Тогда один из них является ЛК остальных. Тогда в M_r, который располагается в этих столбцах. Один столбец также является ЛК остальных$\Rightarrow$ $M_r = 0$ (по свойству det) - противоречие $\Rightarrow$ базисные столбцы ЛНЗ.

2. Пусть $M\begin{matrix} i_1 \dots i_r \\ \\ j_1 \dots j_r \end{matrix} \neq = 0$ Рассмотрим $D = \begin{pmatrix} a_{i1j1} & \dots & a_{i1jr} & \dots & a_{i_1 j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{irj1} & \dots & a_{irjr} & \dots & a_{i_r j} \\ a_{ij_1} & \dots & a_{ij_r} & \dots & a_{ij} \end{pmatrix}$. Возможны случаи:

а)$\begin{cases} i \notin i_1 \dots i_r \\ i \notin j_1 \dots j_r \end{cases} \Rightarrow detD = M_{r+1} = 0$

б) $\left[\begin{array}{l} i \in i_1 \dots i_r \\ j \in j_1 \dots j_r \end{array}\right. \Rightarrow detD = 0$ (по свойству det).

С другой стороны $detD =$ (по последней строке) $= c_{j1}a_{ij1} + \dots + c_{jr}a_{ijr} + \dots + c_j a_{ij} = 0$

c_{jl} - алгебраическое дополнение j_l элемента последней строки.(не зависит от i) $c_j = M\begin{matrix} i_1 \dots i_r \\ \\ j_1 \dots j_r \end{matrix} \Rightarrow \underset{\downarrow}{c_{j_1} a_{j_1}} + \dots + c_{jr}a_{jr} + M_r a_j = 0 \Rightarrow a_j = -\frac{c_{j_1}}{M_r}a_{j_1} - \dots - \frac{c_{jr}}{M_r}a_{jr}$, т.е $\forall j = 1, n \quad j-$тый столбей является ЛК базисных. Для строк аналогично.

□

Следствие 1. *Квадратная A вырожденная* $\Leftrightarrow$ *ее строки (столбцы) ЛЗ.*

Доказательство. $\Rightarrow A = (a_{ij})_m^n -$вырожденная, т.е $detA = 0 \Rightarrow$ ед. $M_r = detA = 0 \Rightarrow RgA = r < n \Rightarrow \exists M_r \neq 0 -$ базисный минор $\Rightarrow \exists$ строка матрицы A, являющаяся ЛК базисных $\Rightarrow$ строки ЛЗ.

$\Leftarrow$ строки ЛЗ $\Rightarrow detA = 0$, т.е $A-$вырожденная.(Для столбцов аналогично.) $\square$

Пример. $Rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 9 & 9 & 9 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} = 2.$ $M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} =\neq 0 \Rightarrow$ 1 и 2 строки ЛНЗ и 1 и 2 столбец ЛНЗ. .$M_{12}^{45} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 9 & 9 \end{vmatrix} = 0$ отсюда не следует, что 1 и 2 строки ЛЗ. Но 4 и 5 столбцы ЛЗ. Любой минор 2-го порядка на них будет нулевым.

Следствие 2. *Если $RgA = r$, то любые $(r+1)$ строка или $(r+1)$(если они найдутся) столбец являются ЛЗ.*

Доказательство. Пусть имеется $(r+1)$ ЛНЗ столбец $\underset{\downarrow}{a_{j_1}} \dots a_{j_{r+1}}$. Допустим $m \geqslant r+1$. Тогда $\exists M_{r+1}$, расположенный на $M_{r+1} \neq 0 \Rightarrow RgA \geqslant r+1$ – противоречие.

Пусть $m = r$ и имеется $(r+1)$ ЛНЗ столбец $\underset{\downarrow}{a_{j_1}} \dots a_{r+1}$. Тогда если среди этих столбцов имееются базисные (т.е на них $\exists M_r \neq 0$), то оставшийся столбец является их ЛК $\Rightarrow$ система столбцов ЛЗ. Если же на этих столбцах $\forall M_r = 0$, то система r столбцов - ЛЗ. $\Rightarrow$ система $r+1$ столбцов тоже ЛЗ. $\square$

Теорема 1.7. *Ранг матрицы A равен максимальному числу ЛНЗ строк (равен максимальному числу ЛНЗ столбцов)*

Доказательство. Самостоятельно. $\square$

Следствие 1. *max число ЛНЗ строк = max числу ЛНЗ столбцов в любой матрице.*

1.3 Элементарные преобразования строк и столбцов матрицы.

К элементарным преобразованиям строк матрицы A относятся следующие операции:

1. Обмен местами двух строк матрицы.
2. Умножение строки на ненулевое число.
3. Прибавление к одной строке другой строки, умноженной на любое число.

Для столбцов аналогично.

Тот факт, что B получена из A элементарными преобразованиям обозначается так:$A \sim B$

Теорема 1.8. *Если $A \sim B$, то $B \sim A$*

Теорема 1.9. *Если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$*

Доказательство. Самостоятельно. $\square$

Теорема 1.10. *Если $A \sim B$, то $RgA = RgB$*

Доказательство. 1,2 не изменяет колв-о ЛНЗ строк (столбцов).

3. БОО можно считать, что B получена из A путем добавления ко 2-ой строке первой строки, умноженной на α.

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a_1} \\ \vec{a_2} \\ \vdots \\ \vec{a_m} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vdots \\ \vec{b}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a_1} \\ \vec{a_2} + \lambda \vec{a_1} \\ \vdots \\ \vec{a_m} \end{pmatrix}$$ Пусть $RgA = r$. M– минор матрицы A

$\tilde{M}$– минор матрицы B

Возможны три случая:

1) Если $\tilde{M}_{r+1}$ не содержит $\vec{b}_2$, то $\tilde{M}_{r+1} = M_{r+1} = 0$

2)Если $\tilde{M}_{r+1}$ содержит $\vec{b}_2$, но не содержит $\vec{b}_1$, тогда $\tilde{M}_{r+1} = \underset{\substack{\text{минор } A\text{, который} \\ \text{содержит } \vec{a}_1, \\ \text{но не содержит } \vec{a}_2}}{M_{r+1}} + \lambda \underset{\substack{\text{минор } A\text{, который} \\ \text{содержит } \vec{a}_2, \\ \text{но не содержит } \vec{a}_1}}{M_{r+1}} =$

$0 + \lambda * 0 = 0$

3)Если $\tilde{M}_{r+1}$ содержит $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$, то $\tilde{M}_{r+1} = \underset{\substack{\text{минор } A, \\ \text{содержащий } \vec{a}_1 \text{ и } \vec{a}_2}}{M_{r+1}} + \lambda \underset{\substack{\text{имеет две} \\ \text{одинаковые строки}}}{detC}$

Отсюда $RgB \leqslant RgA$. Далее поскольку $A \sim B$, то $B \sim A \Rightarrow$ рассуждая аналогично, получим $RgA \leqslant RgB \Rightarrow \begin{cases} RgA \leqslant RgB \\ RgB \leqslant RgA \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{RgA=RgB}}$ $\square$

tg: @moksimqa

Лекция 2

17.02

Пусть $A = (a_{ij})_m^n \neq \Theta$

Определение. A имеет трацпецевидную форму (ТФ), если $\exists r \in \mathbb{N} : 1 \leqslant r \leqslant min(m,n),$ причем $\begin{cases} a_{ii} \neq 0, i = \overline{1,r} \\ a_{ij} = 0, i > r \\ a_{ij} = 0, i > j \end{cases}$

Примеры: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Очевидно, что если A имеет ТФ, то $RgA = r$.

Определение. Если $A = \Theta$, считаем, что она имеет ТФ.

Теорема 1.11. *Любую $A = (a_{ij})_m^n$ можно элементарными преобразованиями привести к ТФ.*

Доказательство. Если $A = \Theta$, то она уже имеет ТФ. Пусть $A \neq \Theta$. $\exists a_{ij} \neq 0$. Переставим строки i и 1 и столбцы j и 1, добиваемся, что $A \sim \tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1} & \dots & \tilde{a}_{mn} \end{pmatrix}$, где $\tilde{a}_{11} = a_{ij} \neq 0$.

Далее для $i = \overline{2,m}$ $\quad \tilde{\vec{a_i}} \sim \tilde{\tilde{\vec{a_i}}} = \vec{a_i} - \dfrac{\tilde{\tilde{a}}_{i1}}{\tilde{\tilde{a}}_{11}}\tilde{\vec{a}}_1$. В результате этого получим: $\tilde{A} \sim \tilde{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & & \\ \vdots & & \begin{pmatrix} A_1 \end{pmatrix} \\ 0 & & \end{pmatrix}$

Если $A_1 = \Theta,$ то $\tilde{\tilde{A}}$ имеет ТФ . Если $A_1 \neq \Theta$, то аналогичные действия производим со строками и столбцами с номерами $\geqslant 2 \dots$ За конечно число шагов получим ТФ. $\square$

Отсюда получаем метод элементарных преобразований вычисления ранга матрицы. $A \sim B$ - имеет ТФ. $RgA = RgB = r$

1.4 Вычисление обратной матрицы методом элементарных преобразований.

Пусть $A = (a_{ij})_n^n$.

Теорема 1.12. *A приводится к E элементарными преобразованиями <u>только лишь строк</u> $\Leftrightarrow detA \neq 0$*

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть $A \sim E$. Тогда $detE = 1 \neq 0,$ то $detA \neq 0$ (если предположить, что $detA = 0,$ то из свойств определителя будет следовать, что $detE = 0 -$ противоречие)

$\Leftarrow$ Пусть $detA \neq 0,$ тогда $\underset{\downarrow}{a_1} \neq 0$. Тогда $\exists a_{i1} \neq 0$. Путем перестановки 1-ой и i-ой строки получаем $A \sim B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$ $b_{11} = a_{i1} \neq 0$. Далее делим $\vec{b_1}$ на $b_{11} \neq 0$. Тогда $B \sim C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$.

Далее для $i=\overline{2,n}$ делаем $\vec{c_i} \sim \vec{d_i} = \vec{c_i} - c_{i1}\vec{c_1}$. Тогда $C \sim D = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & \begin{pmatrix} A_1 \end{pmatrix} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

$|detA| = |b_{11}||detC| = |b_{11}||detD| = |b_{11}| * 1|detA_1| \Rightarrow detA_1 \neq 0$. Далее аналогичным образом $A_1 \sim B_1 \sim C_1 \sim D_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \vdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \begin{pmatrix} A_2 \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$ $detA_2 \neq 0$. За конечное число шагов (n) придем к $A \sim D_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Мы осуществили прямой ход алгоритма Гауссова исключения (обнулили элементы ниже главной диагонали.) Сделаем обратный ход симметричным образом (обнуляем элементы выше главной диагонали).

$D_n = \begin{pmatrix} 1 & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \ddots & d_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ Для строк $i = \overline{n-1, 1}$ $\quad \vec{d_i} \sim \vec{f_i} = \vec{d_i} - \vec{d_n} d_{in}$. Тогда $D_n - F_N = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

За конечное (n-1) число шагов придем к $F_n \sim F_{n-1} \dots \sim F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ $\square$

Рассмотрим $B_{pq} = (b_{ij})^n_m : b_{ij} = \delta_{ip}\delta_{jq} \ \forall i,j = \overline{1,n}$ $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ (единственный отличный от нуля элемент находится в p-ой строке и q-том столбце)

Пусть $A = (a_{ij})^n_n,\ C = B_{pq}A = (c_{ij})^n_m$. Тогда $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{n} \delta_{ip}\delta_{kq}a_{kj} = \delta_{ip}a_{qj}$.

Отсюда: $\begin{array}{l} \vec{c_i} = \vec{0},\ \text{если } i \neq p. \\ i = p \Rightarrow c_{pj} = a_{qj} \ \forall j = \overline{1,n},\ \text{т.е } \vec{c_p} = \vec{a_q} \end{array}$

Т.е $B_{pq}A = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \\ \vdots \\ \vec{a_q} \\ \vdots \\ \vec{0} \end{pmatrix}$ ($\vec{a_q}$ находится на p-ой строке) Как поменять местами строки k и l?

$(E - B_{kk} - B_{ll} + B_{ik} + B_{kl})A = \underbrace{EA}_{A} - \underbrace{B_{kk}A}_{\text{вычитает k-ую строку из k-ой строки}} - B_{ll}A + B_{lk}A + \underbrace{B_{kl}A}_{\text{прибавляет k-ую строку к l-ой строке}}$ Т.е перестановка двух строк k и l матрицы A осуществляется умножением ее слева на $\boxed{P = E - B_{kk} - B_{ll} + B_{lk} + B_{kl}}$.

Умножение k-ой строки на число λ реализуется матрицей $\boxed{P = E - B_{kk} + \lambda B_{kk} = E + (\lambda - 1)B_{kk}}$

Добавление k-ой строки l-ой строки, умноженной на λ, осуществляется матрицей $\boxed{P = E + \lambda B_{kl}}$

Теорема 1.13. *Пусть матрица A некоторыми преобразованиями только лишь строк приводится к E. Тогда E <u>этими же</u> преобразованиями приводится к A^{-1}*

Доказательство. Пусть $P_1 \dots P_k$ - матрицы элементарных преобразований строк, которыми A приводится к E, т.е $P_k(\dots P_2(P_1 A)) = E$.

По свойству ассоциативности матричного умножения, получим $(P_k \dots P_2 P_1)A = E \quad (*)$.

$A \sim E \Rightarrow det A \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$. Домножим обе части (*) справа на A^{-1}.

$((P_k \dots P_2 P_1)A)A^{-1} = EA^{-1} = A^{-1} \Rightarrow (P_k \dots P_2 P_1)(AA^{-1}) = A^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow (P_k \dots P_2 P_1)E = A^{-1} \Rightarrow P_k(\dots P_2(P_1 E)) = A^{-1}$.

$\square$

Примеры реализации: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Запишем $(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{строк}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -8 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -\frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ Краткая запись $(A|E) \underset{\text{строк}}{\sim} (E|A^{-1})$

Следствие 1. $A = (a_{ij})_n^n,\ det A \neq 0, B = (b_{ij})_n^n . \underset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, *тогда:* $\begin{matrix} (A|B) \underset{\text{строк}}{\sim} (E|A^{-1}B) \\ (A|\underset{\downarrow}{x}) \underset{\text{строк}}{\sim} (E|A^{-1}\underset{\downarrow}{x}) \end{matrix}$

Доказательство. Самостоятельно доказать с помощью матриц P. $\square$

tg: @moksimqa

Глава 2

Теория систем линейных алгебраических уравнений

Лекция 3

24.02

2.1 Основные определения

Пусть А $= (a_{ij})_m^n,\ a_{ij} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ $\quad \underset{\downarrow}{b} = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vdots \\ \vec{b}_m \end{pmatrix}$ – заданы , $\quad \underset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vdots \\ \vec{x}_n \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных.

Рассмотрим $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ (1). Или в координатной форме $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ $(\tilde{1})$

$(1), (\tilde{1})$– СЛАУ. (1) - векторная форма записи. $(\tilde{1})$ - координатная форма записи.

Определение. Частным решением СЛАУ (1) называют $\underset{\downarrow}{\alpha} = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n \end{pmatrix}$ $A\underset{\downarrow}{\alpha} = \underset{\downarrow}{b}$ - верное векторное равенство (или это упорядоченный набор чисел $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$: при подстановке в $(\tilde{1})$ вместо набора $(x_1, \dots, x_n)$ получается верное равенство)

Определение. Совокупность всех частных решений называется общим решением СЛАУ.

Определение. СЛАУ называется <u>совместной</u>, если она имеет хотя бы одно решение. В противном случае СЛАУ <u>несовместена</u> (решений нет).

$$A' = (a_{ij})_{m'}^{n'},\ \underset{\downarrow}{b'} = \begin{pmatrix} \vec{b'}_1 \\ \vdots \\ \vec{b'}_m \end{pmatrix}$$

Определение. СЛАУ $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ и $A'\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b'}$ называются равносильными (эквивалентыми), если $\boxed{\text{n'=n}}$ и общие решения совпадают. При этом $(n' = n)$ несовместные СЛАУ также эквиваленты.

Замечание. m' не обязательно совпадает с m

2.2 Квадратные СЛАУ. Правило Крамера.

Пусть $\boxed{\text{m=n}}$, т.е $A = (a_{ij})_n^n$ - квадратная матрица. $\underset{\downarrow}{b} = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vdots \\ \vec{b}_n \end{pmatrix} \quad \underset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vdots \\ \vec{x}_n \end{pmatrix}$

Теорема 2.1 (Теорема Крамера)**.** *Если $\Delta = detA \neq 0$, то СЛАУ $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ (1) имеет единственное решение, причем его можно найти по правилу Крамера:* $\boxed{x_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}}$*, $k = \overline{1,n}$, где $\Delta_k = detA_k, A_k$ получена из $A = \begin{pmatrix} \underset{\downarrow}{a_1} \dots \underset{\downarrow}{a_n} \end{pmatrix}$ заменой $\underset{\downarrow}{a_k}$ и $\underset{\downarrow}{b}$*

Доказательство. $\Delta = detA \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$. Тогда $A^{-1}(A\underset{\downarrow}{x}) = A^{-1}\underset{\downarrow}{b} \Rightarrow (\underbrace{A^{-1}A}_{E})\underset{\downarrow}{x} = A^{-1}\underset{\downarrow}{b} \Rightarrow \underset{\downarrow}{x} = A^{-1}\underset{\downarrow}{b}$. Проверим, что $\underset{\downarrow}{x} = A^{-1}\underset{\downarrow}{b}$ является решением (1). $A(A^{-1}\underset{\downarrow}{b}) = (AA^{-1})\underset{\downarrow}{b} = E\underset{\downarrow}{b} = \underset{\downarrow}{b}$ - верно. Проверим единственность. Пусть $A\underset{\downarrow}{\alpha'} = \underset{\downarrow}{b}$ и $A\underset{\downarrow}{\alpha''} = \underset{\downarrow}{b}$. Тогда $A(\underset{\downarrow}{\alpha'} - \underset{\downarrow}{\alpha''}) = A\underset{\downarrow}{\alpha'} - A\underset{\downarrow}{\alpha''} = \underset{\downarrow}{b} - \underset{\downarrow}{b} = \underset{\downarrow}{0}$. Тогда $\underset{\downarrow}{\alpha'} - \underset{\downarrow}{\alpha''} = A^{-1}\underset{\downarrow}{0} = \underset{\downarrow}{0}$, т.е $\underset{\downarrow}{\alpha'} = \underset{\downarrow}{\alpha''}$, т.е решение одно.

Имеем $$\underset{\downarrow}{x} = A^{-1}\underset{\downarrow}{b} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vdots \\ \vec{b}_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} A_{k1}b_k \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} A_{kn}b_k \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \vdots \\ \frac{\Delta_n}{\Delta} \end{pmatrix}$$

Для $k = 1$ $$\Delta_k = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \underset{\text{по 1-му столбцу}}{=} b_1A_{11} + \dots + b_nA_{n1}$$

Остальные Δ_k аналогично (самостоятельно) ☐

Следствие 1. *Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из $\Delta_k \neq 0$, то квадратная СЛАУ $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ несовместна.*

Доказательство. Рассмотрим $$A^T(A\underset{\downarrow}{x}) = (A^TA)\underset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \underset{\downarrow}{x} \underset{\text{1 сем}}{=} \begin{pmatrix} \Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \Delta \end{pmatrix} \underset{\downarrow}{x}$$

$= \Delta \cdot E\underset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} \Delta \cdot x_1 \\ \vdots \\ \Delta \cdot x_n \end{pmatrix}$. С другой стороны $A^T\underset{\downarrow}{b} = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix}$, т.е $\begin{cases} \Delta x_1 = \Delta 1, \\ \dots \\ \Delta x_n = \Delta n \end{cases}$, но $\Delta = 0$. Если хотя бы один из $\Delta_k \neq 0$, то $x_k \cdot 0 = \Delta_k \neq 0$, что невозможно. ☐

2.3 Метод Гаусса (Гаусса-Жордана) исследования СЛАУ

Рассмотрим прямоугольную СЛАУ $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}, A = (a_{ij})_m^n$ - основная матрица системы. $\underset{\downarrow}{b}$ - столбец правых частей. $(A|\underset{\downarrow}{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} \underset{\downarrow}{a_1} & \dots & \underset{\downarrow}{a_n} & \underset{\downarrow}{b} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ - <u>расширенная матрица СЛАУ</u>

Определение. Элементарными операциями с СЛАУ называются следующие операции:

1. перестановка местами уравнений системы.

2. умножение обеих частей на число, отличное от нуля.

3. прибавление к одному уравнению СЛАУ другого ее уравнения

Теорема 2.2. *Элементарные операция СЛАУ приводят к эквивалентой ей СЛАУ.*

Доказательство. Самостоятельно. □

Обозначение. Пусть $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ приводятся элементарными операциями к $A'\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$, то что эти СЛАУ эквиваленты (равносильны) обозначается $A\underset{\downarrow}{x} \Leftrightarrow A'\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b'}$ либо $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b} \sim A'\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$.

Легко заметить, что элементарные операции с СЛАУ взаимно однозначно можно сопоставить элементарные операции со строками расширенной матрицы СЛАУ.

Идея метода Гаусса-Жордана. $(A|\underset{\downarrow}{b}) \sim (\underbrace{A'}_{\text{ТФ}}|\underset{\downarrow}{b'})$. Прямой ход $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \sim$ эл. преобр. только строк $\sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} a'_{11} & \dots & a'_{1r} & \dots & a'_{1n} & b_1 \\ 0 & \ddots & \dots & \dots & a'_{1n} & \vdots \\ 0 & \dots & a'_{rr} & \dots & a'_{rn} & b_r \\ \hline \multicolumn{5}{c|}{\text{НУЛИ}} & b_{r+1} \\ \hline \multicolumn{5}{c|}{\text{НУЛИ}} & 0 \end{array}\right) \quad (2)$$

Замечание. Мы считаем, что переменные СЛАУ занумерованы таким образом, что не требуется при приведение к ТФ переставлять столбцы. Столбцы A можно переставлять, $\underset{\downarrow}{b}$ закреплен.

Рассмотрим расширеннную матрицу (2) $\left(\begin{array}{ccccc|c} a'_{11} & \dots & a'_{1r} & \dots & a'_{1n} & b_1 \\ 0 & \ddots & \dots & \dots & a'_{1n} & \vdots \\ 0 & \dots & a'_{rr} & \dots & a'_{rn} & b_r \\ \hline \multicolumn{5}{c|}{\text{НУЛИ}} & b_{r+1} \\ \hline \multicolumn{5}{c|}{\text{НУЛИ}} & 0 \end{array}\right)$ Тогда в эквивалентной СЛАУ будет уравнение $0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = b_{r+1}$. Если $b_{r+1} \neq 0$, то эквивалентная СЛАУ несовместна $\Rightarrow$ исходная СЛАУ несовместна. Если же $b_{r+1} = 0$, то $(A'|\underset{\downarrow}{b'})$ имеет ТФ и ее $Rg(A'|\underset{\downarrow}{b'}) = Rg(A') = r$. Тогда обратным ходом приводим расширенную матрицу к виду: $\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & \dots & 0 & a''_{1r+1} & \dots & a''_{1n} & b''_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a''_{rr+1} & \dots & a''_{rr} & b''_r \\ \hline \multicolumn{6}{c|}{\text{НУЛИ}} & b''_{r+1} \\ \hline \multicolumn{6}{c|}{\text{НУЛИ}} & 0 \end{array}\right)$

Т.е фактически: $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b} \sim A'\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b'} \sim A''\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b''}$ в коорд. форме: $\begin{cases} x_1 + a''_{1r+1}x_{r+1} + \dots + a''_{1n}x_n = b''_1 \\ \dots \\ x_r + a''_{rr+1}x_{r+1} + \dots + a''_{rn}x_n = b''_r \end{cases}$

Тогда переменные $x_1, \dots, x_r$ назовем <u>главными</u>, а $x_{r+1}, \dots, x_n$ - <u>свободными</u>. Перенесем свободные в правую часть: $\begin{cases} x_1 = b''_1 - a''_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a''_{1n}x_n \\ \dots \\ x_r = b''_r - a''_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a''_{rn}x_n \end{cases}$ Видим, что при особых значениях свободных переменных $x_{r+1}, \dots, x_n$ можно отыскать значения главных $x_1, \dots, x_r$ и таким образом получить различные решения СЛАУ $A''\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b''}$, т.е решения $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ (т.к они эквиваленты)

Покажем, что $\begin{cases} x_1 = b''_1 - a''_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a''_{1n}x_n \\ \dots \\ x_r = b''_r - a''_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a''_{rn}x_n \\ x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \end{cases}$ (3) исчерпывает всевозможные решения $A''\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ (а значит и исходной СЛАУ $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$)

Пусть $\exists \underset{\downarrow}{\alpha} = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n \end{pmatrix}$ – решение $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$. Поскольку $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b} \sim A''\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b''}$, то $A''\underset{\downarrow}{\alpha} = \underset{\downarrow}{b''}$. Тогда в (3) положим $x_{r+1} = \alpha_{r+1}, \dots, x_n = \alpha_n$ и найдем из (3) $x_1 = \beta_1, \dots x_r = \beta_r$. Тогда $\underset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \\ \alpha_{r+1} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ - решение $A''\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b''}$ Тогда $A''(\underset{\downarrow}{x} - \underset{\downarrow}{\alpha}) = A''\underset{\downarrow}{x} - A''\underset{\downarrow}{\alpha} = \underset{\downarrow}{b''} - \underset{\downarrow}{b''} = \underset{\downarrow}{0}$. Тогда: $\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 - 0 - a''_{1r+1} \cdot 0 - \dots - a''_{1n} \cdot 0 = 0 \\ \beta_r - \alpha_r = 0 - a''_{rr+1} \cdot 0 - \dots - a''_{rn} \cdot 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 \\ \dots \\ \beta_r = \alpha_r \end{cases}$,

т. к $\underset{\downarrow}{x} - \underset{\downarrow}{\alpha} = \begin{pmatrix} \beta_1 - \alpha_1 \\ \vdots \\ \beta_r - \alpha_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ то чтобы получить решение $\underset{\downarrow}{\alpha}$ исходной СЛАУ $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$, нужно свободные переменным придать значения $x_{11} = \alpha_{11}, \dots, x_n = \alpha_n$. Таким образом (3) исчерпывает все решения СЛАУ $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ и такой вид решения называется общим решением по методу Гаусса (Г-Ж) $\boxed{\underset{\downarrow \text{общ}}{x} = \underset{\downarrow}{x}(C_1, \dots, C_{n-r})}$

Замечание. Иногда свободным переменным придают значения $C_1, \dots, C_{n-r}$, т.е $x_{r+1} = C_1, \dots, x_n = C_{n-r}$ и в (3) вместо $x_{r+1}, \dots, x_n$ пишут $C_1, \dots, C_{n-r}$

Таким образом, в случаях совместности СЛАУ ее общее решение является $n-r$ параметрическим множеством.

tg: @moksimqa

Лекция 4

3.03

Пример $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + \qquad\quad = 2 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$RgA = 2, n = 4$

Общее решение в координатной форме: $\begin{cases} x_1 = 2 - C_1 \\ x_3 = 2 - C_2 \\ x_2 = C_1 \\ x_4 = C_2 \end{cases}$

Исходная СЛАУ$\sim \begin{cases} x_1 = 2 - x_2 \\ x_3 = 2 - x_4 \end{cases}$

В векторной форме: $\underset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} 2 - C_1 \\ C_1 \\ 2 - C_2 \\ C_2 \end{pmatrix} \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

2.4 Теорема Кронекера-Капелли.

Теорема 2.3 (Критейрий совместности СЛАУ). *СЛАУ (1)* $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ *совместна* $\Leftrightarrow RgA = Rg(A|\underset{\downarrow}{b})$ $(Rg(\underset{\downarrow}{a_1}, \dots, \underset{\downarrow}{a_n}) = Rg(\underset{\downarrow}{a_1}, \dots, \underset{\downarrow}{a_n}|\underset{\downarrow}{b}))$

Доказательство. СЛАУ (1) можно записать в виде эквивалентой форме: (2) $x_1\underset{\downarrow}{a_1} + \dots + x_n\underset{\downarrow}{a_n} = \underset{\downarrow}{b}$

$\Rightarrow$ Пусть СЛАУ (1) совместна $\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_n$: выполнено (2) $\Rightarrow \underset{\downarrow}{b}$ является ЛК $\underset{\downarrow}{a_1}, \dots, \underset{\downarrow}{a_n} \Rightarrow \underset{\downarrow}{b}$ линейно зависит от $\underset{\downarrow}{a_1}, \dots, \underset{\downarrow}{a_n} \Rightarrow$ число ЛНЗ столбцов в системах $\{\underset{\downarrow}{a_1}, \dots, \underset{\downarrow}{a_n}\}$ и $\{\underset{\downarrow}{a_1} \dots, \underset{\downarrow}{a_n}|\underset{\downarrow}{b}\}$ одинаковое $\Rightarrow RgA = Rg(A|\underset{\downarrow}{b})$

$\Leftarrow$ $RgA = Rg(A|\underset{\downarrow}{b}) = r \Rightarrow$ в области матрицы $A\ \exists M_r \neq 0$, его столбцы ЛНЗ и любые столбцы матрицы A являются ЛК столбцов, входящих в этот базисный минор $\Rightarrow \underset{\downarrow}{b} = \alpha_1 \underset{\downarrow i1}{a} + \dots + a_r \underset{\downarrow ir}{a} \Rightarrow$ (2) имеет решение $\Rightarrow$ (1) совместна. $\square$

2.5 Однородные СЛАУ.

Определение. СЛАУ $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ называется однородной, если $\underset{\downarrow}{b} = \underset{\downarrow}{0}$, т.е $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{0}$ (1_0) - ОСЛАУ

Замечание. ОСЛАУ всегда совместна. Ее решение $\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{0}$ называется тривиальным. Прочие решения, если они имеются, называются нетривиальными.

Теорема 2.4 (О ЛК решений ОСЛАУ). *Если $\underset{\downarrow}{x}^{(1)}, \dots, \underset{\downarrow}{x}^{(k)}$ - любые решение ОСЛАУ, то $\forall C_1, \dots, C_k \in \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \Rightarrow C_1\underset{\downarrow}{x}^{(1)} + \dots + C_k\underset{\downarrow}{x}^{(k)} = \underset{\downarrow}{\alpha}$ - тоже решение этой ОСЛАУ.*

Доказательство. $A\underset{\downarrow}{\alpha} = A(C_1\underset{\downarrow}{x}^{(1)} + \dots + C_k\underset{\downarrow}{x}^{(k)}) = C_1A\underset{\downarrow}{x}^{(1)} + \dots C_kA\underset{\downarrow}{x}^{(k)} = C_1 \cdot \underset{\downarrow}{0} + \dots C_k \cdot \underset{\downarrow}{0} = \underset{\downarrow}{0}$ □

Следствие 1. *Если ОСЛАУ имеет хотя бы одно нетривиальное решение, то их будет бесконечно много.*

Теорема 2.5.
1) *Если $RgA = r = n$ (число неизвестных), то ОСЛАУ обладает только тривиальным решением.*
2) *Если $RgA = r < n$, то ОСЛАУ имеет нетривиальные решения.*

Доказательство. ② $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ $(1_0) \sim$ эл. преобр. только строк $\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} a'_{11} & \dots & a'_{1r} & \dots & a'_{1n} & 0 \\ 0 & \ddots & \dots & \dots & a'_{1n} & \vdots \\ 0 & \dots & a'_{rr} & \dots & a'_{rn} & 0 \\ \hline & & \text{НУЛИ} & & & 0 \\ \hline & & \text{НУЛИ} & & & 0 \end{array}\right)$ (2_0)

$x_1, \dots, x_r -$ главные, $x_{r+1}, \dots, x_n -$ свободные $\begin{cases} x_1 = -a''_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a''_{1n}x_n \\ \dots \\ x_r = -a''_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a''_{rn}x_n \\ x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \end{cases}$

Методом Г-Ж (1_0) приводится к (2_0), причем $n - r > 0 \Rightarrow$ свободные переменные имеются.

Положим $x_{r+1} = x_{n-1} = 0, x_n = 1$. Тогда получим $\underset{\downarrow}{\alpha} = \begin{pmatrix} -a''_{1n} \\ \vdots \\ -a''_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ - нетривиальное решение.

② Если $r = n$, то в (2_0) не будет свободных переменных: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$, т.е $(1_0) \sim (3_0)$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$

т.е имеется только тривиальное решение.

□

2.6 Фундаментальная система решений ОСЛАУ.

Рассмотрим ОСЛАУ. (1_0) $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{0}$

Определение. Упорядоченная, ЛНЗ система этой ОСЛАУ (1_0) $\underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)}, \dots, \underset{\downarrow}{\varphi}^{(k)}$ называется фундаментальной системой решений (ФСР), если для любого решения ОСЛАУ $(1_0) \Rightarrow \exists C_1, \dots, C_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) : \underset{\downarrow}{\alpha} =$
$= C_1\underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)} + \dots + C_k\underset{\downarrow}{\varphi}^{(k)}$

Теорема 2.6 (О нормальной системе решений (НСР)). *Если $RgA = r < n$, то ОСЛАУ (1_0) имеет $(n-r)$ ЛНЗ решений, через которые выражаются любое решения.*

Доказательство. Пусть $RgA = r < n$ (число неизвестных). Тогда $(1_0) \sim (2_0)$ с $(n-r)$ свободных переменных, которым придадим следующие наборы значений:

$$\begin{gathered} x_{r+1} = 1, x_{r+2} = 0, \dots, x_n = 0 \\ x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 1, \dots, x_n = 0 \\ \dots \\ x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 0, \dots, x_n = 1 \end{gathered}$$

По этим наборам найдем значения главных переменных, получим $(n-r)$ решений:

$$\underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)} = \begin{pmatrix} -a''_{1r+1} \\ \vdots \\ -a''_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underset{\downarrow}{\varphi}^{(2)} = \begin{pmatrix} -a''_{1r+2} \\ \vdots \\ -a''_{rr+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \underset{\downarrow}{\varphi}^{(n-r)} = \begin{pmatrix} -a''_{1n} \\ \vdots \\ -a''_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим $\Phi = (\underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)}, \dots, \underset{\downarrow}{\varphi}^{(n-r)}) = r \begin{pmatrix} -a''_{1r+1} & -a''_{1r+2} & \dots & -a''_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a''_{rr+1} & -a''_{rr+2} & \dots & -a''_{rn} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

В нижней части Φ имеется $M_{n-r} = detE = 1 \neq 0$, у Φ $(n-r)$ столбцов $\Rightarrow Rg\Phi = n-r \Rightarrow$ ее столбцы ЛНЗ $\Rightarrow \underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)}, \dots, \underset{\downarrow}{\varphi}^{(n-r)}$ - ЛНЗ система решений □

Определение. Построенная таким образом система решений называется нормальной (НСР)

Покажем теперь, что $\forall \underset{\downarrow}{\alpha} -$ решение (1_0) можно представить в виде ЛК $\underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)}, \dots, \underset{\downarrow}{\varphi}^{(n-r)}$. Пусть

$\underset{\downarrow}{\alpha} = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n \end{pmatrix}$ - любое решение (1_0). Рассмотрим $\underset{\downarrow}{y} = \underset{\downarrow}{\alpha_1} - \alpha_{r+1}\underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)} + \dots + \alpha_n \underset{\downarrow}{\varphi}^{(n-r)} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Поскольку $\underset{\downarrow}{y}$ является ЛК решений ОСЛАУ (1_0), то $\underset{\downarrow}{y}$ тоже является решением $(1_0) \Rightarrow$ его компаненты удовлетворяют (2_0). Откуда, учитывая, что все свободные переменные равны 0, получим (см. (2_0)) $\begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \vdots \\ \beta_r = 0 \end{cases}$, т.е $\underset{\downarrow}{y} = \underset{\downarrow}{0} \Rightarrow \underset{\downarrow}{\alpha} = \alpha_{r+1}\underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)} + \dots + \alpha_n \underset{\downarrow}{\varphi}^{(n-r)}$. Заметим, что отсюда следует, что бóльшего, чем $(n-r)$ количества ЛНЗ решений быть не может.

Теорема 2.7 (О ФСР). *Если $RgA = r = n$, то ФСР ОСЛАУ не существует, если $RgA = r < n$, то*

1)$\exists$ *ФСР ОСЛАУ* (1_0)

2)*Любая ФСР ОСЛАУ* (1_0) *содержит ровно* $(n-r)$ *элементов*

3)*Любые* $(n-r)$ *ЛНЗ решений ОСЛАУ* (1_0) *образуют ее ФСР*

4)*Если* $\underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)}, \dots, \underset{\downarrow}{\varphi}^{(n-r)} -$ *некоторая ФСР ОСЛАУ* (1_0), *то ее общее решение имеет вид:*

$\underset{\downarrow}{x_{oo}} = C_1 \underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)} + \dots + C_{n-r} \underset{\downarrow}{\varphi}^{(n-r)}$, *где* $C_1, \dots, C_{n-r} -$ *произвольные числа* $\mathbb{R}(\mathbb{C})$

Доказательство. $RgA = r = n \Rightarrow$ имеется только тривиальное решение (оно всегда ЛЗ) $\Rightarrow$ нет ФСР.

$RgA = r < n \Rightarrow$

1) Уже доказано, т.к $\exists$ НСР, она является частным случаем ФСР.

2) Будет доказано позже.

3) Будет доказано позже.

4) $\Leftarrow$ Поскольку $\underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)}, \dots, \underset{\downarrow}{\varphi}^{(n)}$ - решение ОСЛАУ, то любая их ЛК также является решением (см. выше).

$\Rightarrow$ Пусть $\underset{\downarrow}{y}$ - произвольное решение ОСЛУ. По определению ФСР $\exists \tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_n : \underset{\downarrow}{y} = \tilde{C}_1 \underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)} + \dots + \tilde{C}_{n-r} \underset{\downarrow}{\varphi}^{(n-r)}$

$\square$

tg: @moksimqa

Лекция 5

10.03

$$\text{Пример: } \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2=0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad RgA = 2 = r, n = 4.$$

$$\begin{array}{c|c|c} x_1 & -1 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & -1 \\ x_4 & 0 & 1 \end{array} \quad \text{ФСР: } \underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \ \underset{\downarrow}{\varphi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{x}_{\text{оо}} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

2.7 Общее решение неоднородной СЛАУ.

(1) $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ называется неоднородной (НСЛАУ), если $\underset{\downarrow}{b} \neq \underset{\downarrow}{0}$. НСЛАУ (1) отвечает ОСЛАУ (1_0) $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{0}$

Теорема 2.8. *Пусть $RgA = r = Rg(A|\underset{\downarrow}{b})$ (т.е НСЛАУ совместна), тогда:*

1. Если $r = n$, то $\exists!$ решение (1)

2. Если $r < n$, то $\underset{\downarrow}{x}_{он} = \underset{\downarrow}{x}_{оо} + \underset{\downarrow}{x}_{чн}$

Доказательство. 1.$RgA = r = n$ (число неизвестных), то элементарными преобразованиями строк $(A|\underset{\downarrow}{b}) \sim$

$$(A'|\underset{\downarrow}{b}'): \begin{cases} a'_{11}x_1 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \dots \\ a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases} \quad (A'|\underset{\downarrow}{b}') = \left(\begin{array}{ccc|c} a'_{11} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a'_{nn} & b'_n \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ Тогда } detA' \neq 0 \Rightarrow \exists! \text{ решение.}$$

2. Пусть $r < n$. Тогда $\Rightarrow$ $A\underset{\downarrow}{x}_{\text{он}} = A(\underset{\downarrow}{x}_{\text{оо}} + \underset{\downarrow}{x}) = A\underset{\downarrow}{x}_{\text{оо}} + A\underset{\downarrow}{x}_{\text{чн}} = \underset{\downarrow}{0} + \underset{\downarrow}{b} \Rightarrow \underset{\downarrow}{x}_{\text{он}}$ решение (1).

$\Leftarrow$ Пусть $\underset{\downarrow}{y}$ - произвольное решение. Тогда $A(\underset{\downarrow}{y} - \underset{\downarrow}{x}_{\text{чн}}) = A\underset{\downarrow}{y} - A\underset{\downarrow}{x}_{\text{чн}} = \underset{\downarrow}{b} - \underset{\downarrow}{b} = \underset{\downarrow}{0} \Rightarrow \exists \tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_{n-r}$: $\underset{\downarrow}{y} - \underset{\downarrow}{x}_{\text{чн}} = \tilde{C}_1\underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)} + \dots + \tilde{C}_{n-r}\underset{\downarrow}{\varphi}^{(n-r)}$, $\quad \underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)}, \dots, \underset{\downarrow}{\varphi}^{(n-r)}$ - произвольная ФСР ОСЛАУ (1_0) $\Rightarrow \underset{\downarrow}{y} = \tilde{C}_1\underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)} + \dots + \tilde{C}_{n-r}\underset{\downarrow}{\varphi}^{(n-r)} + \underset{\downarrow}{x}_{\text{чн}}$, т.е $\forall \underset{\downarrow}{y}$ - частного решения, такие числа найдутся. Таким образом, $C_1\underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)} + \dots + C_{n-r}\underset{\downarrow}{\varphi}^{(n-r)} + \underset{\downarrow}{x}_{\text{чн}}$ исчерпывают все решения. $\underset{\downarrow}{x}_{\text{он}} = C_1\underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)} + \dots + C_{n-r}\underset{\downarrow}{\varphi}^{(n-r)} + \underset{\downarrow}{x}_{\text{чн}} = \underset{\downarrow}{x}_{\text{оо}} + \underset{\downarrow}{x}_{\text{чн}}$

□

$$\text{Пример: } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \underset{\downarrow}{x}_{\text{оо}} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\underset{\downarrow}{x}_{\text{чн}}$ найдется при любых частных значениях свободных переменных, например $x_2 = x_4 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underset{\downarrow}{x}_{\text{чн}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = 2 - x_2 \\ x_3 = 2 - x_4 \end{cases}$$

А если $x_2 = x_4 = 1 \Rightarrow \underset{\downarrow}{x_{\text{чн}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ любое из них можно брать.

$$\underset{\downarrow}{x_{\text{он}}} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underset{\downarrow}{x_{\text{он}}} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Глава 3

Линейные пространства

Непустое множество k элементов называется полем, если в нем определены две операции "$+$"и "$\cdot$"(не выводящие из k) и выполнены следующие свойства:

1. $\forall a, b \in k \Rightarrow a + b = b + a$ (коммутативность)
2. $\forall a, b, c \in k \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность)
3. $\exists \theta \in k : \forall a \Rightarrow a + \theta = a$ (нейтральный элемент)
4. $\forall a \in k \exists a' \in k : a + a' = \theta$ (противоположный элемент)
5. $\forall a, b \in k \Rightarrow a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность)
6. $\forall a, b, c \in k \Rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативность)
7. $\exists e \in k : \forall a \in k \Rightarrow a \cdot e = a$ (нейтральный элемент)
8. $\forall a \in k : a \neq \theta \Rightarrow \exists \tilde{a} : a \cdot \tilde{a} = e$ (обратный элемент)
9. $\forall a, b, c \in k \Rightarrow (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (дистрибутивность)

Примеры: $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$ - поля, $\{1, 0, -1\}$ - поле. $\mathbb{Z}$ - не поле.

3.1 Определение и примеры ЛП

Пусть $\mathbb{V}$ - множество элементов произвольной природы, для которых определены операции сложения и умножения на элементы из поля k, не выводящие из $\mathbb{V}$, т.е $\begin{array}{l} \forall a, b \in \mathbb{V} \Rightarrow a + b \in \mathbb{V} \\ \forall a \in \mathbb{V}\ \forall \alpha \in k \Rightarrow \alpha \cdot a \in \mathbb{V} \end{array}$

Определение. $\mathbb{V}$ называется линейным пространством (ЛП) над полем k ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), если выполнены следующие свойства (аксиомы) линейного пространства:

1. $\forall a, b \in \mathbb{V} \Rightarrow a + b = b + a$
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{V} \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$
3. $\exists \theta \in \mathbb{V} : \forall a \in \mathbb{V} \Rightarrow a + \theta = a$
4. $\forall a \in \mathbb{V}\ \exists a' \in \mathbb{V} : a + a' = \theta$

θ называется нейтральным элементом, a' называется элементом, противоположным к a

5. $\forall a, b \in \mathbb{V}\ \forall \alpha \in k \Rightarrow \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$
6. $\forall a \in \mathbb{V}\ \forall \alpha, \beta \in k \Rightarrow (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
7. $\forall a \in \mathbb{V}\ \forall \alpha, \beta \in k \Rightarrow \alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$

8. $\forall a \in \mathbb{V} \Rightarrow 1 \cdot a = a$

Если $k = \mathbb{R}$, то $\mathbb{V}$ - вещественное ЛП (ВЛП), если $k = \mathbb{C}$, то $\mathbb{V}$ - комплексное ЛП (КЛП)

Далее элементы $\mathbb{V}$ будем называть векторами и обозначать (чаще всего) латинскими буквами без стрелок, а элементы поля k - скалярами и обозначть (чаще всего) греческими буквами.

Примеры: 1. ЛПВ, ЛПВпл, ЛПВпр

2. Множество всевозможных столбцов или строк фиксированной высоты (длины) с обычными операциями сложения и умножения на числа. $\underset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ $\underset{\downarrow}{y} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$, $\quad \underset{\downarrow}{x} + \underset{\downarrow}{y} \underset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \xi_1 + \eta_1 \\ \vdots \\ \xi_n + \eta_n \end{pmatrix}, \alpha \underset{\downarrow}{x} \underset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \alpha\xi_1 \\ \vdots \\ \alpha\xi_n \end{pmatrix}$

1, 2, 5-8 - очевидно

$\underset{\downarrow}{\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underset{\downarrow}{x'} = \begin{pmatrix} -\xi_1 \\ \vdots \\ -\xi_n \end{pmatrix}$ Для строк $\vec{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \dots & \xi_n \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} \eta_1 & \dots & \eta_n \end{pmatrix}$ аналогично

3. P_n - совокупность всевозможных многочленов степени $\leqslant n$. $P_n = \{\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n, \alpha_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), i = \overline{1, n}\}$

$\theta = x(t) \equiv 0 \quad x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n,\ x'(t) = -\alpha_0 - \dots - \alpha_n t^n$

4.$\mathfrak{M}_{m \times n}$ - всевозможные прямоугольные матрицы $(m \times n)$. $\theta = \Theta = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

$A = (a_{ij})_m^n, \quad A' = (-a_{ij})_m^n$

Остальное - самостоятельно.

5. Всевозможные решения ОСЛАУ $x_{\text{oo}} = \{\underset{\downarrow}{x_{\text{oo}}}\}, \quad \underset{\downarrow}{\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \underset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, то $\underset{\downarrow}{x'} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$

6. $C[a, b] \qquad (f + g)(x) \underset{\text{def}}{=} f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) \underset{\text{def}}{=} \alpha f(x)$

$\theta = (f(x) \equiv_0) \qquad \tilde{f}(x) = -f(x)$

7. Декартово произведение ЛП. Пусть $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ - ЛП. Тогда $\mathbb{V} \times \mathbb{W} \underset{\text{def}}{=} \{(x, y) : x \in \mathbb{V}, y \in \mathbb{W}\}$ - совокупность всевозможных пар элементов.

Сумма: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \underset{\text{def}}{=} (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $\quad$ умножение на скаляр: $\alpha(x, y) \underset{\text{def}}{=} (\alpha x, \alpha y)$. $\theta = (0, 0)$.

Свойства (θ и a')

1. θ - единственный.
2. a' - единственный. $(\forall a \in \mathbb{V})$
3. $\forall a \in \mathbb{V} \Rightarrow a \cdot \theta = \theta$
4. $\forall \alpha \in k \Rightarrow \alpha \cdot \theta = \theta$
5. $\forall a \in \mathbb{V} \Rightarrow a' = -1 \cdot a$

Лекция 6

15.03

Доказательство. 1. Пусть $\exists\theta_1$ и θ_2 - нейтральные элементы $\mathbb{V}$. Тогда $\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_2$.

2. Пусть у некоторого $a \in \mathbb{V}$ имеется противоположные элементы a' и a''. Тогда $a' = a' + \theta = a' + (a + a'') = (a' + a) + a'' = \theta + a'' = a'' + \theta = a''$.

3. $0 \cdot a = 0 \cdot a + \theta = 0 \cdot a + (a + a') = (0 \cdot a + a) + a' = (0 \cdot a + 1 \cdot a) + a' = (0 + 1) \cdot a + a' = 1 \cdot a + a' = a + a' = \theta$.

4. $\lambda \cdot \theta = \lambda \cdot \theta + \theta = \lambda \cdot \theta + (\lambda\theta + (\lambda\theta)') = (\lambda\theta + \lambda\theta) + (\lambda\theta)' = \lambda(\theta + \theta) + (\lambda\theta)' = \lambda\theta + (\lambda\theta)' = \theta$

5. $(-1) \cdot a = (-1) \cdot a + \theta = (-1) \cdot a + (a + a') = ((-1) \cdot a + a) + a' = ((-1) \cdot a + 1 \cdot a) + a' = ((-1 + 1) \cdot a) + a' = 0 \cdot a + a' = \theta + a' = a' + \theta = a'$.

□

3.2 Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов

Понятия ЛЗ и ЛНЗ для уже вводили неоднократно. Напомним следующие определения и утверждения: Пусть $\mathbb{V}$ - ЛП над k.

Определение. Упорядоченная совокупность не обязательно различных элементов из $\mathbb{V}$ называется системой элементов (векторов). Любые подмножества системы элементов называются подсистемами элементов (векторов). Обозначение: $\{x_1, \dots, x_m\} = \{x_i\}_{i=1}^m = X \subset \mathbb{V}$.

Определение. Система X называется линейно зависимой (ЛЗ), если $\exists$ нетривиальный набор $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in k$: $(1)\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = \theta$. Если же (1) выполняется толькьо при $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = \theta$, то система X называется линейно независимой (ЛНЗ).

Теорема 3.1. *Если $\theta \in X$, то X - ЛЗ.*

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 3.2. *Если X содержит ЛЗ подсистему, то X - ЛЗ.*

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 3.3. *Любая подсистема линейно независимой системы является линейно независимой.*

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 3.4 (Критерий ЛЗ)**.** *X - ЛЗ $\Leftrightarrow$ один из ее элементов является линейной комбинацией остальных.*

Доказательство. Самостоятельно. □

Примеры:

1. $\mathbb{R}^n$

Рассмотрим, например, строки длины n. $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ - ЛНЗ.

Доказательство. $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \theta \Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. □

2. $P_n: \quad e_0 = 1, e_1 = t, \dots, e_n = t^n$ - ЛНЗ.

Доказательство. $\lambda_0 e_0 + \dots + \lambda_n e_n = \lambda_0 + \lambda_1 t + \dots + \lambda_n t^n = \theta \Leftrightarrow \lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$ (иначе бы многочлен степени n обращался бы в ноль более, чем в n точках, это невозможно) $\square$

3. $\mathfrak{M}_{m\times n}$

Рассмотрим набор матриц $B_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Единственный ненулевой элемент находится на пересечении i-ой строки и j-ого столбца.

Доказательство. Доказать, что система матриц $\{B_{ij}\}_{i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}}$ - ЛНЗ. $\square$

4. ФСР ОСЛАУ. Элементы ФСР линейной независимы по определению.

3.3 Базис и размерность линейного пространства

Рассмотрим $\mathbb{V}$ - ЛП над k.

Определение. Если в ЛП $\mathbb{V}$ имеется система ЛНЗ элементов из n ($n \in \mathbb{N}$) элементов, а любая система из $(n+1)$ элемента является ЛЗ, то говорят, что размерность $\mathbb{V}$ равна n. Обозначение: $\dim \mathbb{V} = n$.

Замечание. Если в $\mathbb{V}$ нет ни одной ЛНЗ системы, то по определению считают, что $\dim \mathbb{V} = 0$.

Замечание. Если $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ в $\mathbb{V}$ найдется ЛНЗ система из n элементов, то $\mathbb{V}$ называется бесконечномерным.

В курсе ЛА будем рассматривать конечномерные ЛП.

Определение. Упорядоченная система ЛНЗ элементов $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ называется базисом ЛП $\mathbb{V}$, если $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow \exists \xi_1, \dots \xi_n \in k : x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$ (1).

Представление (1) называется разложением вектора x по базису $\mathcal{E}$, коэффициенты этого разложения называются координатами вектора x в базисе $\mathcal{E}$.

Теорема 3.5 (О связи базиса и размерности). $\dim \mathbb{V} = n \Leftrightarrow$ *(в нем $\exists$ базис из n элементов).*

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть $\dim \mathbb{V} = n \Rightarrow \exists$ ЛНЗ $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{V}$. Пусть $x \in \mathbb{V}-$ произвольный элемент. Тогда $\{x_1, \dots, x_n, x\}$ - ЛЗ $\Rightarrow \exists$ нетривиальный набор $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in k$: (2) $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x = \theta$, причем $\lambda_{n+1} \neq 0$ (т.е X - ЛНЗ) $\Rightarrow x = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} x_1 - \dots - \dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} x_n = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n \Rightarrow X$ - базис из n элементов.

$\Leftarrow$ Пусть $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ - базис в $\mathbb{V}$ из n элементов. Рассмотрим произвольную систему $\mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_{n+1}\} \subset \mathbb{V}$. Проверим возможно ли, чтобы нетривиальная ЛК элементов $\mathcal{Y}$ давала бы θ? Имеем разложение по $\mathcal{E}$: $\begin{cases} y_1 = \xi_{11} e_1 + \dots + \xi_{1n} e_n \\ \vdots \\ y_{n+1} = \xi_{n+11} e_1 + \dots + \xi_{n+1n} e_n \end{cases}$ Берем ЛК $\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_{n+1} y_{n+1} = \theta$ (4). Подставим (3) в (4): $\theta = \lambda_1(\xi_{11} e_1 + \dots + \xi_{1n} e_n) + \dots + \lambda_{n+1}(\xi_{n+11} e_1 + \dots + \xi_{n+1n} e_n) = (\lambda_1 \xi_{11} + \dots + \lambda_{n+1} \xi_{n+11}) e_1 + \dots + (\lambda_1 \xi_{1n} + \dots + \lambda_{n+1} \xi_{n+1n}) e_n$ (5).

Поскольку $\{e_1, \dots, e_n\}$ - ЛНЗ, то (5) возможно $\Leftrightarrow$ все коэффициенты ЛК - нулевые, $\begin{cases} \lambda_1\xi_{11} + \dots + \lambda_{n+1}\xi_{n+11} = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1\xi_{1n} + \dots + \lambda_{n+1}\xi_{n+1n} = 0 \end{cases}$ (6)

Но (6) - это ОСЛАУ относительно $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$, вида $A\underset{\downarrow}{\lambda} = \underset{\downarrow}{0}$, причем $RgA \leqslant n < n+1 \Rightarrow \exists$ нетривиальное решение, т.е $\exists$ нетривиальный набор $\lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_{n+1}^{(0)}$, удовлетвоярющий ОСЛАУ (6), но для этого же нетривиального набора выполненено (4) $\Rightarrow$ любая система $\mathcal{Y}$ из $(n+1)$ элемента будет ЛЗ. $\Rightarrow \dim \mathbb{V} = n$ $\square$

Следствие 1. *Если* $\dim \mathbb{V} = n$, *то любой базис состоит из* n *элементов.*

Следствие 2. *Если* $\dim \mathbb{V} = n$, *то любая система из* n *ЛНЗ элементов образует его базис.*

Доказательство. Самостоятельно. $\square$

Примеры базисов:

1. k^n $(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$ - строки длины n, столбцы высоты n.

$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$. выше было показано, что $\{e_1, \dots, e_n\}$ - ЛНЗ. Далее $\forall x \in k^n \Rightarrow x = (\xi_1, \dots, \xi_n) = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n \Rightarrow \{e_1, \dots, e_n\}$ - базис. $\boxed{\dim k^n = n}$ Его еще называют n - мерным координатным пространством.

2. P_n - многочлены степени $\leqslant n$

$e_0 = 1, e_1 = t, \dots, e_n = t^n$. ЛНЗ показана выше. $\forall x(t) \in P_n \Rightarrow x(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n = a_0 e_0 + \dots + a_n e_n \Rightarrow \{e_0, \dots, e_n\}$ - базис. $\boxed{\dim P_n = n+1.}$

3. $\mathfrak{M}_{m\times n}$.

$$\left\{ e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \right\}_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}}$$

(Единственный ненулевой элемент находится на пересечении i-ой строки и j-ого столбца.) - ЛНЗ системы матрицы. $\forall A \in \mathfrak{M}_{m\times n} \Rightarrow A = (a_{ij})_m^n = a_{11}e_{11} + \dots + a_{1n}e_{1n} + \dots + a_{m1}e_{m1} + \dots + a_{mn}e_{mn} \Rightarrow \{e_{ij}\}-$ базис. $\boxed{\dim \mathfrak{M}_{m\times n} = m \cdot n}$.

4. Множество всевозможных решений ОСЛАУ $\mathbb{V}_{sol}$ (6) $A\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{0}$ ($\equiv$ общее решение ОСЛАУ).

Пусть $A = (a_{ij})_m^n, RgA = r$. При $r < n \exists$ ФСР ОСЛАУ (6), например НСР, состоящая из $(n-r)$ элементов $\underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)}, \dots, \underset{\downarrow}{\varphi}^{(n-r)}$. Эта система упорядоченная, ЛНЗ и любое решение через нее выражается $\Rightarrow$ это базис в общем решении $\Rightarrow$ $\boxed{\dim \mathbb{V}_{sol} = n-r}$

Таким образом: доказательство теоремы о ФСР и структуре общего решение (где не были доказаны 2 и 3 пункты.)

Доказательство. 2. $\dim \mathbb{V}_{sol} = n-r \Rightarrow$ любой базис содержит $(n-r)$ элементов. Всякая ФСР представляет собой базис $\Rightarrow$ всякая ФСР содержит $(n-r)$ элементов.

3. Любые $(n-r)$ ЛНЗ упорядоченных элементов $\mathbb{V}_{sol}$, т.е любые $(n-r)$ ЛНЗ упорядоченных решений, образуют базис $\mathbb{V}_{sol} \Rightarrow$ образуют ФСР. $\square$

Замечание. Видим, что можно дать альтернативное определение ФСР: фактически ФСР - это произвольный базис в ЛП всевозможных решений ОСЛАУ.

3.4 Подпространства линейного пространства. Линейная оболочка системы векторов

Пусть $\mathbb{V}$ - ЛП над k. Рассмотрим множество $L : L \subset \mathbb{V}$.

Определение. L называется линейным подпространством (ЛПП) линейного пространства $\mathbb{V}$,

если:
1.$\forall x, y \in L \Rightarrow x + y \in L$
2.$\forall x \in L, \forall \alpha \in k \Rightarrow \alpha x \in L$

Теорема 3.6. *Всякое ЛПП является ЛП (над тем же полем k)*

Доказательство. Линейные операции в L определяются так же, как в основном ЛП $\mathbb{V}$, и они не выводят из L (по определению ЛПП). Требуется доказать свойства 1-8 линейного пространства:

1,2 выполняются, т.к $L \subset \mathbb{V}$

3. $\theta \in L$, т.к $0 \cdot x \in L$, но $0 \cdot x = \theta$.

4. $\forall x \in L \Rightarrow \exists x' \in L : x + x' = \theta$, т.к $(-1) \cdot x \in L$, а $(-1) \cdot x = x'$.

5-8 выполняются, т.к $L \subset \mathbb{V}$.

1,2,5-8 проверить самостоятельно еще раз. $\square$

Рассмотрим систему $X = \{x_1, \ldots, x_m\} \subset \mathbb{V}$.

Определение. Совокупность всевозможных ЛК элементов системы X называется линейной оболочкой (ЛО) на системе X (или на элементах $x_1, \ldots, x_m$). Обозначение: $\text{span}(x), \text{span}(x_1, \ldots, x_m)$, то $\boxed{\text{span}(x) = \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m; \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in k\}}$. Говорят, что система X порождает ЛО $\text{span}(x)$.

Пусть $L = \text{span}(x)$. Очевидно, $L \subset \mathbb{V}$.

Теорема 3.7 (О линейной оболочке)**.** *L является ЛПП of ЛП $\mathbb{V}$.*

Доказательство. $x, y \in L \Rightarrow \exists \alpha_1, \ldots \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m$: $\left.\begin{matrix} x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m \\ y = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m \end{matrix}\right\} \Rightarrow x + y = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m = (\alpha_1 + \beta_1) x_1 + \cdots + (\alpha_m + \beta_m) x_m \in L$.

$\alpha x = \alpha(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m) = (\alpha\alpha_1) x_1 + \cdots + (\alpha\alpha_m) x_m \in L$. $\square$

Теорема 3.8 (О размерности ЛО)**.** *Пусть $L = \text{span}(x), x = \{x_1, \ldots, x_m\} \subset \mathbb{V}$. Тогда $\dim L = \max$ количеству ЛНЗ элеметнов в системе X.*

Доказательство. Пусть max количество ЛНЗ элементов в X равно p. БОО можно считать, что $\{x_1, \ldots, x_p\}$ - ЛНЗ (иначе перенумеруем элементы X). Тогда каждая из системы $\{x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}\}, \ldots, \{x_1, \ldots, x_p, x_m\}$ - ЛЗ $\Rightarrow$ по критерию линейной зависимости (1) $\begin{cases} x_{p+1} = \alpha_{p+1} x_1 + \cdots + \alpha_{p+1} x_p, \ldots \\ x_m = \alpha_m x_1 + \cdots + \alpha_m x_p \end{cases}$

Рассмотрим произвольный $y \in L : y = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = (1) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p + \lambda_{p+1}(\alpha_{p+11} x_1 + \cdots + \alpha_{p+1p} x_p) + \cdots + \lambda_m(\alpha_{m1} x_1 + \cdots + \alpha_{mp} x_p) = (\lambda_1 + \lambda_{p+1}\alpha_{p+11} + \cdots + \lambda_m \alpha_{m1}) x_1 + \cdots + (\lambda_p + \lambda_{p+1}\alpha_{p+1p} + \cdots +$

$\lambda_m\alpha_{mp})x_p = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_p x_p$. Таким образом, $\{x_1, \ldots, x_p\}$ ЛНЗ и $\forall y \in L$ представляется их линейной комбинацией $\Rightarrow \{x_1, \ldots, x_p\}$ - базис в $L \Rightarrow \dim L = p$. $\square$

Теорема 3.9 (О неполном базисе)**.** *Пусть* $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ *- ЛНЗ в ЛП* $\mathbb{V}, \dim \mathbb{V} = n > m$. *Тогда* $\exists x_{m+1}, .., x_n \in \mathbb{V} : \{x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n\}$ *- базис в* $\mathbb{V}$. *То есть всякую ЛНЗ систему в* $\mathbb{V}$ *можно дополнить до базиса.*

Доказательство. Рассмотрим $L = \mathrm{span}(x) = \mathrm{span}(x_1, \ldots, x_m), \dim L = m < n = \dim \mathbb{V} \Rightarrow L \neq \mathbb{V} \Rightarrow$ $\exists x_{m+1} : \begin{cases} x_{m+1} \in \mathbb{V} \\ x_{m+1} \notin L \end{cases}$ $\Rightarrow x_{m+1}$ не является линейной комбинацией элементов $X \Rightarrow$ система $\{x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}\}$ - ЛНЗ. Если $m+1 = n$, то теорема доказана. Если $m+1 < n$, то дальше действуем аналаогично. $\exists x_{m+\alpha}$: $\begin{cases} x_{m+\alpha} \in \mathbb{V} \\ x_{m+\alpha} \notin \mathrm{span}(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}) \end{cases}$ и т.д. За конечное число шагов получим базис $\{x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n\}$. $\square$

3.5 Координаты вектора в базисе

Пусть $\mathbb{V}$ - ЛП над $k, \mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ - базис в $\mathbb{V}$. Тогда $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow (1)\ x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n$ - разложение по базису.

Лемма 3.10. *Разложение по базису единственно.*

Доказательство. $\left.\begin{aligned} x &= \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n \\ x &= \xi_1' e_1 + \cdots + \xi_n' e_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = (\xi_1 - \xi_1')e_1 + \cdots + (\xi_n - \xi_n')e_n\ (*)$. Базис - ЛНЗ система, то $(*)$ возможно $\Leftrightarrow \xi_1 - \xi_1' = \cdots = \xi_n - \xi_n' = 0$, т.е $\xi_1 = \xi_1', \ldots, \xi_n = \xi_n'$. $\square$

Таким образом координаты вектора в данном базисе определены единственным образом и $\exists$ взаимно однозначное соответствие между элементами ЛП $\mathbb{V}$ и их координатами в заданном базисе. Обозначим это $x \leftrightarrow (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Теорема 3.11 (О координатах суммы векторов и произведении вектора на скаляр)**.** *Пусть в* $\mathbb{V}$ *фиксирован базис* $\mathcal{E}$.

Если $x \leftrightarrow (\xi_1, \ldots, \xi_n), y \leftrightarrow (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, *то* $\begin{aligned} &x + y \leftrightarrow (\xi_1 + \eta_1, \ldots, \xi_n + \eta_n) \\ &\alpha x \leftrightarrow (\alpha\xi_1, \ldots, \alpha\xi_n) \end{aligned}$

Доказательство. $\begin{aligned} &x \leftrightarrow (\xi_1, \ldots, \xi_n), \text{ т.е } x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n \\ &y \leftrightarrow (\eta_1, \ldots, \eta_n), \text{ т.е } y = \eta_1 e_1 + \cdots + \eta_n e_n \end{aligned}$, тогда $x + y = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n + \eta_1 e_1 + \cdots + \eta_n e_n = (\xi_1 + \eta_1)e_1 + \cdots + (\xi_n + \eta_n)e_n \leftrightarrow (\xi_1 + \eta_1, \ldots, \xi_n + \eta_n)$. Самостоятельно доказать для αx. $\square$

Итак, координаты суммы векторов равны сумме соответствующих координат, координаты произведения вектора на скаляр равны произведению координат на этот скаляр. Поскольку ВОС между векторами и координатами сохраняет линейные операции часто вместо знака $\leftrightarrow$ пишут знак $=$.
$x = (\xi_1, \ldots, \xi_n), y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ и т.д. На самом деле это означает, что $x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n =$ формально

$$= (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}.$$

$$y = \eta_1 e_1 + \dots + \eta_n e_n = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\eta}.$$

Т.е записи $x = (\xi_1, \dots, \xi_n), x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n, x = [\mathcal{E}]\xi$ означают одно и то же: вектор x имеет в базисе $\mathcal{E}$ координаты $(\xi_1, \dots, \xi_n)$

В этих обозначениях $[\mathcal{E}] = (e_1, \dots, e_n)$ - строка базисных векторов. Замечание о так называемом "сокращении на базис". Поскольку векторы равны $\Leftrightarrow$ совпадают их координаты, то имеем: $x = y \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = \eta_1 \\ \vdots \\ \xi_n = \eta_n \end{cases} \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{\eta}$

С другой стороны $x = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}, y = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\eta}$, т.е $\boxed{[\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi} = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\eta} \Leftrightarrow \underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{\eta}}$ Это формально значит, что в равенстве $[\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi} = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\eta}$ на базис $[\mathcal{E}]$ можно "сократить": $\underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{\eta}$

Этим свойством "сокращения на базис"будем пользоваться в дальнейшем.

3.6 Изоморфизм линейных пространств

Пусть $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ - ЛП над k. Пусть $\exists$ правило φ, по которому каждому элементу из $\mathbb{V}$ ставится в соответствие элемент из $\mathbb{W}$, так что выполнены следующие условия: $\begin{matrix} 1. \forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow \exists! y \in \mathbb{W} : y = \varphi(x) \\ 2. \forall y \in \mathbb{W} \Rightarrow \exists! x \in \mathbb{V} : y = \varphi(x) \end{matrix}$

Иными словами, установлено взаимно однозначное соответствие между элементами ЛП $\mathbb{V}$ и $\mathbb{W}$ с помощью правила φ.

Определение. Такое соотстветствие называется изоморфизмом, если $\begin{matrix} 1. \forall x_1, x_2 \in \mathbb{V} \Rightarrow \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) \\ 2. \forall x \in \mathbb{V}, \forall \lambda \in k \Rightarrow \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x) \end{matrix}$, т.е сохраняются лиенйные операции.

При этом говорят, что $\mathbb{V}$ изоморфно $\mathbb{W}$ и обозначают $\mathbb{V} \sim \mathbb{W}$

Замечание. Очевидно, что φ^{-1} тоже изоморфизм, т.е $\mathbb{W} \sim \mathbb{V}$, то ЛП $\mathbb{V}$ и W изоморфны друг другу.

Замечание. Выше мы фактически доказали, что если $\dim \mathbb{V} = n$, то $\mathbb{V} \sim k^n$, т.е $\exists$ ВОС между элементами ЛП $\mathbb{V}$ и n-мерным координатным пространством, сохраняющее линейные операции.

Свойства изоморфизма:

1. $\mathbb{V} \sim \mathbb{V}$ (рефлексивность)
2. Если $\mathbb{V} \sim \mathbb{W}$, то $\mathbb{W} \sim \mathbb{V}$ (симметричность)
3. Если $\mathbb{V} \sim \mathbb{U}, \mathbb{U} \sim \mathbb{W}$, то $\mathbb{V} \sim \mathbb{W}$ (транзитивность)
4. Пусть $\mathbb{V} \sim \mathbb{W}$, тогда если $\begin{matrix} \theta_{\mathbb{V}} - \text{ нейтральный элемент } \mathbb{V} \\ \theta_{\mathbb{W}} - \text{ нейтральный элемент } \mathbb{W} \end{matrix}$, то $\theta_{\mathbb{V}} \sim \theta_{\mathbb{W}}$

Доказательство. $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow 0 \cdot x = \theta_{\mathbb{V}}, \varphi(0 \cdot x) = 0 \cdot \varphi(x) = 0 \cdot y = \theta_{\mathbb{W}}$. В силу ВОС $\theta_{\mathbb{V}} \sim \theta_{\mathbb{W}}$ □

5. Пусть $\mathbb{V} \sim \mathbb{W}$, тогда если $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ - ЛНЗ в $\mathbb{V}$, то $Y = \{y_1, \ldots, y_m\} : \forall i = \overline{1,m}\ y_i = \varphi(x_i)$ - ЛНЗ в $\mathbb{W}$.

Доказательство. Самостоятельно. $\square$

6. Пусть $\mathbb{V} \sim \mathbb{W}$, тогда если $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ - ЛЗ в $\mathbb{V}$, то $Y = \{y_1, \ldots, y_m\} : \forall i = \overline{1,m}\ y_i = \varphi(x_i)$ - ЛЗ в $\mathbb{W}$.

Доказательство. Самостоятельно. $\square$

7. Если $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ конечномерны, то $\boxed{\mathbb{V} \sim \mathbb{W} \Leftrightarrow \dim \mathbb{V} = \dim \mathbb{W}}$ критерий изоморфизма конечномерных ЛП.

Доказательство. $(\Rightarrow)$ $\mathbb{V} \sim \mathbb{W} \Rightarrow$ их базисы содержат равное количество элементов (см. свойства 5 и 6) $\Rightarrow \dim \mathbb{V} = \dim \mathbb{W}$

$(\Leftarrow)$ $\left.\begin{array}{l} \dim \mathbb{V} = n \Rightarrow \mathbb{V} \sim k^n \\ \dim \mathbb{W} = n \Rightarrow \mathbb{W} \sim k^n \end{array}\right\} \underset{2,3}{\Rightarrow} \mathbb{V} \sim \mathbb{W}.$ $\square$

Видим, что изоморфизм между ЛП устанавливается путем установления ВОС между элементами базисов этих ЛП.

Замечание. С точки зрения свойств, связанных с линейными операциями, эелменты всех изоморфных ЛП равной размерности ведут себя одинаково (так же как и элементы k^n).

Следствие 1 (О размерности ЛО). *Пусть* $\mathbb{V}$ *- ЛП над* $k, \dim \mathbb{V} = n$. *Пусть* $\begin{array}{l} \mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\} - \text{ базис в } \mathbb{V} \\ X = \{x_1, \ldots, x_m\} - \text{ система в } \mathbb{V} \end{array}$

$x_1 = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi_1}, \ldots, x_m = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi_m}$. *Пусть* $L = \mathrm{span}(X)$. *Тогда* $\dim L = Rg(\underset{\downarrow}{\xi_1} \ldots \underset{\downarrow}{\xi_m})$

Доказательство. $\dim L = \max$ количеству ЛНз векторов в системе $X = (\mathbb{V} \sim k^n) = \max$ количеству ЛНЗ столбцов в системе $\{\underset{\downarrow}{\xi_1}, \ldots, \underset{\downarrow}{\xi_m}\} =$ т. о ранге матрицы $= Rg(\underset{\downarrow}{\xi_1} \ldots \underset{\downarrow}{\xi_m})$ $\square$

3.7 Сумма и пересечение линейных пространств

Пусть $\mathbb{V}$ - ЛП над k. $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ - его ЛПП.

Определение. Суммой ЛПП $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ называется $\boxed{S = \{x \in \mathbb{V} : x = x_1 + x_2, x_1 \in \mathbb{V}_1, x_2 \in \mathbb{V}_2\}}$ - совокупность всевозможных сумм элементов из $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$. Обозначение: $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$

Определение. Пересечением ЛПП $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ называется $\boxed{D = \{x \in \mathbb{V} : x \in \mathbb{V}_1, x \in \mathbb{V}_2\}}$ - совокупность общих элементов $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$. Обозначение: $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$

Теорема 3.12 (О сумме и пересечении ЛПП). *S, D являются ЛПП of ЛП $\mathbb{V}$.*

Доказательство. Самостоятельно. $\square$

Следствие 1. *S, D являются ЛП над тем же полем k, что и $\mathbb{V}$.*

Теорема 3.13 (О размерности S и D). $\boxed{\dim(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2) = \dim \mathbb{V}_1 + \dim \mathbb{V}_2 - \dim(\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2)}$

Доказательство. Без доказательства. $\square$

Определение. Говорят, что ЛП $\mathbb{V}$ раскладывается в прямую сумму своих ЛПП $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$, если $\boxed{\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow \begin{cases} \exists! x_1 \in \mathbb{V}_1 \\ \exists! x_2 \in \mathbb{V}_2 \end{cases} : x = x_1 + x_2}$ Обозначение: $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$ (т.е каждый элемент из $\mathbb{V}$ единственным образом представляется в виде суммы элементов из $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$)

Теорема 3.14 (Необходимое и достаточное условие разложения $\mathbb{V}$ в прямую сумму $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$)**.** $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1. \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 = \mathbb{V} \\ 2. \mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = \{\theta\} \end{cases}$

Доказательство. Без доказательства. □

tg: @moksimqa

Лекция 7

17.03

3.8 Матрица перехода.

Пусть $\mathbb{V}$ - ЛП над k. $\dim \mathbb{V} = n, \mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}, \mathcal{E}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ - базисы в $\mathbb{V}$.

Разложим элементы базиса $\mathcal{E}'$ по базису $\mathcal{E}$: $\begin{cases} e'_1 = t_{11}e_1 + \cdots + t_{n1}e_n, \\ \ldots \\ e'_n = t_{1n}e_1 + \cdots + t_{nn}e_n \end{cases}$ (1). Тогда $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица, в столбцах которой записаны координаты векторов базиса $\mathcal{E}'$ в базисе $\mathcal{E}$, называется матрицей перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$. Введем $[\mathcal{E}] = (e_1, \ldots, e_n)$ - строку векторов базса $\mathcal{E}$ и $[\mathcal{E}'] = (e'_1, \ldots, e'_n)$ - строку векторов базиса $\mathcal{E}'$. Тогда соотношение (1) можно переписать в виде $(e'_1, \ldots, e'_n) =$
$= (e_1, \ldots, e_n) \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix}$. Или еще короче: $[\mathcal{E}'] = [\mathcal{E}]T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ (3). (1),(2) и (3) означают одно и то же.

Теорема 3.15. $\det T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} \neq 0$.

Доказательство. От противного. Допустим, что $\det \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix} = 0$. Тогда столбцы $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ линейно зависимы. В силу изоморфизма $\mathbb{V} \sim k^n$, это означает, что $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ тоже линейна зависима, но это невозможно, т.к $\mathcal{E}'$ - базис - противоречие, а значит $\Rightarrow \det T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} \neq 0$. $\square$

Следствие 1. *$T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ - обратима. (т.е $\exists T^{-1}_{\mathcal{E}'\to\mathcal{E}}$)*

Доказательство. Из критерия обратимости. $\square$

Лемма 3.16 (О матрице обратного перехода)**.** $T_{\mathcal{E}'\to\mathcal{E}} = T^{-1}_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$.

Доказательство. Пусть $[\mathcal{E}'] = [\mathcal{E}]T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$. Тогда $[\mathcal{E}'] \cdot T^{-1}_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} = ([\mathcal{E}]T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}) \cdot T^{-1}_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} =$ (ассоциативность матричного умножения) $= [\mathcal{E}](T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} \cdot T^{-1}_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}) = [\mathcal{E}] \cdot E = [\mathcal{E}]$. Таким образом $[\mathcal{E}] = [\mathcal{E}'] \cdot T^{-1}_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$, но $[\mathcal{E}] = [\mathcal{E}'] \cdot T_{\mathcal{E}'\to\mathcal{E}}$, т.е $[\mathcal{E}] = [\mathcal{E}'] \cdot T^{-1}_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} = [\mathcal{E}]T_{\mathcal{E}'\to\mathcal{E}}$, "сокращая"на базис матрицы, получаем: $T_{\mathcal{E}'\to\mathcal{E}} = T^{-1}_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$.
В качестве упражнения посмотреть, что свойства ассоциативности верно для строк векторов. $\square$

Теорема 3.17 (О преобразовании координат вектора при смене базиса)**.** *Если $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ - базисы в $\mathbb{V}$ и $x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}, x' = \xi'_1 e'_1 + \cdots + \xi'_n e'_n = [\mathcal{E}']\underset{\downarrow}{\xi'}$, то $\underset{\downarrow}{\xi'} = T^{-1}_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}\underset{\downarrow}{\xi}$, где $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ - матрица перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$.*

Доказательство. $[\mathcal{E}'] = [\mathcal{E}]T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$. Тогда $x = [\mathcal{E}']\underset{\downarrow}{\xi'} = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi} = ([\mathcal{E}']T^{-1}_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})\underset{\downarrow}{\xi} =$ ассоциатевность матричного умножения со строкой векторов (Упр.) $= [\mathcal{E}'](T^{-1}_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}\underset{\downarrow}{\xi})$. Получаем, что $[\mathcal{E}']\underset{\downarrow}{\xi'} = [\mathcal{E}'](T^{-1}_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}\underset{\downarrow}{\xi})$, сокращая на базис, получаем $\underset{\downarrow}{\xi'} = T^{-1}_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}\underset{\downarrow}{\xi}$. $\square$

Замечание. Закон преобразования координат называют контравариантным и если (базисы связаны матрицей T, то координаты - матрицей T^{-1})

Следствие 1. $\boxed{\underset{\downarrow}{\xi} = T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}\underset{\downarrow}{\xi'}}$ $\boxed{\underset{\downarrow}{\xi'} = T_{\mathcal{E}'\to\mathcal{E}}\underset{\downarrow}{\xi}}$

3.9 Линейные формы в ЛП. Сопряженное пространство, его базис и размерность. Преобразование коэффициентов линейной формы при смене базиса.

Пусть $\mathbb{V}$ - ЛП над $k, \dim \mathbb{V} = n$.

Определение (Закон (правило)). f, ставящий каждому элементу $\mathbb{V}$ (вектору) единственный скаляр из поля k ($\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow \exists! f(x) \in k$) таким образом, что выполняется: $\begin{matrix} 1)\forall x, y \in \mathbb{V} \Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y) \\ 2)\forall x \in \mathbb{V}, \forall \alpha \in k \Rightarrow f(\alpha x) = \alpha f(x) \end{matrix}$ называется линейным функционалом или линейной формой (ЛФ).

Примеры:

1. $\mathbb{V} = C[a,b] = \{x(t) -$ непрерывные на $[a,b]\}$. Тогда $f(x) = \int\limits_a^b x(t)dt$.

2. Пусть $\mathcal{E}$ - базис в $\mathbb{V}$, $x = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi} = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n$. Тогда $f(x) = \xi_1$.

Определение. ЛФ f_1 и f_2 назовем равными, если $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow f_1(x) = f_2(x)$.

Определение. f называется суммой ЛФ f_1 и f_2 (обозначается $f = f_1 + f_2$), если $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

Определение. f называется произведением f_1 на скаляр $\alpha \in k$ (обозначается $f = \alpha f_1$), если $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow f(x) = \alpha f_1(x)$.

Определение. Совокупность всевозможных ЛФ, действующих в ЛП $\mathbb{V}$, обозначим $\mathbb{V}^*$

Теорема 3.18. $\mathbb{V}^*$ *с введенными операциями сложения и умножения на скаляры образует ЛП.*

Доказательство.

Лемма 3.19. $f = \boxed{f_1 + f_2}$ *- ЛФ.*

$$f(x+y) \underset{\text{def}}{=} f_1(x+y) + f_2(x+y) \underset{\text{def ЛФ}}{=} f_1(x) + f_1(y) + f_2(x) + f_2(y) \underset{\text{def}}{=} f(x) + f(y).$$

Аналогично доказывается, что $f(\lambda x) \underset{\text{def}}{=} f_1(\lambda x) + f_2(\lambda x) \underset{\text{def ЛФ}}{=} \lambda f_1(x) + \lambda f_2(x) \underset{\text{def}}{=} \lambda f(x)$.

$f = \alpha f_1$ - ЛФ. Доказывается аналогично - самостоятельно.

Далее доказываем свойства $1-8$ ЛП. 1,2,5-8 - очевидны (самостоятельно). Докажем 3,4. Рассмотрим так называемую "нуль-форму". $\Phi(x) : \forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow \Phi(x) = 0$. $(\Phi(x+y) = 0, \Phi(x) + \Phi(y) = 0 + 0 = 0) \Rightarrow \Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y)$. Аналогично $\Phi(\alpha x) = 0, \alpha \cdot \Phi(x) + \alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow \Phi(\alpha x) = \alpha \cdot \Phi(x), \Phi$ - ЛФ.

$f + \Phi\ \forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow (f+\Phi)(x) = f(x) + \Phi(x) = f(x) + 0 = f(x) \Rightarrow \boxed{f + \Phi = f}$, т.е Φ - нейтральный элемент $\mathbb{V}^*$

Рассмотрим $f' = -1 \cdot f$, т.е $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow f(x) = -f(x), f'$ - ЛФ (очевидно) и $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow (f+f')(x) = f(x) + f'(x) = f(x) - f(x) = 0 = \Phi(x) \Rightarrow \boxed{f + f' = \Phi}$ Тогда f' - противоположная ЛФ.

Из выполнения свойств $1-8 \Rightarrow \mathbb{V}^*$ - ЛП, которое назовем линейным пространством, сопряженным к $\mathbb{V}$ (сопряженным пространством) □

Теорема 3.20. *Если* $\dim \mathbb{V} = n < +\infty$, *то* $\dim \mathbb{V}^* = n$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ - некоторый базис в $\mathbb{V}$. Рассмотрим систему $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ из $\mathbb{V}^* : \forall i = \overline{1,n}, \forall j = \overline{1,n} \Rightarrow \boxed{g_i(e_j) = \delta_{ij}}$. Тогда $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow x = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi} = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n, g_i(x) = g_i(\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n) = \xi_1 g_i(e_1) + \cdots + \xi_n g_i(e_n) = \xi_1 \cdot 0 + \cdots + \xi_i g_i(e_i) + \cdots + \xi_n \cdot 0 = \xi_i$. Покажем, что система $\{g_1, \ldots, g_n\}$ линейной независима в $\mathbb{V}^*$. По определению рассмотрим ЛК $\lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_n g_n = \Phi$ (1). Тогда

$\forall i=\overline{1,n} \Rightarrow (\lambda_1 g_1+\dots+\lambda_n g_n)(e_i) = \lambda_1 g_1(e_i)+\dots+\lambda_n g_n(e_i) = \lambda_1\cdot 0+\dots+\lambda_i g_i(e_i)+\dots+\lambda_n\cdot 0 = \lambda_i = \Phi(e_i) = 0 \Rightarrow ((1)$ выполнена $\Leftrightarrow \lambda_1=\dots=\lambda_n=0) \Rightarrow G=\{g_1,\dots,g_n\}$ - ЛНЗ в $\mathbb{V}^*$. Пусть $f\in\mathbb{V}^*$ - произвольная ЛФ. Тогда $\forall x\in\mathbb{V} \Rightarrow f(x)=f(\xi_1 e_1+\dots+\xi_n e_n) = \xi_1 f(e_1)+\dots+\xi_n f(e_n) = g_1(x)\alpha_1+\dots+g_n(x)\alpha_n = (\alpha_1 g_1+\dots+\alpha_n g_n)(x) \Rightarrow \boxed{f=\alpha_1 g_1+\dots+\alpha_n g_n}$, где $\alpha_1=f(e_1),\dots,\alpha_n=f(e_n)$ - коэффициенты ЛФ f в базисе $\mathcal{E}$.

Мы доказали, что ① любая ЛФ может быть разложена по упорядоченной ЛНЗ системе $G\Rightarrow G$ - базис. И ②, что действие ЛФ полностью определяется ее действием на базисные векторы ЛП $\mathbb{V}$. Можно заключить, что $\boxed{\dim\mathbb{V}^*=n}$ $f=\alpha_1 g_1+\dots+\alpha_n g_n = \begin{pmatrix} g_1 & \dots & g_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = [G]\underset{\downarrow}{\alpha}$.

$f(x)=f(\xi_1 e_1+\dots+\xi_n e_n)=\xi_1 f(e_1)+\dots+\xi_n f(e_n)=\vec{\alpha}\underset{\downarrow}{\xi}$

□

Замечание. Базис G, построенный в доказательстве теоремы $(g_i(e_j)=\delta_{ij})$ называется биортогональным к базису $\mathcal{E}$.

Теорема 3.21 (О преобразовании коэффициентов ЛФ при смене базиса)**.** *Пусть $f\in\mathbb{V}^*,\mathcal{E},\mathcal{E}'$ - базисы в $\mathbb{V}:[\mathcal{E}']=[\mathcal{E}]T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$, и $x=[\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}=[\mathcal{E}']\underset{\downarrow}{\xi'}$. $f(x)=\vec{\alpha}\underset{\downarrow}{\xi}=\vec{\alpha'}\underset{\downarrow}{\xi'}$. Тогда коэффициенты $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ и $(\alpha_1',\dots,\alpha_n')$ формы f в базисах $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ соответственно, связаны следующим образом: $\boxed{\vec{\alpha'}=\vec{\alpha}T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}}$ (ковариантный закон преобразования)*

Доказательство.

Следствие 1. *Если $\forall\underset{\downarrow}{\xi}\Rightarrow\vec{\alpha}\underset{\downarrow}{\xi}=\vec{\beta}\underset{\downarrow}{\xi}$, то $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$.*

Доказательство. $\vec{\alpha}\underset{\downarrow}{\xi}=\vec{\beta}\underset{\downarrow}{\xi}\Rightarrow(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\underset{\downarrow}{\xi}=0$. Возьмем $\underset{\downarrow}{\xi}=(\overline{\underset{\downarrow}{\alpha}}-\overline{\underset{\downarrow}{\beta}})$, тогда $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\underset{\downarrow}{\xi}=(\vec{\alpha}-\vec{\beta})(\overline{\underset{\downarrow}{\alpha}}-\overline{\underset{\downarrow}{\beta}}) = (\vec{\alpha}-\vec{\beta})\overline{(\underset{\downarrow}{\alpha}-\underset{\downarrow}{\beta})}=|\alpha_1-\beta_1|^2+\dots+|\alpha_n-\beta_n|^2=0\Leftrightarrow\alpha_1=\beta_1,\dots,\alpha_n=\beta_n$, т.е $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$. □

$f(\alpha)=\vec{\alpha}\underset{\downarrow}{\xi}=\vec{\alpha'}\underset{\downarrow}{\xi'}\Rightarrow\vec{\alpha}(T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}\underset{\downarrow}{\xi'})=$ ассоцитивность $=(\vec{\alpha}T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})\underset{\downarrow}{\xi'}$, т.е для $\forall x\in\mathbb{V}$ (а значит и для $\forall\underset{\downarrow}{\xi'}$) выполнено $\vec{\alpha'}\underset{\downarrow}{\xi'}=(\vec{\alpha}T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})\underset{\downarrow}{\xi'}\Rightarrow\vec{\alpha'}=\vec{\alpha}T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$.

□

tg: @moksimqa

Лекция 8

24.03

Теорема 3.22. *$f : \mathbb{V} \to k$ является ЛФ $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow f(x) = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_n\xi_n$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k$ - определенные числа (не зависящие от x), а $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ - координаты x в некотором базисе.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{E}$ - базис, в котором заданы координаты x, т.е $x = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}$.

$\Rightarrow$ $\alpha_k = f(e_k)$ $k = \overline{1, n}$ (см. выше)

$\Leftarrow$ $f : \mathbb{V} \to k$. Пусть $x = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}$, $y = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\eta}$, тогда $f(x) = \vec{\alpha}\underset{\downarrow}{\xi}$, $f(y) = \vec{\alpha}\underset{\downarrow}{\eta}$, $f(x+y) = \vec{\alpha}(\underset{\downarrow}{\xi}+\underset{\downarrow}{\eta}) = \vec{\alpha}\underset{\downarrow}{\xi}+\vec{\alpha}\underset{\downarrow}{\eta} = f(x)+f(y)$.
$f(\lambda x) = \lambda f(x)$ - аналогично. Самостоятельно. $\square$

Глава 4

Линейные операторы в линейных пространствах

Лекция 8

24.03

4.1 Определние линейного оператора (ЛО). Линейное пространство линейных операторов(ЛПЛО).

Пусть $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ - ЛП над k (одним и тем же)

Определение. Правило (закон) A, по которому каждому $x \in \mathbb{V}$ ставится в соответствие единственный $y \in \mathbb{W}$, называется оператором с областью определения $\mathbb{V}$ и множеством значений $\mathbb{W}$.

Обозначение: $A : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$.

Определение. Если $A : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ и $\begin{matrix} 1.\forall x, y \in \mathbb{V} \Rightarrow A(x+y) = A(x) + A(y) \\ 2.\forall x \in \mathbb{V}, \forall \alpha \in k \Rightarrow A(\alpha x) = \alpha A(x) \end{matrix}$ $\Rightarrow$ A называется линейным оператором (ЛО)

Замечание. $\begin{matrix} 1.\text{Если } \mathbb{W} = k, \text{ то } A \text{ - линейный функционал.} \\ 2.\text{Если } \mathbb{V} = \mathbb{W}, \text{ то } A \text{ - линейное преобразование.} \end{matrix}$

Далее мы будем рассматривать преимущественно линейные преобразования, но называть их будем более общим названием (линейными операторами).

Примеры:

1. $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ - ЛО поворота.

$A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2), A(\alpha x) = \alpha A(x)$. Самостоятельно проверить.

2. $D : P_n \to P_{n-1}, n \geqslant 1$ - ЛО дифференцирования.

$D = \dfrac{d}{dt} \qquad \forall x(t) \in P_n \Rightarrow D(x) = \dfrac{dx}{dt}$

$D(x_1 + x_2) = D(x_1) + D(x_2), D(\alpha x) = \alpha D(x)$.

3. Пусть $\mathbb{V} = V_1 \oplus V_2$

$A : \mathbb{V} \to V_1$ - оператор параллельного проектирования.

$\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow x = x_1 + x_2, x_1 \in \mathbb{V}_1, x_2 \in \mathbb{V}_2, A(x) = x_1$. Тогда $A(x+y) = A(x) + A(y), A(\alpha x) = \alpha A(x) = \alpha x_1$

Обозначим совокупность всех ЛО, действующих из $\mathbb{V}$ в $\mathbb{V}$ через $L(\mathbb{V},\mathbb{V})$.

Определение. Пусть $A, B \in L(\mathbb{V},\mathbb{V})$. Говорят, что $A = B$, если $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow A(x) = B(x)$.

Определение. Пусть $A, B \in L(\mathbb{V},\mathbb{V})$. Говорят, что C - сумма A и B (об. $C = A + B$), если $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow$ $\Rightarrow C(x) = A(x) + B(x)$. (иными словами, $(A + B)(x) \underset{\text{def}}{=} A(x) + B(x)$)

Самостоятельно показать, что $A + B \in L(\mathbb{V},\mathbb{V})$.

Определение. Пусть $A \in L(\mathbb{V},\mathbb{V}), \alpha \in k, C = \alpha A$ (C является произведением A на скаляр α), если $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow C(x) = \alpha A(x)$. (иными словами, $(\alpha A)(x) \underset{\text{def}}{=} \alpha A(x)$)

Самостоятельно показать, что $\alpha A \in L(\mathbb{V},\mathbb{V})$.

Теорема 4.1. *С введенными линейными операциями $L(\mathbb{V},\mathbb{V})$ образует ЛП, называемое линейным пространством линейных операторов (ЛПЛО).*

Доказательство. 1, 2, 5-8 доказать самостоятельно.

3. Введем $\mathcal{O}$ - нулевой оператор: $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow \mathcal{O}(x) = \theta$. Самостоятельно проверить, что $\mathcal{O}(x + y) = \mathcal{O}(x) + \mathcal{O}(y), \mathcal{O}(\alpha x) = \alpha\mathcal{O}(x)$, т.е $\mathcal{O}$ - ЛО. ($\mathcal{O} \in L(\mathbb{V},\mathbb{V})$). Тогда $\forall A \in L(\mathbb{V},\mathbb{V}) \Rightarrow A + \mathcal{O} = A$, т.к $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow$ $(A + \mathcal{O})(x) \underset{\text{def суммы}}{=} A(x) + \mathcal{O}(x) = A(x) + \theta = A(x) \Rightarrow L(\mathbb{V},\mathbb{V})$ имеет нейтральный элемент.

4. Введем для $\forall A \in L(\mathbb{V},\mathbb{V})$ $A' = -1 \cdot A$. Покажем, что всегда $A + A' = \mathcal{O}$, т.е. A' - противоположный элемент. $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow (A+A')(x) \underset{\text{def суммы}}{=} A(x)+A'(x) = A(x)+(-1)\cdot A(x) \underset{\text{def произв.}}{=} A(x)-A(x) = \theta = \mathcal{O}(x) \Rightarrow$ в $L(\mathbb{V},\mathbb{V})$ каждый элемент имеет противоположный. $\square$

Определение. $I : \forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow I(x) = x$ называется тождественным оператором.

Самостоятельно показать, что $I \in L(\mathbb{V},\mathbb{V})$.

Далее в $L(\mathbb{V},\mathbb{V})$ можно ввести операторы композиции.

Определение. Говорят, что C является композицией A и B (обозначается $C = A \circ B$), если $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow$ $C(x) = A(B(x))$, т.е $(A \circ B)(x) \underset{\text{def}}{=} A(B(x))$.

Самостоятельно показать, что $A \circ B \in L(\mathbb{V},\mathbb{V})$.

Свойства композиции:

1. $\forall A, B \in L(\mathbb{V},\mathbb{V})$ и $\forall \alpha \in k \Rightarrow (\alpha A) \circ B = A \circ (\alpha B) = \alpha(A \circ B)$.
2. $\forall A, B, C \in L(\mathbb{V},\mathbb{V}) \Rightarrow (A + B) \circ C = A \circ C + B \circ C$.
3. $\forall A, B, C \in L(\mathbb{V},\mathbb{V}) \Rightarrow A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C$.
4. $\forall A, B, C \in L(\mathbb{V},\mathbb{V}) \Rightarrow (A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$.

Доказательство. 1, 3, 4 - самостоятельно.

2. $\forall x \in \mathbb{V}((A+B)\circ C)(x) \underset{\text{def}}{=} (A+B)(C(x)) \underset{\text{def суммы}}{=} A(C(x))+B(C(x)) \underset{\text{def комп}}{=} (A\circ C)(x)+(B\circ C)(x) \underset{\text{def суммы}}{=}$ $= (A \circ C + B \circ C)(x)$. $\square$

5. Вообще говоря, $A \circ B \neq B \circ A$. (примеры позже)

Определение. $A, B \in L(\mathbb{V},\mathbb{V}) : A \circ B = B \circ A$ называется коммутирующими.

4.2 Матрица ЛО

Пусть $A \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V}), \mathbb{V}$ - ЛП над k, $dim \mathbb{V} = n, \mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ - некоторый базис в $\mathbb{V}$. Рассмотрим строку $\begin{pmatrix} A(e_1) & \ldots & A(e_n) \end{pmatrix}$, образовавшихся базисных векторов под действием A. Введем обозначение $\begin{pmatrix} A(e_1) & \ldots & A(e_n) \end{pmatrix} \underset{\text{def}}{\equiv} [A\mathcal{E}]$

Пусть $x \in \mathbb{V}, x = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}$, т.е $x = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \xi_1 e_1 + .. + \xi_n e_n$

Теорема 4.2 (О преобразовании вектора под действием ЛО)**.** *Если* $x = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}$, *то* $A(x) = [A\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}$

Доказательство. $A(x) = A(\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n) = \xi_1 A(e_1) + \cdots + \xi_n A(e_n) = \begin{pmatrix} A(e_1) & \ldots & A(e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = [A\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}$. □

Таким образом, имеет место равенство $\boxed{A([\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}) = [A\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}}$ (1)

Теорема 4.3 (О задании ЛО)**.** *Пусть* $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ *- произвольная система векторов в ЛП* $\mathbb{V}$*. Тогда* $\exists! A \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V}) : \forall i = \overline{1, n} \Rightarrow A(e_i) = v_i$*, где* $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *- произвольный базис в* $\mathbb{V}$*.*

Доказательство. Рассмотрим $A : \forall x \in \mathbb{V}$ $(x = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}) \Rightarrow A(x) = [\mathcal{V}]\underset{\downarrow}{\xi} = \xi_1 v_1 + \cdots + \xi_n v_n$, т.е $A([\mathcal{E}\underset{\downarrow}{\xi}]) = [\mathcal{V}]\underset{\downarrow}{\xi}$. $\begin{pmatrix} v_1 & \ldots & v_n \end{pmatrix}$ - строка векторов из условия. Покажем, что $A \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$. $x = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}, y = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\eta}$, тогда $x + y = [\mathcal{E}](\underset{\downarrow}{\xi} + \underset{\downarrow}{\eta}), A(x + y) = A([\mathcal{E}](\underset{\downarrow}{\xi} + \underset{\downarrow}{\eta})) = [\mathcal{V}](\underset{\downarrow}{\xi} + \underset{\downarrow}{\eta}) = [\mathcal{V}]\underset{\downarrow}{\xi} + [\mathcal{V}]\underset{\downarrow}{\eta} = A(x) + A(y)$.
Аналогично (самостоятельно) показать, что $A(\alpha x) = \alpha A(x)$, то $A \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$. Далее, $\forall i = \overline{1, n} \Rightarrow A(e_i) =$

$$A\left([\mathcal{E}] \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot i\right) = [\mathcal{V}] \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot i = v_i.$$

Докажем единственность. Пусть $A, B \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V}) : \forall i = \overline{1, n} \rightarrow A(e_i) = v_i, B(e_i) = v_i$.
Тогда $\forall x \in \mathbb{V}(x = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}) \Rightarrow A(x) = A([\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}) = [A\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi} = [\mathcal{V}]\underset{\downarrow}{\xi} = [B\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi} = B([\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}) = B(x)$, т.е $A = B$ □

Следствие 1. *Действие любого ЛО однозначно определяется его действием на базисные векторы.*

Рассмотрим векторы $A(e_1), \ldots, A(e_n)$ и разложим их по базису $\mathcal{E}$:
$$\begin{cases} A(e_1) = a_{11} e_1 + \cdots + a_{n1} e_n \\ A(e_2) = a_{12} e_1 + \cdots + a_{n2} e_n \\ \quad \ldots \\ A(e_n) = a_{1n} e_1 + \cdots + a_{nn} e_n \end{cases} \quad (2)$$

Определение. Матрица $M_A^{\mathcal{E}} = \left(\begin{array}{cccc} A(e_1) & A(e_2) & \dots & A(e_n) \\ \hline a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}\right)$ в столбцах которой записаны координаты базисных векторов в этом базисе, называется матрицей линейного оператора A в базисе $\mathcal{E}$.

Тогда (2) примет вид: (3) $\begin{pmatrix} A(e_1) & \dots & A(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ или (4) $[A\mathcal{E}] = [\mathcal{E}] \cdot M_A^{\mathcal{E}}$

Теорема 4.4. *Если $x = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}, A(x) = y$ и $y = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\eta}$, то $\boxed{\underset{\downarrow}{\eta} = M_A^{\mathcal{E}} \cdot \underset{\downarrow}{\xi}}$ или $A([\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}) = [\mathcal{E}]M_A^{\mathcal{E}}\underset{\downarrow}{\xi}$*

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{r} A(x) = A([\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}) \underset{\substack{\text{т. о преобр вектора} \\ \text{под действием } A}}{=} [A\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi} \underset{(4)}{=} ([\mathcal{E}]M_A^{\mathcal{E}})\underset{\downarrow}{\xi} = \text{ассоц.} =[\mathcal{E}](M_A^{\mathcal{E}} \cdot \underset{\downarrow}{\xi}), \\ A(x) = y = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\eta} \end{array}\right\} \Rightarrow [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\eta} =$$

$[\mathcal{E}](M_A^{\mathcal{E}} \cdot \underset{\downarrow}{\xi}) \Rightarrow \underset{\downarrow}{\eta} = M_A^{\mathcal{E}} \cdot \underset{\downarrow}{\xi}$. $y = A(x), \underset{\downarrow}{\eta} = M_A^{\mathcal{E}} \cdot \underset{\downarrow}{\xi}$. □

Лекция 9

31.03

Ранее было показано, что каждому ЛО $A \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ однозначно ставится в соответствие его матрица в фиксированном базисе $M_A^{\mathcal{E}} \in \mathfrak{M}_{n\times n}$ $A \to M_A^{\mathcal{E}}$. $\begin{pmatrix} A(e_1) & \dots & A(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} M_A^{\mathcal{E}}.[A\mathcal{E}] = [\mathcal{E}]M_A^{\mathcal{E}}$

Теорема 4.5. $\forall M \in \mathfrak{M}_{n\times n} \exists! A \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V}) : M_A^{\mathcal{E}} = M$ *($\mathcal{E}$ - некоторый базис)*

Доказательство. Рассмотрим $\mathcal{E} = (e_1 \dots e_n)$. Пусть $M = (m_{ij})_n^n$.

Рассмотрим систему векторов $\mathcal{V}$ $\begin{cases} v_1 = m_{11}e_1 + \dots + m_{1n}e_n \\ \dots \\ v_n = m_{n1}e_1 + \dots + m_{nn}e_n \end{cases}$, т.е $[\mathcal{V}] = [\mathcal{E}]M$. Ранее было доказано, что $\exists! A \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V}) : A(e_i) = v_i$ $i = \overline{1, n}$. Пусть A такой ЛО, но тогда из того, что $[\mathcal{V}] = [\mathcal{E}]M_A^{\mathcal{E}} \Rightarrow \boxed{M_A^{\mathcal{E}} = M}$

То есть M будет матрицей ЛО A в базисе $\mathcal{E}$.

Докажем единственность. Пусть $A, B : M_A^{\mathcal{E}} = M_B^{\mathcal{E}} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow A(x) = A([\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}) = [A\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi} = [\mathcal{E}]M_A^{\mathcal{E}}\underset{\downarrow}{\xi} = [\mathcal{E}]M_B^{\mathcal{E}}\underset{\downarrow}{\xi} = \dots = B(x) \Leftrightarrow A = B$ □

Теорема 4.6. $M_{A+B}^{\mathcal{E}} = M_A^{\mathcal{E}} + M_B^{\mathcal{E}}, \mathcal{E}$ *- фиксированный базис.*

Доказательство. $(A + B)(x) = (A + B)([\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}) = [\mathcal{E}]M_{A+B}^{\mathcal{E}}\underset{\downarrow}{\xi}$. С другой стороны $A(x) + B(x) = [\mathcal{E}]M_A^{\mathcal{E}}\underset{\downarrow}{\xi} + [\mathcal{E}]M_B^{\mathcal{E}}\underset{\downarrow}{\xi} = [\mathcal{E}](M_A^{\mathcal{E}} + M_B^{\mathcal{E}})\underset{\downarrow}{\xi} \Rightarrow [\mathcal{E}]M_{A+B}^{\mathcal{E}}\underset{\downarrow}{\xi} = [\mathcal{E}](M_A^{\mathcal{E}} + M_B^{\mathcal{E}})\underset{\downarrow}{\xi}$ □

Лемма 4.7. *Если $\forall \underset{\downarrow}{\xi} \Rightarrow M_1\underset{\downarrow}{\xi} = M_2\underset{\downarrow}{\xi}$, то $M_1 = M_2$*

Доказательство. Самостоятельно. Совет: рассмотреть $\underset{\downarrow}{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Далее сокращаем на столбец (в случае произвольности $\underset{\downarrow}{\xi}$). $M^{\mathcal{E}}_{A+B} = M^{\mathcal{E}}_A + M^{\mathcal{E}}_B$ □

Теорема 4.8. $M^{\mathcal{E}}_{\alpha A} = \alpha M^{\mathcal{E}}_A$

Доказательство. Самостоятельно. □

Таким образом, установлено ВОС $A \leftrightarrow M$, сохраняющее линейные операции. Т.е установлен изоморфизм $L(\mathbb{V}, \mathbb{V}) \sim \mathfrak{M}_{m\times n}$

Следствие 1. $\dim L(\mathbb{V}, \mathbb{V}) = n^2$

Теорема 4.9 (О преобразовании матрицы ЛО при смене базиса)**.** *Пусть* $A \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$, $\mathcal{E} = (e_1 \dots e_n), \mathcal{E}' = (e'_1 \dots e'_n)$ *- базисы в* $\mathbb{V}$*. Тогда* $\boxed{M^{\mathcal{E}'}_A = T^{-1}_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} M^{\mathcal{E}}_A T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}}$ *, где* $[\mathcal{E}'] = [\mathcal{E}]T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$*, т.е* $T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ *- матрица перехода от* $\mathcal{E}$ *к* $\mathcal{E}'$*.*

Доказательство. $x = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi} = [\mathcal{E}']\underset{\downarrow}{\xi}$. $A(x) = A([\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}) = [A\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi} = [\mathcal{E}]M^{\mathcal{E}}_A\underset{\downarrow}{\xi} = [\mathcal{E}]M^{\mathcal{E}}_A(T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}\underset{\downarrow}{\xi'}) = [\mathcal{E}](M^{\mathcal{E}}_A T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})\underset{\downarrow}{\xi'}$

$A(x) = A([\mathcal{E}']\underset{\downarrow}{\xi'}) = \dots = [\mathcal{E}']M^{\mathcal{E}'}_A\underset{\downarrow}{\xi'} = ([\mathcal{E}]T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})M^{\mathcal{E}'}_A\underset{\downarrow}{\xi'} = [\mathcal{E}](T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}M^{\mathcal{E}'}_A\underset{\downarrow}{\xi'}) \Rightarrow [\mathcal{E}](M^{\mathcal{E}}_A T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})\underset{\downarrow}{\xi'} = [\mathcal{E}](T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}M^{\mathcal{E}'}_A)\underset{\downarrow}{\xi'}$,

в силу произвольности $\underset{\downarrow}{\xi'} \Rightarrow M^{\mathcal{E}}_A T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} M^{\mathcal{E}'}_A \Big| \cdot T^{-1}_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} \Rightarrow T^{-1}_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} M^{\mathcal{E}}_A T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} = T^{-1}\mathcal{E} \to \mathcal{E}'(T_{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}' M^{\mathcal{E}}_A) = (T^{-1}_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'})M^{\mathcal{E}'}_A = E \cdot M^{\mathcal{E}'}_A = M^{\mathcal{E}'}_A$ □

Следствие 1. $\det M^{\mathcal{E}}_A$ *не зависит от выбора базиса.*

Доказательство. $\det M^{\mathcal{E}'}_A = \det(T^{-1}_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} M^{\mathcal{E}}_A T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}) = \dfrac{1}{\det T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}} \det {M_A}^{\mathcal{E}} \cdot \det T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} = \det M^{\mathcal{E}}_A$ □

Определение. Определителем ЛО A называется $\det M^{\mathcal{E}}_A$ в любом базисе.

Теорема 4.10. $M^{\mathcal{E}}_{A\circ B} = M^{\mathcal{E}}_A \cdot M^{\mathcal{E}}_B$

Доказательство. Берем любой $x \in \mathbb{V}$. $(A \circ B)(x) = \dots = [\mathcal{E}]M^{\mathcal{E}}_{A\circ B}\underset{\downarrow}{\xi}$

$A(B(x)) = A([\mathcal{E}]M^{\mathcal{E}}_B\underset{\downarrow}{\xi}) = [A\mathcal{E}]M^{\mathcal{E}}_B\underset{\downarrow}{\xi} = ([\mathcal{E}]M^{\mathcal{E}}_A)M^{\mathcal{E}}_B\underset{\downarrow}{\xi} = [\mathcal{E}](M^{\mathcal{E}}_A \cdot M^{\mathcal{E}}_B)\underset{\downarrow}{\xi} \Rightarrow [\mathcal{E}]M^{\mathcal{E}}_{A\circ B} = [\mathcal{E}](M^{\mathcal{E}}_A \cdot M^{\mathcal{E}}_B)\underset{\downarrow}{\xi}$

В силу произвольности $\underset{\downarrow}{\xi} \Rightarrow M^{\mathcal{E}}_{A\circ B} = M^{\mathcal{E}}_A \cdot M^{\mathcal{E}}_B$ □

Примеры: $M^{\mathcal{E}}_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 \\ e'_2 = 2e_1 - e_2 \end{cases} \qquad M^{\mathcal{E}}_A - ?$$

$T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M^{\mathcal{E}'}_A = T^{-1}_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} \cdot M^{\mathcal{E}}_A \cdot T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$.

$(A|B) \underset{\text{строк}}{\sim} (E|A^{-1}B)$

$(T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}|M^{\mathcal{E}}_A) \underset{\text{строк}}{\sim} (E|T^{-1}_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}M^{\mathcal{E}}_A) \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$

$M^{\mathcal{E}'}_A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Пример:

1.I - тождественный оператор, $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix}$ - любой базис.

$$\forall i = \overline{1,n} \Rightarrow I_{e_i} = e_i \Rightarrow M_I^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E$$

2. A - поворот на φ против часовой на плоскости. $A(\vec{i}) = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi, A(\vec{j}) = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi . M_A^{\{\vec{i},\vec{j}\}} =$ $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ Самостоятельно: $M_A^{\{\vec{i}+\vec{j},\vec{i}-\vec{j}\}}$–?. Указание: восполнить матрицы перехода.

4.3 Обратный оператор и его свойства

Пусть $\mathbb{V}$ ЛП над $k, A \in L(\mathbb{V},\mathbb{V}), \mathcal{E}$ - базис в $\mathbb{V}$.

Определение. Оператор B называется обратным к A, если $A \circ B = B \circ A = I$. Обозначение: $B = A^{-1}$

Определение. Если A имеет обратный, то A называется обратимым.

Теорема 4.11. *Если A обратим, то*
1.$A^{-1} \in L(\mathbb{V},\mathbb{V})$, т. е A^{-1} - ЛО
2.A^{-1} – единственный.

Доказательство. ① 1)$A^{-1}(x+y) = A^{-1}(I(x)+I(y)) = A^{-1}((A\circ A^{-1})(x)+(A\circ A^{-1})(y)) = A^{-1}(A(A^{-1}(x))+ A(A^{-1}(x))) = A^{-1}(A(A^{-1}(x) + A^{-1}(y))) = (A^{-1} \circ A)(A^{-1}(x) + A^{-1}(y)) = I(A^{-1}(x) + A^{-1}(y)) = A^{-1}(x) + A^{-1}(y) \Rightarrow A^{-1}(x + y) = A^{-1}(x) + A^{-1}(y)$

2) $A^{-1}(\alpha x) = \alpha(A^{-1}(x))$. Самостоятельно.

②Пусть B_1, B_2 - обратимые к А, тогда $B_1 = B_1 \circ I = B_1 \circ (A \circ B_2) = (B_1 \circ A) \circ B_2 = I \circ B_2 = B_2$ ☐

Теорема 4.12. *Если A обратим, то* $M_{A^{-1}}^{\mathcal{E}} = (M_A^{\mathcal{E}})^{-1}$

Доказательство. $A \circ A^{-1} = A^{-1} \circ A = I$. $M_{A\circ A^{-1}}^{\mathcal{E}} = M_{A^{-1}\circ A}^{\mathcal{E}} = M_I^{\mathcal{E}}$

$M_A^{\mathcal{E}} \cdot M_{A^{-1}}\mathcal{E} = M_{A^{-1}}^{\mathcal{E}} \cdot M_A^{\mathcal{E}} = M_I\mathcal{E} = E \Rightarrow M_{A^{-1}}^{\mathcal{E}}$ - обратимая к $M_A^{\mathcal{E}}$, т.е $M_{A^{-1}}^{\mathcal{E}} = (M_A^{\mathcal{E}})^{-1}$ ☐

Следствие 1. *Если A обратим, то в любом базисе* $\det M_A^{\mathcal{E}} \neq 0$

Доказательство. $\exists A^{-1} \Rightarrow \exists (M_A^{\mathcal{E}})^{-1} \Leftrightarrow \det M_A^{\mathcal{E}} \neq 0$ ☐

Теорема 4.13 (Критерий обратимости)**.** *Следующие утверждения эквивалентны:*

1.$\exists A^{-1}$, *т.е A обратим*

2.*В некотором базисе* $\mathcal{E}$ $\det M_A^{\mathcal{E}} \neq 0$

3.*A биективна (т.е взаимно однозначно) отображает* $\mathbb{V}$ *на всё* $\mathbb{V}$

(Биекция $\mathbb{V} \Leftrightarrow \mathbb{V}\forall x \in \mathbb{V}\exists! y \in \mathbb{V} : y = A(x), \forall y \in V\exists! x \in \mathbb{V} : y = A(x)$)

Доказательство. $1^\circ \Rightarrow 2^\circ \Rightarrow 3^\circ \Rightarrow 1^\circ$

$1^\circ \Rightarrow 2^\circ$ уже доказано.

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$. $\det M_A^{\mathcal{E}} \neq 0 \Rightarrow$ СЛАУ $M_A^{\mathcal{E}}\underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{\eta}$ всегда имеет единственное решение, т.е $\forall y = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\eta}$ $\exists! x = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}$: $y = A(x)$ и $\forall x = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}$ $\exists! y = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\eta} : y = A(x)$, т.е $\underset{\downarrow}{\eta} = M_A^{\mathcal{E}}\underset{\downarrow}{\xi}$

$3^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Пусть A - биекция $\mathbb{V}$ на $\mathbb{V}$. Тогда $\forall y \in \mathbb{V} \Rightarrow \exists! x : y = A(x)$. Тогда определим оператор B

следующим образом: $B : y \to x : y = A(x)$, т.е тот x, из которого этот y получен. Тогда $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow (B \circ A)(x) = B(A(x)) = B(y) = x = I(x) \Rightarrow B \circ A = I$ и $\forall y \in \mathbb{V} \Rightarrow (A \circ B)(y) = A(B(y)) = A(x) = y = I(y) \Rightarrow A \circ B = I \Rightarrow B = A^{-1}$, т.е A обратим. □

Пусть $\mathbb{V}$ - ЛП над k, $A \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ - базис. $M_A^{\mathcal{E}} = (a_{ij})_n^n$ - матрица A в базисе $\mathcal{E}$

Рассмотрим $P_n(\lambda) = \det (M_A^{\mathcal{E}} - \lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^n(\lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + \dots + C_n)$

Определение. $P_n(\lambda)$ называется характеристическим многочленом ЛО A.

Теорема 4.14. *$P_n(\lambda) = inv$, т.е не зависит от выбора базиса.*

Доказательство. Пусть $\tilde{\mathcal{E}}$ - другой базис, тогда $\tilde{P}_n(\lambda) = \det(M_A^{\tilde{\mathcal{E}}} - \lambda E) = \det (T_{\mathcal{E} - \tilde{\mathcal{E}}}^{-1} \cdot M_A^{\mathcal{E}} T_{\mathcal{E} \to \tilde{\mathcal{E}}} - T_{\mathcal{E} \to \tilde{\mathcal{E}}}^{-1} (\lambda E) T_{\mathcal{E} \to \tilde{\mathcal{E}}}) = \det ((T_{\mathcal{E} \to \tilde{\mathcal{E}}}^{-1} - \lambda E) T_{\mathcal{E} \to \tilde{\mathcal{E}}}) = \dfrac{1}{\det T_{\mathcal{E} \to \tilde{\mathcal{E}}}} \cdot \det (M_A^{\mathcal{E}} - \lambda E) \det T_{\mathcal{E} \to \tilde{\mathcal{E}}} = det(M_A^{\mathcal{E}} - \lambda E) = P_n(\lambda)$ □

Лекция 10

07.04

Для справок: $C_k = (-1)^k \sum\limits_{1 \leqslant j,k < \dots < j_k \leqslant n} M^{j_1 \cdots j_k}_{j_1 \cdots j_k}$

В частности $C_1 = -\sum\limits_j M_j = -\sum a_{jj} \underset{\text{об}}{\equiv} -Tr(M_A^{\mathcal{E}}) \underset{\text{об}}{\equiv} -Sp(M_A^{\mathcal{E}})$ $\boxed{a_{11} + \dots + a_{nn}}$ - след матрицы.

Замечание. Tr, Sp любой квадратной матрицы не зависит от выбора базиса.

$C_n = (-1)^n \det M_A^{\mathcal{E}}$

4.4 Образ и ядро ЛО

Пусть $\mathbb{V}$ - ЛП над $k, A \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V}), \mathcal{E} = \{e_1 \dots e_n\}$ - базис в $\mathbb{V}$.

Определение. $\operatorname{Im} A = \{y \in \mathbb{V} : y = A(x), x \in \mathbb{V}\}$. Образ ЛО - совокупность образов всех элементов ЛП.

Определение. $\ker A = \{x \in \mathbb{V} : A(x) = \theta\}$. Ядро ЛО - совокупность всех элементов ЛП, которые A обращает в θ.

Теорема 4.15.
1. $\operatorname{Im} A = \operatorname{span} (e_1), \dots, A(e_n))$
2. $\operatorname{Im} A -$ *ЛПП of* $\mathbb{V}$
3. $\ker A$ - *ЛПП of* $\mathbb{V}$

Доказательство. 1° $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow x = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}$.

$A(x) = A([\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}) = [A\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}$ $[A\mathcal{E}] = \begin{pmatrix} A(e_1) & \dots & A(e_n) \end{pmatrix} \Rightarrow A(x)$ - есть ЛК элементов строки $[AE] \Rightarrow$

$\Rightarrow A(x) \in \operatorname{span} (A\mathcal{E})$. С другой стороны $\forall y \in \operatorname{span} (A\mathcal{E}) \Rightarrow \exists \underset{\downarrow}{\alpha} = [A\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\alpha} = A([\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\alpha}) = A(x), x \in \mathbb{V}$.

2° $\operatorname{Im} A = \operatorname{span} (A\mathcal{E})$, всякая линейная оболочка есть ЛПП of $\mathbb{V} \Rightarrow \operatorname{Im} A$ - ЛПП of $\mathbb{V}$.

3° а) $\forall x_1, x_2 \in \ker A \Rightarrow A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2) = \theta + \theta = \theta \Rightarrow x_1 + x_2 \in \ker A$.

б) $\forall x \in \ker A, \forall \lambda \in k \Rightarrow A(\lambda x) = \lambda A(x) = \lambda \theta = \theta \Rightarrow \lambda x \in \ker A$.

□

Пример: Пусть $\mathbb{V} = V_1 \oplus V_2 (\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow \exists! x_1 \in \mathbb{V}_1, \exists! x_2 \in \mathbb{V}_2 : x = x_1 + x_2)$

Оператор параллельного проектирования на $\mathbb{V}_1$. $\mathcal{P}(x) = x_1. \operatorname{Im}\mathcal{P} = \mathbb{V}_1, \ker\mathcal{P} = \mathbb{V}_2$

$\tilde{\mathcal{P}}(x) = x_2$ - проектирование $\mathbb{V}_2$. $\operatorname{Im}\tilde{\mathcal{P}} = \mathbb{V}_2, \ker\tilde{\mathcal{P}} = \mathbb{V}_1$. (рисунки добавлю позже)

Ранее было доказано, что $\det M_A^{\mathcal{E}} = inv$.

Определение. Поэтому число $\det M_A^{\mathcal{E}}$ обозначаем $\det A$ и назовем определителем ЛО A.

Определение. Рангом ЛО A назовем размерность его образа. $RgA \underset{\text{def}}{=} \dim\operatorname{Im} A$.

Теорема 4.16. *$RgA = RgM_A^{\mathcal{E}}, \mathcal{E}$ - любой базис.*

Доказательство. $RgA = \dim\operatorname{Im} A = \dim\operatorname{span}(A\mathcal{E}) = \max$ число ЛНЗ элементов = (изоморфизм) = max числу ЛНЗ столбцов $M_A^{\mathcal{E}} = RgM_A^{\mathcal{E}}$ $([A\mathcal{E}] = [\mathcal{E}]M_A^{\mathcal{E}})$

После перехода в другой базис - есть изоморфизм, то $RgM_A^{\mathcal{E}'} = RgM_A^{\mathcal{E}}$. □

Определение. Дефект ЛО A это размерность его ядра. $\operatorname{def} A \underset{\text{def}}{\equiv} \dim\ker A$

Теорема 4.17. $\dim\operatorname{Im} A + \dim\ker A = \dim\mathbb{V}$

Доказательство. Пусть $\dim\mathbb{V} = n, \dim\operatorname{Im} A = r$. Возьмем произвольный базис $\mathcal{E}$. Тогда $\forall x \in \ker A \Rightarrow x = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}$ и $A(x) = [A\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi} = [\mathcal{E}]M_A^{\mathcal{E}}\underset{\downarrow}{\xi} = \theta = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{0}$. Получили, что $[\mathcal{E}]M_A^{\mathcal{E}}\underset{\downarrow}{\xi} = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{0}$, сокращая на базис, получим: $M_A^{\mathcal{E}}\underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0}$ - ОСЛАУ. Ее общее решение - координаты всевозможных векторов, принадлежащих ядру. Общее решение есть ЛП $\mathbb{V}_{\text{sol}}$. $\mathbb{V}_{\text{sol}} = \text{span}(\text{ФСР}) \Rightarrow \dim V_{\text{sol}} = n - r \Rightarrow \dim\ker A =$ (изоморфизм) $= \dim\mathbb{V}_{\text{sol}} = n - r = \dim\mathbb{V} - \dim\operatorname{Im} A$. □

Теорема 4.18 (Доп. критерии обратимости)**.** *Следующие условия эквивалентны:*

1. $A -$ *обратим*$(\exists A^{-1})$
2. $\operatorname{Im} A = \mathbb{V}$
3. $\ker A = \{\theta\}$

Замечание. Такие ядра (3°) называются тривиальными.

Доказательство. $1° \Rightarrow 3° \Rightarrow 2°$.

$1° \to 3°$. A - обратим $\Rightarrow \det M_A^{\mathcal{E}} \neq 0 \Rightarrow M_A^{\mathcal{E}}\underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0}$ имеет только тривиальное решение $\Rightarrow \ker A = \{\theta\}$.

$3° \to 2°$. $\ker A = \{\theta\} \Rightarrow \dim\ker A = 0 \Rightarrow \dim\operatorname{Im} A = n \Rightarrow \operatorname{Im} A = \mathbb{V}$.

$2° \to 1°$. $\operatorname{Im} A = \mathbb{V} \Rightarrow \ker A = \{\theta\} \Rightarrow M_A^{\mathcal{E}}$ - невырожденная $\Rightarrow \exists(M_A^{\mathcal{E}})^{-1} \Rightarrow \exists A^{-1}$.

□

4.5 Собственные векторы и собственные значения ЛО

Пусть $\mathbb{V}$ - ЛП над $k, A \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V}), \mathcal{E} = \{e_1 \dots e_n\}$ - базис в $\mathbb{V}$.

Определение. $h \in \mathbb{V}$ называется собственным вектором ЛО A, если $h \neq \theta$ и $\exists\lambda \in k : A(h) = \lambda h$, при этом λ называется собственным значением ЛО A. Говорят, что СВ h отвечает СЗ λ. Обозначение $h \sim \lambda$

Замечание. Если $h \sim \lambda$, то $\forall C \in k : C \neq 0 \Rightarrow Ch \sim \lambda$.

Доказательство. $1° Ch \neq \theta$

$2° A(Ch) = CA(h) = C\lambda h = \lambda(Ch)$ □

Определение. Совокупность всевозможных СЗ of ЛО A называется его спектром. Обозначение $\sigma(A)$.

Пусть $P_n(\lambda) = \det(M_A^{\mathcal{E}} - \lambda E)$ - характеристический многочлен ЛО A.

Определение. Уравнение $P_n(\lambda) = 0$, т.е $\det M_A^{\mathcal{E}} - \lambda E = 0$ называется характеристическим уравнением.

Теорема 4.19. $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \in k \\ P_n(\lambda) = 0 \end{cases}$

Доказательство. $\Rightarrow$ $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \begin{cases} \lambda \in k \\ \exists h \in \mathbb{V} : \begin{cases} h \neq \theta \\ A(h) = \lambda h \end{cases} \end{cases}$ $\quad A(h) = \lambda h \Leftrightarrow (A - \lambda E)(h) = \theta \Leftrightarrow$(изоморфизм) $\Leftrightarrow (M_A^{\mathcal{E}} - \lambda E)\underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0}$. Таким образом координаты СВ - это всевозможные нетривиальные решения этой квадратной ОСЛАУ. Оно обладает нетривиальным решением $\Leftrightarrow \det(M_A^{\mathcal{E}} - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow P_n(\lambda) = 0$

$\Leftarrow$ Пусть $\begin{cases} \lambda \in k \\ P_n(\lambda) = 0 \end{cases} \Rightarrow (M_A^{\mathcal{E}} - \lambda E)\underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0}$ обладает нетривиальным решением $\underset{\downarrow}{\xi*}$. Тогда $h = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi*}$ - есть СВ, т.к $A(h) = A([\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi*}) = [A\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi*} = [\mathcal{E}]M_A^{\mathcal{E}}\underset{\downarrow}{\xi*} = [\mathcal{E}](\lambda E\underset{\downarrow}{\xi*}) = \lambda[\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi*} = \lambda h \Rightarrow \lambda$ - СЗ.

Замечание. В поле $\mathbb{C}$ характеристическое уравнение всегда имеет n корней с учетом их кратности (следствие основной теоремы алгебры). В поле $\mathbb{R}$ характеристический многочлен может иметь менее n корней, или не иметь их вовсе. Т.е у ЛО в $\mathbb{V}$ над полем $\mathbb{C}$ всегда есть СЗ, а у ЛО в $\mathbb{V}$ над $\mathbb{R}$ может не быть СЗ.

Пример: A_φ - оператор поворота на плоскости на угол φ. $M_{A_\varphi}^{\{\vec{i}\vec{j}\}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} \cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda \end{vmatrix} = (\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi = 0 \Rightarrow \lambda = \cos\varphi \pm i\sin\varphi = e^{\pm i\varphi} \notin \mathbb{R}$ (если $\varphi \neq \pi k$)

$\varphi = 2\pi m \Rightarrow M_{A_\varphi}^{\{\vec{i}\vec{j}\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$

$(M_{A_\varphi} - \lambda E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ любой $\vec{h} \neq \vec{\theta}$ является СВ.

$\varphi = \pi + 2\pi m \Rightarrow M_{A_\varphi}^{\{\vec{i}\vec{j}\}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1$

$(M_{A_\varphi} - \lambda E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ любой $\vec{h} \neq \vec{\theta}$ является СВ. □

Определение. Говорят, что $\lambda_0 \in \sigma(A)$ имеет алгебраическую кратность, равную $k \in \mathbb{N}$, если $P_n(\lambda_0) = P'(\lambda_0) = \dots = P^{(k-1)}(\lambda_0) = 0.P_n^{(k)}(\lambda_0) \neq 0$. Обозначени: АК($\lambda_0$)=$k$.

Самостоятельно проверить, что это равносильно $P_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k Q_{n-k}(\lambda), Q_{n-k}(\lambda_0) \neq 0$

Определение. Геометрической кратностью $\lambda_0 \in \sigma(A)$ называется количество ЛНЗ СВ, отвечающих ему. Обозначение ГК(λ)

tg: @moksimqa

Лекция 11

14.04

Теорема 4.20. $\forall\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow$ *АК*$(\lambda) \geqslant$ *ГК*$(\lambda) \geqslant 1$.

Алгоритм нахождения СЗ и СВ:

1. Выбрать базис $\mathcal{E}$ (произвольный) и записать $M_A^{\mathcal{E}}$.

2. Записать характеристическое уравнение и найти все его корни $\det(M_A^{\mathcal{E}} - \lambda E) = 0$. $P_n(\lambda) = 0$ и найти всего его корни из поля k. Получим $\sigma(A)$

3. $\forall\lambda \in \sigma(A)$ решаем ОСЛАУ $(M_A^{\mathcal{E}} - \lambda E)\underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0}$. Ее общее решение, за исключением нулевого столбца, дает координаты всевозможных СВ, отвечающих λ, в базисе $\mathcal{E}$.

4.6 Свойства собственных векторов и собственных значений ЛО.

Определение. Квадратная матрица $M = (m_{ij})_n^n$ называется диагональной, если $m_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Определение. $A \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ называется диагонализуемым, если $\exists$ базис в $\mathbb{V}$: $M_A^{\mathcal{E}}$ — диагональная.

Теорема 4.21 (Критерий диагонализуемости). *A - диагонализуем $\Leftrightarrow \exists$ базис из СВ $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_n\}$ оператора A.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть A диагонализуем. Тогда $\exists\, \mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ - базис: $M_A^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$

тогда по определению матрицы ЛО: $\left.\begin{aligned} A(e_1) &= \alpha_1 e_1 + 0e_1 + \cdots + 0e_n = \alpha_1 e_1 \\ A(e_2) &= 0e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + 0e_n = \alpha_2 e_2 \\ &\ldots \\ A(e_n) &= 0e_1 + 0e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = \alpha_n e_n \end{aligned}\right| \Rightarrow \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \sigma(A)$ и

$e_1 \sim \alpha_1, \ldots, e_n \sim \alpha_n$ - СВ.

$\Leftarrow$ Пусть $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_n\}$ - базис из СВ. Тогда $\left.\begin{aligned} A(h_1) &= \lambda_1 h_1 \\ A(h_2) &= \lambda_2 h_2 \\ &\ldots \\ A(h_n) &= \lambda_n h_n \end{aligned}\right| \Rightarrow M_A^{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$ - диагональная.

Обозначим $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda$ $\square$

Теорема 4.22. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ - попарно различные СЗ ЛО A; $\lambda_1 \sim h_1, \ldots, \lambda_m \sim h_m$. Тогда $\{h_1, \ldots, h_m\}$ - ЛНЗ.*

Доказательство. Методом математической индукции.

Если $\boxed{m = 1}$ то $\lambda_1 \sim h_1 \neq \theta \Rightarrow h_1$ - ЛНЗ, т. е для $m = 1$ утверждение верно. (База)

Шаг: Пусть утверждение верно для $m = k$, т.е $\{h_1, \ldots, h_k\}$ - ЛНЗ, покажем, что тогда $\{h_1, \ldots, h_k, h_{k+1}\}$ -

ЛНЗ. Пусть $\underbrace{\alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_k h_k + \alpha_{k+1} h_{k+1}}_{\substack{\text{обращается в } \theta \\ \text{только в трив. случае}}} = \theta$ (1)

Тогда $A(\alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_k h_k + \alpha_{k+1} h_{k+1}) = A(\theta) = \theta;\quad \alpha_1 A(h_1) + \dots + \alpha_k A(h_k) + \alpha_{k+1} A(h_{k+1}) = \theta.$

$\alpha_1 \lambda_1 h_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k h_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} h_{k+1} = \theta$ (2)

Вычтем из (2) (1) $\cdot\, \lambda_{k+1}$: $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})h_1 + \dots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})h_k \neq 0$ (3).

Поскольку $\{h_1, \dots, h_k\}$ - ЛНЗ и $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - попарно различны, то (3) возможно $\Leftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_{k+1} = 0 \Leftrightarrow$ $\{h_1, \dots, h_{k+1}\}$ - ЛНЗ. $\square$

Следствие 1 (Из критерия диагонализуемости). *В комплексном ЛП А диагонлизуем* $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \sigma(A) \Rightarrow$ *АК(λ) = ГК(λ)*

Следствие 2. *В вещественном ЛП А диагонлизуем* $\Leftrightarrow$ *все корни характеристического уравнения вещественны* ($\forall \lambda : P_n(\lambda) = 0 \Rightarrow \Lambda \in \mathbb{R}$) *и* $\forall \lambda \in \sigma(A) \Rightarrow$ *АК(λ) = ГК(λ).*

Пример: 1)ЛО поворота на плоскости; при $\varphi \neq \pi k$ не диагонализуем.

2) $M_A^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$

$(M_A^{\mathcal{E}} - \lambda E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 0\xi_1 + 1\xi_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = C, \xi_1 \neq 0 \\ \xi_2 = 0 \end{cases} \qquad h = C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \text{АК}(1) = 2 \\ \text{ГК}(1) = 1 \end{matrix}$

Замечание. Если $\forall \lambda \in \sigma(A) \Rightarrow$ АК(λ) = ГК(λ). Оператор может не диагонализоваться в вещественном ЛП, но диагонализоваться в комплексном ЛП. (Если характеристическое уравнение имеет не только вещественные корни)

Глава 5

Биленейные и квадратичные формы в вещественном ЛП

5.1 Биленейные формы

Пусть $\mathbb{V}$ - ЛП над k.

Определение. Правило $B : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ (т.е $\forall x, y \in \mathbb{V} \xrightarrow{\text{B}} B(x,y) \in \mathbb{R}$) : $\forall x, y, z \in \mathbb{V}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ выполнено:

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ B(\alpha x + \beta y, z) = \alpha B(x,z) + \beta B(y,z) \\ 2^\circ B(x, \alpha y + \beta z) = \alpha B(x,y) + \beta B(x,z) \end{array}\right| \quad \text{называется биленейной формой (БФ)}$$

Пусть $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ - базис в $\mathbb{V}, x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}, y = \eta_1 e_1 + \dots + \eta_n e_n = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\eta}$.

$$B(x,y) = B([\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}, [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\eta}) = (\text{см. файл}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \eta_j \underbrace{B(e_i, e_j)}_{\in \mathbb{R}}.\ B(e_i, e_j) \overset{\text{об.}}{=} b_{ij}$$

Определение. Матрицей БФ B в базисе $\mathcal{E}$ называется $M_B^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} B(e_1,e_1) & B(e_1,e_2) & \dots & B(e_1,e_n) \\ B(e_2,e_1) & B(e_2,e_2) & \dots & B(e_2,e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_n,e_1) & B(e_n,e_2) & \dots & B(e_n,e_n) \end{pmatrix} =$

$= (b_{ij})_n^n$

С помощью нее получаем $\boxed{B(x,y) = \vec{\xi} M_B^{\mathcal{E}} \underset{\downarrow}{\eta}}$

Определение. Общим видом БФ называется вид $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \xi_i \eta_j$, что кратко записывается $\vec{\xi} M_B^{\mathcal{E}} \underset{\downarrow}{\eta}$.

Определение. БФ B_1 и B_2 называются равными, если $\forall x, y \in \mathbb{V} \Rightarrow B_1(x,y) = B_2(x,y)$

Теорема 5.1. *Если БФ B действуют в вещественном ЛП $\mathbb{V}$: $\dim V = n$, то $\exists$ ВОС $B \leftrightarrow M$, где $M \in \mathfrak{M}_{n \times n}$*

Доказательство. $\Rightarrow$ $B \xrightarrow{\mathcal{E}} \exists! M = (b_{ij})_n^n$.

$\Leftarrow$ $M \xrightarrow{\mathcal{E}} B(x,y) = \vec{\xi} M \underset{\downarrow}{\eta}$ (более подробно см. файл) ☐

Определение. БФ B называется симметричной, если $\forall x, y \in \mathbb{V} \Rightarrow B(x,y) = B(y,x)$

Теорема 5.2. *БФ B симметрична $\Leftrightarrow \big(\exists \mathcal{E} \Rightarrow M_B^{\mathcal{E}} -$ симметричная$\big)$*

Следствие 1. *Симметричная БФ B в любом базисе имеет симметричную матрицу.*

Теорема 5.3 (Преобразование БФ при смене базиса)**.** *Если $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ - базисы в $\mathbb{V}$ и $[\mathcal{E}'] = [\mathcal{E}]T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$, то $M_B^{\mathcal{E}'} = T^t_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} M_B^{\mathcal{E}} T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$.*

Доказательство. $B(x,y) = \vec{\xi} M_B^{\mathcal{E}} \underset{\downarrow}{\eta} = (\vec{\xi})^t M_B^{\mathcal{E}} \underset{\downarrow}{\eta} = \left(T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} \underset{\downarrow}{\xi'}\right)^t M_B^{\mathcal{E}} \left(T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} \underset{\downarrow}{\eta'}\right) = \left((\underset{\downarrow}{\xi'})^t T^t_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}\right) M_B^{\mathcal{E}} \left(T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} \underset{\downarrow}{\eta'}\right) =$
ассоц. $= \vec{\xi'} \left(T^t_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} M_B^{\mathcal{E}} T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}\right) \underset{\downarrow}{\eta'}$

С другой стороны $B(x,y) = \vec{\xi'} M_B^{\mathcal{E}'} \underset{\downarrow}{\eta'}$, т.е $\forall \vec{\xi'}, \underset{\downarrow}{\eta'} \Rightarrow \vec{\xi'} M_B^{\mathcal{E}'} \underset{\downarrow}{\eta'} = \vec{\xi'} \left(T^t_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} M_B^{\mathcal{E}} T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}\right) \underset{\downarrow}{\eta'}$. В силу произвольности $\vec{\xi'}, \underset{\downarrow}{\eta'}$ (т.к x, y - произвольные) $\Rightarrow M_B^{\mathcal{E}'} = T^t_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} M_B^{\mathcal{E}} T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$. □

5.2 Квадратичные формы в вещественном ЛП

Пусть $\mathbb{V}$ - ЛП над $\mathbb{R}$.

Определение. Правило $g : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ (т.е $\forall x \in \mathbb{V} \xrightarrow{g} \overset{\text{единств.}}{g(x)} \in \mathbb{R}$) называется квадратичной формой (КФ), если $\exists$ симметричная БФ $B : g(x) = B(x,x)$ (т.е симметричная БФ B порождает КФ g). При этом симметричную БФ B называют полярной к КФ g.

Теорема 5.4. *$\exists$ ВОС $g \leftrightarrow$ симметричная B*

Доказательство. $\Leftarrow$ $B \to g : \forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow g(x) = B(x,x)$

Замечание. g_1 и g_2 называются равными, если $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow g_1(x) = g_2(x)$.

$\Rightarrow$ Пусть B - симметричная БФ, тогда $B(x+y, x+y) = B(x,x) + B(y,x) + B(x,y) + B(y,y) = B(x,x) + 2B(x,y) + B(y,y)$. Тогда, если B порождает g, то $g(x+y) = g(x) + 2B(x,y) + g(y) \Rightarrow B(x,y) = \frac{1}{2}(g(x+y) - g(x) - g(y))$, т.е по любой КФ однозначно восстанавливается симметричная БФ, ее породившая.

□

Общий вид КФ: Если $\mathcal{E}$ - базис в $\mathbb{V}, x = [\mathcal{E}]\underset{\downarrow}{\xi}; g(x) = B(x,x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \xi_j \underbrace{B(e_i, e_j)}_{b_{ij}\in\mathbb{R}} = \Big| b_{ij} = b_{ji} \Big| =$

$$= \sum_{i=1}^n b_{ii}(\xi_i)^2 + 2\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n b_{ij}\xi_i\xi_j$$

Определение. $M_g^{\mathcal{E}} \overset{\text{def}}{=} M^{\mathcal{E}}_{B_{\text{пол}}} = (b_{ij})^n_n$ - симметричная. Соответствующая $g(x) = \vec{\xi} M_g^{\mathcal{E}} \underset{\downarrow}{\xi}$.

Теорема 5.5. $M_g^{\mathcal{E}'} = T^t_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} M_g^{\mathcal{E}} T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$.

Доказательство. Следует из связи КФ с полярной БФ (см. файл) □

Определение. Базис $\mathcal{E}'$, в котором КФ имеет диагональную матрицу, т.е $M_g^{\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$ называется каноническим, в нем КФ имеет вид $g(x) = \alpha_1(\xi_1')^2 + \dots + \alpha_n(\xi_n')^2$, который также называется каноническим.

Теорема 5.6 (Лагранжа)**.** *Любая КФ невырождающими преобразованиями координат приводится к каноническому виду, т.е* $\forall g(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ij}\xi_i^2 + 2\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=i+1}^{n} b_{ij}\xi_i\xi_j \; \exists M = (m_{ij})_n^n : \det M \neq 0$ *и* $\underset{\downarrow}{\xi'} = M\underset{\downarrow}{\xi}$ *дает* $g(x) = \alpha_1(\xi_1')^2 + \cdots + \alpha_n(\xi_n')^2$.

tg: @moksimqa