# Глава 1

# Множества

**Лекция 1**

02.09

## 1.1 Множества и действия над ними.

Множество, элемент множества - неопределимые понятия. $a \in A$; a - элемент; A - множество. ;$A \equiv \{a, ..., \}$

Некоторые обозначения:

$\forall$ - для каждого, для любого, для всякого;

$\exists$ - существуе, найдется;

$\in$ - принадлежит, входит;

$\Rightarrow$ - следует, влечёт;

$\Leftrightarrow$ - тогда и только тогда;

: - так, что

**Определение.** A - подмножество множества B($A \in B$), если $\forall a \in A \Rightarrow a \in B | A \subset B$; B частности B=A

Определение A, B называются равными, если состоят из одних и тех же элементов A=B; B частности $A \subset B, B \subset A \Leftrightarrow A = B$

$\varnothing \subset A \forall A$

**Определение.** Пересечением A и B называется: $A \cap B \equiv$$\{a : a \in A$ и $a \in B\}$

**Определение.** Объединением A и B называется: $A \cup B \equiv$$\{a : a \in A$ или $a \in B\}$

**Определение.** $\cup A_\alpha \equiv \{a : \exists \alpha, a \in A_\alpha\}$

**Определение.** $\cap A_\alpha \equiv \{a : \forall \alpha, a \in A_\alpha\}$

**Определение.** Разностью A и B называется $A \setminus B \equiv$$\{a : a \in A$ и $a \notin B\}$

**Определение.** Симметричной разностью A и B:$A \Delta B \equiv (A \setminus B) \cap (B \setminus A)$

**Определение.** Если $\forall a \in A$ по некотормоу закону(правилу) поставлен в соответствие единственный элемент $b \in B$ и $\forall b \in B$ оказался поставлен в соответствие единственный $a \in A$, то множества A и B называются эквивалентыми(равномощными), а соответствие взаимооднозначным. A B

## 1.2 Числа и числовые множества

### 1.2.1 Натуральные числа $\mathbb{N}$

**Определение.** A - конечное, если состоит из конечного числа элементов, т.е $\exists n \in \mathbb{N} : A\ \{1, 2, ..., n\}$

**Определение.** A - счетное, если $A\ \mathbb{N} \equiv \{1, 2, 3, .., n, ..\}$

### 1.2.2 Целые числа $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} \equiv \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$

$$|a| = \begin{cases} a, a \geqslant 0 \\ -a, a < 0 \end{cases} \quad a * b = \begin{cases} 0, & \text{если } a = 0 \text{ или } b = 0 \\ |a| * |b| & \text{если a,b - одного знака} \\ -|a| * |b| & \text{если a,b - разных знаков} \end{cases} \quad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z};\ \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \neq \varnothing$$

0,1,-1,2,-2,...,n,-n,...

1,2,3,4,5,...,2n,2n+1

Если множество элементов эквивалентно своей части, то оно обязательно бесконечное.

### 1.2.3 Рациональные числа $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} \equiv \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Z}\ \mathbb{Z}_1 \equiv \{\frac{p}{1}; p \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Q}$

$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} r = |p| + |q|$ - "вес"числа $\frac{p}{q}$

$r = 1 : (\frac{0}{1})_1 r = 2 : \frac{0}{2}(\frac{1}{1})_2(\frac{-1}{1})_3$

$r = 3 : \frac{0}{3}(\frac{1}{2})_4(\frac{-1}{2})_5(\frac{2}{1})_6(\frac{-2}{1})_7$

$r = 4 : \frac{0}{4}(\frac{1}{3})_8(\frac{-}{1}/3)_9\frac{2}{2}\frac{-2}{2}(\frac{3}{1})_1 0(\frac{-3}{1})_1 1$

$1. a > b, b > c \Rightarrow a > c (a = b, b = c \Rightarrow a = c)$

$2. a + b = b + a$

$3. (a + b) + c = a + (b + c)$

$4. \exists 0 : a - 0 = a \forall a$

$5. \forall a \exists a' : a + a' = 0$

$6. ab = bab$

$7. |ab|c = a|bc|$

$8. \exists 1 \neq 0 : a * 1 = a \forall a$

$9. \forall a \neq \exists a'' : a * a'' = 1$

$10. (a + b)c = ac + bc$

$11. a > b \Rightarrow \forall c a + c > b + c$

$12. a > b \Rightarrow \forall c > 0 ac > bc$

$13. \forall a \exists n \in \mathbb{N} : \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{n} > a$

$a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$

$a > b \Rightarrow a + c > b + c$

$c > d \Rightarrow b + c > b + d \Rightarrow a + c > b + d$

Предположим, что $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ - несократимая дробь.

$\frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2 \vdots 2 \Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q^2 \vdots 2 \Rightarrow q^2 \vdots 2 \Rightarrow q \vdots 2 \Rightarrow \frac{p}{q}$ - сократимая - противоречие $\Rightarrow \sqrt{2} \neq \mathbb{Q}$

## Лекция 2

### 1.2.4 Действительные (вещественные) числа $\mathbb{R}$

$0 \Leftrightarrow 0, 00...0... = +0, 00...0...$

M - справа от 0, отложим OF $a_0$ раз $\Rightarrow 0 < NM \leqslant 10 < PM \leqslant \frac{1}{10}$

$a_0, a_0a_1 = a_0 + \frac{a_1}{10};$

$a_0, a_1, a_2 = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2};$

$a_0, a_1, ..., a_n = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_n}{10^n}; ...; a_0a_1...a_n = +a_0a_1...$

Если M - слева от 0 $\Rightarrow$ раскладываем 1-ый отрезок $a_0$ раз, затем $\frac{1}{10}$ отрезок и т.д $\Rightarrow -a_0, a_1, a_2, ..., a_n...$

Если M=E$\Rightarrow$ $a_0 = 0; a_1 = 9 = a_2 = ... = a_n = ... \Rightarrow E = 0, 99...9...$

Каждой точке оси поставили в соответствие десятичную дробь; $x = 0, 99...; 10x = 9, 99... = 9 + xx = 1$

**Определение.** Действительным(вещественным) числом называется бесконечная десятичная дробь, поставленная в соответствие точке вещественной оси.

**Определение.** Вещественные числа $a = \pm a_0, a_1, ...a_n...$, называется неотрицательным, если оно со знаком + (который может быть опущен) и отрицательным, если оно со знаком -

$a = b; b = c$(у них одинаковые знаки)$\Rightarrow$ $a_k = b_k; b_k = c_k \Rightarrow a_k = c_k \forall k \Rightarrow a = c$

**Определение.** Неотрицательно вещественное a называется положительным, если $a \neq 0 (0 = 0, 000, ..., 0, ...)$

**Определение.** $a = \pm a_0, a_1, ..., a_n, ..., b = \pm b_0, b_1, ...b_n, ...a \neq b$

$a, b$ - неотрицательные $\exists m \geqslant$: $a_0 = b_0; a_1 = b_1, ...a_{m-1} = b_{m-1}; a_m \neq b_m$

$a_n > b_n$ тогда $a > b$

$a_n < b_n$ тогда $a < b$

a - неотрциательное, b - отрицательное, тогда $a > b$

a,b - отрицательные, тогда, если $|a| > |b >\Rightarrow b > a$

$|a| < |b| \Rightarrow a > b$

a - неотрицальное $\Rightarrow a \geqslant 0$

b - положительное $\Rightarrow b > 0$

c - отрицательное $\Rightarrow c < 0$

$a > b, b > c \Rightarrow a > c(?)$

Пусть a,b,c - неотрицальные

$a = a_0, a_1, ..., a_n, ...;\ b = b_0, b_1, ..., b_n, ...;\ c = c_0, c_1, ..., c_n, ...;$

$\exists p, q : a_0 = b_0 ... a_{p-1} = b_{p-1}; a_p > b_p$

$p, q \geqslant 0 b_0 = c_0 ... b_{q-1} = c_{q-1}; b_q > c_q$

$\exists r = min(p, q) : a_0 = b_0 = c_0 ... a_{r-1} = b_{r-1} = c_{r-1} a_r \geqslant b_r \geqslant c_r \Rightarrow a_r > c_r \Rightarrow a > c$

## 1.3 Ограниченные и неограниченные множества

**Определение.** $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху, если $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow x \leqslant M$. M - верхняя грань.

**Определение.** $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным снизу, если $\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow x \geqslant m$. m - нижняя грань.

**Определение.** Множество называется ограниченным, если оно ограничено и сверху, и снизу.

$X$ не ограничено сверху, если $\forall M \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists x \in X : x > M\ M = supX$

**Определение.** $M \in \mathbb{R}$ называется точной верхней гранью $X \subset \mathbb{R}$, если

1)$\forall x \in X \Rightarrow x \leqslant M$

2)$\forall M_1 < M \exists x \in X : x > M_1$

$M \neq supX$, если

или $\exists x \in X : x > M$

или $\exists M_1 < M : \forall x \in X \Rightarrow x \leqslant M_1$

**Определение.** Пусть $m \in \mathbb{R}$ m - точная нижняя грань $X \subset \mathbb{R}(m = infX)$,если

1)$\forall x \in X \Rightarrow x \geqslant m$

2)$\forall m_1 > M \exists x \in X : x < m_1$

$X$ - неограниченное сверху: $supX = +\inf$

$X$ - неограниченное снизу: $infX = -\inf$

**Теорема 1.** $\forall X \subset \mathbb{R} : X \neq \varnothing, X$ - ограниченно сверху $\Rightarrow \exists M = supX (M \in \mathbb{R})$

**Теорема 2.**$\forall X \subset \mathbb{R} : X \neq \varnothing, X$ - ограничено снизу $\Rightarrow \exists m = infX (m \in \mathbb{R})$

## Лекция 3

13.09

$M = supX$, если

$1)\forall x \in X \Rightarrow x \leqslant M_1$

$2)\forall M_1 < M \exists y \in X : y > M_1$

**Теорема 1.**$\forall \mathbb{X} \subset \mathbb{R} : \mathbb{X} \neq \varnothing, \mathbb{X}$ - ограничено сверху $\Rightarrow \exists M = sup\mathbb{X}$

$x \neq \varnothing, \mathbb{X}$ - ограничено сверху $1)\exists x \in \mathbb{X} : x$ - неотрицательно, $x$ - ограничено сверху,

т.е $\exists \tilde{M} : \forall x \in \mathbb{X} \Rightarrow x \leqslant \tilde{M}$

$x = x_0, x_1, ..., x_n, ... \in \mathbb{X} x \leqslant \tilde{M} \{x_0\} \Rightarrow x_0 \leqslant \tilde{M}$

$\bar{x} - max\{x_0\}$

$x = \bar{x_0}, x_1, x_2, ..., x_n < ... \in \mathbb{X}\{x_1\}\bar{x_1} = max\{x_1\}, ...$

$x = \bar{x_0}, \bar{x_1}, ..., \bar{x_{k-1}}, x_k, x_{k+1} \in \mathbb{X}$

$\{x_k\}, \bar{x_k} = max\{x_k\}, ...M = \bar{x_0}, \bar{x_1}, ..., \bar{x_n}, ...$

$M = sup\mathbb{X}(?)M \geqslant 0$

$\forall x \in \mathbb{X} \qquad x < 0 \Rightarrow M > x; x \geqslant 0$, т.е $x = +x_0, x_1, ..., x_n, ... \in \mathbb{X}$

$x_0 \leqslant \bar{x_0} \qquad x = \bar{x_0} \Rightarrow x_1 \leqslant \bar{x_1} ... x_{k-1} \leqslant \bar{x_{k-1}}$

$2)\forall M_1 < M_1$, если $M_1 < 0$ $\exists y = x_0, x_1, ... \geqslant 0, y \in \mathbb{X} \Rightarrow y > M_1;$

если $M_1 \geqslant 0$,но $M_1 < M \quad M_1 = \tilde{x_0}, \tilde{x_1}, ..., \tilde{x_n}, ...$

$M_1 < M = \bar{x_0}, barx_1, ..., \bar{x_n}, ... \quad \tilde{x_0} = \bar{x_0}, ..., \tilde{x_{k-1}} == \bar{x_{k-1}}$,но $\tilde{x_k} < \bar{x_k}$

$x = \bar{x_0}, \bar{x_1}, ..., \bar{x_k}, \bar{x_{k+1}}, ... \in \mathbb{X} \Rightarrow \exists y \in \mathbb{X} : y = \bar{x_0}, \bar{x_1}, ..., \bar{x_k}, x_{k+1} \in \mathbb{X} y > M1$

$M = sup\mathbb{X}$

$2)\forall x \in \mathbb{X} \Rightarrow x < 0 \quad x = -x_0, x_1, ..., x_n, ....$ Проделаем то же самое, что делали для построения числа M, но будем брать min вместо max, и получим бесконечную десятичную дробь. $M = -\bar{x_0}, \bar{x_1}, ..., \bar{x_n}, ...$

$M = -0,000... \Rightarrow M = +0,000....$

$M = -\bar{x_0}, \bar{x_1}, \ldots, \bar{x_{k-1}}, 000...(\bar{x_{k-1}} \neq 0) \Rightarrow M = -\bar{x_0}, x_1, ..., \bar{x_{k-2}}(\bar{x_{k-1}} - 1) * 99$

$[a, b] \equiv \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} \qquad a, b \in \mathbb{R}(a <\leqslant b)$

$[a, b) \equiv \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\} \qquad$ или $a \in \mathbb{R}$,или $b \in \mathbb{R}, (a < b)$, или $b = +\infty$

$(a, b] \equiv \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\} \qquad a \in \mathbb{R}(a < b)$,или $a = -\infty, b \in \mathbb{R}$

$(a, b) \equiv \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \qquad a, b \in \mathbb{R}(a < b)$и/или $a = -\infty, b = +\infty$

(0,1) - несчетное множество.(?)

Предположим, что (0,1) - счетное.

$x^{(1)} = 0, {x_1}^{(1)} {x_2}^{(1)} ... {x_n}^{(1)} ...$

$x^{(2)} = 0, {x_1}^{(2)} {x_2}^{(2)} ... {x_n}^{(2)} ...$

......................................

$x^{(n)} = 0, {x_1}^{(n)} {x_2}^{(n)} ... {x_n}^{(n)} ...$

......................................

$x = 0, x_1 x_2 ... x_n ... : \ x_1 \neq 0, x_1 \neq 9, x_1 \neq {x_1}^{(1)}$

$x_2 \neq 0, x_2 \neq 9, x_2 \neq {x_2}^{(2)}$

......................................

$x_n \neq 0, x_n \neq 9, x_n \neq {x_n}^{(n)}$

......................................

$x \neq x^{(1)} \quad x_2 \neq x^{(2)}, ..., x_n \neq x^{(n)} ... \Rightarrow (0,1)$ - несчетно

$\forall x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n^-, x_n^+ \in \mathbb{Q} : x_n^- \leqslant x \leqslant x_n^+, x_n^+ - x_n^- = \frac{1}{10^n}$

**Определение.** Суммой $x, y \in \mathbb{R}$ называется $x + y \equiv sup\{x_n^- + y_n^-\} \qquad (inf(x_n^+ + y_n^+))$

**Определение.** Произведениями $x, y > 0 (x, y \in \mathbb{R})$ называется $x * y \equiv sum\{x_n^- * y_n^-\}(inf\{x_n^+ * y_n^+\})$

**Определение.** Произведением $x, y \in \mathbb{R}$ называется

$$x * y = \begin{cases} 0, \text{если x=0 или y=0} \\ |x| * |y|, \text{если x,y одного знака} \\ -|x| * |y|, \text{если x,y разных знаков} \end{cases} \tag{1.1}$$

$|x * y| = |x| * |y| \quad -|x| \leqslant x \leqslant |x| \quad -|y| \leqslant y \leqslant |y|$

$|x| + |y| \geqslant x + y \qquad |x| + |y| \geqslant -(x + y) \quad \Rightarrow |x| + |y| \geqslant |x + y| \qquad |x + y| \leqslant |x| + |y|$

$-|x| - |y| \leqslant x + y \leqslant |x| + |y| \qquad -(|x| + |y|) \leqslant x + y \leqslant |x| + |y| \qquad |x| = |y + (x - y)| \leqslant |y| + |x - y| \Rightarrow |x - y| \geqslant |x| - |y| \qquad |x - y| = |y - x| \geqslant |y| - |x| \Rightarrow |x - y| \geq ||x| - |y||$

### 1.3.1 Комплексные числа $\mathbb{C}$

**Определение.** $z = (x, y) = z + iy, x, y \in \mathbb{R} x = Rez, y = Imz$

**Определение.** $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \quad z_1 = z_2,$ если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$

**Определение.** $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2; \; z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

$z_1 * z_2 = x_1 * x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

$z_2 \neq 0 + 0i,$ то $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_1^2}$

## Лекция 4

17.09

$\mathbb{R} \equiv \{z \in \mathbb{C} : z > x + 0i\}; \qquad \mathbb{R}_1 \sim \mathbb{R} \quad \mathbb{R}_1 \subset \mathbb{C}$

$z_2 = 0 + 0i \quad \forall z_1 \Rightarrow z_1 + z_2 = z_1 - z_2 = z_1 \qquad \forall z_1 \Rightarrow z_1 * z_2 = z_2 = 0 + 0i$

$z_2 = 1 + 0i \qquad \forall z_1 \Rightarrow z_1 * z_2 = z_1 \qquad (x) + (iy) = (x + 0i) + (0 + iy) = x + iy \qquad i = 1 * i -$ мнимая единица.

$(y) * (i) = (y + 0i) * (0 + 1i) = 0 + iy = iy$ чисто мнимые числа.

$i^2 = i * i = (0 + 1i) * (0 + 1i) = -1 + 0i = -1$

$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z_1} \pm \bar{z_2} \qquad \overline{z_1 z_2} = z_1 \bar{*} \bar{z_2} \qquad \frac{\bar{z_1}}{z_2} = \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$

$r = |z| = modz = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\phi = Argz = argz + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \qquad 0 \leqslant Argz < 2\pi \qquad -\pi < argz \leqslant \pi$

$z = r(\cos\phi + i\sin\phi) \neq 0 (= 0 + 0i) \qquad z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1) \qquad z_2 = r_2(\cos @o_2 + i\sin\phi_2)$

$z_1 = z_2 \leftrightarrow r_1 = r_2 \qquad \phi_1 = \phi_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$z_1 * z_2 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1) * r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) = r_1 r_2((\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2) + i(\sin\phi_1\cos\phi_2 + \cos\phi_1\sin\phi_2)) = r_1 r_2(\cos\phi_1 + \phi_2 + i\sin\phi_1 + \phi_2)$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2))$

$z^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$

$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = (\cos n\phi + i\sin n\phi)$ - формула Муавра

**Определение.** Пусть $n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}$ $w = \sqrt[n]{z}$, если $w^n = z$ Пусть $z = 0 = 0 + i$ $n \in \mathbb{N}$. $w = \sqrt[n]{z} = 0$ (без других корней). $\underbrace{0 * 0 * \cdots * 0}_{n} = 0$

Пусть $z \neq 0 \Rightarrow z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$

$w^n = \rho^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = z \Rightarrow \rho^n = r \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r}(r > 0)$

$n\psi = \phi + 2k\pi \Rightarrow \phi = \frac{\phi + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$