

Конспект лекций по математическому анализу

(2й семестр 2024-2025 учебного года)

Лектор:

Горячев А. П., Хлистунов И. А.

Верстка

Оглавление

1	Интегралы	4
1.1	Первообразная и неопределенный интеграл	4
1.1.1	Таблица интегралов.	5
1.2	Способы вычисления неопределенных интегралов	6
1.2.1	Метод подстановки	6
1.2.2	Интегрирование по частям	6
2	Определенный интеграл	8
2.1	Определение интеграла Римана. Существование интегрируемых функций. Необратимое условие	8
2.2	Суммы Дарбу и их свойства. Связь сумм Дарбу с интегральной суммой	9
2.3	Верхний и нижний интегралы Дарбу. Критерий интегрируемости	10
2.4	Интегрируемость непрерывной функции. Интегрируемость монотонной функции	12
2.5	Интегрируемость функции, отличающейся от интегрируемой в конечном количестве точек	12
3	Свойства определенного интеграла	14
3.1	Линейные свойства определенного интеграла	14
3.2	Интегрируемость произведения интегрируемых по Риману функций	15
3.3	Интегрируемость функции на внутреннем отрезке. Аддитивность определенного интеграла	16
3.4	Монотонность определенного интеграла. Строгая монотонность определенного интеграла от непрерывной функции	17
3.5	Интегрируемость модуля интегрируемых по Риману функций. Связь интеграла от функции с интегралом от ее модуля	18
3.6	Неравенство Коши-Буняковского для определенных интегралов. Теорема о среднем и ее обобщение	18
4	Основные правила интегрирования.	20
4.1	Интеграл с переменным верхним (нижним) пределом, его непрерывность и дифференцируемость. Существование первообразной у непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница.	20
4.2	Вычисление определенных интегралов способами замены переменных и интегрирования по частям.	21

5	Геометрические приложения определенного интеграла.	23
5.1	Спрямолинейность гладкой кривой. Выражение длины дуги гладкой кривой в виде определенного интеграла. Формулы длины дуги плоской кривой, заданной в декартовых либо полярных координатах.	23

Глава 1

Интегралы

Лекция 1

13.12

1.1 Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. $F(x)$ — первообразная к $f(x)$ на X , $x \in X$, называется первообразной к $f(x)$, если $\forall x \in X \exists F'(x) = f(x)$

Определение. Множество всех первообразных к $f(x)$ на X называется неопределенным интегралом. (об. $\int f(x)dx$, $f(x)$ — подынтегральная функция, $f(x)dx$ — подынтегральное выражение)

$F(x)$ — первообразная к $f(x) \Rightarrow F(x) + C$ — тоже первообразная.

$\Phi(x)$ — первообразная к $f(x)$ $F'(x) = f(x) = \Phi'(x)$

Рассмотрим $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \forall x \in X$

$\Phi(x) - F(x) = C = const$ $\Phi(x) = F(x) + C$

$\int f(x)dx = F(x) + C$, $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$; $\int dF(x) = F(x) + C$

$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$ $d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = f(x)dx$

Теорема 1.1. $f(x), g(x)$ имеют первообразные $\Rightarrow f(x) \pm g(x)$ тоже имеют первообразные, причем $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Доказательство. $\int f(x)dx = F(x) + C_1$, $\int g(x)dx = G(x) + C_2$. Рассмотрим $H_{\pm}(x) = F(x) \pm G(x)$, $H'_{\pm}(x) = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$

$\int (f(x) \pm g(x))dx = F(x) \pm G(x) + C = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ □

Теорема 1.2. $f(x)$ имеет первообразную $\Rightarrow \forall k, kf(x)$ тоже имеет первообразную, а если $k \neq 0$, то $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$

Доказательство. $\int f(x)dx = F(x) + C$ $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$ $\int kf(x)dx = kF(x) + C_1$ $k \int f(x)dx =$

$k(F(x) + C) = kF(x) + kC$, $\int kf(x)dx = kF(x) + C_1$, $k \int f(x)dx = k(F(x) + C) = kF(x) + kC$, если

$k \neq 0$, то $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ □

1.1.1 Таблица интегралов.

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1 (\alpha = 0 \Rightarrow x^\alpha = 1)$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
8. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
9. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
10. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
11. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
12. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a > 0$
13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + \tilde{C}, a > 0$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, a > 0$

Лекция 2

20.12

1.2 Способы вычисления неопределенных интегралов

1.2.1 Метод подстановки

$$\int f(u)du = F(u) + C \quad u = \varphi(x) - \text{дифферен. } f(\varphi(x)) \text{ опр при } x \in \text{промежуток.}$$

Рассмотрим $F(\varphi(x)), x \in X$. $(F(\varphi(x)))'_x = F'_u \Big|_{u=\varphi(x)} (u) * \varphi'(x) = f(u) \Big|_{u=\varphi(x)} * \varphi'(x) = f(\varphi(x)) * \varphi'(x)$

$$\int f(\varphi(x))dx = F(\varphi(x)) + C$$

$$\int f(\varphi(x)) \underbrace{\varphi'(x)dx}_{du} = \int f(u)du \Big|_{u=\varphi(x)}$$

$$\int f(x)dx \Big|_{x=\psi(t)} = \int f(\psi(t))\psi'(t)dt \Big|_{t=\psi^{-1}(x)}$$

Примеры.

1.

$$\int \frac{x dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| + C$$

$$x^2 + a^2 = u, \quad 2x dx = du$$

2.

$$\int \sin^3 x dx = - \int \sin^2 x (-\sin x dx) = - \int (1 - u^2) du = -u + \frac{u^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

$$\cos x = u, \quad -\sin x dx = du$$

3.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})} = \int \frac{6t^5 dt}{t^3(1 + t^2)} = 6 \int \frac{t^2 + 1 - 1}{1 + t^2} dt = 6(t - \operatorname{arctg} t) + C = 6(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x}) + C$$

$$x = t^6 (\sqrt[6]{x} = t), \quad dx = 6t^5 dt$$

4.

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |\sin x| + C$$

$$\sin x = u, \quad du = \cos x dx$$

1.2.2 Интегрирование по частям

$$d(uv) = u dv + v du, u dv = d(uv) - v du, \quad \int u dv = \int d(uv) - \int v du; \quad \int d(uv) = uv + C$$

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

Примеры

1.

$$\int \underbrace{\ln x}_u \underbrace{dx}_{dv} = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

$$u = \ln x, \quad dv = dx, \quad du = \frac{dx}{x}, \quad v = x$$

2.

$$I = \int e^x \underbrace{\cos x dx}_{d(\sin x)} = \int e^x d(\sin x) = e^x \sin x - \int \sin x e^x dx = e^x \sin x + \int e^x d(\cos x) = e^x \sin x + e^x \cos x - \underbrace{\int \cos x e^x dx}_I$$

$$I = \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$$

3.

$$I = \int \underbrace{\sqrt{x^2 + a^2}}_u \underbrace{dx}_{dv} = x \sqrt{x^2 + a^2} - \int x \frac{2x dx}{2\sqrt{x^2 + a^2}} = x \sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx$$

$$= x \sqrt{x^2 + a^2} - I + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

$$I = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

4.

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} \quad a > 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$J_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} - \int x \frac{(-n)}{(x^2 + a^2)^{n+1}} 2x dx =$$

$$\frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n(J_n - a^2 J_{n+1})$$

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \left[\frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + (2n - 1)J_n \right] \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$J_1 = \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$J_2 = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \left[\frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right] + C, \dots$$

В качестве упражнения найти рекуррентную формулу для

$$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx \quad \deg P_m(x) = m, \quad \deg Q_n(x) = n$$

$$m > n \quad P_m(x) = R_{m-n}(x)Q_n(x) + T_k(x), \quad k < n \quad \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = R_{m-n}(x) + \frac{T_k(x)}{Q_n(x)}, \quad k < n$$

$$Q_n(x) = a_0 x^n + \dots + a_n = a_0(x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_l)^{\alpha_l} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_r x + q_r)^{\beta_r}$$

$$\frac{T_k(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{A_{\alpha_1 1}}{x - x_l} + \dots + \frac{A_{\alpha_1 \alpha_l}}{(x - x_l)^{\alpha_l}} + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + p_1 x + q_1} + \dots + \frac{B_{1\beta_1}x + C_{1\beta_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1}} + \dots$$

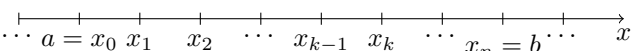
Глава 2

Определенный интеграл

Лекция 3

07.02

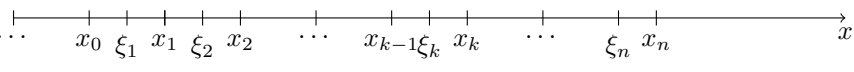
2.1 Определение интеграла Римана. Существование интегрируемых функций. Необратимое условие

$a < b$. Рассмотрим $[a, b]$. 

$T = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b\}$ - разбиение отрезка $[a, b]$ Рассмотрим

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k = 1, 2, 3, \dots, n (k = \overline{1, n})$

$\delta_T = \max_{1 \leq k \leq n} (\Delta x_k)$ - характеристика разбиения.

$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1, n}, \quad \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$ 

Пусть $f(x)$ определена на $[a, b]$. Рассмотрим $\sigma_T(f, \Xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ - интегральная сумма

Определение. Говорят, что $\exists \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sigma_T(f, \Xi)$, если $\exists I : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta, \forall \Xi \Rightarrow |\sigma_T(f, \Xi) - I| < \varepsilon$

! Свойства пределов переносятся.

Определение. $f(x)$ называется интегрируемой (по Риману) на $[a, b]$, если $\exists \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sigma_T(f, \Xi)$. Величина этого предела ($I = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sigma_T(f, \Xi)$) называется определенным интегралом функции $f(x)$ на (a, b) (интегралом Римана))

Обозначение: $\int_a^b f(x) dx = I$

Примеры:

а) $f(x) \equiv C - const$ на $[a, b]; \forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}, \forall \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n;$

$$\sigma_T(f, \Xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n C \Delta x_k = C \sum_{k=1}^n \Delta x_k = C((x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})) = C(x_n - x_0) =$$

$C(b - a) \xrightarrow{\delta_T \rightarrow 0} C(b - a); \Rightarrow \exists \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sigma_T(f, \Xi) = C(b - a). \Rightarrow f(x) - интегрируема на [a, b], причем \int_a^b C dx = C(b - a) \Rightarrow интегрируемые функции существуют.$

$$\text{б) } \chi(x) = \begin{cases} 1, x - \text{рац.} \\ 0, x - \text{иррац.} \end{cases}, x \in [a, b] \text{ (функция Дирихле)}$$

Предположим, что $\exists \int_a^b \chi(x)dx = I$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta, \forall \Xi \Rightarrow |\sigma_T(\chi, \Xi) - I| < \varepsilon$

$$\text{Возьмем } \Xi_1 = \{\xi_k^{(1)}\}_{k=1}^n - \text{набор рац. точек} \quad \sigma^{(1)} = \sigma_T(\chi, \Xi_1) = \sum_{k=1}^n \underbrace{\chi(\xi_k^{(1)})}_{=1} \Delta x_k = b - a$$

$$\text{Возьмем } \Xi_2 = \{\xi_k^{(2)}\}_{k=1}^n - \text{набор иррац. точек} \quad \sigma^{(2)} = \sigma_T(\chi, \Xi_2) = \sum_{k=1}^n \underbrace{\chi(\xi_k^{(2)})}_{=0} \Delta x_k = 0$$

$$b - a = |\sigma^{(1)} - \sigma^{(2)}| = |\sigma^{(1)} - I - \sigma^{(2)} + I| \leq \underbrace{|\sigma^{(1)} - I|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|\sigma^{(2)} - I|}_{< \varepsilon} < \varepsilon + \varepsilon = b - a - \text{противоречие} \Rightarrow$$

$\chi(x)$ не является интегрируемой на $[a, b]$

Теорема 2.1 (Необходимое условие интегрируемости). $f(x)$ -интегрируема на $[a, b] \Rightarrow f(x)$ -ограничена на $[a, b]$

Доказательство. От противного. Предположим, что $f(x)$ не является ограниченной на $[a, b]$, но при этом

$$\exists \int_a^b f(x)dx = I, \text{ т.е. } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta, \forall \Xi \Rightarrow |\sigma_T(f, \Xi) - I| < \varepsilon.$$

$$\text{Берем } \varepsilon = 1 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta, \forall \Xi \Rightarrow |\sigma_T(f, \Xi) - I| < 1$$

$$\text{Берем } \forall T = \{a = x_0 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b\};$$

$$\text{Строим } \Xi = \{\xi\}_{k=1}^n \quad f(x) \text{ неограничена на } [a, b] \Rightarrow \exists k : f(x) \text{ неограничена на } [x_{k-1}, x_k],$$

$$\Xi : \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n - \text{произвольные.}$$

$$\text{Берем такое } \xi_k : |f(\xi_k)| > \frac{1 + |I| + |f(\xi_1)|\Delta x_1 + |f(\xi_2)|\Delta x_2 + \dots + |f(\xi_{k-1})|\Delta x_{k-1} + \dots + |f(\xi_n)|\Delta x_n}{\Delta x_k}$$

$$|\sigma_T(f, \Xi) - I| \geq |\sigma_T(f, \Xi)| - |I| = |f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_{k-1})\Delta x_{k-1} + f(\xi_k)\Delta x_k + f(\xi_{k+1})\Delta x_{k+1} + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n|$$

$$- |I| = |f(\xi_k)\Delta x_k - (-f(\xi_1)\Delta x_1 - \dots - f(\xi_{k-1})\Delta x_{k-1} - f(\xi_{k+1})\Delta x_{k+1} - \dots - f(\xi_n)\Delta x_n)| - |I| \geq$$

$$\geq |f(\xi_k)|\Delta x_k - |f(\xi_1)|\Delta x_1 - \dots - |f(\xi_{k-1})|\Delta x_{k-1} - |f(\xi_{k+1})|\Delta x_{k+1} - \dots - |f(\xi_n)|\Delta x_n - |I| > 1 = \varepsilon \Rightarrow$$

противоречие \square

2.2 Суммы Дарбу и их свойства. Связь сумм Дарбу с интегральной суммой

$$\text{Пусть } f(x) \text{ ограничена на } [a, b]. \quad T = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}.$$

$$M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} (f(x));$$

$$m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} (f(x)).$$

$$S_T(f) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k - \text{верхняя сумма Дарбу.}$$

$$s_T(f) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k - \text{нижняя сумма Дарбу}$$

Эти суммы не обязаны быть интегральными суммами, т.к. точные грани не всегда достигаются.

$$\forall \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n \Rightarrow m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k. \quad s_T(f) \leq \sigma_T(f, \Xi) \leq S_T(f)$$

$$\text{Определение. } T_1 = \{a = x_0^{(1)} < x_1^{(1)} < \dots < x_n^{(1)} = b\} \quad T_2 = \{a = x_0^{(2)} < x_1^{(2)} < \dots < x_m^{(2)} = b\}.$$

T_2 называется последующим к T_1 , если $x_k^{(1)} \in T_2 \forall k = \overline{0, n}$. Обозначение $T_2 \succ T_1$

Теорема 2.2. Если $T_1 \succ T_2 \Rightarrow$

- 1) $S_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$
- 2) $s_{T_1}(f) \geq s_{T_2}(f)$

Доказательство. 1) Пусть у T_1 ровно на 1 точку больше, т.е. $T_2 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n < b\}$.
 $T_1 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < \tilde{x} < x_k < \dots < x_n = b\}$.
 $M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$, $M'_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq \tilde{x}} f(x) \leq M_k$, $M''_k = \sup_{\tilde{x} \leq x \leq x_k} f(x) \leq M_k$
Рассмотрим $S_{T_2}(f) - S_{T_1}(f) = M_k \Delta x_k - M'_k(\tilde{x} - x_{k-1}) - M''_k(x_k - \tilde{x}) = M_k(x_k - x_{k-1}) - M'_k(\tilde{x} - x_{k-1}) - M''_k(x_k - \tilde{x}) = M_k(x_k - \tilde{x} + \tilde{x} - x_{k-1}) - M'_k(\tilde{x} - x_{k-1}) = \underbrace{(M_k - M'_k)}_{\geq 0} \underbrace{(x_k - \tilde{x})}_{> 0} + \underbrace{(M_k - M''_k)}_{\geq 0} \underbrace{(\tilde{x} - x_{k-1})}_{> 0} \geq 0 \Rightarrow S_{T_2}(f) \geq S_{T_1}(f)$. Если у T_1 более, чем на одну точку больше, то делаем аналогично нужное число раз. \square

Теорема 2.3. $\forall T_1, T_2 \Rightarrow s_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$

Доказательство. Рассмотрим $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow \begin{cases} T_3 \succ T_1 \\ T_3 \succ T_2 \end{cases} \Rightarrow s_{T_1}(f) \underset{T2.2}{\leq} s_{T_3}(f) \leq S_{T_3}(f) \underset{T2.2}{\leq} S_{T_2}(f) \quad \square$

Теорема 2.4. $\forall T, \forall \varepsilon > 0 \exists \Xi_1, \exists \Xi_2 : \begin{cases} 0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, \Xi_1) < \varepsilon \\ 0 \leq \sigma_T(f, \Xi_2) - s_T(f) < \varepsilon \end{cases}$

Доказательство. Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b\}$.
 $M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} (f(x))$,
 $m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} (f(x))$
 $\forall \varepsilon > 0 \begin{cases} \exists \xi_k^{(1)} \in [x_{k-1}, x_k] : 0 \leq M_k - f(\xi_k^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \\ \exists \xi_k^{(2)} \in [x_{k-1}, x_k] : 0 \leq f(\xi_k^{(2)}) - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \end{cases} \left| \Delta x_k \text{ и } \sum_{k=1}^n \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, \Xi_1) < \varepsilon \\ 0 \leq \sigma_T(f, \Xi_2) - s_T(f) < \varepsilon \end{cases} \quad \square$

2.3 Верхний и нижний интегралы Дарбу. Критерий интегрируемости

Из теоремы 2.3 $\Rightarrow \forall T_1, T_2 \quad \underbrace{s_{T_1}(f)}_{\text{огр. сверху}} \leq \underbrace{S_{T_2}(f)}_{\text{огр. снизу}}$

Рассмотрим $\bar{I} = \inf_T S_T(f)$ — верхний интеграл Дарбу. $\underline{I} = \sup_T s_T(f)$ — нижний интеграл Дарбу
 $s_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f). \quad \underline{I} \leq S_{T_2}(f). \quad \boxed{\underline{I} \leq \bar{I}}$

Теорема 2.5 (Критерий интегрируемости). $f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Leftrightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$

Доказательство. $\Rightarrow f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \exists \int_a^b f(x) dx = I$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow$
 $|\sigma_T(f, \Xi) - I| < \frac{\varepsilon}{4}$, т.е. $I - \frac{\varepsilon}{4} < \sigma_T(f, \Xi) < I + \frac{\varepsilon}{4}$
 $0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, \Xi_1) < \frac{\varepsilon}{4}$
Но $\varepsilon > 0 \xRightarrow{T2.4} \exists \Xi_1, \exists \Xi_2 : \quad 0 \leq \sigma_T(f, \Xi_2) - s_T(f) < \frac{\varepsilon}{4}$
 $I - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma_T(f, \Xi_2) - \frac{\varepsilon}{4} < s_T(f) \leq S_T(f) < \sigma_T(f, \Xi_1) + \frac{\varepsilon}{4} < I + \frac{\varepsilon}{2}$
 $\Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$
 \Leftarrow Пусть $\lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$

Но $s_T(f) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_T(f) \Rightarrow 0 \leq \bar{I} - \underline{I} < \varepsilon \Rightarrow \bar{I} - \underline{I} = 0 \Rightarrow \underline{I} = \bar{I}$.

Обозначим $\underline{I} = \bar{I} = I \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s_T(f) \leq I \leq S_T(f) \\ \text{Но } \forall \Xi \Rightarrow s_T(f) \leq \sigma_T(f, \Xi) \leq S_T(f) \end{array} \right\} \Rightarrow |\sigma_T(f, \Xi) - I| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sigma_T(f, \Xi) = I \Rightarrow f(x) - \text{интегрируема на } [a, b]$ \square

Следствие 1. $f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} s_T(f) = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} S_T(f) = I (\exists \int_a^b f(x) dx = I)$

Доказательство. $f(x)$ инт на $[a, b] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1) \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0 \\ 2) \int_a^b f(x) dx = I, \forall T s_T(f) \leq I \leq S_T(f) \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - I \leq S_T(f) - s_T(f); 0 \leq I - s_T(f) \leq \underbrace{S_T(f) - s_T(f)}_{\xrightarrow{\delta_T \rightarrow 0} 0} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - I) = 0 \\ \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (I - s_T(f)) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} S_T(f) = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} s_T(f) = I. \quad \square$

Лекция 4

11.02

2.4 Интегрируемость непрерывной функции. Интегрируемость монотонной функции

Теорема 2.6. $f(x) \in C[a, b] \Rightarrow f(x)$ интегрируема на $[a, b]$

Доказательство. $f(x) \in C[a, b] \xRightarrow{\text{т. Кантора}} f(x)$ равномерно непрерывна на $[a, b]$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x', x'' \in [a, b] : |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$. $\delta_T < \delta$;

$$f(x) \in C[x_{k-1}, x_k] \xRightarrow{\text{т. Вейерштрасса}} \exists x'_k, x''_k \in [x_{k-1}, x_k] : \begin{aligned} M_k &= \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) = f(x'_k) \\ m_k &= \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) = f(x''_k) \end{aligned}$$

$$|x'_k - x''_k| \leq \Delta x_k \leq \delta_T \Rightarrow |M_k - m_k| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

$$0 \leq M_k - m_k \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \left| \Delta x_k \right| \text{ и } \sum_{k=1}^n \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0 \xRightarrow{\text{кр. инт.}} f(x) \text{ интегрируема на } [a, b]$$

□

Теорема 2.7. $f(x)$ монотонна на $[a, b]$ (не имеет значения, что из себя представляет множество точек разрыва) $\Rightarrow f(x)$ интегрируема на $[a, b]$

Доказательство. Пусть $f(x)$ монотонно возрастает на $[a, b] \Rightarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b) \forall x \in [a, b] \Rightarrow f(x)$ ограничена на $[a, b]$.

$$\text{Берем } \forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} \quad f(x_{k-1}) \leq f(x) \leq f(x_k) \forall x \in [x_{k-1}, x_k] \Rightarrow \begin{aligned} M_k &= \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) = f(x_k) \\ m_k &= \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) = f(x_{k-1}) \end{aligned}$$

$$0 \leq S_T(f) - s_T(f) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k \leq \delta_T \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) = \delta_T \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \delta_T (f(b) - f(a)) \xrightarrow{\delta_T \rightarrow 0} 0$$

$$0 \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0 \xRightarrow{\text{критерий инт.}} f(x) \text{ интегрируема на } [a, b]$$

Самостоятельно рассмотреть случай монотонного убывания.

□

Пример. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}, x \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right], k \in \mathbb{N} \\ 0, x = 0 \end{cases}$

У $f(x)$ ∞ -но много точек разрыва на $[a, b] : x = \frac{1}{k}, k = 2, 3, 4, \dots$ — точки разрыва 1-го рода
 $f(x)$ монотонно возрастает на $[0, 1] \Rightarrow f(x)$ интегрируема на $[0, 1]$

2.5 Интегрируемость функции, отличающейся от интегрируемой в конечном количестве точек

Теорема 2.8. Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \tilde{f}(x) = \begin{cases} A, x = \tilde{x} \in [a, b] \\ f(x), x \in [a, b] \setminus \{\tilde{x}\} \end{cases}$ тоже интегрируема

на $[a, b]$, причем $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \tilde{f}(x) dx$

1) ограничена на $[a, b]$, т.е. $\exists M > 0 : |f(x)| \leq M \forall x \in [a, b]$

Доказательство. $f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Rightarrow f(x)$

$$2) \lim_{\delta_T \rightarrow 0} S_T(f) = \int_a^b f(x) dx = I, \text{ т.е.}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T : \delta_T < \delta \Rightarrow |S_T(f) - I| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Берем $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{4(M + |A|)} > 0 \Rightarrow \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$. Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} : \delta_T < \delta$;

$$\begin{aligned} M_k &= \sup f(x) \\ \tilde{M}_k &= \sup \tilde{f}(x), \quad k = \overline{1, n} \end{aligned} \quad \text{Рассмотрим } |S_T(f) - S_T(\tilde{f})| = \left| \sum_{k=1}^n (M_k - \tilde{M}_k \Delta x_k) \right| \leq \delta_T * 2(M + |A|) < \\ < 2\delta(M + |A|) \leq 2\delta_2(M + |A|) = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Рассмотрим } |S_T(\tilde{f}) - I| = |S_T(\tilde{f}) - S_T(f) + S_T(f) - I| \leq \underbrace{|S_T(\tilde{f}) - S_T(f)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|S_T(f) - I|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon, \text{ т.е. } \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) -$$

$$I) = 0 \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} S_T(\tilde{f}) = I$$

Аналогично: $\lim_{\delta_T \rightarrow 0} S_T(\tilde{f}) = I \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(\tilde{f}) - S_T(\tilde{f})) = 0 \xRightarrow{\text{кр. инт.}} \tilde{f}(x)$ интегрируема на $[a, b]$.

$$\text{Т.к. } \int_a^b \tilde{f}(x) dx = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} S_T(f) = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} S_T(\tilde{f}) \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(\tilde{f})) = \int_a^b \tilde{f}(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad \square$$

Следствие 1. $f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \tilde{f}(x)$, отличающаяся от $f(x)$ в конечном количестве точек, тоже интегрируема на $[a, b]$, причем $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \tilde{f}(x) dx$

Доказательство. Применим последнюю теорему надлежащее число раз. □

Пример. $\chi(x) = \begin{cases} 1, x - \text{рац.} \\ 0, x - \text{иррац.} \end{cases}$ отличающаяся от $f_0(x) \equiv 0$ на $[a, b]$ в счетном количестве точек, но при

этом $\chi(x)$ не является интегрируемой на $[a, b]$, а $f_0(x)$ - является.

Теорема 2.9 (Критерий Лебега). Пусть $f(x)$ ограничена на $[a, b]$, а $R(f)$ - множество ее точек разрыва $f(x)$ на $[a, b]$, тогда $f(x)$ интегрируема по Риману на $[a, b] \Leftrightarrow R(f)$ имеет меру нуль, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^\infty : R(f) \subset \cup_{i=1}^\infty (\alpha_i, \beta_i)$, при этом $\sup_m \sum_{i=1}^m (\beta_i - \alpha_i) < \varepsilon$

Доказательство. Без доказательства. □

Глава 3

Свойства определенного интеграла

Лекция 4

11.02

3.1 Линейные свойства определенного интеграла

Определение. Если $f(x)$ определена при $x = a$, то положим $\int_a^a f(x)dx \equiv 0$

Определение. Если $a < b$, а еще $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то положим $\int_b^a f(x)dx \equiv -\int_a^b f(x)dx$

Теорема 3.1. Если $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, $f(x) \pm g(x)$ тоже интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Доказательство. Если $a = b$, то доказывать нечего: $0 = 0 \pm 0$.

Если $a < b$, то: Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$; Берем $\forall \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$, тогда: рассмотрим $\sigma_T(f \pm g, \Xi) = \sum_{k=1}^n (f(\xi_k) \pm g(\xi_k))\Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \pm \sum_{k=1}^n g(\xi_k)\Delta x_k = \sigma_T(f, \Xi) \pm \sigma_T(g, \Xi) \xrightarrow{\delta_T \rightarrow 0} I_1 \pm \xrightarrow{\delta_T \rightarrow 0} I_2$, т.е

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\text{Если } a > b \Rightarrow \int_b^a (f(x) \pm g(x))dx = \int_b^a f(x)dx \pm \int_b^a g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

□

Теорема 3.2. $f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R} \quad c \in f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, причем $\int_a^b cf(x)dx =$

$$c \int_a^b f(x)dx$$

Доказательство. Самостоятельно.

□

3.2 Интегрируемость произведения интегрируемых по Риману функций

Теорема 3.3. Если $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a, b] \Rightarrow f(x)g(x)$ тоже интегрируема на $[a, b]$

Доказательство. пусть $a < b$. $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a, b] \Rightarrow f(x), g(x)$ — ограничены на $[a, b]$, т.е

$\exists M^{(f)} > 0, M^{(g)} > 0 : |f(x)| \leq M^{(f)} \forall x \in [a, b]$
 $|g(x)| \leq M^{(g)} \forall x \in [a, b]$. Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$; Введем

$$M_k^{(f)} = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) \quad M_k^{(g)} = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} g(x) \quad M_k^{(fg)} = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} (f(x)g(x))$$

$$m_k^{(f)} = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) \quad m_k^{(g)} = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} g(x) \quad m_k^{(fg)} = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} (f(x)g(x))$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x'_k, x''_k \in [x_{k-1}, x_k] : \begin{aligned} & M_k^{(fg)} < f(x'_k)g(x'_k) + \frac{\varepsilon}{2} \\ & m_k^{(fg)} > f(x''_k)g(x''_k) - \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \Rightarrow 0 \leq M_k^{(fg)} - m_k^{(fg)} < f(x'_k)g(x'_k) - f(x''_k)g(x''_k) + \varepsilon =$$

$$f(x'_k)g(x'_k) + f(x'_k)g(x''_k) - f(x'_k)g(x''_k) - f(x''_k)g(x''_k) + \varepsilon = f(x'_k)(g(x'_k) - g(x''_k)) + g(x''_k)(f(x'_k) - f(x''_k)) + \varepsilon \leq$$

$$M^{(f)}((M_k)^g - m_k^{(g)}) + M^{(g)}(M_k^{(f)} - m_k^{(f)}) + \varepsilon \Rightarrow 0 \leq M_k^{(fg)} - m_k^{(fg)} \leq M^{(f)}((M_k)^g - m_k^{(g)}) + M^{(g)}(M_k^{(f)} - m_k^{(f)}) \Rightarrow$$

$$0 \leq S_T(fg) - s_T(fg) \leq M^{(f)}(S_T(g) - s_T(g)) + M^{(g)}(S_T(f) - s_T(f)) \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(fg) - s_T(fg)) = 0 \Rightarrow$$

$f(x)g(x)$ интегрируема на $[a, b]$

□

Лекция 5

14.02

3.3 Интегрируемость функции на внутреннем отрезке. Аддитивность определенного интеграла

Теорема 3.4. $f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \forall [c, d] \subset [a, b] f(x)$ интегрируема на $[a, b]$

Доказательство. $f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f, [a, b]) - s_T(f, [a, b])) \Rightarrow \text{т.е. } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \rightarrow 0 \leq S_T(f, [a, b]) - s_T(f, [a, b]) < \varepsilon$

Берем $\forall \tau$ – разбиение $[c, d]$. Дополним его до T (разбиение $[a, b]$). Считаем, что $a \leq c < d \leq b$;

$$T|_{[c, d]} = \tau; \delta_T < \delta$$

Рассмотрим $0 \leq S_T(f, [c, d]) - s_T(f, [c, d]) \leq S_T(f, [a, b]) - s_T(f, [a, b]) < \varepsilon$, т.е. $\lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f, [c, d]) - s_T(f, [c, d])) = 0 \Rightarrow f(x)$ интегрируема на $[c, d]$ \square

Теорема 3.5. $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и интегрируема на $[b, c] \Rightarrow f(x)$ интегрируема на $[a, c]$, причем

$$\int_a^c f(x) = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Доказательство. $\left. \begin{array}{l} \exists \int_a^b f(x) dx = I_1, \\ \exists \int_b^c f(x) dx = I_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Пусть } a < b < c : f(x) \text{ ограничена на } [a, b] \text{ и ограничена на } [b, c] \Rightarrow$

$f(x)$ ограничена на $[a, c] \Rightarrow \exists m, M : m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, c]$

$$\lim_{\delta_{\tau_1} \rightarrow 0} S_{\tau_1}(f, [a, b]) = I_1, \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : \forall \tau_1 (\text{разбиение } [a, b]), \delta_{\tau_1} < \delta_1 \Rightarrow |S_{\tau_1}(f, [a, b]) - I_1| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\lim_{\delta_{\tau_2} \rightarrow 0} S_{\tau_2}(f, [b, c]) = I_2 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 (\text{разбиение } [b, c]), \delta_{\tau_2} < \delta_2 \Rightarrow |S_{\tau_2}(f, [b, c]) - I_2| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$\exists \delta_3 = \frac{\varepsilon}{3(M-m)+1} > 0$. Берем $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3) > 0$. Берем $\forall T$ (разбиение $[a, c]$) = $\{a = x_0 < x_1 < \dots <$

$$x_n = c\} \Rightarrow \exists k : b \in [x_{k-1}, x_k] \quad M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq b} f(x), \quad M'_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq b} f(x), \quad M''_k = \sup_{b \leq x \leq x_k} f(x).$$

Рассмотрим $T_1 = T \cup b \Rightarrow \delta_{T_1} \leq \delta_T < \delta$

$$\begin{aligned} |S_T(f, [a, c]) - (I_1 + I_2)| &= |S_T(f, [a, c]) - S_{T_1}(f, [a, c]) + S_{T_1}(f, [a, c]) - (I_1 + I_2)| \leq |S_T(f, [a, c]) - S_{T_1}(f, [a, c])| + \\ |S_{T_1}(f, [a, c]) - I_1 - I_2| &= \underbrace{|M_k(x_k - x_{k-1}) - M'_k(b - x_{k-1}) - M''_k(x_k - b)|}_{(M_k - M''_k)(x_k - b) + (M_k - M'_k)(b - x_{k-1}) \leq (M - m)(x_k - x_{k-1}) \leq (M - m)\delta_T < \delta(M - m) \leq \delta_3(M - m)} + |S_{\tau_1}(f, [a, b]) - I_1| + \\ |S_{\tau_2}(f, [b, c]) - I_2| &\leq \end{aligned}$$

$$\leq (M - m)\delta_3 + |S_{\tau_1}(f, [a, b]) - I_1| + |S_{\tau_2}(f, [b, c]) - I_2| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f, [a, c]) - I_1 - I_2) = 0 =$$

$$\lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f, [a, c])) = I_1 + I_2 \Leftrightarrow$$

Аналогично (самостоятельно) $\lim_{\delta_T \rightarrow 0} s_T(f, [a, c]) = I_1 + I_2$

$$\Leftrightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f, [a, c]) - s_T(f, [a, c])) = 0 \Rightarrow \text{к.р. инт. } f(x) \text{ интегрируема на } [a, c], \text{ причем (т.к. } \lim_{\delta_T \rightarrow 0} S_T(f, [a, c]) =$$

$$I_1 + I_2) \Rightarrow \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Теперь пусть $a < c < b \xRightarrow{\text{Т3.4}} f(x)$ интегрируема на $[a, c] \Rightarrow$ работает только что рассмотренный случай \Rightarrow

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \Rightarrow \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \quad \square$$

3.4 Монотонность определенного интеграла. Строгая монотонность определенного интеграла от непрерывной функции

Теорема 3.6. $\int_a^b 1dx = b - a$

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 3.7. Пусть $a \leq b$, $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, $f(x) \geq 0$ на $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

Доказательство. 1) $a = b$ - очевидно.

2) $a < b \Rightarrow \exists \int_a^b f(x)dx = I \geq S_T(f) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \geq 0$ □

Теорема 3.8. $a \leq b$; $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, причем $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b] \Rightarrow$
 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 3.9. $f(x) \in C[a, b] (a < b)$, $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$, причем $f(x) \not\equiv 0$ на $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx > 0$

Доказательство. $\exists \xi \in (a, b) : f(\xi) = A > 0$ по т. о сохр. знака $\Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in (\xi - \delta, \xi + \delta) f(x) > \frac{A}{2}$

Рассмотрим $\int_a^b f(x)dx = \underbrace{\int_a^{\xi-\delta} f(x)dx}_{\geq 0} + \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} f(x)dx + \underbrace{\int_{\xi+\delta}^b f(x)dx}_{\geq 0} \geq 0 + \frac{A}{2} 2\delta + 0 = A\delta > 0$ □

Теорема 3.10. $f(x), g(x) \in C[a, b] (a < b)$; $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b]$, причем $f(x) \not\equiv g(x)$ на $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx >$

$$\int_a^b g(x)dx$$

Доказательство. Самостоятельно. □

3.5 Интегрируемость модуля интегрируемых по Риману функций.

Связь интеграла от функции с интегралом от ее модуля

Теорема 3.11. $f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Rightarrow |f(x)|$ тоже интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)| dx \right|.$$

Доказательство. 1) Если $a = b \Rightarrow 0 \leq 0 \Rightarrow$ доказывать нечего.

2) Если $a < b$, то : $f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \lim_{\text{кр. инт. } \delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$, т.е $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$

Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}, \delta_T < \delta$

$$M_k \underset{x_{k-1} \leq x \leq x_k}{=} \sup f(x)$$

$$M'_k \underset{x_{k-1} \leq x \leq x_k}{=} \sup |f(x)|$$

$$m_k \underset{x_{k-1} \leq x \leq x_k}{=} \inf f(x)$$

$$m'_k \underset{x_{k-1} \leq x \leq x_k}{=} \inf |f(x)|$$

а) $0 \leq m_k \leq M_k \Rightarrow f(x) \geq 0$ на $[x_{k-1}, x_k] \Rightarrow |f(x)| = f(x)$ на $[x_{k-1}, x_k] \Rightarrow m'_k = m_k, M'_k = M_k \Rightarrow M'_k - m'_k = M_k - m_k$

б) $m_k \leq M_k \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq 0$ на $[x_{k-1}, x_k] \Rightarrow |f(x)| = -f(x)$ на $[x_{k-1}, x_k], M'_k = -m_k, m'_k = -M_k \Rightarrow M'_k - m'_k = M_k - m_k$

в) $m_k \leq 0 \leq M_k \Rightarrow M'_k = \max(m_k, -m_k) \Rightarrow M'_k - m'_k \leq M'_k \leq M_k - m_k \Rightarrow$ в любом случае

$0 \leq M'_k - m'_k \leq M_k - m_k \Delta x_k$ и $\sum_{k=1}^n \Rightarrow 0 \leq S_T(|f|) - s_T(|f|) \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(|f|) - s_T(|f|)) = 0 \Rightarrow |f(x)|$ интегрируема на $[a, b]$.

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow - \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

$$\text{Если } a > b \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)| dx \right|$$

□

3.6 Неравенство Коши-Буняковского для определенных интегралов. Теорема о среднем и ее обобщение

Теорема 3.12 (Неравенство Коши-Буняковского). $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a, b] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\int_a^b f(x)g(x) dx \right]^2 \leq \left[\int_a^b f^2(x) dx \right] \left[\int_a^b g^2(x) dx \right]$$

Доказательство. Пусть $a < b$.

$$\text{Рассмотрим } \varphi(\lambda) = \int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2 dx = \underbrace{\lambda^2 \int_a^b f^2(x) dx}_{=A} + 2\lambda \underbrace{\int_a^b f(x)g(x) dx}_{=B} + \underbrace{\int_a^b g^2(x) dx}_{=C} = A\lambda^2 + 2B\lambda + C$$

Если $A = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow B^2 \leq AC$

Если $A \geq 0 \Rightarrow B^2 - AC \leq 0$, т.е. $B^2 \leq AC \Rightarrow \left[\int_a^b f(x)g(x)dx \right] \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)$

Если $a = b \Rightarrow$ верно

Если $a > b \Rightarrow$ верно □

Теорема 3.13 (1-ая теорема о среднем). $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$; $m = \inf_{[a,b]} f(x), M = \sup_{[a,b]} f(x)$,

$$g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow \exists \mu \in [m, M] : \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$$

Доказательство. $a < b$. Пусть $g(x) \geq 0$ на $[a, b]$.

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$$

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \Rightarrow m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$

1) Если $\int_a^b g(x)dx = 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx = 0 \Rightarrow$ утверждение верно $\forall \mu \in [m, M]$

2) Если $\int_a^b g(x)dx > 0 \Rightarrow m \leq \underbrace{\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}}_{\mu} \leq M \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$

Если $g(x) \leq 0$ на $[a, b]$, то рассмотрим $\tilde{g}(x) = -g(x) \geq 0$ на $[a, b]$.

Если $a \geq b \Rightarrow$ самостоятельно. □

Следствие 1. Если в условиях предыдущей теоремы $f(x) \in C[a, b] \Rightarrow \exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$

Доказательство. По теореме Вейрештрасса: $\exists \alpha, \beta \in [a, b] : f(\alpha) = m \quad f(\beta) = M \quad \mu \in [m, M] \xRightarrow{\text{т. Коши}} \exists \mu \in [\alpha, \beta] \subset [a, b] : f(\xi) = \mu$ □

Следствие 2. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b], m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x), M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x) \Rightarrow \exists \mu \in [m, M] :$

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a). \text{ А если еще } f(x) \in C[a, b] \Rightarrow \exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

Доказательство. Самостоятельно. □

Глава 4

Основные правила интегрирования.

Лекция 6

21.02

4.1 Интеграл с переменным верхним (нижним) пределом, его непрерывность и дифференцируемость. Существование первообразной у непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница.

Определение. Пусть $f(x)$ — интегрируема на $[a, b]$. Рассмотрим функции $F(x)$ и $G(x)$, определенные на

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt - \text{интеграл с переменный верхним пределом}$$

отрезке $[a, b]$:

$$G(x) = \int_x^b f(t)dt - \text{интеграл с переменным нижним пределом}$$

$$F(x) + G(x) = \int_a^b f(t)dt \equiv \text{const на } [a, b]$$

Теорема 4.1. $f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Rightarrow F(x) \in C[a, b]$

Доказательство. По Т1 $\exists M > 0 : |f(x)| \leq M \forall x \in [a, b]$. Берем $\forall x_0 \in [a, b]$ и $\Delta x : x_0 + \Delta x \in [a, b]$. Тогда рас-

$$\text{смотрим } |F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)| = \left| \int_a^{x_0 + \Delta x} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \right| = \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t)dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} |f(t)|dt \right| \leq M|\Delta x| \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$$
$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)) = 0, \text{ т.е. } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} F(x_0 + \Delta x) = F(x_0) \Rightarrow F(x) \text{ непрерывна при } x = x_0.$$

Но x_0 — любое из $[a, b] \Rightarrow F(x) \in C[a, b]$

□

Теорема 4.2. $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, а также $f(x)$ непрерывна при $x = x_0 \Rightarrow \exists F'(x_0) = f(x_0)$ (на концах односторонние производные)

Доказательство. $f(t)$ непрерывна при $t = x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b] \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Берем $\Delta x : \Delta x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}, x_0 + \Delta x \in [a, b]$. Рассмотрим $\left| \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| =$

$$= \left| \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t) dt - \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0) dt \right| = \left| \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \frac{f(t) - f(x_0)}{\Delta x} dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \frac{|f(t)| - |f(x_0)|}{|\Delta x|} dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{|\Delta x|} |\Delta x| =$$

$$\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \text{ т.е. } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = F'(x_0), \text{ т.е. } \exists F'(x_0) = f(x_0) \quad \square$$

Теорема 4.3. $f(x) \in C[a, b] \Rightarrow \exists$ первообразная к $f(x)$ на $[a, b]$

Доказательство. $F(x) = \int_a^x f(t) dt \Rightarrow \forall x \in [a, b] \exists F'(x) = f(x)$, т.е. $F(x)$ — первообразная к $f(x)$ на $[a, b]$ \square

Теорема 4.4 (Основная теорема интегрального исчисления). $f(x) \in C[a, b]$, $\Phi(x)$ — первообразная к $f(x)$ на $[a, b] \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(x) \Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a) \quad (\text{Формула Ньютона-Лейбница})$$

$$\left. \begin{array}{l} \Phi(x) - \text{первообразная к } f(x) \text{ на } [a, b]. \\ F(x) = \int_a^x f(t) dt - \text{тоже первообразная на } [a, b] \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \Phi'(x) = f(x) \forall x \in [a, b] \\ F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b] \end{array} \right\} \Rightarrow F(x) =$$

$$\Phi(x) + C, \text{ т.е. } \int_a^x f(t) dt = \Phi(x) + C$$

$$\text{при } x = a \Rightarrow C = -\Phi(a) \Rightarrow \int_a^x f(t) dt = \Phi(x) - \Phi(a). \text{ При } x = b \Rightarrow \int_a^b f(t) dt = \Phi(b) - \Phi(a) \quad \square$$

Для $G(x)$ справедливы теоремы аналогичные Т4.1 Т4.2 Т4.3

4.2 Вычисление определенных интегралов способами замены переменных и интегрирования по частям.

Теорема 4.5 (Замена переменных). $f(x) \in C[a, b]$; $\varphi(t) : \varphi'(t) \in C[\alpha, \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ $[a, b]$ — множество значений $\varphi(t)$ на $[a, b] \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Доказательство. По Т3.16 $\Rightarrow \exists \Phi(x)$ — первообразная к $f(x)$ на $[a, b]$, причем $\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Рассмотрим сложную функцию $\Phi(\varphi(t))$ — дифференцируема на $[a, b]$ (по т. о дифф сложной функции)

$$\frac{d}{dt}(\Phi(\varphi(t))) = \Phi'_x(x) \Big|_{x=\varphi(t)} * \varphi'_t(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t) \forall t \in [a, b] \Rightarrow \Phi(\varphi(t)) - \text{первообразная к } \underbrace{f(\varphi(t)) \varphi'(t)}_{\in C[a, b]} \text{ на } [a, b] \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \Phi(\varphi(t)) \Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(x) dx \quad \square$$

$$\textbf{Теорема 4.6.} \quad u(x), v(x) : u'(x), v'(x) \in C[a, b] \Rightarrow \int_a^b u(x) v'(x) dx = (u(x) v(x)) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx$$

Доказательство. $\frac{d}{dx}(u(x)v(x)) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow u(x)v(x) -$ первообразная к $\underbrace{u'(x)v(x) + u(x)v'(x)}_{\in C[a, b]}$

$$\text{на } [a, b] \xRightarrow{\text{линейность}} \int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b u'(x)v(x)dx = \int_a^b (u(x)v'(x) + u'(x)v(x))dx = [u(x)v(x)]_a^b \quad \square$$

Пусть $f(x) : f^{(n+1)}(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $x = x_0$, тогда $\forall x$ из этой окрестности имеет место: $f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0)) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)dt = f(x_0) - \int_{x_0}^x f'(t)d(x-t) = f(x_0) - (x-t)f'(t) \Big|_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^x (x-t)f''(t)dt = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!}f'(x_0) + \int_{x_0}^x (x-t)f''(t)dt = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!}(x-x_0) - \int_{x_0}^x f''(t)d(\frac{(x-t)^2}{2}) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) - \frac{(x-t)^2}{2!}f''(t) \Big|_{t=x_0}^{t=x} + \frac{1}{2!} \int_{x_0}^x (x-t)^2 f'''(t)dt = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$

Итого:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x, f),$$

$$\text{где } r_n(x, f) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

- формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$r_n(x, f) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt. \text{ На } [x_0, x] \quad (x-t)^n \text{ не меняет знак, а } f^{(n+1)}(t) \in C[x_0, x] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = \frac{f^{n+1}(\xi)}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n dt = -\frac{f^{n+1}(\xi)}{n!} \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \Big|_{t=x_0}^{t=x} = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} - \text{остаточный член в форме Лагранжа (получено при больших ограничениях, чем раньше)}$$

Глава 5

Геометрические приложения определенного интеграла.

Лекция 6

21.02

5.1 Спряmlяемость гладкой кривой. Выражение длины дуги гладкой кривой в виде определенного интеграла. Формулы длины дуги плоской кривой, заданной в декартовых либо полярных координатах.

Определение. Пусть $\varphi(t), \psi(t), \chi(t) \in C[a, b]$. Рассмотрим множество точек в пространстве, которое обозначим $L = \{M(x, y, z), x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), t \in [\alpha, \beta]\}$ - такое множество точек называется простой

кривой, если $\forall t_1, t_2 \in [\alpha, \beta] : t_1 \neq t_2 \Rightarrow M_1(x_1, y_1, z_1) \neq M_2(x_2, y_2, z_2)$, где
$$\begin{cases} x_i = \varphi(t_i) \\ y_i = \psi(t_i) \\ z_i = \chi(t_i) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots$$

Если при этом $z = \chi(t) \equiv 0$ на $[a, b]$, то плоская простая кривая.

Определение. Говорят, что система уравнений
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} \quad t \in \{t\} - \text{промежуток, задает параметри-$$

чески кривую L , если промежуток $\{t\}$ можно разбить на конечный или бесконечный (счетный) набор отрезков $[\alpha_i, \beta_i]$, покрывающих данный промежуток $\{t\}$ и пересекающихся не более чем концами, так, что на каждом отрезке $[\alpha_i, \beta_i]$ L - простая кривая.

Везде далее, если не оговорено противного кривая - параметрически заданная кривая

Определение. Кривая $L : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$ называется гладкой, если $\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t) \in C[a, b]$, а еще

$$(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2 > 0 \forall t \in [\alpha, \beta]$$

$$L : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta] \quad T = \{\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = \beta\} \quad M_k(x, y, z) : \begin{cases} x = \varphi(t_k) \\ y = \psi(t_k) \\ z = \chi(t_k) \end{cases}$$

Рассмотрим $l_T = \sum_{k=1}^n |\overrightarrow{M_{k-1}M_k}| = \sum_{k=1}^n \sqrt{[\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})]^2 + [\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})]^2 + [\chi(t_k) - \chi(t_{k-1})]^2}$ — длина ломаной, вписанной в L . $T_1 = T \cup \tilde{t} \Rightarrow l_{T_1} \geq l_T$ (по неравенству треугольника). Тогда: $T_1 \succ T \rightarrow l_{T_1} \geq l_T$

Определение. Кривая L называется спрямляемой, если $\{l_T\}$ — ограниченное сверху множество.

Определение. Если L — спрямляемая кривая, то число $l = l(L) = \sup_T \{l_T\}$ называется длиной кривой L .

Теорема 5.1. $L : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$ — гладкая кривая $\Rightarrow L$ — спрямляемая, причем

$$l(L) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt$$

tg: @moksimga