

# Конспект лекций по математическому анализу

(2й семестр 2024-2025 учебного года)

Лектор:

Горячев А. П., Хлистунов И. А.

Верстка

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Интегралы</b>	<b>5</b>
1.1	Первообразная и неопределенный интеграл . . . . .	5
1.1.1	Таблица интегралов. . . . .	6
1.2	Способы вычисления неопределенных интегралов . . . . .	7
1.2.1	Метод подстановки . . . . .	7
1.2.2	Интегрирование по частям . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Определенный интеграл</b>	<b>9</b>
2.1	Определение интеграла Римана. Существование интегрируемых функций. Необратимое условие . . . . .	9
2.2	Суммы Дарбу и их свойства. Связь сумм Дарбу с интегральной суммой . . . . .	10
2.3	Верхний и нижний интегралы Дарбу. Критерий интегрируемости . . . . .	11
2.4	Интегрируемость непрерывной функции. Интегрируемость монотонной функции . . . . .	13
2.5	Интегрируемость функции, отличающейся от интегрируемой в конечном количестве точек . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Свойства определенного интеграла</b>	<b>15</b>
3.1	Линейные свойства определенного интеграла . . . . .	15
3.2	Интегрируемость произведения интегрируемых по Риману функций . . . . .	16
3.3	Интегрируемость функции на внутреннем отрезке. Аддитивность определенного интеграла . . . . .	17
3.4	Монотонность определенного интеграла. Строгая монотонность определенного интеграла от непрерывной функции . . . . .	18
3.5	Интегрируемость модуля интегрируемых по Риману функций. Связь интеграла от функции с интегралом от ее модуля . . . . .	19
3.6	Неравенство Коши-Буняковского для определенных интегралов. Теорема о среднем и ее обобщение . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Основные правила интегрирования.</b>	<b>21</b>
4.1	Интеграл с переменным верхним (нижним) пределом, его непрерывность и дифференцируемость. Существование первообразной у непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница. . . . .	21
4.2	Вычисление определенных интегралов способами замены переменных и интегрирования по частям. . . . .	22

<b>5</b>	<b>Геометрические приложения определенного интеграла.</b>	<b>24</b>
5.1	Спряmlяемость гладкой кривой. Выражение длины дуги гладкой кривой в виде определенного интеграла. Формулы длины дуги плоской кривой, заданной в декартовых либо полярных координатах. . . . .	24
5.1.1	Частные случаи гладких кривых: . . . . .	27
5.2	Площадь плоской фигуры. Критерий квадратируемости . . . . .	27
5.3	Квадрируемость криволинейной трапеции. Выражение площади криволинейной трапеции в виде определенного интеграла. Формула площади криволинейного сектора (без доказательства) . . . . .	29
<b>6</b>	<b>Собственные и несобственные интегралы.</b>	<b>30</b>
6.1	Несобственный интеграл первого рода, их сходимость и расходимость. Независимость сходимости (расходимости) несобственного интеграла первого рода от значения его постоянного (неособенного) предела . . . . .	30
6.2	Несобственные интегралы второго рода, их сходимость и расходимость. Независимость сходимости (расходимости) несобственного интеграла второго рода от значения его постоянного (неособенного) предела . . . . .	32
6.3	Несобственные интегралы с несколькими особыми точками. . . . .	33
6.4	Формула Ньютона-Лейбница для несобственных интегралов. Вычисление несобственных интегралов способами замены переменной и интегрирования по частям. . . . .	34
6.5	Линейные свойства несобственного интеграла. Пример неинтегрируемого произведения интегрируемых функций. . . . .	35
6.6	Связь интеграла от функции с интегралом от ее модуля в случае их интегрируемости . . . .	36
6.7	Критерий Коши сходимости несобственных интегралов первого и второго рода. . . . .	37
6.8	Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Сходимость абсолютно сходящихся несобственных интегралов. . . . .	38
6.9	Необходимое и достаточное условие сходимости несобственных интегралов первого и второго рода от неотрицательных функций. . . . .	38
6.10	Признак сравнения (в допределной и предельной форме) для сходимости несобственных интегралов первого и второго рода от неотрицательных функций. . . . .	39
6.11	Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Признаки Дирихле и Абеля для сходимости несобственных интегралов первого и второго рода. . . . .	41
6.11.1	Пример неинтегрируемости модуля интегрируемых в несобственном смысле функций. . . . .	43
6.12	Главное значение в смысле Коши несобственных интегралов первого и второго рода и его связь с величиной соответствующего несобственного интеграла. . . . .	44
<b>7</b>	<b>Функции многих переменных</b>	<b>46</b>
7.1	Координатное $n$ -мерное пространство . . . . .	46
7.2	Последовательности в $\mathbb{E}_n$ . . . . .	49
7.3	Функции в $\mathbb{E}_n$ . . . . .	51

---

7.4	Предел функции . . . . .	51
7.5	Непрерывные функции нескольких переменных . . . . .	53
7.6	Производные и дифференциалы функций нескольких переменных . . . . .	54
7.7	Дифференциалы высших порядков для функций нескольких переменных . . . . .	59
7.8	Формула Тейлора для функции нескольких переменных . . . . .	59

# Глава 1

## Интегралы

### Лекция 1

13.12

#### 1.1 Первообразная и неопределенный интеграл

**Определение.**  $F(x)$  — первообразная к  $f(x)$  на  $X$ ,  $x \in X$ , называется первообразной к  $f(x)$ , если  $\forall x \in X \exists F'(x) = f(x)$

**Определение.** Множество всех первообразных к  $f(x)$  на  $X$  называется неопределенным интегралом. (об.  $\int f(x)dx$ ,  $f(x)$  — подынтегральная функция,  $f(x)dx$  — подынтегральное выражение)

$F(x)$  — первообразная к  $f(x) \Rightarrow F(x) + C$  — тоже первообразная.

$\Phi(x)$  — первообразная к  $f(x)$   $F'(x) = f(x) = \Phi'(x)$

Рассмотрим  $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \forall x \in X$

$\Phi(x) - F(x) = C = const$   $\Phi(x) = F(x) + C$

$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad d(\int f(x)dx) = f(x)dx; \quad \int dF(x) = F(x) + C$

$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx \quad d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = f(x)dx$

**Теорема 1.1.**  $f(x), g(x)$  имеют первообразные  $\Rightarrow f(x) \pm g(x)$  тоже имеют первообразные, причем  $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ .

*Доказательство.*  $\int f(x)dx = F(x) + C_1, \int g(x)dx = G(x) + C_2$ . Рассмотрим  $H_{\pm}(x) = F(x) \pm G(x), H'_{\pm}(x) = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$

$\int (f(x) \pm g(x))dx = F(x) \pm G(x) + C = \int f(x)dx + \int g(x)dx$  □

**Теорема 1.2.**  $f(x)$  имеет первообразную  $\Rightarrow \forall k, kf(x)$  тоже имеет первообразную, а если  $k \neq 0$ , то  $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$

*Доказательство.*  $\int f(x)dx = F(x) + C \quad (kF(x))' = kF'(x) = kf(x) \quad \int kf(x)dx = kF(x) + C_1 \quad k \int f(x)dx =$

$k(F(x) + C) = kF(x) + kC, \quad \int kf(x)dx = kF(x) + C_1, \quad k \int f(x)dx = k(F(x) + C) = kF(x) + kC$ , если

$k \neq 0$ , то  $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$  □

---

### 1.1.1 Таблица интегралов.

1.  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1 (\alpha = 0 \Rightarrow x^\alpha = 1)$
2.  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
4.  $\int \sin x dx = -\cos x + C$
5.  $\int \cos x dx = \sin x + C$
6.  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
7.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
8.  $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
9.  $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
10.  $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
11.  $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
12.  $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a > 0$
13.  $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$
14.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + \tilde{C}, a > 0$
15.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, a > 0$

## Лекция 2

20.12

## 1.2 Способы вычисления неопределенных интегралов

## 1.2.1 Метод подстановки

$$\int f(u)du = F(u) + C \quad u = \varphi(x) - \text{дифферен. } f(\varphi(x)) \text{ опр при } x \in \text{промежуток.}$$

Рассмотрим  $F(\varphi(x)), x \in X$ .  $(F(\varphi(x)))'_x = F'_u \Big|_{u=\varphi(x)} (u) * \varphi'(x) = f(u) \Big|_{u=\varphi(x)} * \varphi'(x) = f(\varphi(x)) * \varphi'(x)$

$$\int f(\varphi(x))dx = F(\varphi(x)) + C$$

$$\int f(\varphi(x)) \underbrace{\varphi'(x)dx}_{du} = \int f(u)du \Big|_{u=\varphi(x)}$$

$$\int f(x)dx \Big|_{x=\psi(t)} = \int f(\psi(t))\psi'(t)dt \Big|_{t=\psi^{-1}(x)}$$

Примеры.

1.

$$\int \frac{x dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| + C$$

$$x^2 + a^2 = u, \quad 2x dx = du$$

2.

$$\int \sin^3 x dx = - \int \sin^2 x (-\sin x dx) = - \int (1 - u^2) du = -u + \frac{u^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

$$\cos x = u, \quad -\sin x dx = du$$

3.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})} = \int \frac{6t^5 dt}{t^3(1 + t^2)} = 6 \int \frac{t^2 + 1 - 1}{1 + t^2} dt = 6(t - \operatorname{arctg} t) + C = 6(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x}) + C$$

$$x = t^6 (\sqrt[6]{x} = t), \quad dx = 6t^5 dt$$

4.

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |\sin x| + C$$

$$\sin x = u, \quad du = \cos x dx$$

## 1.2.2 Интегрирование по частям

$$d(uv) = u dv + v du, u dv = d(uv) - v du, \quad \int u dv = \int d(uv) - \int v du; \quad \int d(uv) = uv + C$$

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

## Примеры

1.

$$\int \underbrace{\ln x}_u \underbrace{dx}_{dv} = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

$$u = \ln x, \quad dv = dx, \quad du = \frac{dx}{x}, \quad v = x$$

2.

$$I = \int e^x \underbrace{\cos x dx}_{d(\sin x)} = \int e^x d(\sin x) = e^x \sin x - \int \sin x e^x dx = e^x \sin x + \int e^x d(\cos x) = e^x \sin x + e^x \cos x - \underbrace{\int \cos x e^x dx}_I$$

$$I = \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$$

3.

$$I = \int \underbrace{\sqrt{x^2 + a^2}}_u \underbrace{dx}_{dv} = x \sqrt{x^2 + a^2} - \int x \frac{2x dx}{2\sqrt{x^2 + a^2}} = x \sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx$$

$$= x \sqrt{x^2 + a^2} - I + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

$$I = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

4.

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} \quad a > 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$J_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} - \int x \frac{(-n)}{(x^2 + a^2)^{n+1}} 2x dx =$$

$$\frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n(J_n - a^2 J_{n+1})$$

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \left[ \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + (2n - 1)J_n \right] \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$J_1 = \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$J_2 = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \left[ \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right] + C, \dots$$

В качестве упражнения найти рекуррентную формулу для

$$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx \quad \deg P_m(x) = m, \quad \deg Q_n(x) = n$$

$$m > n \quad P_m(x) = R_{m-n}(x)Q_n(x) + T_k(x), \quad k < n \quad \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = R_{m-n}(x) + \frac{T_k(x)}{Q_n(x)}, \quad k < n$$

$$Q_n(x) = a_0 x^n + \dots + a_n = a_0(x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_l)^{\alpha_l} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_r x + q_r)^{\beta_r}$$

$$\frac{T_k(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{A_{\alpha_1 1}}{x - x_l} + \dots + \frac{A_{\alpha_1 \alpha_l}}{(x - x_l)^{\alpha_l}} + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + p_1 x + q_1} + \dots + \frac{B_{1\beta_1}x + C_{1\beta_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1}} + \dots$$



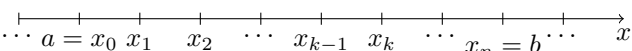
## Глава 2

# Определенный интеграл

### Лекция 3

07.02

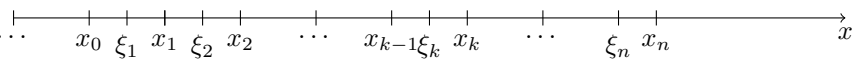
## 2.1 Определение интеграла Римана. Существование интегрируемых функций. Необратимое условие

$a < b$ . Рассмотрим  $[a, b]$ . 

$T = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b\}$  - разбиение отрезка  $[a, b]$  Рассмотрим

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k = 1, 2, 3, \dots, n (k = \overline{1, n})$

$\delta_T = \max_{1 \leq k \leq n} (\Delta x_k)$  - характеристика разбиения.

$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1, n}, \quad \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$  

Пусть  $f(x)$  определена на  $[a, b]$ . Рассмотрим  $\sigma_T(f, \Xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$  - интегральная сумма

**Определение.** Говорят, что  $\exists \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sigma_T(f, \Xi)$ , если  $\exists I : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta, \forall \Xi \Rightarrow |\sigma_T(f, \Xi) - I| < \varepsilon$

! Свойства пределов переносятся.

**Определение.**  $f(x)$  называется интегрируемой (по Риману) на  $[a, b]$ , если  $\exists \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sigma_T(f, \Xi)$ . Величина этого предела ( $I = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sigma_T(f, \Xi)$ ) называется определенным интегралом функции  $f(x)$  на  $(a, b)$  (интегралом Римана))

Обозначение:  $\int_a^b f(x) dx = I$

Примеры:

а)  $f(x) \equiv C - const$  на  $[a, b]; \forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}, \forall \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n;$

$$\sigma_T(f, \Xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n C \Delta x_k = C \sum_{k=1}^n \Delta x_k = C((x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})) = C(x_n - x_0) =$$

$C(b - a) \xrightarrow{\delta_T \rightarrow 0} C(b - a); \Rightarrow \exists \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sigma_T(f, \Xi) = C(b - a). \Rightarrow f(x) - интегрируема на [a, b], причем \int_a^b C dx = C(b - a) \Rightarrow интегрируемые функции существуют.$

$$\text{б) } \chi(x) = \begin{cases} 1, x - \text{рац.} \\ 0, x - \text{иррац.} \end{cases}, x \in [a, b] \text{ (функция Дирихле)}$$

Предположим, что  $\exists \int_a^b \chi(x)dx = I$ , т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta, \forall \Xi \Rightarrow |\sigma_T(\chi, \Xi) - I| < \varepsilon$

$$\text{Возьмем } \Xi_1 = \{\xi_k^{(1)}\}_{k=1}^n - \text{набор рац. точек} \quad \sigma^{(1)} = \sigma_T(\chi, \Xi_1) = \sum_{k=1}^n \underbrace{\chi(\xi_k^{(1)})}_{=1} \Delta x_k = b - a$$

$$\text{Возьмем } \Xi_2 = \{\xi_k^{(2)}\}_{k=1}^n - \text{набор иррац. точек} \quad \sigma^{(2)} = \sigma_T(\chi, \Xi_2) = \sum_{k=1}^n \underbrace{\chi(\xi_k^{(2)})}_{=0} \Delta x_k = 0$$

$$b - a = |\sigma^{(1)} - \sigma^{(2)}| = |\sigma^{(1)} - I - \sigma^{(2)} + I| \leq \underbrace{|\sigma^{(1)} - I|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|\sigma^{(2)} - I|}_{< \varepsilon} < \varepsilon + \varepsilon = b - a - \text{противоречие} \Rightarrow$$

$\chi(x)$  не является интегрируемой на  $[a, b]$

**Теорема 2.1** (Необходимое условие интегрируемости).  $f(x)$ -интегрируема на  $[a, b] \Rightarrow f(x)$ -ограничена на  $[a, b]$

*Доказательство.* От противного. Предположим, что  $f(x)$  не является ограниченной на  $[a, b]$ , но при этом

$$\exists \int_a^b f(x)dx = I, \text{ т.е. } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta, \forall \Xi \Rightarrow |\sigma_T(f, \Xi) - I| < \varepsilon.$$

$$\text{Берем } \varepsilon = 1 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta, \forall \Xi \Rightarrow |\sigma_T(f, \Xi) - I| < 1$$

$$\text{Берем } \forall T = \{a = x_0 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b\};$$

$$\text{Строим } \Xi = \{\xi\}_{k=1}^n \quad f(x) \text{ неограничена на } [a, b] \Rightarrow \exists k : f(x) \text{ неограничена на } [x_{k-1}, x_k],$$

$$\Xi : \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n - \text{произвольные.}$$

$$\text{Берем такое } \xi_k : |f(\xi_k)| > \frac{1 + |I| + |f(\xi_1)|\Delta x_1 + |f(\xi_2)|\Delta x_2 + \dots + |f(\xi_{k-1})|\Delta x_{k-1} + \dots + |f(\xi_n)|\Delta x_n}{\Delta x_k}$$

$$|\sigma_T(f, \Xi) - I| \geq |\sigma_T(f, \Xi)| - |I| = |f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_{k-1})\Delta x_{k-1} + f(\xi_k)\Delta x_k + f(\xi_{k+1})\Delta x_{k+1} + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n|$$

$$- |I| = |f(\xi_k)\Delta x_k - (-f(\xi_1)\Delta x_1 - \dots - f(\xi_{k-1})\Delta x_{k-1} - f(\xi_{k+1})\Delta x_{k+1} - \dots - f(\xi_n)\Delta x_n)| - |I| \geq$$

$$\geq |f(\xi_k)|\Delta x_k - |f(\xi_1)|\Delta x_1 - \dots - |f(\xi_{k-1})|\Delta x_{k-1} - |f(\xi_{k+1})|\Delta x_{k+1} - \dots - |f(\xi_n)|\Delta x_n - |I| > 1 = \varepsilon \Rightarrow$$

противоречие  $\square$

## 2.2 Суммы Дарбу и их свойства. Связь сумм Дарбу с интегральной суммой

$$\text{Пусть } f(x) \text{ ограничена на } [a, b]. \quad T = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}.$$

$$M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} (f(x));$$

$$m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} (f(x)).$$

$$S_T(f) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k - \text{верхняя сумма Дарбу.}$$

$$s_T(f) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k - \text{нижняя сумма Дарбу}$$

Эти суммы не обязаны быть интегральными суммами, т.к. точные грани не всегда достигаются.

$$\forall \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n \Rightarrow m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k. \quad s_T(f) \leq \sigma_T(f, \Xi) \leq S_T(f)$$

$$\text{Определение. } T_1 = \{a = x_0^{(1)} < x_1^{(1)} < \dots < x_n^{(1)} = b\} \quad T_2 = \{a = x_0^{(2)} < x_1^{(2)} < \dots < x_m^{(2)} = b\}.$$

$T_2$  называется последующим к  $T_1$ , если  $x_k^{(1)} \in T_2 \forall k = \overline{0, n}$ . Обозначение  $T_2 \succ T_1$

**Теорема 2.2.** Если  $T_1 \succ T_2 \Rightarrow$

- 1)  $S_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$
- 2)  $s_{T_1}(f) \geq s_{T_2}(f)$

*Доказательство.* 1) Пусть у  $T_1$  ровно на 1 точку больше, т.е.  $T_2 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n < b\}$ .  
 $T_1 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < \tilde{x} < x_k < \dots < x_n = b\}$ .  
 $M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$ ,  $M'_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq \tilde{x}} f(x) \leq M_k$ ,  $M''_k = \sup_{\tilde{x} \leq x \leq x_k} f(x) \leq M_k$   
Рассмотрим  $S_{T_2}(f) - S_{T_1}(f) = M_k \Delta x_k - M'_k(\tilde{x} - x_{k-1}) - M''_k(x_k - \tilde{x}) = M_k(x_k - x_{k-1}) - M'_k(\tilde{x} - x_{k-1}) - M''_k(x_k - \tilde{x}) = M_k(x_k - \tilde{x} + \tilde{x} - x_{k-1}) - M'_k(\tilde{x} - x_{k-1}) = \underbrace{(M_k - M'_k)}_{\geq 0} \underbrace{(x_k - \tilde{x})}_{> 0} + \underbrace{(M_k - M''_k)}_{\geq 0} \underbrace{(\tilde{x} - x_{k-1})}_{> 0} \geq 0 \Rightarrow S_{T_2}(f) \geq S_{T_1}(f)$ . Если у  $T_1$  более, чем на одну точку больше, то делаем аналогично нужное число раз.  $\square$

**Теорема 2.3.**  $\forall T_1, T_2 \Rightarrow s_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$

*Доказательство.* Рассмотрим  $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow \begin{cases} T_3 \succ T_1 \\ T_3 \succ T_2 \end{cases} \Rightarrow s_{T_1}(f) \underset{T2.2}{\leq} s_{T_3}(f) \leq S_{T_3}(f) \underset{T2.2}{\leq} S_{T_2}(f) \quad \square$

**Теорема 2.4.**  $\forall T, \forall \varepsilon > 0 \exists \Xi_1, \exists \Xi_2 : \begin{cases} 0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, \Xi_1) < \varepsilon \\ 0 \leq \sigma_T(f, \Xi_2) - s_T(f) < \varepsilon \end{cases}$

*Доказательство.* Берем  $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b\}$ .  
 $M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} (f(x))$ ,  
 $m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} (f(x))$   
 $\forall \varepsilon > 0 \begin{cases} \exists \xi_k^{(1)} \in [x_{k-1}, x_k] : 0 \leq M_k - f(\xi_k^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \\ \exists \xi_k^{(2)} \in [x_{k-1}, x_k] : 0 \leq f(\xi_k^{(2)}) - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \end{cases} \left| \Delta x_k \text{ и } \sum_{k=1}^n \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, \Xi_1) < \varepsilon \\ 0 \leq \sigma_T(f, \Xi_2) - s_T(f) < \varepsilon \end{cases} \quad \square$

## 2.3 Верхний и нижний интегралы Дарбу. Критерий интегрируемости

Из теоремы 2.3  $\Rightarrow \forall T_1, T_2 \quad \underbrace{s_{T_1}(f)}_{\text{огр. сверху}} \leq \underbrace{S_{T_2}(f)}_{\text{огр. снизу}}$

Рассмотрим  $\bar{I} = \inf_T S_T(f)$  — верхний интеграл Дарбу.  $\underline{I} = \sup_T s_T(f)$  — нижний интеграл Дарбу  
 $s_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f) \quad \underline{I} \leq S_{T_2}(f) \quad \boxed{\underline{I} \leq \bar{I}}$

**Теорема 2.5** (Критерий интегрируемости).  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b] \Leftrightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$

*Доказательство.*  $\Rightarrow f(x)$  интегрируема на  $[a, b] \Rightarrow \exists \int_a^b f(x) dx = I$ , т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow$   
 $|\sigma_T(f, \Xi) - I| < \frac{\varepsilon}{4}$ , т.е.  $I - \frac{\varepsilon}{4} < \sigma_T(f, \Xi) < I + \frac{\varepsilon}{4}$   
 $0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, \Xi_1) < \frac{\varepsilon}{4}$   
Но  $\varepsilon > 0 \xRightarrow{T2.4} \exists \Xi_1, \exists \Xi_2 : \quad 0 \leq \sigma_T(f, \Xi_2) - s_T(f) < \frac{\varepsilon}{4}$   
 $I - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma_T(f, \Xi_2) - \frac{\varepsilon}{4} < s_T(f) \leq S_T(f) < \sigma_T(f, \Xi_1) + \frac{\varepsilon}{4} < I + \frac{\varepsilon}{2}$   
 $\Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$   
 $\Leftarrow$  Пусть  $\lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$ , т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$

Но  $s_T(f) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_T(f) \Rightarrow 0 \leq \bar{I} - \underline{I} < \varepsilon \Rightarrow \bar{I} - \underline{I} = 0 \Rightarrow \underline{I} = \bar{I}$ .

Обозначим  $\underline{I} = \bar{I} = I \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s_T(f) \leq I \leq S_T(f) \\ \text{Но } \forall \Xi \Rightarrow s_T(f) \leq \sigma_T(f, \Xi) \leq S_T(f) \end{array} \right\} \Rightarrow |\sigma_T(f, \Xi) - I| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sigma_T(f, \Xi) = I \Rightarrow f(x) - \text{интегрируема на } [a, b]$   $\square$

**Следствие 1.**  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b] \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} s_T(f) = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} S_T(f) = I (\exists \int_a^b f(x) dx = I)$

*Доказательство.*  $f(x)$  инт на  $[a, b] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1) \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0 \\ 2) \int_a^b f(x) dx = I, \forall T s_T(f) \leq I \leq S_T(f) \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - I \leq S_T(f) - s_T(f); 0 \leq I - s_T(f) \leq \underbrace{S_T(f) - s_T(f)}_{\xrightarrow{\delta_T \rightarrow 0} 0} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - I) = 0 \\ \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (I - s_T(f)) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} S_T(f) = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} s_T(f) = I. \quad \square$

## Лекция 4

11.02

## 2.4 Интегрируемость непрерывной функции. Интегрируемость монотонной функции

**Теорема 2.6.**  $f(x) \in C[a, b] \Rightarrow f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$

*Доказательство.*  $f(x) \in C[a, b] \xRightarrow{\text{т. Кантора}} f(x)$  равномерно непрерывна на  $[a, b]$ , т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x', x'' \in [a, b] : |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ .

Берем  $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ .  $\delta_T < \delta$ ;

$$f(x) \in C[x_{k-1}, x_k] \xRightarrow{\text{т. Вейерштрасса}} \exists x'_k, x''_k \in [x_{k-1}, x_k] : \begin{aligned} M_k &= \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) = f(x'_k) \\ m_k &= \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) = f(x''_k) \end{aligned}$$

$$|x'_k - x''_k| \leq \Delta x_k \leq \delta_T \Rightarrow |M_k - m_k| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

$$0 \leq M_k - m_k \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \left| \Delta x_k \right| \text{ и } \sum_{k=1}^n \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0 \xRightarrow{\text{кр. инт.}} f(x) \text{ интегрируема на } [a, b]$$

□

**Теорема 2.7.**  $f(x)$  монотонна на  $[a, b]$  (не имеет значения, что из себя представляет множество точек разрыва)  $\Rightarrow f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$

*Доказательство.* Пусть  $f(x)$  монотонно возрастает на  $[a, b] \Rightarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b) \forall x \in [a, b] \Rightarrow f(x)$  ограничена на  $[a, b]$ .

$$\text{Берем } \forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} \quad f(x_{k-1}) \leq f(x) \leq f(x_k) \forall x \in [x_{k-1}, x_k] \Rightarrow \begin{aligned} M_k &= \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) = f(x_k) \\ m_k &= \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) = f(x_{k-1}) \end{aligned}$$

$$0 \leq S_T(f) - s_T(f) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k \leq \delta_T \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) = \delta_T \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \delta_T (f(b) - f(a)) \xrightarrow{\delta_T \rightarrow 0} 0$$

$$0 \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0 \xRightarrow{\text{критерий инт.}} f(x) \text{ интегрируема на } [a, b]$$

Самостоятельно рассмотреть случай монотонного убывания.

□

Пример.  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}, x \in \left( \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right], k \in \mathbb{N} \\ 0, x = 0 \end{cases}$

У  $f(x)$   $\infty$ -но много точек разрыва на  $[a, b] : x = \frac{1}{k}, k = 2, 3, 4, \dots$  — точки разрыва 1-го рода

$f(x)$  монотонно возрастает на  $[0, 1] \Rightarrow f(x)$  интегрируема на  $[0, 1]$

## 2.5 Интегрируемость функции, отличающейся от интегрируемой в конечном количестве точек

**Теорема 2.8.** Пусть  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b] \Rightarrow \tilde{f}(x) = \begin{cases} A, x = \tilde{x} \in [a, b] \\ f(x), x \in [a, b] \setminus \{\tilde{x}\} \end{cases}$  тоже интегрируема

на  $[a, b]$ , причем  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \tilde{f}(x) dx$

1) ограничена на  $[a, b]$ , т.е  $\exists M > 0 : |f(x)| \leq M \forall x \in [a, b]$

*Доказательство.*  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b] \Rightarrow f(x)$

$$2) \lim_{\delta_T \rightarrow 0} S_T(f) = \int_a^b f(x) dx = I, \text{ т.е}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T : \delta_T < \delta \Rightarrow |S_T(f) - I| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Берем  $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{4(M + |A|)} > 0 \Rightarrow \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$ . Берем  $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} : \delta_T < \delta$ ;

$$\begin{aligned} M_k &= \sup f(x) \\ \tilde{M}_k &= \sup \tilde{f}(x), \quad k = \overline{1, n} \end{aligned} \quad \text{Рассмотрим } |S_T(f) - S_T(\tilde{f})| = \left| \sum_{k=1}^n (M_k - \tilde{M}_k \Delta x_k) \right| \leq \delta_T * 2(M + |A|) <$$

$$< 2\delta(M + |A|) \leq 2\delta_2(M + |A|) = \frac{\varepsilon}{2}$$

Рассмотрим  $|S_T(\tilde{f}) - I| = |S_T(\tilde{f}) - S_T(f) + S_T(f) - I| \leq \underbrace{|S_T(\tilde{f}) - S_T(f)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|S_T(f) - I|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$ , т.е  $\lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) -$

$$I) = 0 \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} S_T(\tilde{f}) = I$$

Аналогично:  $\lim_{\delta_T \rightarrow 0} S_T(\tilde{f}) = I \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(\tilde{f}) - S_T(\tilde{f})) = 0 \xRightarrow{\text{кр. инт.}} \tilde{f}(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ .

$$\text{Т.к } \int_a^b \tilde{f}(x) dx = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} S_T(f) = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} S_T(\tilde{f}) \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(\tilde{f})) = \int_a^b \tilde{f}(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad \square$$

**Следствие 1.**  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b] \Rightarrow \tilde{f}(x)$ , отличающаяся от  $f(x)$  в конечном количестве точек, тоже интегрируема на  $[a, b]$ , причем  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \tilde{f}(x) dx$

*Доказательство.* Применим последнюю теорему надлежащее число раз. □

Пример.  $\chi(x) = \begin{cases} 1, x - \text{рац.} \\ 0, x - \text{иррац.} \end{cases}$  отличающаяся от  $f_0(x) \equiv 0$  на  $[a, b]$  в счетном количество точек, но при

этом  $\chi(x)$  не является интегрируемой на  $[a, b]$ , а  $f_0(x)$  - является.

**Теорема 2.9** (Критерий Лебега). Пусть  $f(x)$  ограничена на  $[a, b]$ , а  $R(f)$  — множество ее точек разрыва  $f(x)$  на  $[a, b]$ , тогда  $f(x)$  интегрируема по Риману на  $[a, b] \Leftrightarrow R(f)$  имеет меру нуль, т.е  $\forall \varepsilon >$

$$0 \exists \{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^{\infty} : R(f) \subset \cup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i), \text{ при этом } \sup_m \sum_{i=1}^m (\beta_i - \alpha_i) < \varepsilon$$

*Доказательство.* Без доказательства. □

## Глава 3

# Свойства определенного интеграла

### Лекция 4

11.02

### 3.1 Линейные свойства определенного интеграла

**Определение.** Если  $f(x)$  определена при  $x = a$ , то положим  $\int_a^a f(x)dx \equiv 0$

**Определение.** Если  $a < b$ , а еще  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ , то положим  $\int_b^a f(x)dx \equiv -\int_a^b f(x)dx$

**Теорема 3.1.** Если  $f(x), g(x)$  интегрируемы на  $[a, b]$ ,  $f(x) \pm g(x)$  тоже интегрируема на  $[a, b]$ , причем

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

*Доказательство.* Если  $a = b$ , то доказывать нечего:  $0 = 0 \pm 0$ .

Если  $a < b$ , то: Берем  $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ ; Берем  $\forall \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$ , тогда: рассмотрим

$$\sigma_T(f \pm g, \Xi) = \sum_{k=1}^n (f(\xi_k) \pm g(\xi_k))\Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \pm \sum_{k=1}^n g(\xi_k)\Delta x_k = \sigma_T(f, \Xi) \pm \sigma_T(g, \Xi) \xrightarrow{\delta_T \rightarrow 0} I_1 \pm \xrightarrow{\delta_T \rightarrow 0} I_2, \text{ т.е.}$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\text{Если } a > b \Rightarrow \int_b^a (f(x) \pm g(x))dx = \int_b^a f(x)dx \pm \int_b^a g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

□

**Теорема 3.2.**  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b] \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R} \quad c \in f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ , причем  $\int_a^b cf(x)dx =$

$$c \int_a^b f(x)dx$$

*Доказательство.* Самостоятельно.

□

### 3.2 Интегрируемость произведения интегрируемых по Риману функций

**Теорема 3.3.** Если  $f(x), g(x)$  интегрируемы на  $[a, b] \Rightarrow f(x)g(x)$  тоже интегрируема на  $[a, b]$

*Доказательство.* Пусть  $a < b$ .  $f(x), g(x)$  интегрируемы на  $[a, b] \Rightarrow f(x), g(x)$  — ограничены на  $[a, b]$ , т.е

$\exists M^{(f)} > 0, M^{(g)} > 0 : |f(x)| \leq M^{(f)} \forall x \in [a, b]$   
 $|g(x)| \leq M^{(g)} \forall x \in [a, b]$ . Берем  $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ ; Введем

$$M_k^{(f)} = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) \quad M_k^{(g)} = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} g(x) \quad M_k^{(fg)} = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} (f(x)g(x))$$

$$m_k^{(f)} = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) \quad m_k^{(g)} = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} g(x) \quad m_k^{(fg)} = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} (f(x)g(x))$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x'_k, x''_k \in [x_{k-1}, x_k] : \begin{aligned} & M_k^{(fg)} < f(x'_k)g(x'_k) + \frac{\varepsilon}{2} \\ & m_k^{(fg)} > f(x''_k)g(x''_k) - \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \Rightarrow 0 \leq M_k^{(fg)} - m_k^{(fg)} < f(x'_k)g(x'_k) - f(x''_k)g(x''_k) + \varepsilon =$$

$$f(x'_k)g(x'_k) + f(x'_k)g(x''_k) - f(x'_k)g(x''_k) - f(x''_k)g(x''_k) + \varepsilon = f(x'_k)(g(x'_k) - g(x''_k)) + g(x''_k)(f(x'_k) - f(x''_k)) + \varepsilon \leq$$

$$M^{(f)}((M_k)^g - m_k^{(g)}) + M^{(g)}(M_k^{(f)} - m_k^{(f)}) + \varepsilon \Rightarrow 0 \leq M_k^{(fg)} - m_k^{(fg)} \leq M^{(f)}((M_k)^g - m_k^{(g)}) + M^{(g)}(M_k^{(f)} - m_k^{(f)}) \Rightarrow$$

$$0 \leq S_T(fg) - s_T(fg) \leq M^{(f)}(S_T(g) - s_T(g)) + M^{(g)}(S_T(f) - s_T(f)) \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(fg) - s_T(fg)) = 0 \Rightarrow$$

$f(x)g(x)$  интегрируема на  $[a, b]$

□



## Лекция 5

14.02

### 3.3 Интегрируемость функции на внутреннем отрезке. Аддитивность определенного интеграла

**Теорема 3.4.**  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b] \Rightarrow \forall [c, d] \subset [a, b] f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$

*Доказательство.*  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b] \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f, [a, b]) - s_T(f, [a, b])) \Rightarrow \text{т.е. } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \rightarrow 0 \leq S_T(f, [a, b]) - s_T(f, [a, b]) < \varepsilon$

Берем  $\forall \tau$  – разбиение  $[c, d]$ . Дополним его до  $T$  (разбиение  $[a, b]$ ). Считаем, что  $a \leq c < d \leq b$ ;

$$T|_{[c, d]} = \tau; \delta_T < \delta$$

Рассмотрим  $0 \leq S_T(f, [c, d]) - s_T(f, [c, d]) \leq S_T(f, [a, b]) - s_T(f, [a, b]) < \varepsilon$ , т.е.  $\lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f, [c, d]) - s_T(f, [c, d])) = 0 \Rightarrow f(x)$  интегрируема на  $[c, d]$   $\square$

**Теорема 3.5.**  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$  и интегрируема на  $[b, c] \Rightarrow f(x)$  интегрируема на  $[a, c]$ , причем

$$\int_a^c f(x) = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

*Доказательство.*  $\left. \begin{array}{l} \exists \int_a^b f(x) dx = I_1, \\ \exists \int_b^c f(x) dx = I_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Пусть } a < b < c : f(x) \text{ ограничена на } [a, b] \text{ и ограничена на } [b, c] \Rightarrow$

$f(x)$  ограничена на  $[a, c] \Rightarrow \exists m, M : m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, c]$

$$\lim_{\delta_{\tau_1} \rightarrow 0} S_{\tau_1}(f, [a, b]) = I_1, \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : \forall \tau_1 (\text{разбиение } [a, b]), \delta_{\tau_1} < \delta_1 \Rightarrow |S_{\tau_1}(f, [a, b]) - I_1| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\lim_{\delta_{\tau_2} \rightarrow 0} S_{\tau_2}(f, [b, c]) = I_2 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 (\text{разбиение } [b, c]), \delta_{\tau_2} < \delta_2 \Rightarrow |S_{\tau_2}(f, [b, c]) - I_2| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$\exists \delta_3 = \frac{\varepsilon}{3(M-m)+1} > 0$ . Берем  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3) > 0$ . Берем  $\forall T$  (разбиение  $[a, c]$ ) =  $\{a = x_0 < x_1 < \dots <$

$$x_n = c\} \Rightarrow \exists k : b \in [x_{k-1}, x_k] \quad M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq b} f(x), \quad M'_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq b} f(x), \quad M''_k = \sup_{b \leq x \leq x_k} f(x).$$

Рассмотрим  $T_1 = T \cup b \Rightarrow \delta_{T_1} \leq \delta_T < \delta$

$$\begin{aligned} |S_T(f, [a, c]) - (I_1 + I_2)| &= |S_T(f, [a, c]) - S_{T_1}(f, [a, c]) + S_{T_1}(f, [a, c]) - (I_1 + I_2)| \leq |S_T(f, [a, c]) - S_{T_1}(f, [a, c])| + \\ |S_{T_1}(f, [a, c]) - I_1 - I_2| &= \underbrace{|M_k(x_k - x_{k-1}) - M'_k(b - x_{k-1}) - M''_k(x_k - b)|}_{(M_k - M''_k)(x_k - b) + (M_k - M'_k)(b - x_{k-1}) \leq (M - m)(x_k - x_{k-1}) \leq (M - m)\delta_T < \delta(M - m) \leq \delta_3(M - m)} + |S_{\tau_1}(f, [a, b]) - I_1| + \\ |S_{\tau_2}(f, [b, c]) - I_2| &\leq \end{aligned}$$

$$\leq (M - m)\delta_3 + |S_{\tau_1}(f, [a, b]) - I_1| + |S_{\tau_2}(f, [b, c]) - I_2| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f, [a, c]) - I_1 - I_2) = 0 =$$

$$\lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f, [a, c])) = I_1 + I_2 \Leftrightarrow$$

Аналогично (самостоятельно)  $\lim_{\delta_T \rightarrow 0} s_T(f, [a, c]) = I_1 + I_2$

$$\Leftrightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f, [a, c]) - s_T(f, [a, c])) = 0 \Rightarrow \text{к.р. инт. } f(x) \text{ интегрируема на } [a, c], \text{ причем (т.к. } \lim_{\delta_T \rightarrow 0} S_T(f, [a, c]) =$$

$$I_1 + I_2) \Rightarrow \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Теперь пусть  $a < c < b \xRightarrow{\text{Т3.4}} f(x)$  интегрируема на  $[a, c] \Rightarrow$  работает только что рассмотренный случай  $\Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \Rightarrow \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \quad \square$$

### 3.4 Монотонность определенного интеграла. Строгая монотонность определенного интеграла от непрерывной функции

**Теорема 3.6.**  $\int_a^b 1dx = b - a$

*Доказательство.* Самостоятельно. □

**Теорема 3.7.** Пусть  $a \leq b$ ,  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ ,  $f(x) \geq 0$  на  $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

*Доказательство.* 1)  $a = b$  - очевидно.

2)  $a < b \Rightarrow \exists \int_a^b f(x)dx = I \geq s_T(f) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \geq 0$  □

**Теорема 3.8.**  $a \leq b$ ;  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на  $[a, b]$ , причем  $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b] \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

*Доказательство.* Самостоятельно. □

**Теорема 3.9.**  $f(x) \in C[a, b] (a < b)$ ,  $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$ , причем  $f(x) \not\equiv 0$  на  $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx > 0$

*Доказательство.*  $\exists \xi \in (a, b) : f(\xi) = A > 0$  по т. о сохр. знака  $\Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in (\xi - \delta, \xi + \delta) f(x) > \frac{A}{2}$

Рассмотрим  $\int_a^b f(x)dx = \underbrace{\int_a^{\xi-\delta} f(x)dx}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} f(x)dx}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{\xi+\delta}^b f(x)dx}_{\geq 0} \geq 0 + \frac{A}{2} 2\delta + 0 = A\delta > 0$  □

**Теорема 3.10.**  $f(x), g(x) \in C[a, b] (a < b)$ ;  $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b]$ , причем  $f(x) \not\equiv g(x)$  на  $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx >$

$$\int_a^b g(x)dx$$

*Доказательство.* Самостоятельно. □

### 3.5 Интегрируемость модуля интегрируемых по Риману функций.

#### Связь интеграла от функции с интегралом от ее модуля

**Теорема 3.11.**  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b] \Rightarrow |f(x)|$  тоже интегрируема на  $[a, b]$ , причем

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)| dx \right|.$$

*Доказательство.* 1) Если  $a = b \Rightarrow 0 \leq 0 \Rightarrow$  доказывать нечего.

2) Если  $a < b$ , то :  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b] \Rightarrow \lim_{\text{кр. инт. } \delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$ , т.е.  $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$

Берем  $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}, \delta_T < \delta$

$$M_k \underset{x_{k-1} \leq x \leq x_k}{=} \sup f(x)$$

$$M'_k \underset{x_{k-1} \leq x \leq x_k}{=} \sup |f(x)|$$

$$m_k \underset{x_{k-1} \leq x \leq x_k}{=} \inf f(x)$$

$$m'_k \underset{x_{k-1} \leq x \leq x_k}{=} \inf |f(x)|$$

а)  $0 \leq m_k \leq M_k \Rightarrow f(x) \geq 0$  на  $[x_{k-1}, x_k] \Rightarrow |f(x)| = f(x)$  на  $[x_{k-1}, x_k] \Rightarrow m'_k = m_k, M'_k = M_k \Rightarrow M'_k - m'_k = M_k - m_k$

б)  $m_k \leq M_k \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq 0$  на  $[x_{k-1}, x_k] \Rightarrow |f(x)| = -f(x)$  на  $[x_{k-1}, x_k], M'_k = -m_k, m'_k = -M_k \Rightarrow M'_k - m'_k = M_k - m_k$

в)  $m_k \leq 0 \leq M_k \Rightarrow M'_k = \max(m_k, -m_k) \Rightarrow M'_k - m'_k \leq M'_k \leq M_k - m_k \Rightarrow$  в любом случае

$0 \leq M'_k - m'_k \leq M_k - m_k \left| \Delta x_k \right| \sum_{k=1}^n \Rightarrow 0 \leq S_T(|f|) - s_T(|f|) \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(|f|) - s_T(|f|)) = 0 \Rightarrow |f(x)|$  интегрируема на  $[a, b]$ .

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow - \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

$$\text{Если } a > b \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)| dx \right|$$

□

### 3.6 Неравенство Коши-Буняковского для определенных интегралов. Теорема о среднем и ее обобщение

**Теорема 3.12** (Неравенство Коши-Буняковского).  $f(x), g(x)$  интегрируемы на  $[a, b] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[ \int_a^b f(x)g(x) dx \right]^2 \leq \left[ \int_a^b f^2(x) dx \right] \left[ \int_a^b g^2(x) dx \right]$$

*Доказательство.* Пусть  $a < b$ .

$$\text{Рассмотрим } \varphi(\lambda) = \int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2 dx = \underbrace{\lambda^2 \int_a^b f^2(x) dx}_{=A} + 2\lambda \underbrace{\int_a^b f(x)g(x) dx}_{=B} + \underbrace{\int_a^b g^2(x) dx}_{=C} = A\lambda^2 + 2B\lambda + C$$

Если  $A = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow B^2 \leq AC$

$$\text{Если } A \geq 0 \Rightarrow B^2 - AC \leq 0, \text{ т.е. } B^2 \leq AC \Rightarrow \left[ \int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \left( \int_a^b f^2(x)dx \right) \left( \int_a^b g^2(x)dx \right)$$

Если  $a = b \Rightarrow$  верно

Если  $a > b \Rightarrow$  верно □

**Теорема 3.13** (1-ая теорема о среднем).  $f(x), g(x)$  интегрируемы на  $[a, b]$ ;  $m = \inf_{[a,b]} f(x), M = \sup_{[a,b]} f(x)$ ,

$$g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow \exists \mu \in [m, M] : \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$$

*Доказательство.*  $a < b$ . Пусть  $g(x) \geq 0$  на  $[a, b]$ .

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$$

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \Rightarrow m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$

$$1) \text{ Если } \int_a^b g(x)dx = 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx = 0 \Rightarrow \text{утверждение верно } \forall \mu \in [m, M]$$

$$2) \text{ Если } \int_a^b g(x)dx > 0 \Rightarrow m \leq \underbrace{\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}}_{\mu} \leq M \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$$

Если  $g(x) \leq 0$  на  $[a, b]$ , то рассмотрим  $\tilde{g}(x) = -g(x) \geq 0$  на  $[a, b]$ .

Если  $a \geq b \Rightarrow$  самостоятельно. □

**Следствие 1.** Если в условиях предыдущей теоремы  $f(x) \in C[a, b] \Rightarrow \exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$

*Доказательство.* По теореме Вейрештрасса:  $\exists \alpha, \beta \in [a, b] : f(\alpha) = m \quad f(\beta) = M \quad \mu \in [m, M] \xRightarrow{\text{т.Коши}} \exists \mu \in [\alpha, \beta] \subset [a, b] : f(\xi) = \mu$  □

**Следствие 2.** Если  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ ,  $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x), M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x) \Rightarrow \exists \mu \in [m, M] :$

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a). \text{ А если еще } f(x) \in C[a, b] \Rightarrow \exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

*Доказательство.* Самостоятельно. □

## Глава 4

# Основные правила интегрирования.

### Лекция 6

21.02

#### 4.1 Интеграл с переменным верхним (нижним) пределом, его непрерывность и дифференцируемость. Существование первообразной у непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница.

**Определение.** Пусть  $f(x)$  — интегрируема на  $[a, b]$ . Рассмотрим функции  $F(x)$  и  $G(x)$ , определенные на

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt - \text{интеграл с переменный верхним пределом}$$

отрезке  $[a, b]$  :

$$G(x) = \int_x^b f(t)dt - \text{интеграл с переменным нижним пределом}$$

$$F(x) + G(x) = \int_a^b f(t)dt \equiv \text{const на } [a, b]$$

**Теорема 4.1.**  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b] \Rightarrow F(x) \in C[a, b]$

*Доказательство.* По Т1  $\exists M > 0 : |f(x)| \leq M \forall x \in [a, b]$ . Берем  $\forall x_0 \in [a, b]$  и  $\Delta x : x_0 + \Delta x \in [a, b]$ . Тогда рас-

$$\text{смотрим } |F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)| = \left| \int_a^{x_0 + \Delta x} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \right| = \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t)dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} |f(t)|dt \right| \leq M|\Delta x| \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$$
$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)) = 0, \text{ т.е. } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} F(x_0 + \Delta x) = F(x_0) \Rightarrow F(x) \text{ непрерывна при } x = x_0.$$

Но  $x_0$  — любое из  $[a, b] \Rightarrow F(x) \in C[a, b]$

□

**Теорема 4.2.**  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ , а также  $f(x)$  непрерывна при  $x = x_0 \Rightarrow \exists F'(x_0) = f(x_0)$  (на концах односторонние производные)

*Доказательство.*  $f(t)$  непрерывна при  $t = x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b] \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Берем  $\Delta x : \Delta x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}, x_0 + \Delta x \in [a, b]$ . Рассмотрим  $\left| \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| =$

$$= \left| \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t) dt - \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0) dt \right| = \left| \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \frac{f(t) - f(x_0)}{\Delta x} dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \frac{|f(t) - f(x_0)|}{|\Delta x|} dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{|\Delta x|} |\Delta x| =$$

$$\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \text{ т.е. } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0), \text{ т.е. } \exists F'(x_0) = f(x_0) \quad \square$$

**Теорема 4.3.**  $f(x) \in C[a, b] \Rightarrow \exists$  первообразная  $\kappa f(x)$  на  $[a, b]$

*Доказательство.*  $F(x) = \int_a^x f(t) dt \Rightarrow \forall x \in [a, b] \exists F'(x) = f(x)$ , т.е.  $F(x)$  — первообразная  $\kappa f(x)$  на  $[a, b]$   $\square$

**Теорема 4.4** (Основная теорема интегрального исчисления).  $f(x) \in C[a, b]$ ,  $\Phi(x)$  — первообразная  $\kappa f(x)$  на  $[a, b] \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(x) \Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a) \quad (\text{Формула Ньютона-Лейбница})$$

$$\left. \begin{array}{l} \Phi(x) - \text{первообразная } \kappa f(x) \text{ на } [a, b]. \\ F(x) = \int_a^x f(t) dt - \text{тоже первообразная на } [a, b] \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \Phi'(x) = f(x) \forall x \in [a, b] \\ F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b] \end{array} \right\} \Rightarrow F(x) =$$

$$\Phi(x) + C, \text{ т.е. } \int_a^x f(t) dt = \Phi(x) + C$$

$$\text{при } x = a \Rightarrow C = -\Phi(a) \Rightarrow \int_a^x f(t) dt = \Phi(x) - \Phi(a). \text{ При } x = b \Rightarrow \int_a^b f(t) dt = \Phi(b) - \Phi(a) \quad \square$$

Для  $G(x)$  справедливы теоремы аналогичные Т4.1 Т4.2 Т4.3

## 4.2 Вычисление определенных интегралов способами замены переменных и интегрирования по частям.

**Теорема 4.5** (Замена переменных).  $f(x) \in C[a, b]$ ;  $\varphi(t) : \varphi'(t) \in C[\alpha, \beta]$ ,  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$   $[a, b]$  — множество значений  $\varphi(t)$  на  $[a, b] \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

*Доказательство.* По Т3.16  $\Rightarrow \exists \Phi(x)$  — первообразная  $\kappa f(x)$  на  $[a, b]$ , причем  $\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a)$ .

Рассмотрим сложную функцию  $\Phi(\varphi(t))$  — дифференцируема на  $[a, b]$  (по т. о дифф сложной функции)  
 $\frac{d}{dt}(\Phi(\varphi(t))) = \Phi'_x(x) \Big|_{x=\varphi(t)} * \varphi'_t(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t) \forall t \in [a, b] \Rightarrow \Phi(\varphi(t))$  — первообразная  $\kappa \underbrace{f(\varphi(t)) \varphi'(t)}_{\in C[a, b]}$  на  $[a, b] \Rightarrow$

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \Phi(\varphi(t)) \Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(x) dx \quad \square$$

$$\textbf{Теорема 4.6.} \quad u(x), v(x) : u'(x), v'(x) \in C[a, b] \Rightarrow \int_a^b u(x) v'(x) dx = (u(x) v(x)) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx$$

Доказательство.  $\frac{d}{dx}(u(x)v(x)) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow u(x)v(x) -$  первообразная к  $\underbrace{u'(x)v(x) + u(x)v'(x)}_{\in C[a, b]}$

$$\text{на } [a, b] \xRightarrow{\text{линейность}} \int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b u'(x)v(x)dx = \int_a^b (u(x)v'(x) + u'(x)v(x))dx = [u(x)v(x)]_a^b \quad \square$$

Пусть  $f(x) : f^{(n+1)}(x)$  непрерывна в некоторой окрестности точки  $x = x_0$ , тогда  $\forall x$  из этой окрестности имеет место:  $f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0)) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)dt = f(x_0) - \int_{x_0}^x f'(t)d(x-t) = f(x_0) - (x-t)f'(t) \Big|_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^x (x-t)f''(t)dt = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!}f'(x_0) + \int_{x_0}^x (x-t)f''(t)dt = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!}f'(x_0) - \int_{x_0}^x f''(t)d\left(\frac{(x-t)^2}{2}\right) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) - \frac{(x-t)^2}{2!}f''(t) \Big|_{t=x_0}^{t=x} + \frac{1}{2!} \int_{x_0}^x (x-t)^2 f'''(t)dt = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{1}{2!} \int_{x_0}^x (x-t)^2 f'''(t)dt = \dots = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$

Итого:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x, f),$$

$$\text{где } r_n(x, f) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

- формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$r_n(x, f) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt. \text{ На } [x_0, x] \text{ } (x-t)^n \text{ не меняет знак, а } f^{(n+1)}(t) \in C[x_0, x] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n dt = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \Big|_{t=x_0}^{t=x} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} -$$

остаточный член в форме Лагранжа (получено при больших ограничениях, чем раньше)

## Глава 5

# Геометрические приложения определенного интеграла.

### Лекция 6

21.02

#### 5.1 Спрямолинейность гладкой кривой. Выражение длины дуги гладкой кривой в виде определенного интеграла. Формулы длины дуги плоской кривой, заданной в декартовых либо полярных координатах.

**Определение.** Пусть  $\varphi(t), \psi(t), \chi(t) \in C[a, b]$ . Рассмотрим множество точек в пространстве, которое обозначим  $L = \{M(x, y, z), x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), t \in [\alpha, \beta]\}$  - такое множество точек называется простой

кривой, если  $\forall t_1, t_2 \in [\alpha, \beta] : t_1 \neq t_2 \Rightarrow M_1(x_1, y_1, z_1) \neq M_2(x_2, y_2, z_2)$ , где 
$$\begin{cases} x_i = \varphi(t_i) \\ y_i = \psi(t_i) \\ z_i = \chi(t_i) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots$$

Если при этом  $z = \chi(t) \equiv 0$  на  $[a, b]$ , то плоская простая кривая.

**Определение.** Говорят, что система уравнений 
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} \quad t \in \{t\} - \text{промежуток, задает параметри-$$

чески кривую  $L$ , если промежуток  $\{t\}$  можно разбить на конечный или бесконечный (счетный) набор отрезков  $[\alpha_i, \beta_i]$ , покрывающих данный промежуток  $\{t\}$  и пересекающихся не более чем концами, так, что на каждом отрезке  $[\alpha_i, \beta_i]$   $L$  - простая кривая.

Везде далее, если не оговорено противного кривая - параметрически заданная кривая



**Определение.** Кривая  $L : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$  называется гладкой, если  $\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t) \in C[a, b]$ , а еще

$$(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2 > 0 \forall t \in [\alpha, \beta]$$

$$L : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta] \quad T = \{\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = \beta\} \quad M_k(x, y, z) : \begin{cases} x = \varphi(t_k) \\ y = \psi(t_k) \\ z = \chi(t_k) \end{cases}$$

Рассмотрим  $l_T = \sum_{k=1}^n |\overrightarrow{M_{k-1}M_k}| = \sum_{k=1}^n \sqrt{[\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})]^2 + [\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})]^2 + [\chi(t_k) - \chi(t_{k-1})]^2}$  — длина ломаной, вписанной в  $L$ .  $T_1 = T \cup \tilde{t} \Rightarrow l_{T_1} \geq l_T$  (по неравенству треугольника). Тогда:  $T_1 \succ T \rightarrow l_{T_1} \geq l_T$

**Определение.** Кривая  $L$  называется спрямляемой, если  $\{l_T\}$  — ограниченное сверху множество.

**Определение.** Если  $L$  — спрямляемая кривая, то число  $l = l(L) = \sup_T \{l_T\}$  называется длиной кривой  $L$ .

**Теорема 5.1.**  $L : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$  — гладкая кривая  $\Rightarrow L$  — спрямляемая, причем

$$l(L) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt$$

tg: @moksimga

## Лекция 7

25.02

*Доказательство.*  $\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t) \in C[\alpha, \beta] \Rightarrow \exists M > 0 : |\varphi'(t)| \leq M, |\psi'(t)| \leq M, |\chi'(t)| \leq M \forall t \in [\alpha, \beta]$ .

Берем  $\forall T = \{\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = \beta\}$ .

$$\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \varphi'(\alpha_k) \Delta t_k$$

По теореме Лагранжа  $\exists \alpha_k, \beta_k, \gamma_k \in (t_{k-1}, t_k) : \psi(t_k) - \psi(t_{k-1}) = \psi'(\beta_k) \Delta t_k \quad k = \overline{1, n} \Rightarrow$

$$\chi(t_k) - \chi(t_{k-1}) = \chi'(\gamma_k) \Delta t_k$$

$$\Rightarrow l_T = \sum_{k=1}^n \sqrt{(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^2 + (\chi(t_k) - \chi(t_{k-1}))^2} = \sum_{k=1}^n \Delta t_k \sqrt{\underbrace{(\varphi'(\alpha_k))^2 + (\psi'(\beta_k))^2 + (\chi'(\gamma_k))^2}_{\leq 3M^2}} \leq$$

$$\leq M\sqrt{3} \sum_{k=1}^n \Delta t_k = M\sqrt{3}(\beta - \alpha) \Rightarrow \{l_T\} - \text{ограничена сверху} \Rightarrow L - \text{спрямляемая}.$$

Введем  $f(t) = \sqrt{(\varphi(t))^2 + (\psi(t))^2 + (\chi(t))^2} \in C[\alpha, \beta] \Rightarrow f(t)$  интегрируема на  $[\alpha, \beta] \Rightarrow \exists \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = I$ , т.е

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : \forall T, \delta_T < \delta_1, \forall \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n \Rightarrow |\sigma_T(f, \Xi) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t) \in C[\alpha, \beta] \xRightarrow{\text{т. Кантора}} \varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t)$  — равномерно непрерывны на  $[\alpha, \beta] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \delta_2 > 0 : \forall t', t'' \in [\alpha, \beta] : |t' - t''| < \delta_2 \Rightarrow |\varphi'(t') - \varphi'(t'')| < \frac{\varepsilon}{4(\beta - \alpha)}; |\psi'(t') - \psi'(t'')| < \frac{\varepsilon}{4(\beta - \alpha)}; |\chi'(t') - \chi'(t'')| < \frac{\varepsilon}{4(\beta - \alpha)}.$$

Берем  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0, \quad \forall T, \delta_T < \delta, \forall \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n,$

$$\text{рассмотрим } |l_T - I| = |l_T - \sigma_T(f, \Xi) + \sigma_T(f, \Xi) - I| \leq |l_T - \sigma_T(f, \Xi)| + \underbrace{|\sigma_T(f, \Xi) - I|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < |l_T - \sigma_T(f, \Xi)| + \frac{\varepsilon}{2} =$$

$$\left| \sum_{k=1}^n \left[ \sqrt{(\varphi'(\alpha_k))^2 + (\psi'(\beta_k))^2 + (\chi'(\gamma_k))^2} \Delta t_k - \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\xi_k))^2 + (\chi'(\xi_k))^2} \Delta t_k \right] \right| + \frac{\varepsilon}{2} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^n \left| \sqrt{(\varphi'(\alpha_k))^2 + (\psi'(\beta_k))^2 + (\chi'(\gamma_k))^2} - \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\xi_k))^2 + (\chi'(\xi_k))^2} \right| \Delta t_k \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \sqrt{(\varphi'(\alpha_k) - \varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\beta_k) - \psi'(\xi_k))^2 + (\chi'(\gamma_k) - \chi'(\xi_k))^2} \Delta t_k + 2 < \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{3\varepsilon^2}{16(\beta - \alpha)^2}} \Delta t_k + \frac{\varepsilon}{2} =$$

$$= \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{4(\beta - \alpha)}(\beta - \alpha) + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{4} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} l_T = I$$

Осталось доказать, что  $l_T \leq I \quad \forall T$ . От противного, предположим, что  $\exists T_0 : l_{T_0} > I$ . Известно, что

$$\lim_{\delta_T \rightarrow 0} l_T = I, \text{ т.е } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow |l_T - I| < \varepsilon.$$

$$\text{Берем } \varepsilon = \frac{l_{T_0} - I}{2} > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow |l_T - I| < \frac{l_{T_0} - I}{2}. \text{ Берем } T_1 \succ T_0 : \delta_{T_1} < \delta \Rightarrow \frac{l_{T_0} - I}{2} = \varepsilon >$$

$$|l_{T_1} - I| = l_{T_1} - I \geq l_{T_0} - I = 2\varepsilon \Rightarrow \text{противоречие} \Rightarrow \text{предположение неверно} \Rightarrow l_T \leq I \quad \forall T$$

□

### 5.1.1 Частные случаи гладких кривых:

$$1) y = f(x), x \in [a, b] \quad \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \\ z \equiv 0 \end{cases} \quad t \in [a, b] \Rightarrow l(L) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$2) r = r(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta], \quad \begin{cases} x = r(\varphi) \cos \varphi \\ y = r(\varphi) \sin \varphi \end{cases} \quad (x'_\varphi(\varphi))^2 + (y'_\varphi(\varphi))^2 = (r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi)^2 +$$

$$(r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi)^2 = r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2 \Rightarrow l(L) = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi$$

## 5.2 Площадь плоской фигуры. Критерий квадратируемости

**Определение.** Плоская фигура - любое ограниченное множество на плоскости

**Определение.**  $P$  - плоская фигура. Число  $\mu(P)$  - площадь, если:

$$1) \mu(P) \geq 0$$

$$2) \text{Если фигуры } P_1, P_2 \text{ равны в геометрическом смысле} \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$$

$$3) P_1, P_2 : P_1 \cap P_2 = \emptyset \Rightarrow \mu(P_1 \cup P_2) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$$

$$4) \text{Если } P - \text{единичный квадрат} \Rightarrow \mu(P) = 1$$

Объединение, пересечение, вычитание многоугольников - тоже многоугольник.

$\emptyset$  - тоже многоугольник ( $\mu(\emptyset) = 0$ ). Если  $P$  - многоугольник, то его площадь известна ( $\tilde{\mu}(P)$  - обозначение площади)

$$P - \text{плоская фигура} \Rightarrow Q, S : Q \subset P \subset S$$

$$\forall Q, S : Q \subset P \subset S \Rightarrow \tilde{\mu}(Q) \leq \tilde{\mu}(S) \Rightarrow \{\mu(Q)\} - \text{ограничено сверху. } \{\mu(S)\} - \text{ограничено снизу.}$$

**Определение.**  $P$  - плоская фигура.  $\underline{\mu}(P) = \sup_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q)$  - нижняя площадь.  $\overline{\mu}(P) = \inf_{S \supset P} \tilde{\mu}(S)$

$$Q \subset P \subset S \Rightarrow \tilde{\mu}(Q) \leq \tilde{\mu}(S) \Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \tilde{\mu}(S) \Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \overline{\mu}(P)$$

**Определение.** Плоская фигура  $P$  называется квадратируемой, если  $\underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$ . При этом  $\mu(P) = \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$

**Теорема 5.2.** Введенная таким образом  $\mu(P)$  - площадь т.е

$$1) P - \text{квадрируемая фигура} \Rightarrow \mu(P) \geq 0$$

$$2) P_1, P_2 - \text{квадрируемые плоские фигуры, причем } P_1 \text{ и } P_2 \text{ равны в геометрическом смысле} \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$$

$$3) P_1, P_2 - \text{квадрируемые плоские фигуры, причем } P_1 \cap P_2 = \emptyset \Rightarrow P = P_1 \cup P_2 - \text{тоже квадрируема, причем} \\ \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$$

$$4) \text{Если } P - \text{единичный квадрат} \Rightarrow P - \text{плоская квадрируемая фигура, причем } \mu(P) = 1$$

$$\text{Доказательство. } 1) \exists \mu(P) = \underline{\mu}(P) = \sup_{Q \subset P} \underbrace{\tilde{\mu}(Q)}_{\geq 0} \geq 0$$

$$2) Q_1 \subset P_1 \subset S_1 \Leftrightarrow Q_2 \subset P_2 \subset S_2, \text{ причем } Q_1 \text{ и } Q_2 \text{ равны в геометрическом смысле, } S_1 \text{ и } S_2 \text{ равны в}$$

геометрическом смысле  $\Rightarrow \begin{matrix} \tilde{\mu}_1(Q_1) = \tilde{\mu}(Q_2) \\ \tilde{\mu}_1(S_1) = \tilde{\mu}(S_2) \end{matrix} \Rightarrow \underline{\mu}(P_1) = \underline{\mu}(P_2), \bar{\mu}(P_1) = \bar{\mu}(P_2) \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$

3)  $P_1, P_2$  - квадратуемые  $\Rightarrow \exists \mu(P_1), \mu(P_2)$ , причем  $\begin{matrix} \mu(P_1) = \bar{\mu}(P_1) = \underline{\mu}(P_1) \\ \mu(P_2) = \bar{\mu}(P_2) = \underline{\mu}(P_2) \end{matrix} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists Q_1, Q_2, S_1, S_2 :$

$$Q_1 \subset P_1 \subset S_1 : \tilde{\mu}(Q_1) > \mu(P_1) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$Q_2 \subset P_2 \subset S_2 : \tilde{\mu}(Q_2) > \mu(P_2) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\tilde{\mu}(S_2) < \mu(P_2) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\tilde{\mu}S_1 < \mu(P_1) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$Q_1 \subset P_1, Q_2 \subset P_2$ , но  $P_1 \cap P_2 = \emptyset \Rightarrow Q_1 \cap Q_2 = \emptyset \Rightarrow \mu(Q_1 \cup Q_2) = \mu(Q_1) + \mu(Q_2)$ , причем  $\begin{matrix} Q = Q_1 \cup Q_2 \\ S = S_1 \cup S_2 \end{matrix}$

Рассмотрим  $\mu(Q) = \mu(Q_1) + \mu(Q_2) > \mu(P_1) + \mu(P_2) - \varepsilon$ .

$$\underline{\mu}(P) = \tilde{\mu}(Q) > \sup_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q) \geq \tilde{\mu}(Q_1) + \tilde{\mu}(Q_2) > \mu(P_1) + \mu(P_2) - \varepsilon$$

Получили, что  $\forall \varepsilon > 0 \quad \underline{\mu}(P) > \mu(P_1) + \mu(P_2) - \varepsilon \Rightarrow \underline{\mu}(P) \geq \mu(P_1) + \mu(P_2)$

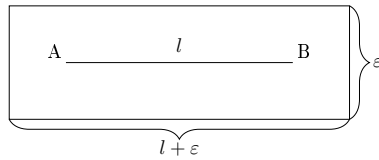
Аналогично:  $\tilde{\mu}(S) \leq \tilde{\mu}(S_1) + \tilde{\mu}(S_2)$ .  $\bar{\mu}(P) = \inf_{S \supset P} \mu(S) \leq \inf_{\substack{S: S_1 \cup S_2 \\ S_1 \supset P_1 \\ S_2 \supset P_2}} \mu(S) \leq \tilde{\mu}(S_1) + \tilde{\mu}(S_2) < \mu(P_1) + \mu(P_2) + \varepsilon$ .

Получили, что  $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \bar{\mu}(P) < \mu(P_1) + \mu(P_2) + \varepsilon \Rightarrow \bar{\mu}(P) \leq \mu(P_1) + \mu(P_2) \Rightarrow \mu(P_1) + \mu(P_2) \leq \underline{\mu}(P) \leq \bar{\mu}(P) \leq \mu(P_1) + \mu(P_2) \Rightarrow \underline{\mu}(P) = \bar{\mu}(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2) \Rightarrow P$  - квадратуема, причем  $\mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$

4)  $P$  - единичный квадрат. Берем  $Q, S : Q = P = S$   $\left. \begin{matrix} \underline{\mu}(P) = \sup_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q) \geq 1 \\ \bar{\mu}(P) = \inf_{S \supset P} \tilde{\mu}(S) \end{matrix} \right\} \Rightarrow 1 \leq \underline{\mu}(P) \leq \bar{\mu}(P) \leq 1 \Rightarrow$

$\underline{\mu}(P) = \bar{\mu}(P) = 1 \Rightarrow$  единичный квадрат - плоская квадратуемая фигура, причем  $\mu(P) = 1$  □

Берем  $\forall \varepsilon > 0$



$\emptyset \subset AB \subset S \quad 0 \leq \bar{\mu}(AB) \leq \varepsilon(l + \varepsilon) \Rightarrow \bar{\mu}(AB) = 0; \quad 0 \leq \underline{\mu}(AB) \leq \bar{\mu}(AB) = 0 \Rightarrow \mu(AB) = 0$

tg: @moksimga

**Теорема 5.3** (Критерий квадрируемости).  $P$  - плоская фигура, тогда:  $P$  - квадрируема  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists Q, S : Q \subset P \subset S$ , причем  $0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  Пусть  $P$  - квадрируема  $\Rightarrow \exists \mu(P) = \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists Q, S : Q \subset P \subset S$ , причем  $\tilde{\mu}(P) > \underline{\mu}(P) - \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < (\mu(P) + \frac{\varepsilon}{2}) - (\mu(P) - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$   
 $\tilde{\mu}(S) < \overline{\mu}(P) + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < (\mu(P) + \frac{\varepsilon}{2}) - (\mu(P) - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$   
 $\Leftarrow$  Пусть  $\forall \varepsilon > 0 \exists Q, S : Q \subset P \subset S$ , причем  $0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon$ , но  $\tilde{\mu}(Q) \leq \underline{\mu}(P) \leq \overline{\mu}(P) \leq \tilde{\mu}(S) \Rightarrow 0 \leq \overline{\mu}(P) - \underline{\mu}(P) < \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \overline{\mu}(P) - \underline{\mu}(P) < \varepsilon \Rightarrow \overline{\mu}(P) - \underline{\mu}(P) = 0 \Rightarrow \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$ , т.е.  $P$  - квадрируема

□

### 5.3 Квадрируемость криволинейной трапеции. Выражение площади криволинейной трапеции в виде определенного интеграла. Формула площади криволинейного сектора (без доказательства)

**Определение.** Пусть  $f(x) \in C[a, b], f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$ . Плоская фигура  $P = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$  называется криволинейной трапецией.

**Теорема 5.4** (Критерий квадрируемости).  $f(x) \in C[a, b], f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b] \Rightarrow$  криволинейная трапеция  $P = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$  является квадрируемой фигурой, причем  $\mu(P) = \int_a^b f(x) dx$

*Доказательство.*  $f(x) \in C[a, b] \Rightarrow \exists \int_a^b f(x) dx = I \xRightarrow{\text{кр. инт}} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$ ,  
 т.е.  $\exists Q, S$  - ступенчатые фигуры (являются многоугольниками):  $Q \subset P \subset S$ , причем  $0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \xRightarrow{\text{Т5.4}} P \text{ - квадрируемая фигура} \Rightarrow \exists \mu(P) : \\ \mu(P) = \underline{\mu}(P) = \sup \tilde{\mu}(Q) \geq \sup_{\substack{Q: Q \subset P \\ Q \text{ - ступенчатая} \\ \text{фигура}}} \tilde{\mu}(Q) = \sup_T s_T(f) = \underline{I} = I \\ \mu(P) = \overline{\mu}(P) = \inf \tilde{\mu}(S) \leq \inf_{\substack{S: S \supset P \\ S \text{ - ступенчатая} \\ \text{фигура}}} \tilde{\mu}(S) = \inf_T S_T(f) = \overline{I} = I \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$I \leq \mu(P) \leq I \Rightarrow \mu(P) = I$$

□

Замечание. Если  $f(x) \in C[a, b], f(x) \leq 0$ , то  $\int_a^b f(x) dx = -\mu(P)$

Если  $f(x) \in C[a, b]$ , причем меняет знак на  $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx$  - алгебраическая разность площадей.

**Определение.**  $r, \varphi$  - полярные координаты. Пусть  $r(\varphi) \in C[\alpha, \beta]$ . Плоская фигура  $P = \{(r, \varphi) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq r \leq r(\varphi)\}$

**Теорема 5.5.**  $r, \varphi$  - полярные координаты  $r(\varphi) \in C[\alpha, \beta] \Rightarrow$  криволинейный сектор  $P = \{(r, \varphi) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq r \leq r(\varphi)\}$  - квадрируемая фигура, причем  $\mu(P) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$

## Глава 6

# Собственные и несобственные интегралы.

### Лекция 8

28.02

#### 6.1 Несобственный интеграл первого рода, их сходимость и расходимость. Независимость сходимости (расходимости) несобственного интеграла первого рода от значения его постоянного (неособенного) предела

**Определение.** Пусть  $\forall c \geq a$   $f(x)$  интегрируема на  $[a, c]$ . Выражение  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  называется несобственным интегралом I рода от  $f(x)$  на  $[a, +\infty)$ . Если  $\exists \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x)dx = A$ , то число  $A$  называется величиной

этого интеграла. Обозначение:  $\int_a^{+\infty} f(x)dx = A$

**Определение.** Если  $\exists \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x)dx$ , то  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  называется сходящимся, иначе - расходящимся.

**Теорема 6.1.**  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  сходится (расходится)  $\Rightarrow \forall a' \geq a \int_{a'}^{+\infty} f(x)dx$  тоже сходится (расходится).

**Доказательство.**  $\forall c \geq a, \forall a' \geq a \exists \int_a^c f(x)dx = \underbrace{\int_a^{a'} f(x)dx}_{\text{собственный интеграл (число)}} + \int_{a'}^c f(x)dx \xrightarrow{c \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} f(x)dx$  и  $\int_{a'}^{+\infty} f(x)dx$

сходятся или расходятся одновременно. А их величины (в случае сходимости) отличаются на  $\int_a^{a'} f(x)dx$ , (т.е. на константу)

□

**Определение.** Пусть  $\forall c \leq a$   $f(x)$  интегрируема на  $[c, a]$ . Выражение  $\int_{-\infty}^a f(x)dx$  называется несобственным

интегралом I рода от  $f(x)$  на  $(-\infty, a]$ . Если  $\exists \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^a f(x)dx = A$ , то число  $A$  называется величиной

этого интеграла. Обозначение:  $\int_{-\infty}^a f(x)dx = A$

**Определение.** Если  $\exists \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^a f(x)dx$ , то  $\int_{-\infty}^a f(x)dx$  называется сходящимся, иначе - расходящимся.

**Теорема 6.2.**  $\int_{-\infty}^a f(x)dx$  сходится (расходится)  $\Rightarrow \forall a' \leq a \int_{-\infty}^{a'} f(x)dx$  тоже сходится (расходится)

*Доказательство.* Самостоятельно. □

**Определение.** Пусть  $\forall a, b$   $f(x)$  - интегрируема на  $[a, b]$ . Выражение  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  называется несобственным

интегралом I рода от  $f(x)$  на  $(-\infty, +\infty)$ . Если  $\exists c : \int_{-\infty}^c f(x)dx$  и  $\int_c^{+\infty} f(x)dx$  сходятся, то  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  назы-

вается сходящимся, а число  $A = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$  называется величиной  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ . Обозначение:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = A$ . Если такого  $c$  не существует, то  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  называется расходящимся.

**Теорема 6.3.**  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  сходится (расходится)  $\Rightarrow \forall c' \int_{-\infty}^{c'} f(x)dx$  и  $\int_{c'}^{+\infty} f(x)dx$  являются сходящимися,

при этом  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c'} f(x)dx + \int_{c'}^{+\infty} f(x)dx$

*Доказательство.*  $\exists c : \int_{-\infty}^c f(x)dx$  и  $\int_c^{+\infty} f(x)dx$  сходятся  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} & \exists \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_c^a f(x)dx \left| \int_c^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_c^a f(x)dx \right| \xrightarrow{\text{Т6.1}} \\ & \exists \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^c f(x)dx \left| \int_{-\infty}^c f(x)dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^c f(x)dx \right| \end{aligned}$$

$\forall c'$

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & \int_{c'}^{+\infty} f(x)dx \text{ сходится} \\ & \int_{-\infty}^{c'} f(x)dx \text{ сходится} \end{aligned} \right| \begin{aligned} & \int_{c'}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{c'}^a f(x)dx - \text{число} \\ & \int_{-\infty}^{c'} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^{c'} f(x)dx - \text{число} \end{aligned} \end{aligned}$$

Рассмотрим  $\int_{c'}^{+\infty} f(x)dx + \int_{-\infty}^{c'} f(x)dx =$

$$\begin{aligned} & = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{c'}^a f(x)dx + \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^{c'} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ \int_{c'}^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx \right] + \lim_{b \rightarrow -\infty} \left[ \int_b^c f(x)dx + \int_c^{c'} f(x)dx \right] = \\ & \int_{c'}^c f(x)dx + \int_c^{c'} f(x)dx + \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_c^a f(x)dx + \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^c f(x)dx = \int_c^{+\infty} f(x)dx + \int_{-\infty}^c f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad \square \end{aligned}$$

Пример.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^p}$  непрерывна при  $x \geq 1$  (даже при  $x > 0$ )  $\Rightarrow$  интегрируема на  $[a, c] \forall c \geq 1$

$p > 1$   $\int_1^c \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_{x=1}^{x=c} = \frac{1}{1-p} \left( \frac{1}{c^{p-1}} - 1 \right) \xrightarrow{c \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-p} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$  (сходится)

$p < 1$   $\int_1^c \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} \left( \frac{1}{c^{p-1}} - 1 \right) \xrightarrow{c \rightarrow +\infty} +\infty \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = +\infty$  (расходится)

$p = 1$   $\int_1^c \frac{dx}{x} = \ln(x) \Big|_{x=1}^{x=c} = \ln(c) \xrightarrow{c \rightarrow +\infty} +\infty \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$  (расходится)

Итого:  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  - сходится при  $p > 1$ . Расходится при  $p \leq 1$ .  $\Rightarrow \forall a > 0 \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  - сходится при  $p > 1$ . Расходится при  $p \leq 1$

## 6.2 Несобственные интегралы второго рода, их сходимость и расходимость. Независимость сходимости (расходимости) несобственного интеграла второго рода от значения его постоянного (неособенного) предела

**Определение.** Пусть  $\forall c \in [a, b] \left[ \forall c \in (a, b] \right] f(x)$  интегрируема на  $[a, c]$  [на  $[c, b]$ ]. Выражение  $\int_a^b f(x) dx$  называется несобственным интегралом второго рода с особой точкой  $b-0$  [от  $f(x)$  на  $[a, b]$  [на  $(a, b]$ ].

Если  $\exists \lim_{c \rightarrow b-0} \int_a^c f(x) dx = A$   $\left[ \exists \lim_{c \rightarrow a+0} \int_c^b f(x) dx = A \right]$ , то число  $A$  называется его величиной. Обозначение:

$\int_a^b f(x) dx = A$ . Интеграл, имеющий конечную величину называется сходящимся, в противном случае - расходящимся.

**Теорема 6.4.**  $\int_a^b f(x) dx$  с особой точкой  $b-0$  сходится (расходится)  $\Rightarrow \forall c \in [a, b) \int_c^b f(x) dx$  с особой точкой  $b-0$  тоже сходится (расходится).

*Доказательство.* Самостоятельно. □

**Теорема 6.5.**  $\int_a^b f(x) dx$  с особой точкой  $a+0$  сходится  $\Rightarrow \forall c \in (a, b] \int_a^c f(x) dx$  с особой точкой  $a+0$  тоже сходится (расходится).

*Доказательство.* Самостоятельно. □

Самостоятельно. Ввести понятие  $\int_a^b f(x) dx$  с двумя особыми точками  $b-0$  и  $a+0$ . Дать определение сходимости (расходимости) такого интеграла. Доказать, что если такой интеграл сходится, то его величина не зависит от выбора промежуточной точки  $c \in (a, b)$



## Лекция 9

**Теорема 6.6.** Собственный  $\int_a^b f(x)dx$ , рассмотрим его как несобственный с особой точкой  $b-0$  ( $c$  особой  $a+0$ ), сходится, причем значения совпадают.

*Доказательство.*  $f(x)$  интегрируема на  $\Rightarrow$  ограничена  $\Rightarrow \exists M > 0 : \forall x \in [a, b] |f(x)| \leq M$

$$1) \text{ Особая точка } \boxed{b-0} \quad \forall C \in [a, b) \quad \left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^c f(x)dx \right| = \left| \int_c^b f(x)dx \right| \leq \left| \int_c^b |f(x)|dx \right| = \int_c^b |f(x)|dx \leq \int_c^b Mdx = M(b-c) \xrightarrow{c \rightarrow b-0} 0 \Rightarrow \lim_{c \rightarrow b-0} \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

2) Особая точка  $\boxed{a+0}$  - самостоятельно. □

Пример:  $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$   $\frac{1}{x^p}$  - непрерывна при  $x > 0$

$$1) \boxed{p > 1} \int_c^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_{x=c}^{x=1} = \frac{1}{1-p} \left( 1 - \frac{1}{c^{p-1}} \right) \xrightarrow{c \rightarrow 0+0} +\infty \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x^p} = +\infty - \text{расходится}$$

$$2) \boxed{p < 1} \int_c^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} \left( 1 - \frac{1}{c^{p-1}} \right) \xrightarrow{c \rightarrow 0+0} \frac{1}{1-p} \Rightarrow \int_c^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} - \text{сходится}$$

$$3) \boxed{p = 1} \int_c^1 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_{x=c}^{x=1} = \ln 1 - \ln c = -\ln c \xrightarrow{c \rightarrow 0+0} +\infty \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty - \text{расходится}$$

Итого:  $\int_0^a \frac{dx}{x^p}$  - сходится при  $p < 1$ , расходится при  $p \geq 1 \xRightarrow{\text{Т6.6}} \forall a > 0 \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$  - сходится при  $p < 1$ , расходится при  $p \geq 1$ .

### 6.3 Несобственные интегралы с несколькими особыми точками.

В общем случае несобственный интеграл  $\int_a^b f(x)dx$ , где  $a$  - число или  $-\infty$ ,  $b$  - число или  $+\infty$ , причем на промежутке  $(a, b)$  - лишь конечное количество точек, в которых  $f(x)$  не является интегрируемой в собственном смысле, разбивается на сумму конечного количества слагаемых, каждое из которых - несобственный интеграл с единственной особенностью (один из пределов интегрирования). Его величина (если  $\boxed{\text{все}}$  слагаемые сходятся) не зависит от выбора промежуточных точек.

Пример:  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^2-1} + \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2-1} + \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2-1} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2-1} + \int_1^2 \frac{dx}{x^2-1} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$

Рассмотрим  $\int_1^2 \frac{dx}{x^2-1} \quad \forall c \in (1; 2] \quad \int_c^2 \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x-1}{x+1} \right) \Big|_{x=c}^{x=2} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{c+1}{c-1} \right) \xrightarrow{c \rightarrow 1+0} +\infty \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{dx}{x^2-1} = +\infty - \text{расходится} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} - \text{расходится.}$$

## 6.4 Формула Ньютона-Лейбница для несобственных интегралов.

### Вычисление несобственных интегралов способами замены переменной и интегрирования по частям.

**Теорема 6.7.** Пусть  $f(x) \in C[a, b)$ , где  $b$  - число или  $+\infty$ ,  $F(x)$  - первообразная к  $f(x)$  на  $[a, b) \Rightarrow$  из существования одного из пределов следует существования другого и равно:  $\int_a^b f(x)dx = \underbrace{\lim_{c \rightarrow b-0} F(c) - F(a)}_{\text{обозн. } F(b-0)}$

$\left( \text{т.е. } \int_a^b F(x)dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b-0} \right)$  Т.е формула Ньютона-Лейбница справедлива и для сходящихся несобственных интегралов.

*Доказательство.*  $f(x) \in C[a, b) \Rightarrow \exists F(x)$  — первообразная к  $f(x)$  на  $[a, b)$ .  $\forall c \in [a, b)$  рассмотрим  $\int_a^c f(x)dx = F(c) - F(a)$ , а теперь  $c \rightarrow b-0$   $\square$

Случай где  $a$  - число или  $-\infty$ ,  $b$  - число или  $+\infty$  рассматривается аналогично.

Примеры:  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{x=1}^{+\infty} = 1, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_{x=0}^{x=1} = 2$

**Теорема 6.8.**  $f(x) \in C[a, b)$  (где  $b$  - число или  $+\infty$ ),  $\varphi(t) : \varphi(t)$  строго возрастает на  $[\alpha, \beta)$  (где  $\beta$  - число или  $+\infty$ ),  $\varphi(\alpha) = a, \lim_{t \rightarrow \beta-0} \varphi(t) = b-0, \varphi'(t) \in C[\alpha, \beta) \Rightarrow$  из существования одного из интегралов следует

существование другого и их равенство:  $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

*Доказательство.*  $\exists \Theta(x)$  — обратная функция к  $\varphi(t) \Rightarrow \Theta(a) = \alpha, \lim_{x \rightarrow b-0} \Theta(x) = \beta-0$ . Берем  $\forall c \in [a, b) \Rightarrow$

$\exists! \gamma \in [\alpha, \beta) : \Theta(c) = \gamma$ , т.е  $\varphi(\gamma) = c$ . Рассмотрим  $\int_a^c f(x)dx \underset{\substack{\text{по Т о} \\ \text{замене} \\ \text{переменной}}}{=} \int_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ , а теперь  $c \rightarrow b-0$   $\square$

Случай где  $a$  - число или  $-\infty$  ( $\varphi(t)$  строго убывает) аналогично.

По теореме 6.8 : если после замены получен собственный интеграл, то так устанавливается сходимость.

Пример:  $\int_1^2 \frac{xe^x dx}{\sqrt{x^2-1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2-1} = t, x^2 = t^2+1, xdx = tdt, \\ x=2 \Leftrightarrow t=\sqrt{3}, x \rightarrow 1+0 \Leftrightarrow t \rightarrow 0+0 \end{array} \right| = \int_0^{\sqrt{3}} e^{\sqrt{t^2+1}} dt \Rightarrow \int_1^2 \frac{xe^x dx}{\sqrt{x^2-1}} - \text{сходится.}$

По теореме 6.8 особую точку можно перевести в  $+\infty$ .

$$\begin{aligned} 1) \int_{-\infty}^a f(x)dx &= \left| \begin{array}{l} x = -t, dx = -dt, \\ x = a \Leftrightarrow t = -a, x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty \end{array} \right| = - \int_{+\infty}^{-a} f(-t)dt = \int_{-a}^{+\infty} f(-t)dt \\ 2) \int_a^b f(x)dx &= \left| \begin{array}{l} b-0 - \text{особая точка}, x = \frac{a+bt}{1+t}, t = \frac{x-a}{b-a}, \\ x = a \Leftrightarrow t = 0, x \rightarrow b-0 \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty, dx = \frac{(b-a)dt}{(1+t)^2} \end{array} \right| = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{a+bt}{1+t}\right) \frac{(b-a)dt}{(1+t)^2} = \\ &= (b-a) \int_0^{+\infty} f\left(\frac{a+bt}{1+t}\right) \frac{dt}{(1+t)^2} \end{aligned}$$

$$3) \int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{l} a+0 - \text{особая точка}, x = \frac{b+at}{1+t} \Rightarrow t = \frac{x-b}{a-x}, \\ x=b \Leftrightarrow t=0, x \rightarrow a+0 \Rightarrow t \rightarrow +\infty, dx = \frac{(a-b)dt}{(1+t)^2} \end{array} \right| = \int_{+\infty}^0 f\left(\frac{b+at}{1+t}\right) \frac{(a-b)dt}{(1+t)^2} =$$

$$= (b-a) \int_0^{+\infty} f\left(\frac{b+at}{1+t}\right) \frac{dt}{(1+t)^2}$$

**Теорема 6.9.**  $u(x), v(x) : u'(x), v'(x) \in C[a, b]$  (где  $b$  - число или  $+\infty$ )  $\Rightarrow$  из существования двух пределов следует существование третьего, а также равенство:  $\int_a^b u(x)v'(x)dx = \lim_{c \rightarrow b-0} u(c)v(c) - \int_a^b u'(x)v(x)dx - u(a)v(a)$

$$\left( \int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) \Big|_a^{b-0} - \int_a^b u'(x)v(x)dx \right)$$

*Доказательство.* Берем  $\forall c \in [a, b] \Rightarrow$  (по формуле интегрирования по частям в собственных интегралах)  $\Rightarrow$

$$\int_a^c u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) \Big|_a^c - \int_a^c u'(x)v(x)dx, \text{ а теперь } c \rightarrow b-0 \quad \square$$

Случай, где  $a$  - число или  $-\infty$  - аналогично. По теореме 6.9 также можно устанавливать сходимость.

Пример:  $\int_0^1 \frac{\ln(x)dx}{1+x^2} = \int_0^1 \ln(x)d(\arctg(x)) = \ln(x)\arctg(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\arctg(x)}{x}dx$

Рассмотрим  $\lim_{x \rightarrow 0+0} (\underbrace{\ln(x)\arctg(x)}_{\sim x}) = \lim_{x \rightarrow 0+0} (x \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{(\frac{1}{x})}{(-\frac{1}{x^2})} = 0 \Rightarrow \int_0^1 \frac{\ln(x)dx}{1+x^2} =$

$$= - \int_0^1 \frac{\arctg(x)dx}{x}$$

$\frac{\arctg(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0+0} 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{\arctg(x)dx}{x}$  можно рассматривать как собственный, так как подынтегральную функцию в данном случае можно доопределить по непрерывности в точке  $x=0$

## 6.5 Линейные свойства несобственного интеграла. Пример неинтегрируемого произведения интегрируемых функций.

Пусть дан  $\int_a^b f(x)dx$ , где  $a < b$ , причем  $b$  - число или  $+\infty$ ,  $b$  - единственная особенность.

**Определение.**  $f(x)$  называется интегрируемой на  $[a, b)$ , если  $\int_a^b f(x)dx$  сходится.

Остальные случаи аналогично.

**Теорема 6.10.**  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b) \Rightarrow \forall k \in \mathbb{R} k \cdot f(x)$  - тоже интегрируема на  $[a, b)$ , причем

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

*Доказательство.*  $\forall c \in [a, b) \Rightarrow \int_a^c k \cdot f(x)dx = k \int_a^c f(x)dx$ , а теперь  $c \rightarrow b-0$   $\square$

**Теорема 6.11.**  $f(x), g(x)$  интегрируемы на  $[a, b] \Rightarrow f(x) \pm g(x)$  тоже интегрируемы на  $[a, b]$ , причем

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

*Доказательство.* Самостоятельно. □

Теорема 6.10 и теорема 6.11 - линейные свойства несобственных интегралов.

**Теорема 6.12.**  $f(x), g(x)$  интегрируемы на  $[a, b]$ , причем  $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

*Доказательство.*  $\forall c \in [a, b] \int_a^c f(x) dx \geq \int_a^c g(x) dx$ , а теперь  $c \rightarrow b - 0$  □

Пример:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$  - сходится. Рассмотрим  $g(x) = f(x)$ , рассмотрим  $\int_0^1 f(x)g(x)dx =$   
 $= \int_0^1 \frac{dx}{x}$  - расходится.

## 6.6 Связь интеграла от функции с интегралом от ее модуля в случае их интегрируемости

**Теорема 6.13.**  $f(x), |f(x)|$  интегрируемы на  $[a, b] \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

*Доказательство.* Самостоятельно. □

tg: @moksimga

## Лекция 10

11.03

## 6.7 Критерий Коши сходимости несобственных интегралов первого и второго рода.

**Теорема 6.14** (Критерий Коши).  $f(x)$  интегрируема в собственном смысле на  $[a, c]$   $\forall c \geq a$ , тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ сходится} \Leftrightarrow \exists B \geq a : \forall b_1, b_2 > B \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  Пусть  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$  сходится  $\Rightarrow \exists \underbrace{\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x)dx}_{=A}$ , т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists B \geq a : \forall b > B \left| \int_a^b f(x)dx - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

Берем  $\forall b_1, b_2 > B \Rightarrow \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| = \left| \int_a^{b_2} f(x)dx - A + A - \int_a^{b_1} f(x)dx \right| \leq \left| \int_a^{b_2} f(x)dx - A \right| + \left| \int_a^{b_1} f(x)dx - A \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Leftarrow$  Пусть  $\forall \varepsilon > 0 \exists B \geq 0 : \forall b_1, b_2 > B \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$ . Рассмотрим  $F(x) = \int_a^x f(t)dt, x \geq a$

Возьмем  $\forall \{x_n\} : x_n \geq a, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  (т.е.  $\forall B \geq a \exists N : \forall n > N \ x_n > B$ ), возьмем  $\forall m, n > N$  и рассмотрим

$$|F(x_m) - F(x_n)| = \left| \int_a^{x_m} f(t)dt - \int_a^{x_n} f(t)dt \right| = \left| \int_{x_m}^{x_n} f(t)dt \right| < \varepsilon, \text{ т.е. } \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, n > N \Rightarrow |F(x_m) - F(x_n)| < \varepsilon, \text{ т.е. } \{F(x_n)\} - \text{фундаментальная} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) - \text{может зависеть от } x_n.$$

Пусть  $\exists x'_n : x'_n \geq a, \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} F(x'_n) = A'$

$\exists x''_n : x''_n \geq a, \lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} F(x''_n) = A''$  Рассмотрим  $\{z_n\} : \underbrace{z_1}_{=x'_1}, \underbrace{z_2}_{=x''_1}, \underbrace{z_3}_{x'_2}, \underbrace{z_4}_{x''_2}, \dots, \underbrace{z_{2n-1}}_{x'_n}, \underbrace{z_{2n}}_{x''_n}, \dots \Rightarrow$

$$z_m \geq a, \lim_{n \rightarrow \infty} z_m = +\infty \Rightarrow \exists \lim_{m \rightarrow \infty} F(z_m). \text{ Рассмотрим } A' = \lim_{n \rightarrow \infty} F(\underbrace{z_{2n-1}}_{x'_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(\underbrace{z_{2n}}_{x''_n}) = A'' \Rightarrow$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} F(x), \text{ т.е. } \exists \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x)dx, \text{ т.е. } \int_a^c f(x)dx \text{ сходится}$$

□

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx \text{ формулировка и доказательство - самостоятельно.}$$

**Теорема 6.15.**  $f(x)$  интегрируема в собственном смысле на  $[a, c]$   $\forall c \in [a, b)$ , тогда:  $\int_a^b f(x)dx$  (с особой

точкой  $b - a$ ) сходится  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists B \in [a, b) : \forall b_1, b_2 \in (B, b) \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$

*Доказательство.* Самостоятельно.

□

$$\int_a^b f(x)dx \text{ с особой точкой } a + 0 \text{ формулировка и доказательство - самостоятельно.}$$

## 6.8 Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Сходимость абсолютно сходящихся несобственных интегралов.

**Определение.** Пусть  $f(x)$  интегрируема в собственном смысле на  $[a, c] \forall c \geq a$ .  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  называется абсолютно сходящимся, если  $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$  является сходящимся.

$\int_{-\infty}^a f(x)dx, \int_a^b f(x)dx$  с особой точкой  $b-0$ ,  $\int_a^b f(x)dx$  с особой точкой  $a+0$  - формулировка определений абсолютной сходимости - самостоятельно.

**Теорема 6.16.**  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  сходится абсолютно  $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$  сходится.

**Доказательство.**  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  сходится абсолютно, т.е.  $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$  сходится  $\Rightarrow_{\text{кр. Коши}} \forall \varepsilon > 0 \exists B \geq a :$

$\forall b_1, b_2 > B \quad \left| \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx \right| < \varepsilon$ . Но  $\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| \leq \left| \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx \right| < \varepsilon \Rightarrow_{\text{кр. Коши}} \int_a^{+\infty} f(x)dx$  сходится.  $\square$

$\int_{-\infty}^a f(x)dx$  - формулировка и доказательство - самостоятельно.

**Теорема 6.17.**  $\int_a^b f(x)dx$  с особой точкой  $b-0$  сходится абсолютно  $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$  с особой точкой  $b-0$  сходится.

**Доказательство.** Самостоятельно.  $\square$

$\int_a^b f(x)dx$  с особой точкой  $a+0$  - формулировка и доказательство - самостоятельно.

## 6.9 Необходимое и достаточное условие сходимости несобственных интегралов первого и второго рода от неотрицательных функций.

**Теорема 6.18.**  $f(x) \geq 0 \forall x \geq a, f(x)$  интегрируема в собственном смысле на  $[a, c] \forall c \geq a; F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , тогда:  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  сходится  $\Leftrightarrow \exists M > 0 : 0 \leq F(x) \leq M \forall x \geq a$

**Доказательство.**  $\forall x_1, x_2 : a \leq x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_2) = \int_a^{x_2} f(t)dt = \underbrace{\int_a^{x_1} f(t)dt}_{=F(x_1)} + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt}_{\geq 0} \geq F(x_1) \Rightarrow F(x)$

монотонно возрастает на  $[a, +\infty)(*)$

$\Rightarrow$  Пусть  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  сходится  $\Rightarrow \exists \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x)dx = A \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = A \Rightarrow 0 \leq F(x) \leq A \forall x \geq a$  (\*)

$\Leftarrow$  Пусть  $\exists M > 0 : 0 \leq F(x) \leq M \forall x \geq a \Rightarrow \exists \sup_{x \geq a} F(x) = A$  - число, т.е.  $1) F(x) \leq A \forall x \geq a$   
 $2) \forall \varepsilon > 0 \exists B \geq A : F(B) > A - \varepsilon$  (\*)  
 $\Rightarrow \forall x > B F(x) \geq F(B) > A - \varepsilon$ , т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists B \geq a : \forall x > B \quad A - \varepsilon < F(x) \leq A < A + \varepsilon$ , т.е.  $|F(x) - A| < \varepsilon$ ,  
 т.е.  $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = A$ , т.е.  $\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x)dx$ , т.е.  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  сходится.  $\square$

$\int_{-\infty}^a f(x)dx$  - формулировка и доказательство - самостоятельно.

**Теорема 6.19.**  $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b), f(x)$  интегрируема в собственном смысле на  $[a, c] \forall c \in [a, b), F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , тогда:  $\int_a^b f(x)dx$  с особой точкой  $b - 0$  сходится  $\Leftrightarrow \exists M > 0 : 0 \leq F(x) \leq M \forall x \in [a, b)$

Доказательство. Самостоятельно.  $\square$

$\int_a^b f(x)dx$  с особой точкой  $a + 0$  - формулировка и доказательство - самостоятельно.

## 6.10 Признак сравнения (в допределной и предельной форме) для сходимости несобственных интегралов первого и второго рода от неотрицательных функций.

**Теорема 6.20** (признак сравнения в допределной форме).  $f(x), g(x)$  интегрируемы в собственном смысле

на  $[a, c] \forall c \geq a, 0 \leq f(x) \leq g(x) \forall x \geq a \Rightarrow$   
 $1) \int_a^{+\infty} g(x)dx$  сходится  $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$  сходится  
 $2) \int_a^{+\infty} f(x)dx$  расходится  $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx$  расходится.

Доказательство. Рассмотрим  $F(x) = \int_a^x f(t)dt, G(x) = \int_a^x g(t)dt \Rightarrow 0 \leq F(x) \leq G(x) \forall x \geq a$

1) Пусть  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  сходится  $\Rightarrow \exists M > 0 : 0 \leq G(x) \leq M \forall x \geq a \Rightarrow 0 \leq F(x) \leq G(x) \leq M \forall x \geq a \xRightarrow{\text{Т6.18}}$   
 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$  сходится.

2) Пусть  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  расходится. Предположим, что  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  сходится  $\xRightarrow{(1)} \int_a^{+\infty} f(x)dx$  - сходится - противоречие  $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx$  расходится.  $\square$

**Следствие 1.**  $f(x) \geq 0 \forall x \geq a, f(x)$  интегрируема в собственном смысле на  $[a, c] \forall c \geq a; \exists p > 1 : f(x) = O\left(\frac{1}{x^p}\right)$  при  $x \rightarrow +\infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$  сходится.

*Доказательство.*  $\exists C > 0, \exists b \geq \max(a, 1) : 0 \leq f(x) \leq \frac{C}{x^p} \forall x \geq b. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  сходится (т.к.  $p > 1$ )  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_b^{+\infty} \frac{Cdx}{x^p} \xRightarrow{\text{T6.20}} \int_b^{+\infty} f(x)dx \text{ сходится}$$

□

$\int_{-\infty}^a$  - формулировка и доказательство признака сравнения (без следствия) - самостоятельно.

**Теорема 6.21.**  $f(x), g(x)$  интегрируемы в собственном смысле на  $[a, c] \forall c \in [a, b); 0 \leq f(x) \leq g(x) \forall x \in$

1)  $\int_a^b g(x)dx$  с особой точкой  $b-0$  сходится  $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$  с особой точкой  $b-0$  сходится

$[a, b) \Rightarrow$

2)  $\int_a^b f(x)dx$  с особой точкой  $b-0$  расходится  $\Rightarrow \int_a^b g(x)dx$  с особой точкой  $b-0$  расходится

*Доказательство.* Самостоятельно.

□

$\int_a^b f(x)dx$  с особой точкой  $a+0$  - формулировка и доказательство самостоятельно.

**Следствие 1.**  $f(x) \geq 0 \forall x \in (0; a], f(x)$  интегрируема в собственном смысле на  $[c, a] \forall c \in (0; a]; \exists p < 1 :$

$f(x) = O\left(\frac{1}{x^p}\right)$  при  $x \rightarrow 0+0 \Rightarrow \int_0^a f(x)dx$  сходится

*Доказательство.* Самостоятельно.

□

**Теорема 6.22** (признак сравнения в предельной форме).  $f(x), g(x)$  интегрируемы в собственном смысле

на  $[a, c] \forall c \geq a, f(x) \geq 0 \forall x \geq a, g(x) > 0 \forall x \geq a, \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in (0, +\infty) \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$  и  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  сходятся или расходятся одновременно.

*Доказательство.*  $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ , т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists B \geq a : \forall x \geq B \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - k \right| < \varepsilon$ , т.е.  $k - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < k + \varepsilon$

Берем  $\varepsilon = \frac{k}{2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{k}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3k}{2} \\ \frac{k}{2}g(x) < f(x) < \frac{3k}{2}g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{T6.20}$

□

$\int_{-\infty}^a f(x)dx$  формулировка и доказательство - самостоятельно.

**Теорема 6.23.**  $f(x), g(x)$  интегрируемы в собственном смысле на  $[a, c] \forall c \in [a, b), f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b),$

$g(x) > 0 \forall x \in [a, b), \exists \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in (0, +\infty) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx$  с особой точкой  $b-0$  и  $\int_a^b g(x)dx$  с особой точкой  $b-0$  сходятся или расходятся одновременно.

*Доказательство.* Самостоятельно.

□



$\int_a^b f(x)dx$  с особой точкой  $a+0$  формулировка и доказательство - самостоятельно.

## 6.11 Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Признаки Дирихле и Абеля для сходимости несобственных интегралов первого и второго рода.

**Определение.**  $f(x)$  интегрируема в собственном смысле на  $[a, c] \forall c \geq a$ .  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  называется условно

сходящимся, если  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  сходится, но  $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$  расходится.

Формулировка определений условно сходящихся  $\int_{-\infty}^a f(x)dx, \int_a^b f(x)dx$  с особой точкой  $b-0, \int_a^b f(x)dx$  с особой точкой  $a+0$  - самостоятельно.

**Теорема 6.24** (признак Дирихле).  $f(x)$  непрерывна при  $x \geq a, F(x)$  - первообразная к  $f(x)$  на  $[a, +\infty)$ ,  
 $\exists g'(x) \forall x \geq a,$

причем  $\exists M > 0 : |F(x)| \leq M \forall x \geq a, g(x) :$   
 $\begin{aligned} &g'(x) \text{ непрерывна при } x \geq a, \\ &g'(x) \leq 0 \forall x \geq a, \end{aligned} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \text{ сходится.}$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

## Лекция 11

14.03

*Доказательство.*  $g(x) \geq 0 \forall x \geq a, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists B > 0 : \forall x > B \ 0 \leq g(x) < \frac{\varepsilon}{3M}$ . Берем  $\forall b_1, b_2 > B \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx \right| &= \left| \int_{b_1}^{b_2} g(x)d(F(x)) \right| = \left| F(x)g(x) \Big|_{b_1}^{b_2} + \int_{b_1}^{b_2} F(x)(-g'(x))dx \right| = \left| F(b_2)g(b_2) - F(b_1)g(b_1) + \int_{b_1}^{b_2} F(x)(-g'(x))dx \right| \\ &\leq |F(b_2)g(b_2)| + |F(b_1)g(b_1)| + \left| \int_{b_1}^{b_2} F(x)(-g'(x))dx \right| < \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M + M \left| \int_{b_1}^{b_2} (-g'(x))dx \right| = \frac{2\varepsilon}{3} + \\ &+ M |g(b_1) - g(b_2)|_{\text{БОО}} \underset{b_2 \geq b_1}{=} \frac{2\varepsilon}{3} + M \underbrace{(g(b_1) - g(b_2))}_{\geq 0} \leq \frac{2\varepsilon}{3} + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon_{\text{Кр. Коши}} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \text{ сходится. } \square \end{aligned}$$

$\int_{-\infty}^a$  - формулировка и доказательство - самостоятельно.

**Теорема 6.25.**  $f(x)$  непрерывна при  $x \in [a, b), F(x)$  - первообразная к  $f(x)$  на  $[a, b), \exists M > 0 : |F(x)| \leq M \forall x \in [a, b), g(x) : \exists g'(x) \forall x \in [a, b), g'(x)$  непрерывна на  $[a, b), g'(x) \leq 0 \forall x \in [a, b), \lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx$  с особой точкой  $b-0$  сходится.

*Доказательство.* Самостоятельно. □

$\int_a^b$  с особой точкой  $a + 0$  - формулировка и доказательство - самостоятельно.

**Теорема 6.26.** (признак Абеля)  $f(x) : \int_a^{+\infty} f(x) dx$  сходится,  $f(x)$  непрерывна при  $x \geq 0$ ,  $\exists g'(x) \forall x \geq a$ ,  
 $g(x) : g'(x)$  непрерывна при  $x \geq a$ ,  
 $g'(x) \leq 0 \forall x \geq a$ ,  
 $\exists k > 0 : |g(x)| \leq k \forall x \geq a$ .

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$  сходится.

*Доказательство.* Рассмотрим  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ,  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  сходится  $\Rightarrow \exists \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x)dx = A = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists B \geq a : \forall x > B |F(x) - A| < \frac{\varepsilon}{4k}$

$F(x)$  - первообразная к  $f(x)$  на  $[a, +\infty)$ ; Берем  $\forall b_1, b_2 > B \Rightarrow \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx \right| = \left| \int_{b_1}^{b_2} g(x)d(F(x) - A) \right| =$   
 $= \left| (F(x) - A)g(x) \Big|_{b_1}^{b_2} + \int_{b_1}^{b_2} (F(x) - A)(-g'(x))dx \right| = \left| (F(b_2) - A)g(b_2) - (F(b_1) - A)g(b_1) + \int_{b_1}^{b_2} (F(x) - A)(-g'(x))dx \right| \leq$   
 $\leq |F(b_2) - A| \cdot |g(b_2)| + |F(b_1) - A| \cdot |g(b_1)| + \left| \int_{b_1}^{b_2} (F(x) - A)(-g'(x))dx \right| < \frac{\varepsilon}{4k} \cdot k + \frac{\varepsilon}{4k} \cdot k + \frac{\varepsilon}{4k} \cdot \left| \int_{b_1}^{b_2} (-g'(x))dx \right| =$   
 $= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4k} |(g(b_1) - g(b_2))| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4k} (k + k) = \varepsilon \quad \text{Кр. Коши} \quad \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \text{ сходится.} \quad \square$

$\int_{-\infty}^a$  - формулировка и доказательство - самостоятельно.

**Теорема 6.27.**  $f(x)$  непрерывна при  $x \in [a, b)$ ,  $\exists g'(x) \forall x \in [a, b)$ ,  
 $\int_a^b f(x)dx$  с особой точкой  $b - 0$  сходится,  $g(x) : g'(x)$  непрерывна при  $x \in [a, b)$ ,  $\Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx$   
 $g'(x) \leq 0 \forall x \in [a, b)$ ,  
 $\exists k > 0 : |g(x)| \leq k \forall x \in [a, b)$   
с особой точкой  $b - 0$  сходится.

*Доказательство.* Самостоятельно.  $\square$

$\int_a^b$  с особой точкой  $a + 0$  - формулировка и доказательство - самостоятельно.

### 6.11.1 Пример неинтегрируемости модуля интегрируемых в несобственном смысле функций.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx, \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$$

$$1) p > 1 : \left| \frac{\sin x}{x^p} \right| \leq \frac{1}{x^p}, \left| \frac{\cos x}{x^p} \right|, \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ сходится } (p > 1) \Rightarrow \int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^p} \right| dx \text{ и } \int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^p} \right| dx \text{ сходятся}$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \text{ и } \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx \text{ сходятся абсолютно.}$$

$$f(x) = \cos x; F(x) = \sin x, |F(x)| \leq 1$$

$$2) 0 < p \leq 1 : \text{Рассмотрим } \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx, g(x) = \frac{1}{x^p}; g'(x) = \frac{-p}{x^{p+1}} \in C[1, +\infty), \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx \text{ сходится по}$$

$$\frac{-p}{x^{p+1}} \leq 0 \forall x \geq 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^p} = 0$$

признаку Дирихле.

$$\left| \frac{\cos x}{x^p} \right| = \frac{|\cos x|}{x^p} \geq \frac{\cos^2 x}{x^p} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x^p} + \frac{\cos 2x}{x^p} \right), \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^p} dx \text{ сходится по Дирихле, но } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ расходится}$$

$$(\text{т.к. } p \leq 1) \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x^p} + \frac{\cos 2x}{x^p} \right) dx \text{ расходится.} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^p} \right| dx \text{ расходится по признаку сравнения}$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx \text{ сходится условно. Аналогично } \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \text{ сходится условно.}$$

$$3) p \leq 0 : \text{Рассмотрим } \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx. \text{ Докажем расходимость.}$$

$$\text{Отрицание критерия Коши: } \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \text{ расходится} \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall B \geq a \exists b_1, b_2 > B : \left| \int_{b_1}^{b_2} \frac{\sin x}{x^p} dx \right| \geq \varepsilon (?)$$

$$\varepsilon = 2, \text{ берем } \forall B \geq a \Rightarrow \exists b_1 = 2k\pi > B, \exists b_2 = 2k\pi + \pi > b_1 > B, k \in \mathbb{N} \left| \int_{b_1}^{b_2} \frac{\sin x}{x^p} dx \right| = \left| \int_{2k\pi}^{2k\pi + \pi} \frac{\sin x}{x^p} dx \right| =$$

$$\int_{2k\pi}^{2k\pi + \pi} \frac{\sin x}{x^p} dx \underset{\frac{1}{x^p} \geq 1 \forall x \geq 1}{\geq} \int_{2k\pi}^{2k\pi + \pi} \sin x dx = 2 = \varepsilon \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \text{ расходится. Аналогично } \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx \text{ расходится.}$$

$$\text{Итого: } \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx, \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx \text{ сходятся абсолютно при } p > 1, \text{ сходятся условно при } p \in (0; 1], \text{ расходятся при } p \leq 0.$$

## 6.12 Главное значение в смысле Коши несобственных интегралов первого и второго рода и его связь с величиной соответствующего несобственного интеграла.

**Определение.** Пусть  $f(x)$  интегрируема в собственном смысле на  $\forall [a, b] \subset (-\infty, +\infty)$ . Главным значением  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  в смысле Коши называется число равное  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x)dx$  (если он существует). Обозначение:  $v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  (Valeur Principale, фр).

**Теорема 6.28.** Если  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  сходится по Риману, то он сходится и по Коши, причем к той же величине  $\left( v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \right)$

*Доказательство.*  $v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x)dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[ \int_{-R}^0 f(x)dx + \int_0^R f(x)dx \right] = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^0 f(x)dx + \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$   $\square$

Но не наоборот!

*Доказательство.*  $v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg}(x)dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_{-R}^R \operatorname{arctg}(x)dx}_{\text{интеграл от функции в симметричных пределах}} = 0$ , но  $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg}(x)dx$  расходится, т.к.

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{arctg}(x)dx = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{arctg}(x)dx}_{\text{собственный}} + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty} \operatorname{arctg}(x)dx}_{\geq 1}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty} 1 \cdot dx \text{ расходится} \Rightarrow \int_0^{+\infty} \operatorname{arctg}(x)dx \text{ расходится.} \quad \square$$

**Определение.** Пусть  $f(x)$  интегрируема в собственном смысле на  $[a, c - \delta]$  и на  $[c + \delta, b]$   $\forall \delta \in (0, \min(c - a, b - c))$ . Главным значением  $\int_a^b f(x)dx$  в смысле Коши называется число, равное

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+0} \left[ \int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx \right] \text{ (если он существует). Обозначение: } v.p. \int_a^b f(x)dx.$$

**Теорема 6.29.** Если  $\int_a^b f(x)dx$  сходится по Риману, то он сходится и по Коши, причем к той же величине  $\left( v.p. \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \right)$

*Доказательство.* Самостоятельно.  $\square$

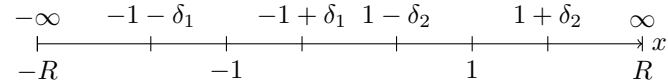
Но не наоборот! Пусть  $a < c < b$ . Рассмотрим  $v.p.$   $\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \left[ \int_a^{c-\delta} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\delta}^b \frac{dx}{x-c} \right] =$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \left[ \ln(c-x) \Big|_{x=a}^{x=c-\delta} + \ln(x-c) \Big|_{x=c+\delta}^{x=b} \right] = \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \left[ \underbrace{\ln(\delta) - \ln(c-a)}_{\nexists \lim_{\delta \rightarrow 0}} + \underbrace{\ln(b-c) - \ln \delta}_{\nexists \lim_{\delta \rightarrow 0}} \right] = \ln \left( \frac{b-c}{c-a} \right), \text{ но}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} \text{ расходится по Риману.}$$

Если особых точек несколько, то промежутки интегрирования разбиваем так, чтобы особые точки  $x_0 - 0$  и  $x_0 + 0$  (как и  $-\infty$  и  $+\infty$ ) входили попарно.

Пример:  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$  расходится по Риману.



$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{\delta_1 \rightarrow 0+0} \left[ \int_{-2}^{-1-\delta_1} \frac{dx}{x^2-1} + \int_{-1+\delta_1}^0 \frac{dx}{x^2-1} \right] + \lim_{\delta_2 \rightarrow 0+0} \left[ \int_0^{1-\delta_2} \frac{dx}{x^2-1} + \int_{1+\delta_2}^2 \frac{dx}{x^2-1} \right] +$$

$$+ \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[ \int_2^R \frac{dx}{x^2-1} + \int_{-R}^{-2} \frac{dx}{x^2-1} \right] = \lim_{\delta_1 \rightarrow 0+0} \left[ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_{-2}^{-1-\delta_1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_{-1+\delta_1}^0 \right] +$$

$$+ \lim_{\delta_2 \rightarrow 0+0} \left[ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_0^{1-\delta_2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_{1+\delta_2}^2 \right] + \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_2^R + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_{-R}^{-2} \right] = \text{самостоятельно} =$$

$$= 0 \Rightarrow v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = 0$$

tg: @moksimga

## Глава 7

# Функции многих переменных

### Лекция 12

21.03

### 7.1 Координатное $n$ -мерное пространство

**Определение.**  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  - упорядоченная совокупность из  $n$  вещественных чисел.  $\mathbb{E}_n \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_n \in \mathbb{R}$

**Определение.**  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}_n, y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{E}_n, \alpha \in \mathbb{R}. x + y \equiv (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n); \alpha x \equiv (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$

1.  $x + y = y + x$

2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$

3.  $\exists \theta : x + \theta = x$

4.  $\forall x \in \mathbb{E}_n \exists x' : x + x' = \theta$  5.  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

6.  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

7.  $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

8.  $1 \cdot x = x$

$\theta = (0, 0, \dots, 0) \quad x' = (-1)x$

*Доказательство.* Самостоятельно. □

**Определение.**  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}_n, y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{E}_n$ . Скалярным произведением называется  $(x, y) \equiv \sum_{k=1}^n x_k y_k \equiv x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ . (В комплексном случае:  $(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$ )

Свойства скалярного произведения:

1.  $(y, x) = (x, y)$  (В комплексном пространстве:  $(y, x) = \overline{(x, y)}$ )

2.  $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$

3.  $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

4.  $(x, x) \geq 0$ , причем  $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

*Доказательство.* Самостоятельно для  $x$  и  $y$ . □

$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$  - неравенство Коши - Буняковского.

$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$

*Доказательство.*  $x = \theta \Rightarrow (x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$ .

$x \neq \theta$ . Рассмотрим  $0 \leq \varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2 \underbrace{(x, x)}_{A>0} + 2\lambda \underbrace{(x, y)}_B + \underbrace{(y, y)}_C = A\lambda^2 + 2B\lambda + C \geq 0$

$$0 \geq \frac{\Delta}{4} = B^2 - AC$$

□

**Определение.**  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}_n$ . Нормой  $x$  называется  $\|x\| \equiv \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$

Свойства нормы:

1.  $\|x\| \geq 0$ , причем  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
2.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

*Доказательство.* 1, 2 - самостоятельно. 3.  $\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq \|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$  □

$$\|x\| = \|y + (x - y)\| \leq \|y\| + \|x - y\| \Rightarrow \|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|$$

$$\|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = \|y - x\| \geq \|y\| - \|x\| \Rightarrow \boxed{\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||}$$

**Определение.**  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}_n, y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{E}_n$ . Расстоянием от  $x$  до  $y$  называется  $\rho(x, y) \equiv \|x - y\| = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2}$

Свойства расстояния:

1.  $\rho(y, x) = \rho(x, y)$
2.  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$
3.  $\rho(x, y) \geq 0$ , причем  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

**Определение.**  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{E}_n, \varepsilon > 0$ .

$U_\varepsilon(x^{(0)}) \equiv \{x \in \mathbb{E}_n : \rho(x, x^{(0)}) < \varepsilon\}$  — открытый шар с центром в  $x^{(0)}$  и радиусом  $\varepsilon$ .

$\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x^{(0)}) \equiv \{x \in \mathbb{E}_n : 0 < \rho(x, x^{(0)}) < \varepsilon\} = U_\varepsilon(x^{(0)}) \setminus \{x^{(0)}\}$  — проколотый открытый шар.

$\varepsilon \geq 0, V_\varepsilon(x^{(0)}) \equiv \{x \in \mathbb{E}_n : \rho(x, x^{(0)}) \leq \varepsilon\}$  — замкнутый шар.

$S_\varepsilon(x^{(0)}) \equiv \{x \in \mathbb{E}_n : \rho(x, x^{(0)}) = \varepsilon\}$  — сфера.

$$\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x^{(0)}) \subset U_\varepsilon(x^{(0)}) \subset V_\varepsilon(x^{(0)}), S_\varepsilon(x^{(0)}) \subset V_\varepsilon(x^{(0)}); U_\varepsilon(x^{(0)}) \cup S_\varepsilon(x^{(0)}) = V_\varepsilon(x^{(0)})$$

**Определение.**  $a_k < b_k, k = 1, 2, \dots, n$ .

$(a_1 b_1; \dots, a_k b_k, \dots, a_n b_n) \equiv \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}_n : a_k < x_k < b_k, k = 1, 2, \dots, n\}$  — открытый параллелепипед.

$$a_k \leq b_k, k = 1, 2, \dots, n.$$

$[a_1 b_1, \dots, a_k b_k, \dots, a_n b_n] \equiv \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}_n : a_k \leq x_k \leq b_k, k = 1, 2, \dots, n\}$  — замкнутый параллелепипед.

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) : x_k^{(0)} = \frac{a_k + b_k}{2}, k = 1, 2, \dots, n - \text{центр.}$$

**Определение.**  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{E}_n, \varepsilon > 0$

$K_\varepsilon(x^{(0)}) \equiv \{x \in \mathbb{E}_n : x_k^{(0)} - \varepsilon < x_k < x_k^{(0)} + \varepsilon, k = 1, 2, \dots, n\}$  — открытый куб.

**Определение.**  $x^{(0)} \in \mathbb{E}_n$ . Шаровая окрестность  $x^{(0)}$  — открытый шар с центром в  $x^{(0)}$ ; Кубическая окрестность  $x^{(0)}$  — открытый куб с центром в  $x^{(0)}$

**Лемма 7.1.**  $x^{(0)} \in \mathbb{E}_n$ . 1.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : K_\delta(x^{(0)}) \subset U_\varepsilon(x^{(0)})$ ; 2.  $\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x^{(0)}) \subset K_\delta(x^{(0)})$

*Доказательство.* 1.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} > 0 \quad \forall x \in K_\delta(x^{(0)}) \quad x = (x_1, \dots, x_n), x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$

$$|x_k - x_k^{(0)}| < \delta, k = 1, 2, \dots, n.$$

$$\rho(x, x^{(0)}) = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k - x_k^{(0)}|^2} < \sqrt{\delta^2 \cdot n} = \delta \sqrt{n} = \varepsilon \Rightarrow x \in U_\varepsilon(x^{(0)}) \Rightarrow K_\delta(x^{(0)}) \subset U_\varepsilon(x^{(0)})$$

2.  $\forall \delta > 0 \exists \varepsilon = \delta > 0 \quad \forall x \in U_\varepsilon(x^{(0)}) \quad x = (x_1, \dots, x_n), x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \quad |x_k - x_k^{(0)}| < \delta, k = 1, 2, \dots, n.$

$$\rho(x, x^{(0)}) = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k - x_k^{(0)}|^2} < \delta = \varepsilon \Rightarrow |x_k - x_k^{(0)}|^2 < \delta^2 = \varepsilon^2, k = 1, 2, \dots, n \Rightarrow x \in K_\delta(x^{(0)}), \text{ т.е. } U_\varepsilon(x^{(0)}) \subset K_\delta(x^{(0)})$$

□

## Лекция 13

25.03

**Определение.**  $E \subset \mathbb{E}_n, x^{(0)} \in \mathbb{E}$ .  $x^{(0)}$  - внутренняя точка  $E$ , если  $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x^{(0)}) \subset E$  ( $\exists \delta > 0 : K_\delta(x^{(0)}) \subset E$ )

**Определение.**  $E \subset \mathbb{E}_n$ ,  $E$  - открытое множество, если  $\forall x \in \mathbb{E}, x$  - внутренняя точка  $E$ .

**Лемма 7.2.**  $\forall \varepsilon > 0 \forall x^{(0)} \in \mathbb{E}_n, U_\varepsilon(x^{(0)})$  - открытое множество.

*Доказательство.*  $\forall x \in U_\varepsilon(x^{(0)})$ , т.е.  $\rho(x, x^{(0)}) < \varepsilon$ . Рассмотрим  $\delta = \varepsilon - \rho(x, x^{(0)}) > 0, U_\delta(x)$ ,  $\forall y \in U_\delta(x)$ . Тогда  $\rho(y, x^{(0)}) \leq \rho(y, x) + \rho(x, x^{(0)}) < \delta + \rho(x, x^{(0)}) = \varepsilon - \rho(x, x^{(0)}) + \rho(x, x^{(0)}) = \varepsilon \Rightarrow U_\delta(x) \subset U_\varepsilon(x^{(0)})$  □

**Лемма 7.3.**  $\forall \varepsilon > 0 \forall x^{(0)} \in \mathbb{E}_n, K_\varepsilon(x^{(0)})$  - открытое множество.

*Доказательство.* Самостоятельно. □

**Лемма 7.4.**  $a_k < b_k, k = 1, 2, \dots, n \Rightarrow (a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$  - открытое множество

*Доказательство.* Самостоятельно. Берем произвольный  $x$  из этого параллелепипеда и ищем кубическую окрестность. □

**Определение.**  $E \subset \mathbb{E}_n, x^{(0)} \in \mathbb{E}, x^{(0)}$  - изолированная точка  $\mathbb{E}$ , если  $\exists \varepsilon > 0 : \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x^{(0)}) \cap \mathbb{E} = \emptyset$

**Определение.**  $E \subset \mathbb{E}_n, x^{(0)} \in E, x^{(0)}$  - предельная точка  $E$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x^{(0)}) \cap E \neq \emptyset$

**Определение.**  $E \subset \mathbb{E}_n, x^{(0)} \in \mathbb{E}_n, x^{(0)}$  - точка прикосновения  $E$ , если  $\forall \varepsilon > 0 U_\varepsilon(x^{(0)}) \cap E \neq \emptyset$

**Определение.**  $E \subset \mathbb{E}_n$ . Замыкание  $E : \overline{E} \equiv \{x \in \mathbb{E}_n : x - \text{точка прикосновения } E\} \quad E \subset \overline{E}$

**Определение.**  $E \subset \mathbb{E}_n, E$  - замкнутое, если  $E = \overline{E}$

**Лемма 7.5.**  $\forall \varepsilon \geq 0, \forall x^{(0)} \in \mathbb{E}_n, V_\varepsilon(x^{(0)})$  - замкнутое множество.

*Доказательство.*  $\forall x \in \mathbb{E}_n : x \notin V_\varepsilon(x^{(0)})$ , т.е.  $\rho(x, x^{(0)}) > \varepsilon, \delta = \rho(x, x^{(0)}) - \varepsilon > 0$ . Возьмем  $U_\delta(x)$  и  $\forall y \in U_\delta(x)$ .  $\rho(y, x) < \delta = \rho(x, x^{(0)}) - \varepsilon$ . Воспользуемся неравенством треугольника:  $\rho(x, x^{(0)}) \leq \rho(x, y) + \rho(y, x^{(0)}) \Rightarrow \rho(y, x^{(0)}) \geq \rho(x, x^{(0)}) - \rho(x, y) > \rho(x, x^{(0)}) - \delta = \rho(x, x^{(0)}) - \rho(x, x^{(0)}) + \varepsilon = \varepsilon \Rightarrow \rho(y, x^{(0)}) > \varepsilon \Rightarrow y \notin V_\varepsilon(x^{(0)}) \Rightarrow V_\varepsilon(x^{(0)}) \cap U_\delta(x) = \emptyset$  □

**Лемма 7.6.**  $\forall \varepsilon > 0 \forall x^{(0)} \in \mathbb{E}_n, S_\varepsilon(x^{(0)})$  - замкнутое множество.

*Доказательство.* Самостоятельно. □

**Лемма 7.7.**  $a_k \leq b_k, k = 1, 2, \dots, n \Rightarrow [a_1 b_1, \dots, a_n b_n]$  - замкнутое множество.



*Доказательство.* Самостоятельно.  $\square$

**Лемма 7.8.**  $E \subset \mathbb{E}_n \Rightarrow \overline{E}$  - замкнутое множество.

*Доказательство.*  $E \subset \overline{E} \subset \overline{\overline{E}} \quad \forall x \in \overline{\overline{E}} \Rightarrow x$  - точка прикосновения  $\overline{E}$ , т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(x) \cap \overline{E} \neq \emptyset$ .

Возьмем  $y \in U_\varepsilon(x) \cap \overline{E} \Rightarrow y$  - точка прикосновения  $E \Rightarrow \forall \delta > 0 \quad U_\delta(y) \cap E \neq \emptyset$ . Возьмем  $U_\delta(y) \subset U_\varepsilon(x)$

$z \in U_\delta(y) \cap E \subset U_\varepsilon(x) \cap E$ . Таким образом,  $\forall x \in \overline{\overline{E}} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists z \in U_\varepsilon(x) \cap E \Rightarrow x$  - точка прикосновения  $E$ , т.е.  $x \in \overline{E}, \overline{\overline{E}} \subset \overline{E}$   $\square$

**Определение.**  $E \in \mathbb{E}_n$ . Дополнение к  $E$ :  $CE \equiv \mathbb{E}_n \setminus E$

$$E \cap CE = \emptyset, E \cup CE = \mathbb{E}_n, C(CE) = E$$

**Лемма 7.9.**  $E$  - открытое множество  $\Leftrightarrow CE$  - замкнутое множество.

*Доказательство.*  $(\Rightarrow) E$  - открытое множество.  $\forall x \notin CE$ , т.е.  $x \in E \quad \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset E \Rightarrow U_\varepsilon(x) \cap CE = \emptyset \Rightarrow x$  - не есть точка прикосновения  $CE \Rightarrow CE$  - замкнутое множество.

$(\Leftarrow) CE$  - замкнутое множество.  $x$  - точка прикосновения  $CE \Rightarrow x \in CE \Rightarrow \forall y \in E, y$  - не есть точка прикосновения  $CE \Rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(y) \cap CE = \emptyset \Rightarrow U_\delta(y) \subset E \Rightarrow E$  - открытое множество.  $\square$

**Следствие 1.**  $E$  - замкнутое  $\Leftrightarrow CE$  - открытое.

## 7.2 Последовательности в $\mathbb{E}_n$

**Определение.**  $E \subset \mathbb{E}_n, E$  - ограниченное множество, если  $\exists M > 0 : \|x\| \leq M \quad \forall x \in E$

**Определение.**  $\forall m \in \mathbb{N} \quad \exists x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}) \in \mathbb{E}_n. \{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty$  - последовательность.

$$\{x^{(m)}\}_{m=m_0}^\infty = \{x^{(m_0)}, x^{(m_0+1)}, \dots\}$$

**Определение** (сходимость по расстоянию).  $a \in \mathbb{E}_n, a$  - предел  $\{x^{(m)}\}$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall m > N \quad \rho(x^{(m)}, a) = \|x^{(m)} - a\| < \varepsilon \quad \left( \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x^{(m)}, a) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|x^{(m)} - a\| = 0 \right)$

**Определение** (покоординатная сходимость).  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{E}_n, a$  - предел  $\{x^{(m)}\}$ , если  $\forall k = 1, 2, \dots, n \quad \lim_{m \rightarrow \infty} x_k^{(m)} = a_k$ , т.е.  $\forall k = 1, 2, \dots, n \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_k : \forall m > N_k \quad |x_k^{(m)} - a_k| < \varepsilon$

**Теорема 7.10.** *Опр. 1*  $\Leftrightarrow$  *Опр. 2.*

*Доказательство.*  $(\Rightarrow) \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall m > N \quad \rho(x^{(m)}, a) = \|x^{(m)} - a\| < \varepsilon \quad \sum_{k=1}^n |x_k^{(m)} - a_k|^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall k = 1, 2, \dots, n \quad |x_k^{(m)} - a_k| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} x_k^{(m)} = a_k$$

$(\Leftarrow) \forall k = 1, 2, \dots, n \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_k : \forall m > N_k \quad |x_k^{(m)} - a_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \Rightarrow \|x^{(m)} - a\|^2 = \sum_{k=1}^n |x_k^{(m)} - a_k|^2 < \frac{\varepsilon^2}{n} \cdot n = \varepsilon^2$ , т.е.  $\|x^{(m)} - a\| < \varepsilon$   $\square$

**Определение.**  $E \subset \mathbb{E}_n, x \in \mathbb{E}_n, x$  - граничная точка  $E$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(x) \cap E \neq \emptyset, U_\varepsilon(x) \cap CE \neq \emptyset$

**Определение.**  $E \subset \mathbb{E}_n$ , граница  $E : \partial E \equiv \{x \in \mathbb{E}_n, x - \text{граничная точка } E\}$

**Лемма 7.11.**  $E \subset \mathbb{E}_n \Rightarrow \partial E \subset \overline{E}$

*Доказательство.*  $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x^{(0)} \in \mathbb{E}_n, \partial U_\varepsilon(x^{(0)}) = \partial V_\varepsilon(x^{(0)}) = \partial S_\varepsilon(x^{(0)}) = S_\varepsilon(x^{(0)}), \partial \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x^{(0)}) = S_\varepsilon(x^{(0)}) \cup \{x^{(0)}\}$  - проверить.  $\square$

**Определение.** Если последовательность имеет предел, то она называется сходящейся, иначе - расходящейся.

**Теорема 7.12** (Единственность предела).  $\{x^{(m)}\}$  - сходитсся  $\Rightarrow$  ее предел единственный.

*Доказательство.* Самостоятельно. □

**Теорема 7.13.**  $\{x^{(m)}\}$  - сходитсся  $\Rightarrow \{x^{(m)}\}$  ограничена

*Доказательство.* Самостоятельно. □

**Теорема 7.14.**  $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x, \lim_{m \rightarrow \infty} y^{(m)} = y, \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = \alpha \Rightarrow \exists \lim_{m \rightarrow \infty} (x^{(m)} + y^{(m)}) = x + y,$   
 $\exists \lim_{m \rightarrow \infty} (\alpha_m x^{(m)}) = \alpha x, \exists \lim_{m \rightarrow \infty} (x^{(m)}, y^{(m)}) = (x, y)$

*Доказательство.*  $\{x^{(m)}\}$  - сходитсся  $\Rightarrow$  ограничена, т.е  $\exists M > 0 : \|x^{(m)}\| \leq M, \forall m = 1, 2, \dots$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x, \text{ т.е } \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall m > N_1 \|x^{(m)} - x\| < \frac{\varepsilon}{2(\|y\| + 1)}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} y^{(m)} = y, \text{ т.е } \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall m > N_2 \|y^{(m)} - y\| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = \max(N_1, N_2) : \forall n > N \left| (x^{(m)}, y^{(m)}) - (x, y) \right| = \left| (x^{(m)}, y^{(m)}) - (x^{(m)}, y) + (x^{(m)}, y) - (x, y) \right| \leq \left| (x^{(m)}, y^{(m)} - y) \right| + \left| (x^{(m)} - x, y) \right| \leq \|x^{(m)}\| \|y^{(m)} - y\| + \|x^{(m)} - x\| \|y\| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2(\|y\| + 1)} \|y\| < \varepsilon \quad \square$$

**Следствие 1** (непрерывность нормы).  $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x \Rightarrow \exists \lim_{m \rightarrow \infty} \|x^{(m)}\| = \|x\|$

$$\text{Доказательство. } \|x^{(m)}\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{(x^{(m)}, x^{(m)})} = \sqrt{\lim_{m \rightarrow \infty} (x^{(m)}, x^{(m)})} = \sqrt{(x, x)} = \|x\|$$

□

**Следствие 2** (непрерывность расстояния).  $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x, \lim_{m \rightarrow \infty} y^{(m)} = y \Rightarrow \exists \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x^{(m)}, y^{(m)}) = \rho(x, y)$

*Доказательство.* Самостоятельно □

## Лекция 14

28.03

**Определение.**  $\{x^{(m)}\}$  - последовательность в  $\mathbb{E}_n$ ;  $1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_p < m_{p+1} < \dots$

Тогда  $\{x^{(m_p)}\}_{p=1}^\infty$  называется подпоследовательностью  $\{x^{(m)}\}$ . Обозначение:  $x^{(m_p)} \subset x^{(m)}$ .

$$m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, \dots, m_p \geq p, \dots$$

**Теорема 7.15.**  $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = a \Rightarrow \forall \{x^{(m_p)}\} \subset \{x^{(m)}\} \Rightarrow \exists \lim_{p \rightarrow \infty} x^{(m_p)} = a$

*Доказательство.* Самостоятельно. Расписываем определение предела, только индекс нумерации обозначим через  $p$ . □

**Теорема 7.16** (Больцано-Вейерштрасса).  $\{x^{(m)}\}$  - ограничена  $\Rightarrow \exists \{x^{(m_p)}\} \subset \{x^{(m)}\} : \exists \lim_{p \rightarrow \infty} x^{(m_p)}$

*Доказательство.*  $\{x^{(m)}\}$  - ограничена, т.е  $\exists M > 0 : \|x^{(m)}\| \leq M$ , т.е  $\sum_{k=1}^n |x_k^{(m)}|^2 \leq M^2 \Rightarrow |x_1^{(m)}| \leq M$ . Рас-

смотрим числовую последовательность только первых координат  $\{x_1^{(m)}\}$  - ограничена  $\Rightarrow$  т. Больцано - Вейерштрасса

$\exists \{x_1^{(m_{p_1})}\}_{p_1=1}^\infty \subset \{x_1^{(m)}\} : \exists \lim_{p_1 \rightarrow \infty} x_1^{(m_{p_1})} = a_1 \in \mathbb{R}$ . Рассмотрим  $\{x^{(m_{p_1})}\}_{p_1=1}^\infty \subset \{x^{(m)}\}$ . Для второй координаты получим  $\{x_2^{(m_{p_2})}\}_{p_2=1}^\infty$  - ограничена  $\Rightarrow$  т. Больцано - Вейерштрасса  $\exists \{x_2^{(m_{p_2})}\}_{p_2=1}^\infty \subset \{x_2^{(m)}\} : \exists \lim_{p_2 \rightarrow \infty} x_2^{(m_{p_2})} = a_2 \in \mathbb{R}$ .

$\{x^{(m_{p_2})}\}_{p_2=1}^\infty \subset \{x^{(m_{p_1})}\}_{p_1=1}^\infty \subset \{x^{(m)}\}$ . Сделаем конечное число шагов. На  $n$ -ом шаге  $\exists \{x^{(m_{p_n})}\}_{p_n=1}^\infty \subset \{x^{(m)}\} :$

$$\exists \lim_{p_k \rightarrow \infty} x_k^{(m_{p_k})} = a_k \Rightarrow \exists \lim_{p_n \rightarrow \infty} x^{(m_{p_n})} = a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \square$$

**Теорема 7.17** (Критерий Коши).  $\{x^{(m)}\}$  - сходится  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, p > N \rho(x^{(m)}, x^{(p)}) = \|x^{(m)} - x^{(p)}\| < \varepsilon$

*Доказательство.*  $\Rightarrow \exists \lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = a$ , т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m > N \|x^{(m)} - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

$\forall m, p > N \Rightarrow \|x^{(m)} - x^{(p)}\| = \|x^{(m)} - a + a - x^{(p)}\| \leq \|x^{(m)} - a\| + \|x^{(p)} - a\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .

$\Leftarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, p > N \rho(x^{(m)}, x^{(p)}) = \|x^{(m)} - x^{(p)}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k^{(m)} - x_k^{(p)}|^2} < \varepsilon \Rightarrow \forall k = 1, 2, \dots, n |x_k^{(m)} - x_k^{(p)}| < \varepsilon \Rightarrow \{x_k^{(m)}\}_{m=1}^\infty$  - фундаментальная  $\Rightarrow \exists \lim_{m \rightarrow \infty} x_k^{(m)} = a_k \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{E}_n$   $\square$

### 7.3 Функции в $\mathbb{E}_n$

**Определение.**  $E_x \subset \mathbb{E}_n, \forall x \in E_x$  по некоторому закону ( $f$ ) поставлено в соответствие число  $y \in \mathbb{R}$ , следовательно  $y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ .  $E_x$  - множество определения,  $E_y \equiv \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), x \in E_x\}$  - множество значений.

**Определение.**  $y = f(x), x \in E \subset \mathbb{E}_n$ . Тогда множество  $G \equiv \{(x_1, \dots, x_n; y) : (x_1, \dots, x_n) \in E, y = f(x)\} \subset \mathbb{E}_{n+1}$ ,  $G$  - график функции  $y = f(x)$

Примеры:

1.  $f(x) \equiv c = \text{const} \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$  - линейная форма.

### 7.4 Предел функции

**Определение** (Коши).  $f(x)$  определена при  $x \in E, x^{(0)}$  - предельная точка  $E$ . Число  $A$  называется пределом  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  по множеству  $E$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}) |f(x) - A| < \varepsilon$

**Определение** (Гейне).  $f(x)$  определена при  $x \in E, x^{(0)}$  - предельная точка  $E$ . Число  $A$  называется пределом  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  по множеству  $E$ , если  $\forall \{x^{(m)}\} : x^{(m)} \in E, x^{(m)} \neq x^{(0)}, \lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x^{(0)} \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} f(x^{(m)}) = A$

Обозначение:  $\lim_{x \rightarrow x^{(0)}} f(x) = A, x \in E$

**Теорема 7.18.**  $f(x)$  определена при  $x \in E, x^{(0)}$  - предельная точка  $E \Rightarrow$  (Определение 1  $\Leftrightarrow$  Определение 2)

*Доказательство.*  $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ .

Берем  $\forall \{x^{(m)}\} : x^{(m)} \neq x^{(0)}, \lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x^{(0)}, x^m \in E$

$\forall \delta > 0 \exists N : \forall m > N 0 < \|x^{(m)} - x^{(0)}\| < \delta$ , т.е.  $x^{(m)} \in \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow |f(x^{(m)}) - A| < \varepsilon$

$\Leftarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)})$ , но  $|f(x) - A| \geq \varepsilon$ . Возьмем  $\delta = \delta_m = \frac{1}{m} \quad \exists x^{(m)} \in E \cap \overset{\circ}{U}_{\delta_m}(x^{(0)})$ , но  $|f(x^{(m)}) - A| \geq \varepsilon$ . Мы построили последовательность  $\{x^{(m)}\}, x^{(m)} \in E, x^{(m)} \neq x^{(0)}, 0 < \|x^{(m)} - x^{(0)}\| < \delta_m = \frac{1}{m}$ , т.е.  $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x^{(0)} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} f(x^{(m)}) = A \Rightarrow 0 = \lim_{m \rightarrow \infty} |f(x^{(m)}) - A| \geq \varepsilon$  - противоречие.  $\square$

**Теорема 7.19.**  $f(x), x \in E, \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} f(x) = A \Rightarrow \forall F \subset E : x^{(0)}$  - предельная точка  $F \Rightarrow \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in F}} f(x) = A$

*Доказательство.*  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ . Возьмем  $\forall x \in F \cap \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}) \subset E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$  □

**Теорема 7.20.**  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} f(x) = A, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} g(x) = B \Rightarrow \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B; \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B;$

если  $B \neq 0 \Rightarrow \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

*Доказательство.* Самостоятельно. Берем определения по Гейне. □

**Теорема 7.21.**  $\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} f(x) \Rightarrow \exists \eta > 0 \exists M > 0 : |f(x)| \leq M \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\eta(x^{(0)})$

*Доказательство.* Самостоятельно. Берем определение по Коши. □

## Лекция 15

04.04

**Теорема 7.22.**  $\lim_{\substack{x \rightarrow x^{(0)} \\ x \in E}} f(x) = A \neq 0 \Rightarrow \exists \eta > 0 : \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\eta(x^{(0)}) \Rightarrow \operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} A$

*Доказательство.* Самостоятельно. □

**Теорема 7.23.**  $\lim_{\substack{x \rightarrow x^{(0)} \\ x \in E}} f(x) = A, \lim_{\substack{x \rightarrow x^{(0)} \\ x \in E}} g(x) = B, f(x) \geq g(x) \forall x \in E \Rightarrow A \geq B$

*Доказательство.* Самостоятельно. □

**Теорема 7.24.**  $\lim_{\substack{x \rightarrow x^{(0)} \\ x \in E}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x^{(0)} \\ x \in E}} h(x) = A, f(x) \leq g(x) \leq h(x) \forall x \in E \Rightarrow \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x^{(0)} \\ x \in E}} g(x) = A$

*Доказательство.* Самостоятельно. □

**Определение.**  $x^{(0)} \in \mathbb{E}_n, \delta > 0 \tilde{U}_\delta(x^{(0)}) \equiv U_\delta(x^{(0)}) \setminus (U_{k=1}^n \{x_k \neq x_k^{(0)}\})$   
 $E = U_\delta(x^{(0)}), E = \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}), E = K_\delta(x^{(0)}), E = \overset{\circ}{K}_\delta(x^{(0)}), E = \tilde{U}_\delta(x^{(0)}) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \in E)}} f(x)$

**Определение.**  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{E}_n, \tilde{\delta} > 0, f(x) = f(x_1, \dots, x_n), x \in \tilde{U}_{\tilde{\delta}}(x^{(0)}) (k_1, k_2, \dots, k_n)$  - перестановка  $(1, 2, \dots, n)$ . Повторный предел:  $\lim_{x_{k_1} \rightarrow x_{k_1}^{(0)}} \lim_{x_{k_2} \rightarrow x_{k_2}^{(0)}} \dots \lim_{x_{k_n} \rightarrow x_{k_n}^{(0)}} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , если  $\exists$

Примеры: ( $n = 2$ , точка  $(0; 0)$ )

1.  $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1; \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0. \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}.$

Рассмотрим  $\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (x, y) \in (x, kx)}} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{1}{1 + k^2} \Rightarrow \nexists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$

2.  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0; \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$

Рассмотрим  $\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (x, y) \in (x, kx)}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^3}{x^4 + k^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx}{k^2 + x^2} = 0.$

Посмотрим  $\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (x, y) \in (x, x^2)}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \nexists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

3.  $f(x, y) = y \sin \frac{1}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0; \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{x} \Rightarrow \nexists \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{x}.$

Рассмотрим  $|f(x, y)| \leq |y|$ , т.е.  $\underbrace{-|y|}_{\rightarrow 0} \leq f(x, y) \leq \underbrace{|y|}_{\rightarrow 0} \Rightarrow \exists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$

## 7.5 Непрерывные функции нескольких переменных

**Определение.**  $f(x)$  определена на  $E \subset \mathbb{E}_n, x^{(0)} \in E$ .  $f(x)$  называется непрерывной при  $x = x^{(0)} \in E$  по  $E$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E \cap U_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow |f(x) - f(x^{(0)})| < \varepsilon$ .

$x^{(0)} \in E, x^{(0)}$  - не есть изолированная точка  $\lim_{\substack{x \rightarrow x^{(0)} \\ x \in E}} f(x) = f(x^{(0)}) \Leftrightarrow f(x)$  непрерывна при  $x = x^{(0)}$  по  $E$ .

Определение непрерывности функций по Гейне написать самостоятельно.

**Определение.**  $f(x)$  определена на  $E \subset \mathbb{E}_n$ .  $f(x)$  непрерывна на  $E$  по  $E$ , если  $\forall x^{(0)} \in E, f(x)$  непрерывна при  $x = x^{(0)}$  по  $E$ .

$f(x) = f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n), x \in$  окрестности  $x^{(0)}$ . Рассмотрим  $\varphi(x_k) = f(x_1^{(0)}, \dots, x_{k-1}^{(0)}, x_k^{(0)}, x_{k+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$

**Определение.**  $t = (t_1, t_2, \dots, t_p) \in E \subset \mathbb{E}_p; x = (x_1, \dots, x_n) \in F \subset \mathbb{E}_n; \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$  определены на  $E \subset \mathbb{E}_p$ , причем  $\forall t \in E (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in F \subset \mathbb{E}_n, f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  определена на  $F \subset \mathbb{E}_n$ .

Тогда  $y(t) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ , определенная на  $E$ , называется сложной функцией.

**Теорема 7.25.**  $\exists y(t) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$  в окрестности  $t^{(0)} \in E$ . Пусть  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$  - непрерывны при  $t = t^{(0)}$  по  $E, f(x)$  - непрерывна при  $x = x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = (\varphi_1(t^{(0)}), \dots, \varphi_n(t^{(0)})) \in F$  по  $F$ .

Тогда  $y(t)$  - непрерывна при  $t = t^{(0)}$  по  $E$ .

*Доказательство.*  $f(x)$  непрерывна при  $x = x^{(0)} \in F$  по  $F$ , т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \sigma > 0 : \forall x \in F \cap K_\sigma(x^{(0)}) \Rightarrow |f(x) - f(x^{(0)})| < \varepsilon$ .  $\forall k = 1, 2, \dots, n \varphi_k(t)$  непрерывна при  $t = t^{(0)} \in E$  по  $E$ , т.е.  $\forall \sigma > 0 \exists \delta_k > 0 : \forall t \in E \cap U_{\delta_k}(t^{(0)}) \Rightarrow |\varphi_k(t) - \varphi_k(t^{(0)})| < \sigma \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_n) > 0 \Rightarrow \forall k = 1, \dots, n |\varphi_k(t) - \varphi_k(t^{(0)})| < \sigma$ . Рассмотрим  $x = (x_1, \dots, x_n) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in F \cap K_\sigma(x^{(0)})$ . Тогда  $|y(t) - y(t^{(0)})| = |f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) - f(\varphi_1(t^{(0)}), \dots, \varphi_n(t^{(0)}))| < \varepsilon$ . □

$$L \equiv M(t), t \in [\alpha, \beta]; M(t) \equiv (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)), \varphi_k(t) \in C[\alpha, \beta]$$

**Определение.**  $E \subset \mathbb{E}_n$ . Если  $\forall x^{(1)}, x^{(2)} \in E \exists$  непрерывная кривая  $M(t) : M(\alpha) = x^{(1)}, M(\beta) = x^{(2)}$ ,  $\forall t \in [\alpha, \beta] M(t) \in E$ , то  $E$  называется связным множеством.

**Определение.**  $E \subset \mathbb{E}_n$ . Если  $E$  открытое множество и  $E$  связное множество, то  $E$  - область.

**Определение.** Замыканием области  $E$  называется замкнутая область.

**Теорема 7.26.**  $f(x)$  непрерывна на  $E \in \mathbb{E}_n$  по  $E$ , где  $E$  - связное множество. Берем  $\forall x^{(1)}, x^{(2)} \in E$ . Пусть  $f(x^{(1)}) = A, f(x^{(2)}) = B$ . Тогда  $\forall C \in [A, B] \exists x^{(0)} \in E : f(x^{(0)}) = C$ .

*Доказательство.*  $\exists M(t) : M(\alpha) = x^{(1)}, M(\beta) = x^{(2)}, \forall t \in [\alpha, \beta] M(t) \in E. M(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), \varphi_k(t) \in C[\alpha, \beta], k = 1, 2, \dots, n$ . Рассмотрим  $u(t) = f(M(t)) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ . Тогда  $u(t) \in C[\alpha, \beta]$ .  $u(\alpha) = f(\varphi_1(\alpha), \dots, \varphi_n(\alpha)) = f(x^{(1)}) = A, u(\beta) = f(\varphi_1(\beta), \dots, \varphi_n(\beta)) = f(x^{(2)}) = B$ . Согласно теореме из первого семестра  $\forall c \in [A, B] \exists \gamma \in [\alpha, \beta] : c = u(\gamma) = f(M(\gamma)) = f(\varphi_1(\gamma), \dots, \varphi_n(\gamma)) = f(x^{(0)})$ , где  $x^{(0)} = (\varphi_1(\gamma), \dots, \varphi_n(\gamma)) \in E$ , т.к.  $E$  связное множество. □

tg: @moksimga

## Лекция 16

08.04

**Теорема 7.27.**  $E$  - ограниченное замкнутое множество  $E \subset \mathbb{E}_n$ ;  $f(x)$  непрерывна на  $E$  по  $E \Rightarrow f(x)$  ограничена на  $E$ .

*Доказательство.*  $f(x)$  неограничена на  $E$ , т.е.  $\forall M > 0 \exists x \in E : |f(x)| > M$ .

$$M = M_m = m = 1, 2, \dots \quad \exists x^{(m)} \in E : |f(x^{(m)})| > M_m = m.$$

$$\{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty \Rightarrow \exists \{x^{(m_p)}\} \subset \{x^{(m)}\} : \exists \lim_{p \rightarrow \infty} x^{(m_p)} = x^{(0)} \Rightarrow x^{(0)} - \text{точка прикосновения } E \Rightarrow x^{(0)} \in E.$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f(x^{(m_p)}) = f(x^{(0)}), |f(x^{(m_p)})| > m_p \geq 0 \Rightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} f(x^{(m_p)}) = \infty$$

□

$E$  - ограниченное замкнутое множество,  $f(x)$  - непрерывная на  $E$  по  $E \Rightarrow \exists M < +\infty, \exists m > -\infty :$

$$\sup_{x \in E} f(x) = M, \inf_{x \in E} f(x) = m, m \leq M.$$

**Теорема 7.28.**  $E \subset \mathbb{E}_n$ ,  $E$  - ограниченное замкнутое множество,  $f(x)$  - непрерывная на  $E$  по  $E$ ,  $m =$

$$\inf_{x \in E} f(x), M = \sup_{x \in E} f(x) \Rightarrow \exists x^{(1)}, x^{(2)} \in E : f(x_1) = m, f(x_2) = M.$$

*Доказательство.* Самостоятельно.

□

**Определение.**  $E \subset \mathbb{E}_n$ ,  $f(x)$  называется равномерно непрерывной на  $E$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 :$

$$\forall x, y \in E, \rho(x, y) = \|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

**Теорема 7.29.**  $E \subset \mathbb{E}_n$ ,  $f(x)$  равномерно непрерывна на  $E \Rightarrow f(x)$  непрерывна на  $E$  по  $E$ .

*Доказательство.* Самостоятельно.

□

**Теорема 7.30.**  $E \subset \mathbb{E}_n$ ,  $E$  - ограниченное замкнутое множество,  $f(x)$  - непрерывна на  $E$  по  $E \Rightarrow f(x)$  равномерно непрерывна на  $E$ .

*Доказательство.* Самостоятельно.

□

## 7.6 Производные и дифференциалы функций нескольких переменных

**Определение.**  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{E}_n$ ,  $f(x)$  определена в окрестности точки  $x^{(0)}$ . Частной производной по переменной  $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$  при  $x = x^{(0)}$  (в точке  $x^{(0)}$ ) функции  $f(x)$  называется  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) =$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^{(0)}, \dots, x_i^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \equiv \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_i^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\Delta x_i}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \right|_{\text{пр}} ; \left. \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \right|_{\text{лев}} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x^{(0)}) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x^{(0)}), u(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_i \partial x_i}(x^{(0)}) = \frac{\partial v}{\partial x_i}(x^{(0)}),$$

$$v(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x), \dots$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^{(0)}) = \frac{\partial w}{\partial x_i}(x^{(0)}), w(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$$

$$\text{Рассмотрим } f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

$$(x, y) \neq (0, 0) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = y \left[ \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right];$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y (y \neq 0) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y \quad \forall y.$$

$$\text{Найдем } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-\Delta y - 0}{\Delta y} = -1.$$

$$\text{Пусть } (x, y) \neq (0, 0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \left[ \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right]; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x (x \neq 0); \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) =$$

$$= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x \quad \forall x. \quad \text{Тогда } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0 + \Delta x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{\Delta x} = 1$$

**Теорема 7.31.** Пусть  $f(x)$ : в окрестности точки  $x^{(0)} \ni \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \frac{\partial f}{\partial x_j}(x), \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x), \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x), \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  и  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$  непрерывны при  $x = x^{(0)} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^{(0)}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^{(0)})$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $W = f(x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_j^{(0)} + \Delta x_j) - f(x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_j^{(0)}) - f(x_i^{(0)}, x_j^{(0)} + \Delta x_j) + f(x_i^{(0)}, x_j^{(0)})$ . Введем две функции от одной переменной  $g_1(x_i) = f(x_i, x_j^{(0)} + \Delta x_j) - f(x_i, x_j^{(0)})$  в окрестности точки  $x_i^{(0)}$  и  $g_2(x_j) = f(x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_j) - f(x_i^{(0)}, x_j)$  в окрестности точки  $x_j^{(0)}$ .

$$\text{Тогда } W = g_1(x_i^{(0)} + \Delta x_i) - g_1(x_i^{(0)}) = g_2(x_j^{(0)} + \Delta x_j) - g_2(x_j^{(0)}).$$

$$\text{По теореме Лагранжа: } g_1'(x_i^{(0)} + \theta_1 \Delta x_i) \Delta x_i = g_2'(x_j^{(0)} + \theta_2 \Delta x_j) \Delta x_j; \quad g_1'(x_i^{(0)} + \theta_1 \Delta x_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i^{(0)} + \theta_1 \Delta x_i, x_j^{(0)} + \Delta x_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i^{(0)}, x_j^{(0)} + \Delta x_j) = \text{Т. Лагранжа} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_i^{(0)} + \theta_1 \Delta x_i, x_j^{(0)} + \theta_3 \Delta x_j) \Delta x_j;$$

$$g_2'(x_j^{(0)} + \theta_2 \Delta x_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_j^{(0)} + \theta_2 \Delta x_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_i^{(0)}, x_j^{(0)} + \theta_2 \Delta x_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_i^{(0)} + \theta_4 \Delta x_i, x_j^{(0)} + \theta_2 \Delta x_j) \Delta x_i.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_i^{(0)} + \theta_1 \Delta x_i, x_j^{(0)} + \theta_3 \Delta x_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_i^{(0)} + \theta_4 \Delta x_i, x_j^{(0)} + \theta_2 \Delta x_j)$$

□

**Определение.**  $x^{(0)} \in \mathbb{E}_n$ ,  $f(x)$  определена в окрестности точки  $x^{(0)}$ ,  $\omega \in \mathbb{E}_n, \|\omega\| = 1$ . Производной функции  $f(x)$  по направлению  $\omega$  в точке  $x^{(0)}$  называется  $\frac{\partial f}{\partial \omega}(x^{(0)}) \equiv \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f(x^{(0)} + t\omega) - f(x^{(0)})}{t}$

$$\text{Пример: } \omega = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, \dots, 0) \quad \frac{\partial f}{\partial \omega}(x^{(0)}) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_i^{(0)} + t, \dots, x_n^{(0)}) - f(x^{(0)})}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \Big|_{\text{пр}}$$

$$\text{Проверить самостоятельно: } \omega = (0, \dots, 0, \overset{i}{-1}, \dots, 0) \quad \frac{\partial f}{\partial \omega}(x^{(0)}) = -\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \Big|_{\text{лев}}$$

$$\text{Пример: рассмотрим } f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$|f(x, y)| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \underbrace{-\sqrt{x^2 + y^2}}_{\rightarrow 0} \leq f(x, y) \leq \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_{\rightarrow 0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(0, 0), \omega = (\cos \alpha, \sin \alpha) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f(t\omega) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{t \sin \frac{1}{t}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+0} \sin \frac{1}{t} - \text{не существует. } \omega = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

$$\text{Рассмотрим } f(x, y) = \begin{cases} 1, & y = x^2, x \neq 0 \\ 0, & \text{в остальных точках} \end{cases} \quad \frac{\partial f}{\partial \omega}(0, 0) = 0 \quad \forall \omega = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

## Лекция 17

11.04

**Определение.**  $y = f(x)$  определена в окрестности  $x^{(0)} \in \mathbb{E}_n$ . Если  $\Delta y = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$ , где  $A = (A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{E}_n$ ,  $\alpha(\Delta x) = \bar{o}(\|\Delta x\|)$  ( $\|\Delta x\| \rightarrow 0$ ), то  $y = f(x)$  называется дифференцируемой при  $x = x^{(0)}$ , а  $dy \equiv (A, \Delta x) = \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n$  - дифференциалом функции  $f(x)$  при  $x = x^{(0)}$ .

Если  $x$  - независимая переменная, то  $dx \equiv \Delta x (dx_i = \Delta x_i)$ ;  $dy = \sum_{i=1}^n A_i dx_i$

**Теорема 7.32.**  $y = f(x)$  - дифференцируемая при  $x = x^{(0)} \Rightarrow y = f(x)$  непрерывна при  $x = x^{(0)}$ .

*Доказательство.*  $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)$ , где  $\alpha(\Delta x) = \bar{o}(\|\Delta x\|)$  ( $\|\Delta x\| \rightarrow 0$ ), т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : \forall \Delta x, \|\Delta x\| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(\Delta x)| < \frac{\varepsilon}{2}$   
 $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2(\|A\| + 1)}, \delta = \min(\delta_1, \delta_2, 1) \Rightarrow \forall \Delta x : \|\Delta x\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x^{(0)})| = |\Delta y| \leq |(A, \Delta x)| + |\alpha(\Delta x)| \leq$   
 нер-во Коши - Буняковского  $\leq \|A\| \|\Delta x\| + \frac{\varepsilon}{2} \|\Delta x\| < \|A\| \cdot \frac{\varepsilon}{2(\|A\| + 1)} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$

**Теорема 7.33.**  $y = f(x)$  дифференцируемая при  $x = x^{(0)}, dy = (A, dx) = \sum_{i=1}^n A_i dx_i \Rightarrow \forall i = 1, \dots, n \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = A_i$

*Доказательство.*  $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)$ , где  $\alpha(\Delta x) = \bar{o}(\|\Delta x\|)$  ( $\|\Delta x\| \rightarrow 0$ ), т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : \forall \Delta x, \|\Delta x\| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(\Delta x)| < \frac{\varepsilon}{2} \|\Delta x\|$   
 $\Delta x = (0, \dots, 0, \Delta x_i, 0, \dots, 0), 0 < |\Delta x_i| < \delta \|\Delta x\| = |\Delta x_i|$   
 $\left| \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\Delta x_i} - A_i \right| = \left| \frac{(A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)}{\Delta x_i} - A_i \right| = \left| \frac{A_i \Delta x_i + \alpha(\Delta x)}{\Delta x_i} - A_i \right| =$   
 $= dy = df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) dx_i \quad \square$

**Теорема 7.34.**  $y = f(x) : \text{в окрестности } x^{(0)} \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \forall i = \overline{1, n}; \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \text{непрерывна при } x = x^{(0)} \Rightarrow y = f(x) \text{ дифференцируемая при } x = x^{(0)}.$

*Доказательство.*  $\Delta y = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) =$

$$= \sum_{i=1}^n \left[ f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \Delta x_i, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_i^{(0)}, x_{i+1}^{(0)} + \Delta x_{i+1}, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) \right] =$$

$$\text{т. Лагранжа} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)} + \underbrace{\theta_i \Delta x_i}_{\substack{\text{частичное приращение} \\ 0 < \theta_i < 1}}, x_{i+1}^{(0)} + \Delta x_{i+1}, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) \cdot \Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \cdot \Delta x_i + \alpha(\Delta x)$$

$$\alpha(\Delta x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(\Delta x) \Delta x_i, \text{ где } \alpha_i(\Delta x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \theta_i \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)} + \Delta x_{i+1}, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^{(0)}, \dots, x_i^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$$

$$|\Delta x_i| \leq \|\Delta x\| = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2} \Rightarrow |\alpha(\Delta x)| \leq \|\alpha\| \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n |\alpha_i(\Delta x)|}_{\rightarrow 0} = \bar{o}(\|\Delta x\|) \quad \square$$



**Определение.** Плоскость  $\pi$  с уравнением  $z = g(x, y)$  - касательная плоскость к поверхности  $\sigma(z = f(x, y))$  в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \sigma(z = f(x, y))$ , если  $f(x, y) - g(x, y) = \bar{o}\left(\sqrt{\frac{(x-x_0)^2}{\Delta x^2} + \frac{(y-y_0)^2}{\Delta y^2}}\right)$  при  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ .  
 $z_0 = f(x_0, y_0), M_0(x_0, y_0, z_0) \quad \pi : z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0), g(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0)$   
 $f(x, y) - g(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0) - A(x - x_0) - B(y - y_0) = \Delta z - A\Delta x - B\Delta y$   
 $\Delta z$

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) - \text{касательная плоскость.}$$

Нормалью к поверхности  $\sigma$  в какой-то точке называют вектор, перпендикулярный касательной плоскости в этой точке.

$$\vec{N} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right\}; \alpha \vec{N} - \text{нормальный вектор } (\alpha \neq 0).$$

$$\vec{n} = \pm \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} = \pm \frac{\left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right\}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^2 + 1}}; \quad \frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}} \Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}} \Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}; \quad \begin{cases} x = x_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} \cdot t \\ y = y_0 + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \cdot t \\ z = z_0 - t \end{cases}$$

**Теорема 7.35.**  $y(t) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$  в окрестности  $t^{(0)} = (t_1^{(0)}, \dots, t_p^{(0)}) \in \mathbb{E}_p, f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  - дифференцируема при  $x = x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = (\varphi_1(t^{(0)}), \dots, \varphi_n(t^{(0)})) \in \mathbb{E}_n$ . Если  $\exists j (j = \overline{1, p}) : \exists \frac{d\varphi_i}{dt_j}(t^{(0)}) \Rightarrow \exists \frac{\partial y}{\partial t_j}(t^{(0)}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \cdot \frac{d\varphi_i}{dt_j}(t^{(0)})$ .

Если  $\forall i = 1, \dots, n, \varphi_i(t)$  дифференцируема при  $t = t^{(0)}$ , то  $y(t)$  - дифференцируема при  $t = t^{(0)}$ .

*Доказательство.*  $\Delta y = \Delta f = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \cdot \Delta x_i + \alpha(\Delta x)$ , где  $\alpha(\Delta x) = \bar{o}(\|\Delta x\|)$  ( $\|\Delta x\| \rightarrow$

$$0), \alpha(\underbrace{\theta}_{\text{нулевой элемент}}) = \alpha(0, \dots, 0) = 0$$

$$\Delta t_j \neq 0; \frac{\Delta y}{\Delta t_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \cdot \underbrace{\frac{\Delta x_i}{\Delta t_j}}_{\rightarrow \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t^{(0)})} + \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta t_j}; \quad \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta t_j} = (\|\Delta x\| \neq 0) = \frac{\alpha(\Delta x)}{\|\Delta x\|} \cdot \frac{\sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2}}{\Delta t_j} =$$

$$= \underbrace{\frac{\alpha(\Delta x)}{\|\Delta x\|}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\Delta x_1}{\Delta t_j}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\Delta x_n}{\Delta t_j}\right)^2}}_{\text{огр., т.к. } \exists \lim} \rightarrow 0$$

$$\Delta x_i = \varphi_i(t^{(0)} + \Delta t_i) - \varphi_i(t^{(0)}) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t^{(0)}) \cdot \Delta t_j + \beta_i(\Delta t), \text{ где } \beta_i(\Delta t) = \bar{o}(\|\Delta t\|)$$

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \cdot \left( \sum_{j=1}^p \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t^{(0)}) \cdot \Delta t_j + \beta(\Delta t) + \alpha(\Delta x) \right); \quad \beta(\Delta t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \cdot \beta_i(\Delta t) = \bar{o}(\|\Delta t\|)$$

$$\frac{\alpha(\Delta x)}{\|\Delta t\|} = (\text{при } \|\Delta x\| \neq 0) = \underbrace{\frac{\alpha(\Delta x)}{\|\Delta x\|}}_{\rightarrow 0} \cdot \frac{\|\Delta x\|}{\|\Delta t\|} \quad \|\Delta t\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|\Delta x\| \rightarrow 0 \quad \frac{\|\Delta x\|}{\|\Delta t\|} \leq \frac{\sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2}}{\Delta t_j} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\Delta x_1}{\Delta t_j}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\Delta x_n}{\Delta t_j}\right)^2} - \text{огр., т.к. } \exists \lim$$

□

tg: @moksimqa

## Лекция 18

$$y = y(x), x_i = x_i(t)$$

$$y = y(x), x - \text{независимая переменная}, dy = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i, \quad dx_i = \Delta x_i$$

$$y = y(x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad dy = \sum_{j=1}^p \frac{\partial y}{\partial t_j} dt_j = \sum_{j=1}^p \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j} \right) dt_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^p \frac{\partial x_i}{\partial t_j} dt_j \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i$$

Таким образом устанавливается инвариантность первого дифференциала.

Свойства:

$$1^\circ d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$2^\circ d(u \cdot v) = vdu + u dv$$

$$3^\circ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$$

*Доказательство.*  $1^\circ$  Рассмотрим  $f(u, v) = u \cdot v$ , пусть  $u$  и  $v$  - независимые переменные, тогда  $\frac{\partial f}{\partial u} = v, \frac{\partial f}{\partial v} = u \Rightarrow d(uv) = vdu + u dv$

$2^\circ, 3^\circ$  - самостоятельно

□

**Теорема 7.36.**  $y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  дифференцируема при  $x = x^{(0)}$ , т.е.  $\Delta y = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$ , где  $\alpha(\Delta x) = \bar{o}(\|\Delta x\|)$  ( $\|\Delta x\| \rightarrow 0 \Rightarrow \forall \omega \in \mathbb{E}_n : \|\omega\| = 1 \exists \frac{\partial f}{\partial \omega}(x^{(0)}) = (A, \omega)$ )

*Доказательство.*  $t > 0 \quad \Delta x = t\omega \Rightarrow \|\Delta x\| = \|t\omega\| = t\|\omega\| = t$ .

$$\text{Рассмотрим } \frac{\partial f}{\partial \omega}(x^{(0)}) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f(x^{(0)} + t\omega) - f(x^{(0)})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{(A, t\omega) + \alpha(\Delta x)}{t} = (A, \omega) + \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{\alpha(\Delta x)}{t} = (A, \omega)$$

□

**Определение.**  $f(x)$  дифференцируема при  $x = x^{(0)}$ , т.е.  $f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$ , где  $\alpha(\Delta x) = \bar{o}(\|\Delta x\|)$  ( $\|\Delta x\| \rightarrow 0$ ), тогда элемент (вектор)  $A$  называется градиентом функции  $f(x)$  при  $x = x^{(0)}$  и обозначается  $A = \text{grad } f(x^{(0)}) = \nabla f(x^{(0)})$ ,  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$  - оператор Гамильтона.

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = (\nabla f, dx)$$

Свойства градиента:

$$1^\circ \nabla(f \pm g) = \nabla f \pm \nabla g$$

$$2^\circ \nabla(\alpha f) = \alpha \nabla f$$

$$3^\circ \nabla(f \cdot g) = g \nabla f + f \nabla g$$

$$4^\circ \nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2}$$

$$\text{Доказательство. } 3^\circ \text{ Рассмотрим } d(f \cdot g) = gdf + f dg = g(\nabla f, dx) + f(\nabla g, dx) = \left( \underbrace{g \nabla f + f \nabla g}_{\nabla(fg)}, dx \right)$$

$1^\circ, 2^\circ, 4^\circ$  - самостоятельно.

□

**Теорема 7.37** (Т. Лагранжа для функции нескольких переменных).  $f(x) \in C_1$  (в области  $E \in \mathbb{E}_n$ ),  $f(x)$  непрерывна в  $\bar{E}$  по  $\bar{E}$ ,  $x^{(0)}, \Delta x : x^{(0)} \in \bar{E}, x^{(0)} + \Delta x \in \bar{E}, x^{(0)} + t\Delta x \in E \forall t \in (0, 1) \Rightarrow \exists \Theta \in (0, 1) :$   
 $f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (x^{(0)} + \Theta \Delta x) \Delta x_i$

*Доказательство.* Рассмотрим функцию одной переменной  $t \in [0, 1]$   $F(t) = f(x^{(0)} + t\Delta x)$ ,  $F(t) \in C[0, 1]$   
 $\forall t \in (0, 1) \exists F'(t) \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (x^{(0)} + t\Delta x) \Delta x_i \Rightarrow \exists \Theta \in (0, 1) : F(1) - F(0) = F'(\Theta) \cdot (1 - 0).$

Таким образом  $f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (x^{(0)} + \Theta \Delta x) \Delta x_i$  □

**Следствие 1.**  $f(x) \in C_1$  (в области  $E \in \mathbb{E}_n$ ),  $f(x)$ , причем  $\forall x^{(1)}, x^{(2)} \in E \exists$  конечнозвенная ломанная  $\subset E$  с концами  $x^{(1)}, x^{(2)}$ , пусть  $\forall x \in E \forall i = \overline{1, n} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow f(x) \equiv \text{const}$  в  $E$ .

*Доказательство.* Самостоятельно. Рассмотреть одно звено ломанной, и на каждом отрезке применить теорему Лагранжа. □

## 7.7 Дифференциалы высших порядков для функций нескольких переменных

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \quad df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad \delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i$$

**Определение.**  $x$  - независимая переменная,  $m \geq 2$ ,  $f(x) \in C_m$  в области  $E$ ,  $dx = \Delta x = \text{const} \forall x \in E$ .

Дифференциалом  $m$ -го порядка функции  $f(x)$  в точке  $x$  называется  $d^m f(x) = \delta (d^{m-1} f(x)) \Big|_{\delta x = dx}$

$$d^2 f(x) = \delta \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (x) dx_i \right) \Big|_{\delta x = dx} = \sum_{i=1}^n \delta \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} (x) \right) \Big|_{\delta x = dx} \cdot dx_i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x) \delta x_j \right) \Big|_{\delta x = dx} \cdot dx_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} dx_i dx_j dx_k, \dots$$

$$d^m f = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}} dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_m}; H = a_1 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i; H^2 = H \cdot H = \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{j=1}^n a_j \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j, \dots, H^m = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_m}$$

$$df = (\nabla f, dx), d^2 f = (\nabla, dx)^2 f, \dots, d^m f = (\nabla, dx)^m f$$

В общем случае, для дифференциалов высших порядков инвариантности нет.

$$\text{Важный частный случай: } x_i = \sum_{j=1}^p \alpha_{ij} t_j + \beta_i, i = 1, 2, \dots, n \quad dx_i = \sum_{j=1}^p \alpha_{ij} dt_j$$

## 7.8 Формула Тейлора для функции нескольких переменных

$$F(t) = F(t_0) + \frac{F'(t_0)}{1!} (t - t_0) + \frac{F''(t_0)}{2!} (t - t_0)^2 + \dots + \frac{F^{(m)}(t_0)}{m!} (t - t_0)^m + r_m(t, F), \text{ где } r_m(t, F) =$$

$$= \frac{F^{(m+1)}(t_0 + \Theta(t - t_0))}{(m+1)!} (t - t_0)^{m+1}$$

$$\text{Рассмотрим } dt = \Delta t = t - t_0, \Delta F(t_0) = F(t_0 + \Delta t) - F(t_0) = \frac{dF(t_0)}{1!} + \frac{d^2 F(t_0)}{2!} + \dots + \frac{d^m F(t_0)}{m!} +$$

$$+ r_m(t, F), \quad r_m(t, F) = \frac{d^{m+1} F(t_0 + \Theta \Delta t)}{(m+1)!}$$

tg: @moksimga