

Конспект лекций по математическому анализу

(2й семестр 2024-2025 учебного года)

Лектор:

Горячев А. П., Хлистунов И. А.

Верстка

Оглавление

1	Интегралы	5
1.1	Первообразная и неопределенный интеграл	5
1.1.1	Таблица интегралов.	6
1.2	Способы вычисления неопределенных интегралов	7
1.2.1	Метод подстановки	7
1.2.2	Интегрирование по частям	7
2	Определенный интеграл	9
2.1	Определение интеграла Римана. Существование интегрируемых функций. Необратимое условие	9
2.2	Суммы Дарбу и их свойства. Связь сумм Дарбу с интегральной суммой	10
2.3	Верхний и нижний интегралы Дарбу. Критерий интегрируемости	11
2.4	Интегрируемость непрерывной функции. Интегрируемость монотонной функции	13
2.5	Интегрируемость функции, отличающейся от интегрируемой в конечном количестве точек	13
3	Свойства определенного интеграла	15
3.1	Линейные свойства определенного интеграла	15
3.2	Интегрируемость произведения интегрируемых по Риману функций	16
3.3	Интегрируемость функции на внутреннем отрезке. Аддитивность определенного интеграла	17
3.4	Монотонность определенного интеграла. Строгая монотонность определенного интеграла от непрерывной функции	18
3.5	Интегрируемость модуля интегрируемых по Риману функций. Связь интеграла от функции с интегралом от ее модуля	19
3.6	Неравенство Коши-Буняковского для определенных интегралов. Теорема о среднем и ее обобщение	19
4	Основные правила интегрирования.	21
4.1	Интеграл с переменным верхним (нижним) пределом, его непрерывность и дифференцируемость. Существование первообразной у непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница.	21
4.2	Вычисление определенных интегралов способами замены переменных и интегрирования по частям.	22

5	Геометрические приложения определенного интеграла.	24
5.1	Спряmlяемость гладкой кривой. Выражение длины дуги гладкой кривой в виде определенного интеграла. Формулы длины дуги плоской кривой, заданной в декартовых либо полярных координатах.	24
5.1.1	Частные случаи гладких кривых:	27
5.2	Площадь плоской фигуры. Критерий квадратируемости	27
5.3	Квадрируемость криволинейной трапеции. Выражение площади криволинейной трапеции в виде определенного интеграла. Формула площади криволинейного сектора (без доказательства)	29
6	Собственные и несобственные интегралы.	30
6.1	Несобственный интеграл первого рода, их сходимость и расходимость. Независимость сходимости (расходимости) несобственного интеграла первого рода от значения его постоянного (неособенного) предела	30
6.2	Несобственные интегралы второго рода, их сходимость и расходимость. Независимость сходимости (расходимости) несобственного интеграла второго рода от значения его постоянного (неособенного) предела	32
6.3	Несобственные интегралы с несколькими особыми точками.	33
6.4	Формула Ньютона-Лейбница для несобственных интегралов. Вычисление несобственных интегралов способами замены переменной и интегрирования по частям.	34
6.5	Линейные свойства несобственного интеграла. Пример неинтегрируемого произведения интегрируемых функций.	35
6.6	Связь интеграла от функции с интегралом от ее модуля в случае их интегрируемости	36
6.7	Критерий Коши сходимости несобственных интегралов первого и второго рода.	37
6.8	Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Сходимость абсолютно сходящихся несобственных интегралов.	38
6.9	Необходимое и достаточное условие сходимости несобственных интегралов первого и второго рода от неотрицательных функций.	38
6.10	Признак сравнения (в допределной и предельной форме) для сходимости несобственных интегралов первого и второго рода от неотрицательных функций.	39
6.11	Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Признаки Дирихле и Абеля для сходимости несобственных интегралов первого и второго рода.	41
6.11.1	Пример неинтегрируемости модуля интегрируемых в несобственном смысле функций.	43
6.12	Главное значение в смысле Коши несобственных интегралов первого и второго рода и его связь с величиной соответствующего несобственного интеграла.	44
7	Функции многих переменных	46
7.1	Координатное n -мерное пространство	46
7.2	Последовательности в \mathbb{E}_n	49
7.3	Функции в \mathbb{E}_n	51

7.4	Предел функции	51
7.5	Непрерывные функции нескольких переменных	53
7.6	Производные и дифференциалы функций нескольких переменных	54
7.7	Дифференциалы высших порядков для функций нескольких переменных	59
7.8	Формула Тейлора для функции нескольких переменных	59

Глава 1

Интегралы

Лекция 1

13.12

1.1 Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. X - промежуток $f(x)$ определена $x \in X$. $F(x), x \in X$, называется первообразной к $f(x)$, если $\forall x \in X \exists F'(x) = f(x)$

Определение. Множество всех первообразных к $f(x)$ на X называется неопределенным интегралом. (об. $\int f(x)dx, f(x)$ - подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение)

$F(x)$ - первообразная к $f(x) \Rightarrow F(x) + C$ - тоже первообразная.

$\Phi(x)$ - первообразная к $f(x)$ $F'(x) = f(x) = \Phi'(x)$

Рассмотрим $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \forall x \in X$

$\Phi(x) - F(x) = C = const$ $\Phi(x) = F(x) + C$

$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad d(\int f(x)dx) = f(x)dx; \quad \int dF(x) = F(x) + C$

$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx \quad d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = f(x)dx$

Теорема 1.1. $f(x), g(x)$ имеют первообразные $\Rightarrow f(x) \pm g(x)$ тоже имеют первообразные, причем $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Доказательство. $\int f(x)dx = F(x) + C_1, \int g(x)dx = G(x) + C_2$. Рассмотрим $H_{\pm}(x) = F(x) \pm G(x), H'_{\pm}(x) = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$

$\int (f(x) \pm g(x))dx = F(x) \pm G(x) + C = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ □

Теорема 1.2. $f(x)$ имеет первообразную $\Rightarrow \forall k, kf(x)$ тоже имеет первообразную, а если $k \neq 0$, то $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$

Доказательство. $\int f(x)dx = F(x) + C \quad (kF(x))' = kF'(x) = kf(x) \quad \int kf(x)dx = kF(x) + C_1 \quad k \int f(x)dx =$

$k(F(x) + C) = kF(x) + kC, \quad \int kf(x)dx = kF(x) + C_1, \quad k \int f(x)dx = k(F(x) + C) = kF(x) + kC, \text{ если}$

$k \neq 0$, то $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ □

1.1.1 Таблица интегралов.

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1 (\alpha = 0 \Rightarrow x^\alpha = 1)$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
8. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
9. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
10. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
11. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
12. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a > 0$
13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + \tilde{C}, a > 0$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, a > 0$

Лекция 2

20.12

1.2 Способы вычисления неопределенных интегралов

1.2.1 Метод подстановки

$$\int f(u) du = F(u) + C \quad u = \varphi(x) - \text{дифферен. } f(\varphi(x)) \text{ опр при } x \in \text{промежуток.}$$

Рассмотрим $F(\varphi(x)), x \in X$. $(F(\varphi(x)))'_x = F'_u \Big|_{u=\varphi(x)} (u) * \varphi'(x) = f(u) \Big|_{u=\varphi(x)} * \varphi'(x) = f(\varphi(x)) * \varphi'(x)$

$$\int f(\varphi(x)) dx = F(\varphi(x)) + C$$

$$\int f(\varphi(x)) \underbrace{\varphi'(x) dx}_{du} = \int f(u) du \Big|_{u=\varphi(x)}$$

$$\int f(x) dx \Big|_{x=\psi(t)} = \int f(\psi(t)) \psi'(t) dt \Big|_{t=\psi^{-1}(x)}$$

Примеры.

1.

$$\int \frac{x dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| + C$$

$$x^2 + a^2 = u, \quad 2x dx = du$$

2.

$$\int \sin^3 x dx = - \int \sin^2 x (-\sin x dx) = - \int (1 - u^2) du = -u + \frac{u^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

$$\cos x = u, \quad -\sin x dx = du$$

3.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})} = \int \frac{6t^5 dt}{t^3(1 + t^2)} = 6 \int \frac{t^2 + 1 - 1}{1 + t^2} dt = 6(t - \operatorname{arctg} t) + C = 6(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x}) + C$$

$$x = t^6 (\sqrt[6]{x} = t), \quad dx = 6t^5 dt$$

4.

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |\sin x| + C$$

$$\sin x = u, \quad du = \cos x dx$$

1.2.2 Интегрирование по частям

$$d(uv) = u dv + v du, u dv = d(uv) - v du, \quad \int u dv = \int d(uv) - \int v du; \quad \int d(uv) = uv + C$$

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

Примеры

1.

$$\int \underbrace{\ln x}_u \underbrace{dx}_{dv} = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

$$u = \ln x, \quad dv = dx, \quad du = \frac{dx}{x}, \quad v = x$$

2.

$$I = \int e^x \underbrace{\cos x dx}_{d(\sin x)} = \int e^x d(\sin x) = e^x \sin x - \int \sin x e^x dx = e^x \sin x + \int e^x d(\cos x) = e^x \sin x + e^x \cos x - \underbrace{\int \cos x e^x dx}_I$$

$$I = \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$$

3.

$$I = \int \underbrace{\sqrt{x^2 + a^2}}_u \underbrace{dx}_{dv} = x \sqrt{x^2 + a^2} - \int x \frac{2x dx}{2\sqrt{x^2 + a^2}} = x \sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx$$

$$= x \sqrt{x^2 + a^2} - I + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

$$I = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

4.

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} \quad a > 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$J_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} - \int x \frac{(-n)}{(x^2 + a^2)^{n+1}} 2x dx =$$

$$\frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n(J_n - a^2 J_{n+1})$$

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \left[\frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + (2n - 1)J_n \right] \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$J_1 = \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$J_2 = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \left[\frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right] + C, \dots$$

В качестве упражнения найти рекуррентную формулу для

$$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx \quad \deg P_m(x) = m, \quad \deg Q_n(x) = n$$

$$m > n \quad P_m(x) = R_{m-n}(x)Q_n(x) + T_k(x), \quad k < n \quad \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = R_{m-n}(x) + \frac{T_k(x)}{Q_n(x)}, \quad k < n$$

$$Q_n(x) = a_0 x^n + \dots + a_n = a_0(x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_l)^{\alpha_l} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_r x + q_r)^{\beta_r}$$

$$\frac{T_k(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{A_{\alpha_1 1}}{x - x_l} + \dots + \frac{A_{\alpha_1 \alpha_l}}{(x - x_l)^{\alpha_l}} + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + p_1 x + q_1} + \dots + \frac{B_{1\beta_1}x + C_{1\beta_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1}} + \dots$$

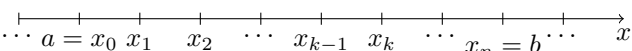
Глава 2

Определенный интеграл

Лекция 3

07.02

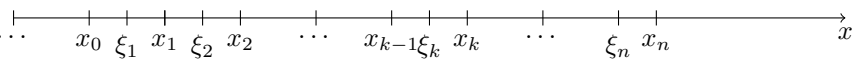
2.1 Определение интеграла Римана. Существование интегрируемых функций. Необратимое условие

$a < b$. Рассмотрим $[a, b]$. 

$T = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b\}$ - разбиение отрезка $[a, b]$ Рассмотрим

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k = 1, 2, 3, \dots, n (k = \overline{1, n})$

$\delta_T = \max_{1 \leq k \leq n} (\Delta x_k)$ - характеристика разбиения.

$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1, n}, \quad \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$ 

Пусть $f(x)$ определена на $[a, b]$. Рассмотрим $\sigma_T(f, \Xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ - интегральная сумма

Определение. Говорят, что $\exists \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sigma_T(f, \Xi)$, если $\exists I : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta, \forall \Xi \Rightarrow |\sigma_T(f, \Xi) - I| < \varepsilon$

! Свойства пределов переносятся.

Определение. $f(x)$ называется интегрируемой (по Риману) на $[a, b]$, если $\exists \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sigma_T(f, \Xi)$. Величина этого предела ($I = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sigma_T(f, \Xi)$) называется определенным интегралом функции $f(x)$ на (a, b) (интегралом Римана))

Обозначение: $\int_a^b f(x) dx = I$

Примеры:

а) $f(x) \equiv C - const$ на $[a, b]; \forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}, \forall \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n;$

$$\sigma_T(f, \Xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n C \Delta x_k = C \sum_{k=1}^n \Delta x_k = C((x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})) = C(x_n - x_0) =$$

$C(b - a) \xrightarrow{\delta_T \rightarrow 0} C(b - a); \Rightarrow \exists \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sigma_T(f, \Xi) = C(b - a). \Rightarrow f(x) - интегрируема на [a, b], причем \int_a^b C dx = C(b - a) \Rightarrow интегрируемые функции существуют.$

$$\text{б) } \chi(x) = \begin{cases} 1, x - \text{рац.} \\ 0, x - \text{иррац.} \end{cases}, x \in [a, b] \text{ (функция Дирихле)}$$

Предположим, что $\exists \int_a^b \chi(x)dx = I$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta, \forall \Xi \Rightarrow |\sigma_T(\chi, \Xi) - I| < \varepsilon$

$$\text{Возьмем } \Xi_1 = \{\xi_k^{(1)}\}_{k=1}^n - \text{набор рац. точек} \quad \sigma^{(1)} = \sigma_T(\chi, \Xi_1) = \sum_{k=1}^n \underbrace{\chi(\xi_k^{(1)})}_{=1} \Delta x_k = b - a$$

$$\text{Возьмем } \Xi_2 = \{\xi_k^{(2)}\}_{k=1}^n - \text{набор иррац. точек} \quad \sigma^{(2)} = \sigma_T(\chi, \Xi_2) = \sum_{k=1}^n \underbrace{\chi(\xi_k^{(2)})}_{=0} \Delta x_k = 0$$

$$b - a = |\sigma^{(1)} - \sigma^{(2)}| = |\sigma^{(1)} - I - \sigma^{(2)} + I| \leq \underbrace{|\sigma^{(1)} - I|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|\sigma^{(2)} - I|}_{< \varepsilon} < \varepsilon + \varepsilon = b - a - \text{противоречие} \Rightarrow$$

$\chi(x)$ не является интегрируемой на $[a, b]$

Теорема 2.1 (Необходимое условие интегрируемости). $f(x)$ -интегрируема на $[a, b] \Rightarrow f(x)$ -ограничена на $[a, b]$

Доказательство. От противного. Предположим, что $f(x)$ не является ограниченной на $[a, b]$, но при этом

$$\exists \int_a^b f(x)dx = I, \text{ т.е. } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta, \forall \Xi \Rightarrow |\sigma_T(f, \Xi) - I| < \varepsilon.$$

$$\text{Берем } \varepsilon = 1 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta, \forall \Xi \Rightarrow |\sigma_T(f, \Xi) - I| < 1$$

$$\text{Берем } \forall T = \{a = x_0 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b\};$$

$$\text{Строим } \Xi = \{\xi\}_{k=1}^n \quad f(x) \text{ неограничена на } [a, b] \Rightarrow \exists k : f(x) \text{ неограничена на } [x_{k-1}, x_k],$$

$$\Xi : \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n - \text{произвольные.}$$

$$\text{Берем такое } \xi_k : |f(\xi_k)| > \frac{1 + |I| + |f(\xi_1)|\Delta x_1 + |f(\xi_2)|\Delta x_2 + \dots + |f(\xi_{k-1})|\Delta x_{k-1} + \dots + |f(\xi_n)|\Delta x_n}{\Delta x_k}$$

$$|\sigma_T(f, \Xi) - I| \geq |\sigma_T(f, \Xi)| - |I| = |f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_{k-1})\Delta x_{k-1} + f(\xi_k)\Delta x_k + f(\xi_{k+1})\Delta x_{k+1} + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n|$$

$$- |I| = |f(\xi_k)\Delta x_k - (-f(\xi_1)\Delta x_1 - \dots - f(\xi_{k-1})\Delta x_{k-1} - f(\xi_{k+1})\Delta x_{k+1} - \dots - f(\xi_n)\Delta x_n)| - |I| \geq$$

$$\geq |f(\xi_k)|\Delta x_k - |f(\xi_1)|\Delta x_1 - \dots - |f(\xi_{k-1})|\Delta x_{k-1} - |f(\xi_{k+1})|\Delta x_{k+1} - \dots - |f(\xi_n)|\Delta x_n - |I| > 1 = \varepsilon \Rightarrow$$

противоречие \square

2.2 Суммы Дарбу и их свойства. Связь сумм Дарбу с интегральной суммой

$$\text{Пусть } f(x) \text{ ограничена на } [a, b]. \quad T = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}.$$

$$M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} (f(x));$$

$$m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} (f(x)).$$

$$S_T(f) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k - \text{верхняя сумма Дарбу.}$$

$$s_T(f) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k - \text{нижняя сумма Дарбу}$$

Эти суммы не обязаны быть интегральными суммами, т.к. точные грани не всегда достигаются.

$$\forall \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n \Rightarrow m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k. \quad s_T(f) \leq \sigma_T(f, \Xi) \leq S_T(f)$$

$$\text{Определение. } T_1 = \{a = x_0^{(1)} < x_1^{(1)} < \dots < x_n^{(1)} = b\} \quad T_2 = \{a = x_0^{(2)} < x_1^{(2)} < \dots < x_m^{(2)} = b\}.$$

T_2 называется последующим к T_1 , если $x_k^{(1)} \in T_2 \forall k = \overline{0, n}$. Обозначение $T_2 \succ T_1$

Теорема 2.2. Если $T_1 \succ T_2 \Rightarrow$

- 1) $S_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$
- 2) $s_{T_1}(f) \geq s_{T_2}(f)$

Доказательство. 1) Пусть у T_1 ровно на 1 точку больше, т.е. $T_2 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n < b\}$.
 $T_1 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < \tilde{x} < x_k < \dots < x_n = b\}$.
 $M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$, $M'_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq \tilde{x}} f(x) \leq M_k$, $M''_k = \sup_{\tilde{x} \leq x \leq x_k} f(x) \leq M_k$
Рассмотрим $S_{T_2}(f) - S_{T_1}(f) = M_k \Delta x_k - M'_k(\tilde{x} - x_{k-1}) - M''_k(x_k - \tilde{x}) = M_k(x_k - x_{k-1}) - M'_k(\tilde{x} - x_{k-1}) - M''_k(x_k - \tilde{x}) = M_k(x_k - \tilde{x} + \tilde{x} - x_{k-1}) - M'_k(\tilde{x} - x_{k-1}) = \underbrace{(M_k - M'_k)}_{\geq 0} \underbrace{(x_k - \tilde{x})}_{> 0} + \underbrace{(M_k - M''_k)}_{\geq 0} \underbrace{(\tilde{x} - x_{k-1})}_{> 0} \geq 0 \Rightarrow S_{T_2}(f) \geq S_{T_1}(f)$. Если у T_1 более, чем на одну точку больше, то делаем аналогично нужное число раз. \square

Теорема 2.3. $\forall T_1, T_2 \Rightarrow s_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$

Доказательство. Рассмотрим $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow \begin{cases} T_3 \succ T_1 \\ T_3 \succ T_2 \end{cases} \Rightarrow s_{T_1}(f) \underset{T2.2}{\leq} s_{T_3}(f) \leq S_{T_3}(f) \underset{T2.2}{\leq} S_{T_2}(f) \quad \square$

Теорема 2.4. $\forall T, \forall \varepsilon > 0 \exists \Xi_1, \exists \Xi_2 : \begin{cases} 0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, \Xi_1) < \varepsilon \\ 0 \leq \sigma_T(f, \Xi_2) - s_T(f) < \varepsilon \end{cases}$

Доказательство. Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b\}$.
 $M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} (f(x))$,
 $m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} (f(x))$
 $\forall \varepsilon > 0 \begin{cases} \exists \xi_k^{(1)} \in [x_{k-1}, x_k] : 0 \leq M_k - f(\xi_k^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \\ \exists \xi_k^{(2)} \in [x_{k-1}, x_k] : 0 \leq f(\xi_k^{(2)}) - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \end{cases} \left| \Delta x_k \text{ и } \sum_{k=1}^n \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, \Xi_1) < \varepsilon \\ 0 \leq \sigma_T(f, \Xi_2) - s_T(f) < \varepsilon \end{cases} \quad \square$

2.3 Верхний и нижний интегралы Дарбу. Критерий интегрируемости

Из теоремы 2.3 $\Rightarrow \forall T_1, T_2 \quad \underbrace{s_{T_1}(f)}_{\text{огр. сверху}} \leq \underbrace{S_{T_2}(f)}_{\text{огр. снизу}}$

Рассмотрим $\bar{I} = \inf_T S_T(f)$ — верхний интеграл Дарбу. $\underline{I} = \sup_T s_T(f)$ — нижний интеграл Дарбу
 $s_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f) \quad \underline{I} \leq S_{T_2}(f) \quad \boxed{\underline{I} \leq \bar{I}}$

Теорема 2.5 (Критерий интегрируемости). $f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Leftrightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$

Доказательство. $\Rightarrow f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \exists \int_a^b f(x) dx = I$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow$
 $|\sigma_T(f, \Xi) - I| < \frac{\varepsilon}{4}$, т.е. $I - \frac{\varepsilon}{4} < \sigma_T(f, \Xi) < I + \frac{\varepsilon}{4}$
 $0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, \Xi_1) < \frac{\varepsilon}{4}$
Но $\varepsilon > 0 \xRightarrow{T2.4} \exists \Xi_1, \exists \Xi_2 : \begin{cases} 0 \leq S_T(f) - \sigma_T(f, \Xi_1) < \frac{\varepsilon}{4} \\ 0 \leq \sigma_T(f, \Xi_2) - s_T(f) < \frac{\varepsilon}{4} \end{cases}$
 $I - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma_T(f, \Xi_2) - \frac{\varepsilon}{4} < s_T(f) \leq S_T(f) < \sigma_T(f, \Xi_1) + \frac{\varepsilon}{4} < I + \frac{\varepsilon}{2}$
 $\Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$
 \Leftarrow Пусть $\lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$

Но $s_T(f) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_T(f) \Rightarrow 0 \leq \bar{I} - \underline{I} < \varepsilon \Rightarrow \bar{I} - \underline{I} = 0 \Rightarrow \underline{I} = \bar{I}$.

Обозначим $\underline{I} = \bar{I} = I \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s_T(f) \leq I \leq S_T(f) \\ \text{Но } \forall \Xi \Rightarrow s_T(f) \leq \sigma_T(f, \Xi) \leq S_T(f) \end{array} \right\} \Rightarrow |\sigma_T(f, \Xi) - I| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sigma_T(f, \Xi) = I \Rightarrow f(x) - \text{интегрируема на } [a, b]$ \square

Следствие 1. $f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} s_T(f) = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} S_T(f) = I (\exists \int_a^b f(x) dx = I)$

Доказательство. $f(x)$ инт на $[a, b] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1) \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0 \\ 2) \int_a^b f(x) dx = I, \forall T s_T(f) \leq I \leq S_T(f) \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - I \leq S_T(f) - s_T(f); 0 \leq I - s_T(f) \leq \underbrace{S_T(f) - s_T(f)}_{\xrightarrow{\delta_T \rightarrow 0} 0} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - I) = 0 \\ \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (I - s_T(f)) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} S_T(f) = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} s_T(f) = I. \quad \square$

Лекция 4

11.02

2.4 Интегрируемость непрерывной функции. Интегрируемость монотонной функции

Теорема 2.6. $f(x) \in C[a, b] \Rightarrow f(x)$ интегрируема на $[a, b]$

Доказательство. $f(x) \in C[a, b] \xRightarrow{\text{т. Кантора}} f(x)$ равномерно непрерывна на $[a, b]$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x', x'' \in [a, b] : |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$. $\delta_T < \delta$;

$$f(x) \in C[x_{k-1}, x_k] \xRightarrow{\text{т. Вейерштрасса}} \exists x'_k, x''_k \in [x_{k-1}, x_k] : \begin{aligned} M_k &= \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) = f(x'_k) \\ m_k &= \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) = f(x''_k) \end{aligned}$$

$$|x'_k - x''_k| \leq \Delta x_k \leq \delta_T \Rightarrow |M_k - m_k| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

$$0 \leq M_k - m_k \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \left| \Delta x_k \right| \text{ и } \sum_{k=1}^n \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0 \xRightarrow{\text{кр. инт.}} f(x) \text{ интегрируема на } [a, b]$$

□

Теорема 2.7. $f(x)$ монотонна на $[a, b]$ (не имеет значения, что из себя представляет множество точек разрыва) $\Rightarrow f(x)$ интегрируема на $[a, b]$

Доказательство. Пусть $f(x)$ монотонно возрастает на $[a, b] \Rightarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b) \forall x \in [a, b] \Rightarrow f(x)$ ограничена на $[a, b]$.

$$\text{Берем } \forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} \quad f(x_{k-1}) \leq f(x) \leq f(x_k) \forall x \in [x_{k-1}, x_k] \Rightarrow \begin{aligned} M_k &= \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) = f(x_k) \\ m_k &= \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) = f(x_{k-1}) \end{aligned}$$

$$0 \leq S_T(f) - s_T(f) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k \leq \delta_T \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) = \delta_T \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \delta_T (f(b) - f(a)) \xrightarrow{\delta_T \rightarrow 0} 0$$

$$0 \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0 \xRightarrow{\text{критерий инт.}} f(x) \text{ интегрируема на } [a, b]$$

Самостоятельно рассмотреть случай монотонного убывания.

□

Пример. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}, x \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right], k \in \mathbb{N} \\ 0, x = 0 \end{cases}$

У $f(x)$ ∞ -но много точек разрыва на $[a, b] : x = \frac{1}{k}, k = 2, 3, 4, \dots$ — точки разрыва 1-го рода
 $f(x)$ монотонно возрастает на $[0, 1] \Rightarrow f(x)$ интегрируема на $[0, 1]$

2.5 Интегрируемость функции, отличающейся от интегрируемой в конечном количестве точек

Теорема 2.8. Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \tilde{f}(x) = \begin{cases} A, x = \tilde{x} \in [a, b] \\ f(x), x \in [a, b] \setminus \{\tilde{x}\} \end{cases}$ тоже интегрируема

на $[a, b]$, причем $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \tilde{f}(x) dx$

1) ограничена на $[a, b]$, т.е $\exists M > 0 : |f(x)| \leq M \forall x \in [a, b]$

Доказательство. $f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Rightarrow f(x)$

$$2) \lim_{\delta_T \rightarrow 0} S_T(f) = \int_a^b f(x) dx = I, \text{ т.е}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T : \delta_T < \delta \Rightarrow |S_T(f) - I| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Берем $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{4(M + |A|)} > 0 \Rightarrow \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$. Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} : \delta_T < \delta$;

$$\begin{aligned} M_k &= \sup f(x) \\ \tilde{M}_k &= \sup \tilde{f}(x), \quad k = \overline{1, n} \end{aligned} \quad \text{Рассмотрим } |S_T(f) - S_T(\tilde{f})| = \left| \sum_{k=1}^n (M_k - \tilde{M}_k \Delta x_k) \right| \leq \delta_T * 2(M + |A|) <$$

$$< 2\delta(M + |A|) \leq 2\delta_2(M + |A|) = \frac{\varepsilon}{2}$$

Рассмотрим $|S_T(\tilde{f}) - I| = |S_T(\tilde{f}) - S_T(f) + S_T(f) - I| \leq \underbrace{|S_T(\tilde{f}) - S_T(f)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|S_T(f) - I|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$, т.е $\lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) -$

$$I) = 0 \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} S_T(\tilde{f}) = I$$

Аналогично: $\lim_{\delta_T \rightarrow 0} S_T(\tilde{f}) = I \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(\tilde{f}) - S_T(\tilde{f})) = 0 \xRightarrow{\text{кр. инт.}} \tilde{f}(x)$ интегрируема на $[a, b]$.

$$\text{Т.к } \int_a^b \tilde{f}(x) dx = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} S_T(f) = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} S_T(\tilde{f}) \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(\tilde{f})) = \int_a^b \tilde{f}(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad \square$$

Следствие 1. $f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \tilde{f}(x)$, отличающаяся от $f(x)$ в конечном количестве точек, тоже интегрируема на $[a, b]$, причем $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \tilde{f}(x) dx$

Доказательство. Применим последнюю теорему надлежащее число раз. □

Пример. $\chi(x) = \begin{cases} 1, x - \text{рац.} \\ 0, x - \text{иррац.} \end{cases}$ отличающаяся от $f_0(x) \equiv 0$ на $[a, b]$ в счетном количестве точек, но при

этом $\chi(x)$ не является интегрируемой на $[a, b]$, а $f_0(x)$ - является.

Теорема 2.9 (Критерий Лебега). Пусть $f(x)$ ограничена на $[a, b]$, а $R(f)$ — множество ее точек разрыва $f(x)$ на $[a, b]$, тогда $f(x)$ интегрируема по Риману на $[a, b] \Leftrightarrow R(f)$ имеет меру нуль, т.е $\forall \varepsilon > 0 \exists \{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^\infty : R(f) \subset \cup_{i=1}^\infty (\alpha_i, \beta_i)$, при этом $\sup_m \sum_{i=1}^m (\beta_i - \alpha_i) < \varepsilon$

Доказательство. Без доказательства. □

Глава 3

Свойства определенного интеграла

Лекция 4

11.02

3.1 Линейные свойства определенного интеграла

Определение. Если $f(x)$ определена при $x = a$, то положим $\int_a^a f(x)dx \equiv 0$

Определение. Если $a < b$, а еще $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то положим $\int_b^a f(x)dx \equiv -\int_a^b f(x)dx$

Теорема 3.1. Если $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, $f(x) \pm g(x)$ тоже интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Доказательство. Если $a = b$, то доказывать нечего: $0 = 0 \pm 0$.

Если $a < b$, то: Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$; Берем $\forall \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$, тогда: рассмотрим $\sigma_T(f \pm g, \Xi) = \sum_{k=1}^n (f(\xi_k) \pm g(\xi_k))\Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \pm \sum_{k=1}^n g(\xi_k)\Delta x_k = \sigma_T(f, \Xi) \pm \sigma_T(g, \Xi) \xrightarrow{\delta_T \rightarrow 0} I_1 \pm \xrightarrow{\delta_T \rightarrow 0} I_2$, т.е

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Если $a > b \Rightarrow \int_b^a (f(x) \pm g(x))dx = \int_b^a f(x)dx \pm \int_b^a g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$ □

Теорема 3.2. $f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R} \quad c \in f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, причем $\int_a^b cf(x)dx =$

$$c \int_a^b f(x)dx$$

Доказательство. Самостоятельно. □

3.2 Интегрируемость произведения интегрируемых по Риману функций

Теорема 3.3. Если $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a, b] \Rightarrow f(x)g(x)$ тоже интегрируема на $[a, b]$

Доказательство. Пусть $a < b$. $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a, b] \Rightarrow f(x), g(x)$ — ограничены на $[a, b]$, т.е

$\exists M^{(f)} > 0, M^{(g)} > 0 : |f(x)| \leq M^{(f)} \forall x \in [a, b]$
 $|g(x)| \leq M^{(g)} \forall x \in [a, b]$. Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$; Введем

$$M_k^{(f)} = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) \quad M_k^{(g)} = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} g(x) \quad M_k^{(fg)} = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} (f(x)g(x))$$

$$m_k^{(f)} = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) \quad m_k^{(g)} = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} g(x) \quad m_k^{(fg)} = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} (f(x)g(x))$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x'_k, x''_k \in [x_{k-1}, x_k] : \begin{aligned} & M_k^{(fg)} < f(x'_k)g(x'_k) + \frac{\varepsilon}{2} \\ & m_k^{(fg)} > f(x''_k)g(x''_k) - \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \Rightarrow 0 \leq M_k^{(fg)} - m_k^{(fg)} < f(x'_k)g(x'_k) - f(x''_k)g(x''_k) + \varepsilon =$$

$$f(x'_k)g(x'_k) + f(x'_k)g(x''_k) - f(x'_k)g(x''_k) - f(x''_k)g(x''_k) + \varepsilon = f(x'_k)(g(x'_k) - g(x''_k)) + g(x''_k)(f(x'_k) - f(x''_k)) + \varepsilon \leq$$

$$M^{(f)}((M_k)^g - m_k^{(g)}) + M^{(g)}(M_k^{(f)} - m_k^{(f)}) + \varepsilon \Rightarrow 0 \leq M_k^{(fg)} - m_k^{(fg)} \leq M^{(f)}((M_k)^g - m_k^{(g)}) + M^{(g)}(M_k^{(f)} - m_k^{(f)}) \Rightarrow$$

$$0 \leq S_T(fg) - s_T(fg) \leq M^{(f)}(S_T(g) - s_T(g)) + M^{(g)}(S_T(f) - s_T(f)) \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(fg) - s_T(fg)) = 0 \Rightarrow$$

$f(x)g(x)$ интегрируема на $[a, b]$

□

Лекция 5

14.02

3.3 Интегрируемость функции на внутреннем отрезке. Аддитивность определенного интеграла

Теорема 3.4. $f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \forall [c, d] \subset [a, b] f(x)$ интегрируема на $[a, b]$

Доказательство. $f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f, [a, b]) - s_T(f, [a, b])) \Rightarrow \text{т.е. } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \rightarrow 0 \leq S_T(f, [a, b]) - s_T(f, [a, b]) < \varepsilon$

Берем $\forall \tau$ – разбиение $[c, d]$. Дополним его до T (разбиение $[a, b]$). Считаем, что $a \leq c < d \leq b$;

$$T|_{[c, d]} = \tau; \delta_T < \delta$$

Рассмотрим $0 \leq S_T(f, [c, d]) - s_T(f, [c, d]) \leq S_T(f, [a, b]) - s_T(f, [a, b]) < \varepsilon$, т.е. $\lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f, [c, d]) - s_T(f, [c, d])) = 0 \Rightarrow f(x)$ интегрируема на $[c, d]$ \square

Теорема 3.5. $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и интегрируема на $[b, c] \Rightarrow f(x)$ интегрируема на $[a, c]$, причем

$$\int_a^c f(x) = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Доказательство. $\left. \begin{array}{l} \exists \int_a^b f(x) dx = I_1, \\ \exists \int_b^c f(x) dx = I_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Пусть } a < b < c : f(x) \text{ ограничена на } [a, b] \text{ и ограничена на } [b, c] \Rightarrow$

$f(x)$ ограничена на $[a, c] \Rightarrow \exists m, M : m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, c]$

$$\lim_{\delta_{\tau_1} \rightarrow 0} S_{\tau_1}(f, [a, b]) = I_1, \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : \forall \tau_1 (\text{разбиение } [a, b]), \delta_{\tau_1} < \delta_1 \Rightarrow |S_{\tau_1}(f, [a, b]) - I_1| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\lim_{\delta_{\tau_2} \rightarrow 0} S_{\tau_2}(f, [b, c]) = I_2 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 (\text{разбиение } [b, c]), \delta_{\tau_2} < \delta_2 \Rightarrow |S_{\tau_2}(f, [b, c]) - I_2| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$\exists \delta_3 = \frac{\varepsilon}{3(M-m)+1} > 0$. Берем $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3) > 0$. Берем $\forall T$ (разбиение $[a, c]$) = $\{a = x_0 < x_1 < \dots <$

$$x_n = c\} \Rightarrow \exists k : b \in [x_{k-1}, x_k] \quad M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq b} f(x), \quad M'_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq b} f(x), \quad M''_k = \sup_{b \leq x \leq x_k} f(x).$$

Рассмотрим $T_1 = T \cup b \Rightarrow \delta_{T_1} \leq \delta_T < \delta$

$$\begin{aligned} |S_T(f, [a, c]) - (I_1 + I_2)| &= |S_T(f, [a, c]) - S_{T_1}(f, [a, c]) + S_{T_1}(f, [a, c]) - (I_1 + I_2)| \leq |S_T(f, [a, c]) - S_{T_1}(f, [a, c])| + \\ |S_{T_1}(f, [a, c]) - I_1 - I_2| &= \underbrace{|M_k(x_k - x_{k-1}) - M'_k(b - x_{k-1}) - M''_k(x_k - b)|}_{(M_k - M''_k)(x_k - b) + (M_k - M'_k)(b - x_{k-1}) \leq (M - m)(x_k - x_{k-1}) \leq (M - m)\delta_T < \delta(M - m) \leq \delta_3(M - m)} + |S_{\tau_1}(f, [a, b]) - I_1| + \\ |S_{\tau_2}(f, [b, c]) - I_2| &\leq \end{aligned}$$

$$\leq (M - m)\delta_3 + |S_{\tau_1}(f, [a, b]) - I_1| + |S_{\tau_2}(f, [b, c]) - I_2| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f, [a, c]) - I_1 - I_2) = 0 =$$

$$\lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f, [a, c])) = I_1 + I_2 \Leftrightarrow$$

Аналогично (самостоятельно) $\lim_{\delta_T \rightarrow 0} s_T(f, [a, c]) = I_1 + I_2$

$$\Leftrightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(f, [a, c]) - s_T(f, [a, c])) = 0 \Rightarrow \text{к.р. инт. } f(x) \text{ интегрируема на } [a, c], \text{ причем (т.к. } \lim_{\delta_T \rightarrow 0} S_T(f, [a, c]) =$$

$$I_1 + I_2) \Rightarrow \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Теперь пусть $a < c < b \xRightarrow{\text{Т3.4}} f(x)$ интегрируема на $[a, c] \Rightarrow$ работает только что рассмотренный случай \Rightarrow

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \Rightarrow \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \quad \square$$

3.4 Монотонность определенного интеграла. Строгая монотонность определенного интеграла от непрерывной функции

Теорема 3.6. $\int_a^b 1dx = b - a$

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 3.7. Пусть $a \leq b$, $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, $f(x) \geq 0$ на $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

Доказательство. 1) $a = b$ - очевидно.

2) $a < b \Rightarrow \exists \int_a^b f(x)dx = I \geq s_T(f) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \geq 0$ □

Теорема 3.8. $a \leq b$; $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, причем $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b] \Rightarrow$
 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 3.9. $f(x) \in C[a, b] (a < b)$, $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$, причем $f(x) \not\equiv 0$ на $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx > 0$

Доказательство. $\exists \xi \in (a, b) : f(\xi) = A > 0$ по т. о сохр. знака $\Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in (\xi - \delta, \xi + \delta) f(x) > \frac{A}{2}$

Рассмотрим $\int_a^b f(x)dx = \underbrace{\int_a^{\xi-\delta} f(x)dx}_{\geq 0} + \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} f(x)dx + \underbrace{\int_{\xi+\delta}^b f(x)dx}_{\geq 0} \geq 0 + \frac{A}{2} 2\delta + 0 = A\delta > 0$ □

Теорема 3.10. $f(x), g(x) \in C[a, b] (a < b)$; $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b]$, причем $f(x) \not\equiv g(x)$ на $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx >$

$$\int_a^b g(x)dx$$

Доказательство. Самостоятельно. □

3.5 Интегрируемость модуля интегрируемых по Риману функций.

Связь интеграла от функции с интегралом от ее модуля

Теорема 3.11. $f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Rightarrow |f(x)|$ тоже интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)| dx \right|.$$

Доказательство. 1) Если $a = b \Rightarrow 0 \leq 0 \Rightarrow$ доказывать нечего.

2) Если $a < b$, то : $f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \lim_{\text{кр. инт. } \delta_T \rightarrow 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$, т.е. $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$

Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}, \delta_T < \delta$

$$M_k \underset{x_{k-1} \leq x \leq x_k}{=} \sup f(x)$$

$$M'_k \underset{x_{k-1} \leq x \leq x_k}{=} \sup |f(x)|$$

$$m_k \underset{x_{k-1} \leq x \leq x_k}{=} \inf f(x)$$

$$m'_k \underset{x_{k-1} \leq x \leq x_k}{=} \inf |f(x)|$$

а) $0 \leq m_k \leq M_k \Rightarrow f(x) \geq 0$ на $[x_{k-1}, x_k] \Rightarrow |f(x)| = f(x)$ на $[x_{k-1}, x_k] \Rightarrow m'_k = m_k, M'_k = M_k \Rightarrow M'_k - m'_k = M_k - m_k$

б) $m_k \leq M_k \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq 0$ на $[x_{k-1}, x_k] \Rightarrow |f(x)| = -f(x)$ на $[x_{k-1}, x_k], M'_k = -m_k, m'_k = -M_k \Rightarrow M'_k - m'_k = M_k - m_k$

в) $m_k \leq 0 \leq M_k \Rightarrow M'_k = \max(m_k, -m_k) \Rightarrow M'_k - m'_k \leq M'_k \leq M_k - m_k \Rightarrow$ в любом случае

$0 \leq M'_k - m'_k \leq M_k - m_k \left| \Delta x_k \right| \sum_{k=1}^n \Rightarrow 0 \leq S_T(|f|) - s_T(|f|) \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} (S_T(|f|) - s_T(|f|)) = 0 \Rightarrow |f(x)|$ интегрируема на $[a, b]$.

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow - \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

$$\text{Если } a > b \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)| dx \right|$$

□

3.6 Неравенство Коши-Буняковского для определенных интегралов. Теорема о среднем и ее обобщение

Теорема 3.12 (Неравенство Коши-Буняковского). $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a, b] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\int_a^b f(x)g(x) dx \right]^2 \leq \left[\int_a^b f^2(x) dx \right] \left[\int_a^b g^2(x) dx \right]$$

Доказательство. Пусть $a < b$.

$$\text{Рассмотрим } \varphi(\lambda) = \int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2 dx = \underbrace{\lambda^2 \int_a^b f^2(x) dx}_{=A} + 2\lambda \underbrace{\int_a^b f(x)g(x) dx}_{=B} + \underbrace{\int_a^b g^2(x) dx}_{=C} = A\lambda^2 + 2B\lambda + C$$

Если $A = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow B^2 \leq AC$

$$\text{Если } A \geq 0 \Rightarrow B^2 - AC \leq 0, \text{ т.е. } B^2 \leq AC \Rightarrow \left[\int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)$$

Если $a = b \Rightarrow$ верно

Если $a > b \Rightarrow$ верно □

Теорема 3.13 (1-ая теорема о среднем). $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$; $m = \inf_{[a,b]} f(x), M = \sup_{[a,b]} f(x)$,

$$g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow \exists \mu \in [m, M] : \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$$

Доказательство. $a < b$. Пусть $g(x) \geq 0$ на $[a, b]$.

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$$

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \Rightarrow m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$

$$1) \text{ Если } \int_a^b g(x)dx = 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx = 0 \Rightarrow \text{утверждение верно } \forall \mu \in [m, M]$$

$$2) \text{ Если } \int_a^b g(x)dx > 0 \Rightarrow m \leq \underbrace{\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}}_{\mu} \leq M \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$$

Если $g(x) \leq 0$ на $[a, b]$, то рассмотрим $\tilde{g}(x) = -g(x) \geq 0$ на $[a, b]$.

Если $a \geq b \Rightarrow$ самостоятельно. □

Следствие 1. Если в условиях предыдущей теоремы $f(x) \in C[a, b] \Rightarrow \exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$

Доказательство. По теореме Вейрештрасса: $\exists \alpha, \beta \in [a, b] : f(\alpha) = m \quad f(\beta) = M \quad \mu \in [m, M] \xRightarrow{\text{т.Коши}} \exists \mu \in [\alpha, \beta] \subset [a, b] : f(\xi) = \mu$ □

Следствие 2. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x), M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x) \Rightarrow \exists \mu \in [m, M] :$

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a). \text{ А если еще } f(x) \in C[a, b] \Rightarrow \exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

Доказательство. Самостоятельно. □

Глава 4

Основные правила интегрирования.

Лекция 6

21.02

4.1 Интеграл с переменным верхним (нижним) пределом, его непрерывность и дифференцируемость. Существование первообразной у непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница.

Определение. Пусть $f(x)$ — интегрируема на $[a, b]$. Рассмотрим функции $F(x)$ и $G(x)$, определенные на

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt - \text{интеграл с переменный верхним пределом}$$

отрезке $[a, b]$:

$$G(x) = \int_x^b f(t)dt - \text{интеграл с переменным нижним пределом}$$

$$F(x) + G(x) = \int_a^b f(t)dt \equiv \text{const на } [a, b]$$

Теорема 4.1. $f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Rightarrow F(x) \in C[a, b]$

Доказательство. По Т1 $\exists M > 0 : |f(x)| \leq M \forall x \in [a, b]$. Берем $\forall x_0 \in [a, b]$ и $\Delta x : x_0 + \Delta x \in [a, b]$. Тогда рас-

$$\text{смотрим } |F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)| = \left| \int_a^{x_0 + \Delta x} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \right| = \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t)dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} |f(t)|dt \right| \leq M|\Delta x| \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$$
$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)) = 0, \text{ т.е. } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} F(x_0 + \Delta x) = F(x_0) \Rightarrow F(x) \text{ непрерывна при } x = x_0.$$

Но x_0 — любое из $[a, b] \Rightarrow F(x) \in C[a, b]$

□

Теорема 4.2. $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, а также $f(x)$ непрерывна при $x = x_0 \Rightarrow \exists F'(x_0) = f(x_0)$ (на концах односторонние производные)

Доказательство. $f(t)$ непрерывна при $t = x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b] \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Берем $\Delta x : \Delta x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}, x_0 + \Delta x \in [a, b]$. Рассмотрим $\left| \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| =$

$$= \left| \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)dt \right| = \left| \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \frac{f(t) - f(x_0)}{\Delta x} dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \frac{|f(t) - f(x_0)|}{|\Delta x|} dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{|\Delta x|} |\Delta x| =$$

$$\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \text{ т.е. } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0), \text{ т.е. } \exists F'(x_0) = f(x_0) \quad \square$$

Теорема 4.3. $f(x) \in C[a, b] \Rightarrow \exists$ первообразная к $f(x)$ на $[a, b]$

Доказательство. $F(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow \forall x \in [a, b] \exists F'(x) = f(x)$, т.е. $F(x)$ — первообразная к $f(x)$ на $[a, b]$ \square

Теорема 4.4 (Основная теорема интегрального исчисления). $f(x) \in C[a, b]$, $\Phi(x)$ — первообразная к $f(x)$ на $[a, b] \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(x) \Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a) \quad (\text{Формула Ньютона-Лейбница})$$

$$\left. \begin{array}{l} \Phi(x) - \text{первообразная к } f(x) \text{ на } [a, b]. \\ F(x) = \int_a^x f(t)dt - \text{тоже первообразная на } [a, b] \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \Phi'(x) = f(x) \forall x \in [a, b] \\ F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b] \end{array} \right\} \Rightarrow F(x) =$$

$$\Phi(x) + C, \text{ т.е. } \int_a^x f(t)dt = \Phi(x) + C$$

$$\text{при } x = a \Rightarrow C = -\Phi(a) \Rightarrow \int_a^x f(t)dt = \Phi(x) - \Phi(a). \text{ При } x = b \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a) \quad \square$$

Для $G(x)$ справедливы теоремы аналогичные Т4.1 Т4.2 Т4.3

4.2 Вычисление определенных интегралов способами замены переменных и интегрирования по частям.

Теорема 4.5 (Замена переменных). $f(x) \in C[a, b]$; $\varphi(t) : \varphi'(t) \in C[\alpha, \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ $[a, b]$ — множество значений $\varphi(t)$ на $[a, b] \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Доказательство. По Т3.16 $\Rightarrow \exists \Phi(x)$ — первообразная к $f(x)$ на $[a, b]$, причем $\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Рассмотрим сложную функцию $\Phi(\varphi(t))$ — дифференцируема на $[a, b]$ (по т. о дифф сложной функции)
 $\frac{d}{dt}(\Phi(\varphi(t))) = \Phi'_x(x) \Big|_{x=\varphi(t)} * \varphi'_t(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) \forall t \in [a, b] \Rightarrow \Phi(\varphi(t))$ — первообразная к $\underbrace{f(\varphi(t))\varphi'(t)}_{\in C[a, b]}$ на $[a, b] \Rightarrow$

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(\varphi(t)) \Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(x)dx \quad \square$$

Теорема 4.6. $u(x), v(x) : u'(x), v'(x) \in C[a, b] \Rightarrow \int_a^b u(x)v'(x)dx = (u(x)v(x)) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$

Доказательство. $\frac{d}{dx}(u(x)v(x)) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow u(x)v(x) -$ первообразная к $\underbrace{u'(x)v(x) + u(x)v'(x)}_{\in C[a, b]}$

$$\text{на } [a, b] \xRightarrow{\text{линейность}} \int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b u'(x)v(x)dx = \int_a^b (u(x)v'(x) + u'(x)v(x))dx = [u(x)v(x)]_a^b \quad \square$$

Пусть $f(x) : f^{(n+1)}(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $x = x_0$, тогда $\forall x$ из этой окрестности имеет место: $f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0)) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)dt = f(x_0) - \int_{x_0}^x f'(t)d(x-t) = f(x_0) - (x-t)f'(t) \Big|_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^x (x-t)f''(t)dt = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!}f'(x_0) + \int_{x_0}^x (x-t)f''(t)dt = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!}(x-x_0) - \int_{x_0}^x f''(t)d(\frac{(x-t)^2}{2}) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) - \frac{(x-t)^2}{2!}f''(t) \Big|_{t=x_0}^{t=x} + \frac{1}{2!} \int_{x_0}^x (x-t)^2 f'''(t)dt = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$

Итого:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x, f),$$

$$\text{где } r_n(x, f) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

- формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$r_n(x, f) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt. \text{ На } [x_0, x] \quad (x-t)^n \text{ не меняет знак, а } f^{(n+1)}(t) \in C[x_0, x] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = \frac{f^{n+1}(\xi)}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n dt = -\frac{f^{n+1}(\xi)}{n!} \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \Big|_{t=x_0}^{t=x} = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} - \text{остаточный член в форме Лагранжа (получено при больших ограничениях, чем раньше)}$$

Глава 5

Геометрические приложения определенного интеграла.

Лекция 6

21.02

5.1 Спряmlяемость гладкой кривой. Выражение длины дуги гладкой кривой в виде определенного интеграла. Формулы длины дуги плоской кривой, заданной в декартовых либо полярных координатах.

Определение. Пусть $\varphi(t), \psi(t), \chi(t) \in C[a, b]$. Рассмотрим множество точек в пространстве, которое обозначим $L = \{M(x, y, z), x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), t \in [\alpha, \beta]\}$ - такое множество точек называется простой

кривой, если $\forall t_1, t_2 \in [\alpha, \beta] : t_1 \neq t_2 \Rightarrow M_1(x_1, y_1, z_1) \neq M_2(x_2, y_2, z_2)$, где
$$\begin{cases} x_i = \varphi(t_i) \\ y_i = \psi(t_i) \\ z_i = \chi(t_i) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots$$

Если при этом $z = \chi(t) \equiv 0$ на $[a, b]$, то плоская простая кривая.

Определение. Говорят, что система уравнений
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} \quad t \in \{t\} - \text{промежуток, задает параметри-$$

чески кривую L , если промежуток $\{t\}$ можно разбить на конечный или бесконечный (счетный) набор отрезков $[\alpha_i, \beta_i]$, покрывающих данный промежуток $\{t\}$ и пересекающихся не более чем концами, так, что на каждом отрезке $[\alpha_i, \beta_i]$ L - простая кривая.

Везде далее, если не оговорено противного кривая - параметрически заданная кривая

Определение. Кривая $L : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$ называется гладкой, если $\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t) \in C[a, b]$, а еще

$$(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2 > 0 \forall t \in [\alpha, \beta]$$

$$L : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta] \quad T = \{\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = \beta\} \quad M_k(x, y, z) : \begin{cases} x = \varphi(t_k) \\ y = \psi(t_k) \\ z = \chi(t_k) \end{cases}$$

Рассмотрим $l_T = \sum_{k=1}^n |\overrightarrow{M_{k-1}M_k}| = \sum_{k=1}^n \sqrt{[\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})]^2 + [\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})]^2 + [\chi(t_k) - \chi(t_{k-1})]^2}$ — длина ломаной, вписанной в L . $T_1 = T \cup \tilde{t} \Rightarrow l_{T_1} \geq l_T$ (по неравенству треугольника). Тогда: $T_1 \succ T \rightarrow l_{T_1} \geq l_T$

Определение. Кривая L называется спрямляемой, если $\{l_T\}$ — ограниченное сверху множество.

Определение. Если L — спрямляемая кривая, то число $l = l(L) = \sup_T \{l_T\}$ называется длиной кривой L .

Теорема 5.1. $L : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$ — гладкая кривая $\Rightarrow L$ — спрямляемая, причем

$$l(L) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt$$

tg: @moksimga

Лекция 7

Доказательство. $\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t) \in C[\alpha, \beta] \Rightarrow \exists M > 0 : |\varphi'(t)| \leq M, |\psi'(t)| \leq M, |\chi'(t)| \leq M \forall t \in [\alpha, \beta]$.

Берем $\forall T = \{\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = \beta\}$.

$$\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \varphi'(\alpha_k) \Delta t_k$$

По теореме Лагранжа $\exists \alpha_k, \beta_k, \gamma_k \in (t_{k-1}, t_k) : \psi(t_k) - \psi(t_{k-1}) = \psi'(\beta_k) \Delta t_k \quad k = \overline{1, n} \Rightarrow$

$$\chi(t_k) - \chi(t_{k-1}) = \chi'(\gamma_k) \Delta t_k$$

$$\Rightarrow l_t = \sum_{k=1}^n \sqrt{(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^2 + (\chi(t_k) - \chi(t_{k-1}))^2} = \sum_{k=1}^n \underbrace{\sqrt{(\varphi'(\alpha_k))^2 + (\psi'(\beta_k))^2 + (\chi'(\gamma_k))^2}}_{\leq 3M^2} \Delta t_k \leq$$

$$\leq M\sqrt{3} \sum_{k=1}^n \Delta t_k = M\sqrt{3}(\beta - \alpha) = \{l_T\} - \text{ограничена сверху} \Rightarrow L - \text{спрямляемая}.$$

Введем $f(t) = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} \in C[\alpha, \beta] \Rightarrow f(t)$ интегрируема на $[\alpha, \beta] \Rightarrow \exists \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = I$, т.е

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : \forall T, \delta_T < \delta_1, \forall \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n \Rightarrow |\sigma_T(f, \Xi) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t) \in C[\alpha, \beta] \xRightarrow{\text{т. Кантора}} \varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t)$ — равномерно непрерывны на $[\alpha, \beta] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \delta_2 > 0 : \forall t', t'' \in [\alpha, \beta] : |t' - t''| < \delta_2 \Rightarrow |\varphi'(t') - \varphi'(t'')| < \frac{\varepsilon}{4(\beta - \alpha)}; |\psi'(t') - \psi'(t'')| < \frac{\varepsilon}{4(\beta - \alpha)}; |\chi'(t') - \chi'(t'')| < \frac{\varepsilon}{4(\beta - \alpha)}.$$

Берем $\delta = \max(\delta_1, \delta_2) > 0, \quad \forall T, \delta_T < \delta, \forall \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n,$

$$\text{рассмотрим } |l_T - I| = |l_T - \sigma_T(f, \Xi) + \sigma_T(f, \Xi) - I| \leq |l_T - \sigma_T(f, \Xi)| + \underbrace{|\sigma_T(f, \Xi) - I|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < |l_T - \sigma_T(f, \Xi)| + \frac{\varepsilon}{2} =$$

$$\left| \sum_{k=1}^n \left[\sqrt{(\varphi'(\alpha_k))^2 + (\psi'(\beta_k))^2 + (\chi'(\gamma_k))^2} \Delta t_k - \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\xi_k))^2 + (\chi'(\xi_k))^2} \Delta t_k \right] \right| + \frac{\varepsilon}{2} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^n \left| \sqrt{(\varphi'(\alpha_k))^2 + (\psi'(\beta_k))^2 + (\chi'(\gamma_k))^2} - \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\xi_k))^2 + (\chi'(\xi_k))^2} \right| \Delta t_k \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \sqrt{(\varphi'(\alpha_k) - \varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\beta_k) - \psi'(\xi_k))^2 + (\chi'(\gamma_k) - \chi'(\xi_k))^2} \Delta t_k + 2 < \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{3\varepsilon^2}{16(\beta - \alpha)^2}} \Delta t_k + \frac{\varepsilon}{2} =$$

$$= \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{4(\beta - \alpha)}(\beta - \alpha) + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{4} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \lim_{\delta_T \rightarrow 0} l_T = I$$

Осталось доказать, что $L_T \leq I \quad \forall T$. От противного, предположим, что $\exists T_0 : l_{T_0} > I$. Известно, что

$$\lim_{\delta_T \rightarrow 0} l_T = I, \text{ т.е } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow |l_T - I| < \varepsilon.$$

Берем $\varepsilon = \frac{l_{T_0} - I}{2} > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow |l_T - I| < \frac{l_{T_0} - I}{2}$. Берем $T_1 \succ T_0 : \delta_{T_1} < \delta \Rightarrow \frac{l_{T_0} - I}{2} = \varepsilon >$

$$|l_{T_1} - I| = l_{T_1} - I \geq l_{T_0} - I = 2\varepsilon \Rightarrow \text{противоречие} \Rightarrow \text{предположение неверно} \Rightarrow l_T \leq I \quad \forall T$$

□

5.1.1 Частные случаи гладких кривых:

$$1) y = f(x), x \in [a, b] \quad \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \\ z \equiv 0 \end{cases} \quad t \in [a, b] \Rightarrow l(L) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$2) r = r(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta], \quad \begin{cases} x = r(\varphi) \cos \varphi \\ y = r(\varphi) \sin \varphi \end{cases} \quad (x'_\varphi(\varphi))^2 + (y'_\varphi(\varphi))^2 = (r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi)^2 +$$

$$(r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi)^2 = r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2 \Rightarrow l(L) = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi$$

5.2 Площадь плоской фигуры. Критерий квадратируемости

Определение. Плоская фигура - любое ограниченное множество на плоскости

Определение. P - плоская фигура. Число $\mu(P)$ - площадь, если:

$$1) \mu(P) \geq 0$$

$$2) \text{Если фигуры } P_1, P_2 \text{ равны в геометрическом смысле} \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$$

$$3) P_1, P_2 : P_1 \cap P_2 = \emptyset \Rightarrow \mu(P_1 \cup P_2) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$$

$$4) \text{Если } P - \text{единичный квадрат} \Rightarrow \mu(P) = 1$$

Объединение, пересечение, вычитание многоугольников - тоже многоугольник.

\emptyset - тоже многоугольник ($\mu(\emptyset) = 0$). Если P - многоугольник, то его площадь известна ($\tilde{\mu}(P)$ - обозначение площади)

$$P - \text{плоская фигура} \Rightarrow Q, S : Q \subset P \subset S$$

$$\forall Q, S : Q \subset P \subset S \Rightarrow \tilde{\mu}(Q) \leq \tilde{\mu}(S) \Rightarrow \{\mu(Q)\} - \text{ограничено сверху. } \{\mu(S)\} - \text{ограничено снизу.}$$

Определение. P - плоская фигура. $\underline{\mu}(P) = \sup_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q)$ - нижняя площадь. $\overline{\mu}(P) = \inf_{S \supset P} \tilde{\mu}(S)$

$$Q \subset P \subset S \Rightarrow \tilde{\mu}(Q) \leq \tilde{\mu}(S) \Rightarrow \underline{\mu}(Q) \leq \underline{\mu}(S) \Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \overline{\mu}(P)$$

Определение. Плоская фигура P называется квадратируемой, если $\underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$. При этом $\mu(P) = \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$

Теорема 5.2. Введенная таким образом $\mu(P)$ - площадь т.е

$$1) P - \text{квадрируема фигура} \Rightarrow \mu(P) \geq 0$$

$$2) P_1, P_2 - \text{квадрируемые плоские фигуры, причем } P_1 \text{ и } P_2 \text{ равны в геометрическом смысле} \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$$

$$3) P_1, P_2 - \text{квадрируемые плоские фигуры, причем } P_1 \cap P_2 = \emptyset \Rightarrow P = P_1 \cup P_2 - \text{тоже квадрируема, причем } \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$$

$$4) \text{Если } P - \text{единичный квадрат} \Rightarrow P - \text{плоская квадрируемая фигура, причем } \mu(P) = 1$$

$$\text{Доказательство. } 1) \exists \mu(P) = \underline{\mu}(P) = \sup_{Q \subset P} \underbrace{\tilde{\mu}(Q)}_{\geq 0} \geq 0$$

$$2) Q_1 \subset P_1 \subset S_1 \Leftrightarrow Q_2 \subset P_2 \subset S_2, \text{ причем } Q_1 \text{ и } Q_2 \text{ равны в геометрическом смысле, } S_1 \text{ и } S_2 \text{ равны в}$$

геометрическом смысле $\Rightarrow \begin{matrix} \tilde{\mu}_1(Q_1) = \tilde{\mu}(Q_2) \\ \tilde{\mu}_1(S_1) = \tilde{\mu}(S_2) \end{matrix} \Rightarrow \underline{\mu}(P_1) = \underline{\mu}(P_2), \bar{\mu}(P_1) = \bar{\mu}(P_2) \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$

3) P_1, P_2 - квадратуемые $\Rightarrow \exists \mu(P_1), \mu(P_2)$, причем $\begin{matrix} \mu(P_1) = \bar{\mu}(P_1) = \underline{\mu}(P_1) \\ \mu(P_2) = \bar{\mu}(P_2) = \underline{\mu}(P_2) \end{matrix} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists Q_1, Q_2, S_1, S_2 :$

$$Q_1 \subset P_1 \subset S_1 : \tilde{\mu}(Q_1) > \mu(P_1) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$Q_2 \subset P_2 \subset S_2 : \tilde{\mu}(Q_2) > \mu(P_2) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\tilde{\mu}(S_2) < \mu(P_2) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\tilde{\mu}S_1 < \mu(P_1) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$Q_1 \subset P_1, Q_2 \subset P_2$, но $P_1 \cap P_2 = \emptyset \Rightarrow Q_1 \cap Q_2 = \emptyset \Rightarrow \mu(Q_1 \cup Q_2) = \mu(Q_1) + \mu(Q_2)$, причем $\begin{matrix} Q = Q_1 \cup Q_2 \\ S = S_1 \cup S_2 \end{matrix}$

Рассмотрим $\mu(Q) = \mu(Q_1) + \mu(Q_2) > \mu(P_1) + \mu(P_2) - \varepsilon$.

$$\underline{\mu}(P) = \tilde{\mu}(Q) > \sup_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q) \geq \tilde{\mu}(Q_1) + \tilde{\mu}(Q_2) > \mu(P_1) + \mu(P_2) - \varepsilon$$

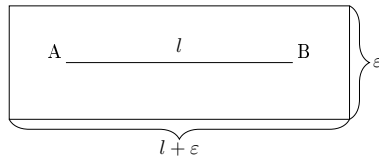
Получили, что $\forall \varepsilon > 0 \underline{\mu}(P) > \mu(P_1) + \mu(P_2) - \varepsilon \Rightarrow \underline{\mu}(P) \geq \mu(P_1) + \mu(P_2)$

Аналогично: $\tilde{\mu}(S) \leq \tilde{\mu}(S_1) + \tilde{\mu}(S_2)$. $\bar{\mu}(P) = \inf_{S \supset P} \mu(S) \leq \inf_{\substack{S: S_1 \cup S_2 \\ S_1 \supset P_1 \\ S_2 \supset P_2}} \mu(S) \leq \tilde{\mu}(S_1) + \tilde{\mu}(S_2) < \mu(P_1) + \mu(P_2) + \varepsilon$.

Получили, что $\forall \varepsilon > 0 \bar{\mu}(P) < \mu(P_1) + \mu(P_2) + \varepsilon \Rightarrow \bar{\mu}(P) \leq \mu(P_1) + \mu(P_2) \Rightarrow \mu(P_1) + \mu(P_2) \leq \underline{\mu}(P) \leq \bar{\mu}(P) \leq \mu(P_1) + \mu(P_2) \Rightarrow \underline{\mu}(P) = \bar{\mu}(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2) \Rightarrow P$ - квадратуема, причем $\mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$

4) P - единичный квадрат. Берем $Q, S : Q = P = S$ $\left. \begin{matrix} \underline{\mu}(P) = \sup_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q) \geq 1 \\ \bar{\mu}(P) = \inf_{S \supset P} \tilde{\mu}(S) \end{matrix} \right\} \Rightarrow 1 \leq \underline{\mu}(P) \leq \bar{\mu}(P) \leq 1 \Rightarrow \underline{\mu}(P) = \bar{\mu}(P) = 1 \Rightarrow$ единичный квадрат - плоская квадратуемая фигура, причем $\mu(P) = 1$ \square

Берем $\forall \varepsilon > 0$



$$\emptyset \subset AB \subset S \quad 0 \leq \bar{\mu}(AB) \leq \varepsilon(l + \varepsilon) \Rightarrow \bar{\mu}(AB) = 0; \quad 0 \leq \underline{\mu}(AB) \leq \bar{\mu}(AB) = 0 \Rightarrow \underline{\mu}(AB) = 0$$

tg: @moksimga

Теорема 5.3 (Критерий квадрируемости). P - плоская фигура, тогда: P - квадрируема $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists Q, S : Q \subset P \subset S$, причем $0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon$

Доказательство. \Rightarrow Пусть P - квадрируема $\Rightarrow \exists \mu(P) = \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists Q, S : Q \subset P \subset S$, причем $\tilde{\mu}(P) > \underline{\mu}(P) - \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < (\mu(P) + \frac{\varepsilon}{2}) - (\mu(P) - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$
 $\tilde{\mu}(S) < \overline{\mu}(P) + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < (\mu(P) + \frac{\varepsilon}{2}) - (\mu(P) - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$
 \Leftarrow Пусть $\forall \varepsilon > 0 \exists Q, S : Q \subset P \subset S$, причем $0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon$, но $\tilde{\mu}(Q) \leq \underline{\mu}(P) \leq \overline{\mu}(P) \leq \tilde{\mu}(S) \Rightarrow 0 \leq \overline{\mu}(P) - \underline{\mu}(P) < \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \overline{\mu}(P) - \underline{\mu}(P) < \varepsilon \Rightarrow \overline{\mu}(P) - \underline{\mu}(P) = 0 \Rightarrow \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$, т.е. P - квадрируема

□

5.3 Квадрируемость криволинейной трапеции. Выражение площади криволинейной трапеции в виде определенного интеграла. Формула площади криволинейного сектора (без доказательства)

Определение. Пусть $f(x) \in C[a, b], f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$. Плоская фигура $P = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ называется криволинейной трапецией.

Теорема 5.4 (Критерий квадрируемости). $f(x) \in C[a, b], f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b] \Rightarrow$ криволинейная трапеция $P = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ является квадрируемой фигурой, причем $\mu(P) = \int_a^b f(x) dx$

Доказательство. $f(x) \in C[a, b] \Rightarrow \exists \int_a^b f(x) dx = I \xRightarrow{\text{кр. инт}} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leq S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$,
 т.е. $\exists Q, S$ - ступенчатые фигуры (являются многоугольниками): $Q \subset P \subset S$, причем $0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \xRightarrow{\text{Т5.4}} P \text{ - квадрируемая фигура} \Rightarrow \exists \mu(P) : \\ \mu(P) = \underline{\mu}(P) = \sup \tilde{\mu}(Q) \geq \sup_{\substack{Q: Q \subset P \\ Q \text{ - ступенчатая} \\ \text{фигура}}} \tilde{\mu}(Q) = \sup_T s_T(f) = \underline{I} = I \\ \mu(P) = \overline{\mu}(P) = \inf \tilde{\mu}(S) \leq \inf_{\substack{S: S \supset P \\ S \text{ - ступенчатая} \\ \text{фигура}}} \tilde{\mu}(S) = \inf_T S_T(f) = \overline{I} = I \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$I \leq \mu(P) \leq I \Rightarrow \mu(P) = I$$

□

Замечание. Если $f(x) \in C[a, b], f(x) \leq 0$, то $\int_a^b f(x) dx = -\mu(P)$

Если $f(x) \in C[a, b]$, причем меняет знак на $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx$ - алгебраическая разность площадей.

Определение. r, φ - полярные координаты. Пусть $r(\varphi) \in C[\alpha, \beta]$. Плоская фигура $P = \{(r, \varphi) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq r \leq r(\varphi)\}$

Теорема 5.5. r, φ - полярные координаты $r(\varphi) \in C[\alpha, \beta] \Rightarrow$ криволинейный сектор $P = \{(r, \varphi) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq r \leq r(\varphi)\}$ - квадрируемая фигура, причем $\mu(P) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$

Глава 6

Собственные и несобственные интегралы.

Лекция 8

28.02

6.1 Несобственный интеграл первого рода, их сходимость и расходимость. Независимость сходимости (расходимости) несобственного интеграла первого рода от значения его постоянного (неособенного) предела

Определение. Пусть $\forall c \geq a$ $f(x)$ интегрируема на $[a, c]$. Выражение $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется несобственным интегралом I рода от $f(x)$ на $[a, +\infty)$. Если $\exists \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x)dx = A$, то число A называется величиной

этого интеграла. Обозначение: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = A$

Определение. Если $\exists \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x)dx$, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся, иначе - расходящимся.

Теорема 6.1. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится (расходится) $\Rightarrow \forall a' \geq a \int_{a'}^{+\infty} f(x)dx$ тоже сходится (расходится).

Доказательство. $\forall c \geq a, \forall a' \geq a \exists \int_a^c f(x)dx = \underbrace{\int_a^{a'} f(x)dx}_{\text{собственный интеграл (число)}} + \int_{a'}^c f(x)dx \xrightarrow{c \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_{a'}^{+\infty} f(x)dx$

сходятся или расходятся одновременно. А их величины (в случае сходимости) отличаются на $\int_a^{a'} f(x)dx$, (т.е. на константу)

□

Определение. Пусть $\forall c \leq a$ $f(x)$ интегрируема на $[c, a]$. Выражение $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ называется несобственным

интегралом I рода от $f(x)$ на $(-\infty, a]$. Если $\exists \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^a f(x)dx = A$, то число A называется величиной

этого интеграла. Обозначение: $\int_{-\infty}^a f(x)dx = A$

Определение. Если $\exists \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^a f(x)dx$, то $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ называется сходящимся, иначе - расходящимся.

Теорема 6.2. $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ сходится (расходится) $\Rightarrow \forall a' \leq a \int_{-\infty}^{a'} f(x)dx$ тоже сходится (расходится)

Доказательство. Самостоятельно. □

Определение. Пусть $\forall a, b$ $f(x)$ - интегрируема на $[a, b]$. Выражение $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется несобственным

интегралом I рода от $f(x)$ на $(-\infty, +\infty)$. Если $\exists c : \int_{-\infty}^c f(x)dx$ и $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ сходятся, то $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ назы-

вается сходящимся, а число $A = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$ называется величиной $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Обозначение:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = A$. Если такого c не существует, то $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется расходящимся.

Теорема 6.3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится (расходится) $\Rightarrow \forall c' \int_{-\infty}^{c'} f(x)dx$ и $\int_{c'}^{+\infty} f(x)dx$ являются сходящимися,

при этом $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c'} f(x)dx + \int_{c'}^{+\infty} f(x)dx$

Доказательство. $\exists c : \int_{-\infty}^c f(x)dx$ и $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ сходятся \Rightarrow

$$\begin{aligned} & \exists \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_c^a f(x)dx \left| \int_c^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_c^a f(x)dx \right| \xrightarrow{\text{Т6.1}} \\ & \exists \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^c f(x)dx \left| \int_{-\infty}^c f(x)dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^c f(x)dx \right| \xrightarrow{\text{Т6.2}} \end{aligned}$$

$\forall c'$

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & \int_{c'}^{+\infty} f(x)dx \text{ сходится} \\ & \int_{-\infty}^{c'} f(x)dx \text{ сходится} \end{aligned} \right| \begin{aligned} & \int_{c'}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{c'}^a f(x)dx - \text{число} \\ & \int_{-\infty}^{c'} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^{c'} f(x)dx - \text{число} \end{aligned} \end{aligned}$$

Рассмотрим $\int_{c'}^{+\infty} f(x)dx + \int_{-\infty}^{c'} f(x)dx =$

$$\begin{aligned} & = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{c'}^a f(x)dx + \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^{c'} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\int_{c'}^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx \right] + \lim_{b \rightarrow -\infty} \left[\int_b^c f(x)dx + \int_c^{c'} f(x)dx \right] = \\ & \int_{c'}^c f(x)dx + \int_c^{c'} f(x)dx + \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_c^a f(x)dx + \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^c f(x)dx = \int_c^{+\infty} f(x)dx + \int_{-\infty}^c f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad \square \end{aligned}$$

Пример. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, $f(x) = \frac{1}{x^p}$ непрерывна при $x \geq 1$ (даже при $x > 0$) \Rightarrow интегрируема на $[a, c] \forall c \geq 1$

$p > 1$ $\int_1^c \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_{x=1}^{x=c} = \frac{1}{1-p} \left(\frac{1}{c^{p-1}} - 1 \right) \xrightarrow{c \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-p} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$ (сходится)

$p < 1$ $\int_1^c \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} \left(\frac{1}{c^{p-1}} - 1 \right) \xrightarrow{c \rightarrow +\infty} +\infty \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = +\infty$ (расходится)

$p = 1$ $\int_1^c \frac{dx}{x} = \ln(x) \Big|_{x=1}^{x=c} = \ln(c) \xrightarrow{c \rightarrow +\infty} +\infty \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$ (расходится)

Итого: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ - сходится при $p > 1$. Расходится при $p \leq 1$. $\Rightarrow \forall a > 0 \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ - сходится при $p > 1$. Расходится при $p \leq 1$

6.2 Несобственные интегралы второго рода, их сходимость и расходимость. Независимость сходимости (расходимости) несобственного интеграла второго рода от значения его постоянного (неособенного) предела

Определение. Пусть $\forall c \in [a, b] \left[\forall c \in (a, b) \right] f(x)$ интегрируема на $[a, c]$ [на $[c, b]$]. Выражение $\int_a^b f(x) dx$ называется несобственным интегралом второго рода с особой точкой $b-0$ [от $f(x)$ на $[a, b)$ [на $(a, b]$].

Если $\exists \lim_{c \rightarrow b-0} \int_a^c f(x) dx = A$ $\left[\exists \lim_{c \rightarrow a+0} \int_c^b f(x) dx = A \right]$, то число A называется его величиной. Обозначение:

$\int_a^b f(x) dx = A$. Интеграл, имеющий конечную величину называется сходящимся, в противном случае - расходящимся.

Теорема 6.4. $\int_a^b f(x) dx$ с особой точкой $b-0$ сходится (расходится) $\Rightarrow \forall c \in [a, b) \int_c^b f(x) dx$ с особой точкой $b-0$ тоже сходится (расходится).

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 6.5. $\int_a^b f(x) dx$ с особой точкой $a+0$ сходится $\Rightarrow \forall c \in (a, b] \int_a^c f(x) dx$ с особой точкой $a+0$ тоже сходится (расходится).

Доказательство. Самостоятельно. □

Самостоятельно. Ввести понятие $\int_a^b f(x) dx$ с двумя особыми точками $b-0$ и $a+0$. Дать определение сходимости (расходимости) такого интеграла. Доказать, что если такой интеграл сходится, то его величина не зависит от выбора промежуточной точки $c \in (a, b)$

Лекция 9

Теорема 6.6. Собственный $\int_a^b f(x)dx$, рассмотрим его как несобственный с особой точкой $b-0$ (c особой $a+0$), сходится, причем значения совпадают.

Доказательство. $f(x)$ интегрируема на \Rightarrow ограничена $\Rightarrow \exists M > 0 : \forall x \in [a, b] |f(x)| \leq M$

$$1) \text{ Особая точка } \boxed{b-0} \quad \forall C \in [a, b) \quad \left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^C f(x)dx \right| = \left| \int_C^b f(x)dx \right| \leq \left| \int_C^b |f(x)|dx \right| = \int_C^b |f(x)|dx \leq \int_C^b Mdx = M(b-C) \xrightarrow{C \rightarrow b-0} 0 \Rightarrow \lim_{C \rightarrow b-0} \int_a^C f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

2) Особая точка $\boxed{a+0}$ - самостоятельно. □

Пример: $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ $\frac{1}{x^p}$ - непрерывна при $x > 0$

$$1) \boxed{p > 1} \int_c^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_{x=c}^{x=1} = \frac{1}{1-p} \left(1 - \frac{1}{c^{p-1}} \right) \xrightarrow{c \rightarrow 0+0} +\infty \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x^p} = +\infty - \text{расходится}$$

$$2) \boxed{p < 1} \int_c^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} \left(1 - \frac{1}{c^{p-1}} \right) \xrightarrow{c \rightarrow 0+0} \frac{1}{1-p} \Rightarrow \int_c^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} - \text{сходится}$$

$$3) \boxed{p = 1} \int_c^1 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_{x=c}^{x=1} = \ln 1 - \ln c = -\ln c \xrightarrow{c \rightarrow 0+0} +\infty \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty - \text{расходится}$$

Итого: $\int_0^a \frac{dx}{x^p}$ - сходится при $p < 1$, расходится при $p \geq 1 \xRightarrow{\text{Т6.6}} \forall a > 0 \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ - сходится при $p < 1$, расходится при $p \geq 1$.

6.3 Несобственные интегралы с несколькими особыми точками.

В общем случае несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где a - число или $-\infty$, b - число или $+\infty$, причем на промежутке (a, b) - лишь конечное количество точек, в которых $f(x)$ не является интегрируемой в собственном смысле, разбивается на сумму конечного количества слагаемых, каждое из которых - несобственный интеграл с единственной особенностью (один из пределов интегрирования). Его величина (если $\boxed{\text{все}}$ слагаемые сходятся) не зависит от выбора промежуточных точек.

$$\text{Пример: } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^2-1} + \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2-1} + \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2-1} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2-1} + \int_1^2 \frac{dx}{x^2-1} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$$

$$\text{Рассмотрим } \int_1^2 \frac{dx}{x^2-1} \quad \forall c \in (1; 2] \quad \int_c^2 \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \Big|_{x=c}^{x=2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{c+1}{c-1} \right) \xrightarrow{c \rightarrow 1+0} +\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{dx}{x^2-1} = +\infty - \text{расходится} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} - \text{расходится.}$$

6.4 Формула Ньютона-Лейбница для несобственных интегралов.

Вычисление несобственных интегралов способами замены переменной и интегрирования по частям.

Теорема 6.7. Пусть $f(x) \in C[a, b)$, где b - число или $+\infty$, $F(x)$ - первообразная к $f(x)$ на $[a, b) \Rightarrow$ из существования одного из пределов следует существования другого и равно: $\int_a^b f(x)dx = \underbrace{\lim_{c \rightarrow b-0} F(c) - F(a)}_{\text{обозн. } F(b-0)}$

$\left(\text{т.е. } \int_a^b F(x)dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b-0} \right)$ Т.е формула Ньютона-Лейбница справедлива и для сходящихся несобственных интегралов.

Доказательство. $f(x) \in C[a, b) \Rightarrow \exists F(x)$ — первообразная к $f(x)$ на $[a, b)$. $\forall c \in [a, b)$ рассмотрим $\int_a^c f(x)dx = F(c) - F(a)$, а теперь $c \rightarrow b-0$ \square

Случай где a - число или $-\infty$, b - число или $+\infty$ рассматривается аналогично.

Примеры: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{x=1}^{+\infty} = 1, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_{x=0}^{x=1} = 2$

Теорема 6.8. $f(x) \in C[a, b)$ (где b - число или $+\infty$), $\varphi(t) : \varphi(t)$ строго возрастает на $[\alpha, \beta)$ (где β - число или $+\infty$), $\varphi(\alpha) = a, \lim_{t \rightarrow \beta-0} \varphi(t) = b-0, \varphi'(t) \in C[\alpha, \beta) \Rightarrow$ из существования одного из интегралов следует

существование другого и их равенство: $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Доказательство. $\exists \Theta(x)$ — обратная функция к $\varphi(t) \Rightarrow \Theta(a) = \alpha, \lim_{x \rightarrow b-0} \Theta(x) = \beta-0$. Берем $\forall c \in [a, b) \Rightarrow$

$\exists! \gamma \in [\alpha, \beta) : \Theta(c) = \gamma$, т.е $\varphi(\gamma) = c$. Рассмотрим $\int_a^c f(x)dx \underset{\substack{\text{по Т о} \\ \text{замене} \\ \text{переменной}}}{=} \int_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, а теперь $c \rightarrow b-0$ \square

Случай где a - число или $-\infty$ ($\varphi(t)$ строго убывает) аналогично.

По теореме 6.8 : если после замены получен собственный интеграл, то так устанавливается сходимость.

Пример: $\int_1^2 \frac{xe^x dx}{\sqrt{x^2-1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2-1} = t, x^2 = t^2 + 1, xdx = tdt, \\ x = 2 \Leftrightarrow t = \sqrt{3}, x \rightarrow 1+0 \Leftrightarrow t \rightarrow 0+0 \end{array} \right| = \int_0^{\sqrt{3}} e^{\sqrt{t^2+1}} dt \Rightarrow \int_1^2 \frac{xe^x dx}{\sqrt{x^2-1}} - \text{сходится.}$

По теореме 6.8 особую точку можно перевести в $+\infty$.

$$\begin{aligned} 1) \int_{-\infty}^a f(x)dx &= \left| \begin{array}{l} x = -t, dx = -dt, \\ x = a \Leftrightarrow t = -a, x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty \end{array} \right| = - \int_{+\infty}^{-a} f(-t)dt = \int_{-a}^{+\infty} f(-t)dt \\ 2) \int_a^b f(x)dx &= \left| \begin{array}{l} b-0 - \text{особая точка}, x = \frac{a+bt}{1+t}, t = \frac{x-a}{b-a}, \\ x = a \Leftrightarrow t = 0, x \rightarrow b-0 \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty, dx = \frac{(b-a)dt}{(1+t)^2} \end{array} \right| = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{a+bt}{1+t}\right) \frac{(b-a)dt}{(1+t)^2} = \\ &= (b-a) \int_0^{+\infty} f\left(\frac{a+bt}{1+t}\right) \frac{dt}{(1+t)^2} \end{aligned}$$

$$3) \int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{l} a+0 - \text{особая точка}, x = \frac{b+at}{1+t} \Rightarrow t = \frac{x-b}{a-x}, \\ x=b \Leftrightarrow t=0, x \rightarrow a+0 \Rightarrow t \rightarrow +\infty, dx = \frac{(a-b)dt}{(1+t)^2} \end{array} \right| = \int_{+\infty}^0 f\left(\frac{b+at}{1+t}\right) \frac{(a-b)dt}{(1+t)^2} =$$

$$= (b-a) \int_0^{+\infty} f\left(\frac{b+at}{1+t}\right) \frac{dt}{(1+t)^2}$$

Теорема 6.9. $u(x), v(x) : u'(x), v'(x) \in C[a, b]$ (где b - число или $+\infty$) \Rightarrow из существования двух пределов следует существование третьего, а также равенство: $\int_a^b u(x)v'(x)dx = \lim_{c \rightarrow b-0} u(c)v(c) - \int_a^b u'(x)v(x)dx - u(a)v(a)$

$$\left(\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) \Big|_a^{b-0} - \int_a^b u'(x)v(x)dx \right)$$

Доказательство. Берем $\forall c \in [a, b] \Rightarrow$ (по формуле интегрирования по частям в собственных интегралах) \Rightarrow

$$\int_a^c u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) \Big|_a^c - \int_a^c u'(x)v(x)dx, \text{ а теперь } c \rightarrow b-0 \quad \square$$

Случай, где a - число или $-\infty$ - аналогично. По теореме 6.9 также можно устанавливать сходимость.

Пример: $\int_0^1 \frac{\ln(x)dx}{1+x^2} = \int_0^1 \ln(x)d(\arctg(x)) = \ln(x)\arctg(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\arctg(x)}{x}dx$

Рассмотрим $\lim_{x \rightarrow 0+0} (\ln(x) \underbrace{\arctg(x)}_{\sim x}) = \lim_{x \rightarrow 0+0} (x \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{(\frac{1}{x})}{(-\frac{1}{x^2})} = 0 \Rightarrow \int_0^1 \frac{\ln(x)dx}{1+x^2} =$

$$= - \int_0^1 \frac{\arctg(x)dx}{x}$$

$\frac{\arctg(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0+0} 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{\arctg(x)dx}{x}$ можно рассматривать как собственный, так как подынтегральную функцию в данном случае можно доопределить по непрерывности в точке $x=0$

6.5 Линейные свойства несобственного интеграла. Пример неинтегрируемого произведения интегрируемых функций.

Пусть дан $\int_a^b f(x)dx$, где $a < b$, причем b - число или $+\infty$, b - единственная особенность.

Определение. $f(x)$ называется интегрируемой на $[a, b)$, если $\int_a^b f(x)dx$ сходится.

Остальные случаи аналогично.

Теорема 6.10. $f(x)$ интегрируема на $[a, b) \Rightarrow \forall k \in \mathbb{R} k \cdot f(x)$ - тоже интегрируема на $[a, b)$, причем

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

Доказательство. $\forall c \in [a, b) \Rightarrow \int_a^c k \cdot f(x)dx = k \int_a^c f(x)dx$, а теперь $c \rightarrow b-0$ \square

Теорема 6.11. $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a, b] \Rightarrow f(x) \pm g(x)$ тоже интегрируемы на $[a, b]$, причем

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 6.10 и теорема 6.11 - линейные свойства несобственных интегралов.

Теорема 6.12. $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, причем $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

Доказательство. $\forall c \in [a, b] \int_a^c f(x) dx \geq \int_a^c g(x) dx$, а теперь $c \rightarrow b - 0$ □

Пример: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ - сходится. Рассмотрим $g(x) = f(x)$, рассмотрим $\int_0^1 f(x)g(x)dx =$
 $= \int_0^1 \frac{dx}{x}$ - расходится.

6.6 Связь интеграла от функции с интегралом от ее модуля в случае их интегрируемости

Теорема 6.13. $f(x), |f(x)|$ интегрируемы на $[a, b] \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

Доказательство. Самостоятельно. □

tg: @moksimga

Лекция 10

11.03

6.7 Критерий Коши сходимости несобственных интегралов первого и второго рода.

Теорема 6.14 (Критерий Коши). $f(x)$ интегрируема в собственном смысле на $[a, c]$ $\forall c \geq a$, тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ сходится} \Leftrightarrow \exists B \geq a : \forall b_1, b_2 > B \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

Доказательство. \Rightarrow Пусть $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ сходится $\Rightarrow \exists \underbrace{\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x)dx}_{=A}$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists B \geq a : \forall b > B \left| \int_a^b f(x)dx - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

Берем $\forall b_1, b_2 > B \Rightarrow \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| = \left| \int_a^{b_2} f(x)dx - A + A - \int_a^{b_1} f(x)dx \right| \leq \left| \int_a^{b_2} f(x)dx - A \right| + \left| \int_a^{b_1} f(x)dx - A \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

\Leftarrow Пусть $\forall \varepsilon > 0 \exists B \geq 0 : \forall b_1, b_2 > B \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$. Рассмотрим $F(x) = \int_a^x f(t)dt, x \geq a$

Возьмем $\forall \{x_n\} : x_n \geq a, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ (т.е. $\forall B \geq a \exists N : \forall n > N \ x_n > B$), возьмем $\forall m, n > N$ и рассмотрим

$$|F(x_m) - F(x_n)| = \left| \int_a^{x_m} f(t)dt - \int_a^{x_n} f(t)dt \right| = \left| \int_{x_m}^{x_n} f(t)dt \right| < \varepsilon, \text{ т.е. } \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, n > N \Rightarrow |F(x_m) - F(x_n)| < \varepsilon, \text{ т.е. } \{F(x_n)\} - \text{фундаментальная} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) - \text{может зависеть от } x_n.$$

Пусть $\exists x'_n : x'_n \geq a, \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} F(x'_n) = A'$

$\exists x''_n : x''_n \geq a, \lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} F(x''_n) = A''$ Рассмотрим $\{z_n\} : \underbrace{z_1}_{=x'_1}, \underbrace{z_2}_{=x''_1}, \underbrace{z_3}_{x'_2}, \underbrace{z_4}_{x''_2}, \dots, \underbrace{z_{2n-1}}_{x'_n}, \underbrace{z_{2n}}_{x''_n}, \dots \Rightarrow$

$$z_m \geq a, \lim_{n \rightarrow \infty} z_m = +\infty \Rightarrow \exists \lim_{m \rightarrow \infty} F(z_m). \text{ Рассмотрим } A' = \lim_{n \rightarrow \infty} F(\underbrace{z_{2n-1}}_{x'_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(\underbrace{z_{2n}}_{x''_n}) = A'' \Rightarrow$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} F(x), \text{ т.е. } \exists \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x)dx, \text{ т.е. } \int_a^c f(x)dx \text{ сходится}$$

□

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx \text{ формулировка и доказательство - самостоятельно.}$$

Теорема 6.15. $f(x)$ интегрируема в собственном смысле на $[a, c]$ $\forall c \in [a, b)$, тогда: $\int_a^b f(x)dx$ (с особой

точкой $b - a$) сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists B \in [a, b) : \forall b_1, b_2 \in (B, b) \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$

Доказательство. Самостоятельно.

□

$$\int_a^b f(x)dx \text{ с особой точкой } a + 0 \text{ формулировка и доказательство - самостоятельно.}$$

6.8 Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Сходимость абсолютно сходящихся несобственных интегралов.

Определение. Пусть $f(x)$ интегрируема в собственном смысле на $[a, c] \forall c \geq a$. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ является сходящимся.

$\int_{-\infty}^a f(x)dx, \int_a^b f(x)dx$ с особой точкой $b-0$, $\int_a^b f(x)dx$ с особой точкой $a+0$ - формулировка определений абсолютной сходимости - самостоятельно.

Теорема 6.16. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

Доказательство. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно, т.е. $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится $\Rightarrow_{\text{кр. Коши}} \forall \varepsilon > 0 \exists B \geq a :$

$$\forall b_1, b_2 > B \quad \left| \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx \right| < \varepsilon. \text{ Но } \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| \leq \left| \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx \right| < \varepsilon \Rightarrow_{\text{кр. Коши}} \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ сходится.} \quad \square$$

$\int_{-\infty}^a f(x)dx$ - формулировка и доказательство - самостоятельно.

Теорема 6.17. $\int_a^b f(x)dx$ с особой точкой $b-0$ сходится абсолютно $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ с особой точкой $b-0$ сходится.

Доказательство. Самостоятельно. \square

$\int_a^b f(x)dx$ с особой точкой $a+0$ - формулировка и доказательство - самостоятельно.

6.9 Необходимое и достаточное условие сходимости несобственных интегралов первого и второго рода от неотрицательных функций.

Теорема 6.18. $f(x) \geq 0 \forall x \geq a, f(x)$ интегрируема в собственном смысле на $[a, c] \forall c \geq a; F(x) = \int_a^x f(t)dt$, тогда: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится $\Leftrightarrow \exists M > 0 : 0 \leq F(x) \leq M \forall x \geq a$

Доказательство. $\forall x_1, x_2 : a \leq x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_2) = \int_a^{x_2} f(t)dt = \underbrace{\int_a^{x_1} f(t)dt}_{=F(x_1)} + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt}_{\geq 0} \geq F(x_1) \Rightarrow F(x)$

монотонно возрастает на $[a, +\infty)(*)$

\Rightarrow Пусть $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится $\Rightarrow \exists \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x)dx = A \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = A \Rightarrow 0 \leq F(x) \leq A \forall x \geq a$ (*)

\Leftarrow Пусть $\exists M > 0 : 0 \leq F(x) \leq M \forall x \geq a \Rightarrow \exists \sup_{x \geq a} F(x) = A$ - число, т.е. $1) F(x) \leq A \forall x \geq a$
 $2) \forall \varepsilon > 0 \exists B \geq A : F(B) > A - \varepsilon$ (*)
 $\Rightarrow \forall x > B F(x) \geq F(B) > A - \varepsilon$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists B \geq a : \forall x > B \quad A - \varepsilon < F(x) \leq A < A + \varepsilon$, т.е. $|F(x) - A| < \varepsilon$,
 т.е. $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = A$, т.е. $\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x)dx$, т.е. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. \square

$\int_{-\infty}^a f(x)dx$ - формулировка и доказательство - самостоятельно.

Теорема 6.19. $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b), f(x)$ интегрируема в собственном смысле на $[a, c] \forall c \in [a, b), F(x) = \int_a^x f(t)dt$, тогда: $\int_a^b f(x)dx$ с особой точкой $b - 0$ сходится $\Leftrightarrow \exists M > 0 : 0 \leq F(x) \leq M \forall x \in [a, b)$

Доказательство. Самостоятельно. \square

$\int_a^b f(x)dx$ с особой точкой $a + 0$ - формулировка и доказательство - самостоятельно.

6.10 Признак сравнения (в допределной и предельной форме) для сходимости несобственных интегралов первого и второго рода от неотрицательных функций.

Теорема 6.20 (признак сравнения в допределной форме). $f(x), g(x)$ интегрируемы в собственном смысле

на $[a, c] \forall c \geq a, 0 \leq f(x) \leq g(x) \forall x \geq a \Rightarrow$
 $1) \int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится
 $2) \int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится.

Доказательство. Рассмотрим $F(x) = \int_a^x f(t)dt, G(x) = \int_a^x g(t)dt \Rightarrow 0 \leq F(x) \leq G(x) \forall x \geq a$

1) Пусть $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится $\Rightarrow \exists M > 0 : 0 \leq G(x) \leq M \forall x \geq a \Rightarrow 0 \leq F(x) \leq G(x) \leq M \forall x \geq a \xrightarrow{\text{Т6.18}} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

2) Пусть $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Предположим, что $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится $\xRightarrow{(1)} \int_a^{+\infty} f(x)dx$ - сходится - противоречие $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится. \square

Следствие 1. $f(x) \geq 0 \forall x \geq a, f(x)$ интегрируема в собственном смысле на $[a, c] \forall c \geq a; \exists p > 1 : f(x) = O\left(\frac{1}{x^p}\right)$ при $x \rightarrow +\infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

Доказательство. $\exists C > 0, \exists b \geq \max(a, 1) : 0 \leq f(x) \leq \frac{C}{x^p} \forall x \geq b. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится (т.к. $p > 1$) \Rightarrow

$$\Rightarrow \int_b^{+\infty} \frac{Cdx}{x^p} \xRightarrow{\text{T6.20}} \int_b^{+\infty} f(x)dx \text{ сходится}$$

□

$\int_{-\infty}^a$ - формулировка и доказательство признака сравнения (без следствия) - самостоятельно.

Теорема 6.21. $f(x), g(x)$ интегрируемы в собственном смысле на $[a, c] \forall c \in [a, b); 0 \leq f(x) \leq g(x) \forall x \in$

1) $\int_a^b g(x)dx$ с особой точкой $b-0$ сходится $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ с особой точкой $b-0$ сходится

$[a, b) \Rightarrow$ 2) $\int_a^b f(x)dx$ с особой точкой $b-0$ расходится $\Rightarrow \int_a^b g(x)dx$ с особой точкой $b-0$ расходится

Доказательство. Самостоятельно.

□

$\int_a^b f(x)dx$ с особой точкой $a+0$ - формулировка и доказательство самостоятельно.

Следствие 1. $f(x) \geq 0 \forall x \in (0; a], f(x)$ интегрируема в собственном смысле на $[c, a] \forall c \in (0; a]; \exists p < 1 : f(x) = O\left(\frac{1}{x^p}\right)$ при $x \rightarrow 0+0 \Rightarrow \int_0^a f(x)dx$ сходится

Доказательство. Самостоятельно.

□

Теорема 6.22 (признак сравнения в предельной форме). $f(x), g(x)$ интегрируемы в собственном смысле

на $[a, c] \forall c \geq a, f(x) \geq 0 \forall x \geq a, g(x) > 0 \forall x \geq a, \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in (0, +\infty) \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists B \geq a : \forall x \geq B \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - k \right| < \varepsilon$, т.е. $k - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < k + \varepsilon$

Берем $\varepsilon = \frac{k}{2} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{k}{2} &< \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3k}{2} \\ \frac{k}{2}g(x) &< f(x) < \frac{3k}{2}g(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{T6.20}$

□

$\int_{-\infty}^a f(x)dx$ формулировка и доказательство - самостоятельно.

Теорема 6.23. $f(x), g(x)$ интегрируемы в собственном смысле на $[a, c] \forall c \in [a, b), f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b),$

$g(x) > 0 \forall x \in [a, b), \exists \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in (0, +\infty) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ с особой точкой $b-0$ и $\int_a^b g(x)dx$ с особой точкой $b-0$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Самостоятельно.

□

$\int_a^b f(x)dx$ с особой точкой $a+0$ формулировка и доказательство - самостоятельно.

6.11 Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Признаки Дирихле и Абеля для сходимости несобственных интегралов первого и второго рода.

Определение. $f(x)$ интегрируема в собственном смысле на $[a, c] \forall c \geq a$. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется условно

сходящимся, если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, но $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ расходится.

Формулировка определений условно сходящихся $\int_{-\infty}^a f(x)dx, \int_a^b f(x)dx$ с особой точкой $b-0, \int_a^b f(x)dx$ с особой точкой $a+0$ - самостоятельно.

Теорема 6.24 (признак Дирихле). $f(x)$ непрерывна при $x \geq a, F(x)$ - первообразная к $f(x)$ на $[a, +\infty)$,
 $\exists g'(x) \forall x \geq a,$

причем $\exists M > 0 : |F(x)| \leq M \forall x \geq a, g(x) :$
 $\begin{aligned} &g'(x) \text{ непрерывна при } x \geq a, \\ &g'(x) \leq 0 \forall x \geq a, \end{aligned} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \text{ сходится.}$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

Лекция 11

14.03

Доказательство. $g(x) \geq 0 \forall x \geq a, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists B > 0 : \forall x > B \ 0 \leq g(x) < \frac{\varepsilon}{3M}$. Берем $\forall b_1, b_2 > B \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx \right| &= \left| \int_{b_1}^{b_2} g(x)d(F(x)) \right| = \left| F(x)g(x) \Big|_{b_1}^{b_2} + \int_{b_1}^{b_2} F(x)(-g'(x))dx \right| = \left| F(b_2)g(b_2) - F(b_1)g(b_1) + \int_{b_1}^{b_2} F(x)(-g'(x))dx \right| \\ &\leq |F(b_2)g(b_2)| + |F(b_1)g(b_1)| + \left| \int_{b_1}^{b_2} F(x)(-g'(x))dx \right| < \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M + M \left| \int_{b_1}^{b_2} (-g'(x))dx \right| = \frac{2\varepsilon}{3} + \\ &+ M |g(b_1) - g(b_2)|_{\text{БОО}} \underset{b_2 \geq b_1}{=} \frac{2\varepsilon}{3} + M \underbrace{(g(b_1) - g(b_2))}_{\geq 0} \leq \frac{2\varepsilon}{3} + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon_{\text{Кр. Коши}} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \text{ сходится. } \square \end{aligned}$$

$\int_{-\infty}^a$ - формулировка и доказательство - самостоятельно.

Теорема 6.25. $f(x)$ непрерывна при $x \in [a, b), F(x)$ - первообразная к $f(x)$ на $[a, b), \exists M > 0 : |F(x)| \leq M \forall x \in [a, b), g(x) : \exists g'(x) \forall x \in [a, b), g'(x)$ непрерывна на $[a, b), g'(x) \leq 0 \forall x \in [a, b), \lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx$ с особой точкой $b-0$ сходится.

Доказательство. Самостоятельно. □

\int_a^b с особой точкой $a + 0$ - формулировка и доказательство - самостоятельно.

Теорема 6.26. (признак Абеля) $f(x) : \int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится, $f(x)$ непрерывна при $x \geq 0$, $g(x) : \int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходится, $g'(x)$ непрерывна при $x \geq a$, $g'(x) \leq 0 \forall x \geq a$, $\exists k > 0 : |g(x)| \leq k \forall x \geq a$.

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ сходится.

Доказательство. Рассмотрим $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится $\Rightarrow \exists \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x)dx = A = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists B \geq a : \forall x > B |F(x) - A| < \frac{\varepsilon}{4k}$

$F(x)$ - первообразная к $f(x)$ на $[a, +\infty)$; Берем $\forall b_1, b_2 > B \Rightarrow \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx \right| = \left| \int_{b_1}^{b_2} g(x)d(F(x) - A) \right| =$
 $= \left| (F(x) - A)g(x) \Big|_{b_1}^{b_2} + \int_{b_1}^{b_2} (F(x) - A)(-g'(x))dx \right| = \left| (F(b_2) - A)g(b_2) - (F(b_1) - A)g(b_1) + \int_{b_1}^{b_2} (F(x) - A)(-g'(x))dx \right| \leq$
 $\leq |F(b_2) - A| \cdot |g(b_2)| + |F(b_1) - A| \cdot |g(b_1)| + \left| \int_{b_1}^{b_2} (F(x) - A)(-g'(x))dx \right| < \frac{\varepsilon}{4k} \cdot k + \frac{\varepsilon}{4k} \cdot k + \frac{\varepsilon}{4k} \cdot \left| \int_{b_1}^{b_2} (-g'(x))dx \right| =$
 $= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4k} |g(b_1) - g(b_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4k} (k + k) = \varepsilon \quad \text{Кр. Коши} \quad \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \text{ сходится.} \quad \square$

$\int_{-\infty}^a$ - формулировка и доказательство - самостоятельно.

Теорема 6.27. $f(x)$ непрерывна при $x \in [a, b)$, $g(x) : \int_a^b f(x)dx$ с особой точкой $b - 0$ сходится, $g'(x)$ непрерывна при $x \in [a, b)$, $g'(x) \leq 0 \forall x \in [a, b)$, $\exists k > 0 : |g(x)| \leq k \forall x \in [a, b)$, $\Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx$

с особой точкой $b - 0$ сходится.

Доказательство. Самостоятельно. \square

\int_a^b с особой точкой $a + 0$ - формулировка и доказательство - самостоятельно.

6.11.1 Пример неинтегрируемости модуля интегрируемых в несобственном смысле функций.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx, \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$$

$$1) \ p > 1 : \quad \left| \frac{\sin x}{x^p} \right| \leq \frac{1}{x^p}, \quad \left| \frac{\cos x}{x^p} \right|, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ сходится } (p > 1) \Rightarrow \int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^p} \right| dx \text{ и } \int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^p} \right| dx \text{ сходятся}$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \text{ и } \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx \text{ сходятся абсолютно.}$$

$$f(x) = \cos x; \ F(x) = \sin x, |F(x)| \leq 1$$

$$2) \ 0 < p \leq 1 : \quad \text{Рассмотрим } \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx, \quad g(x) = \frac{1}{x^p}; \ g'(x) = \frac{-p}{x^{p+1}} \in C[1, +\infty), \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx \text{ сходится по}$$

$$\frac{-p}{x^{p+1}} \leq 0 \ \forall x \geq 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^p} = 0$$

признаку Дирихле.

$$\left| \frac{\cos x}{x^p} \right| = \frac{|\cos x|}{x^p} \geq \frac{\cos^2 x}{x^p} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^p} + \frac{\cos 2x}{x^p} \right), \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^p} dx \text{ сходится по Дирихле, но } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ расходится}$$

$$(\text{т.к. } p \leq 1) \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^p} + \frac{\cos 2x}{x^p} \right) dx \text{ расходится.} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^p} \right| dx \text{ расходится по признаку сравнения}$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx \text{ сходится условно. Аналогично } \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \text{ сходится условно.}$$

$$3) \ p \leq 0 : \quad \text{Рассмотрим } \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx. \text{ Докажем расходимость.}$$

$$\text{Отрицание критерия Коши: } \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \text{ расходится} \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall B \geq a \ \exists b_1, b_2 > B : \left| \int_{b_1}^{b_2} \frac{\sin x}{x^p} dx \right| \geq \varepsilon \quad (?)$$

$$\varepsilon = 2, \text{ берем } \forall B \geq a \Rightarrow \exists b_1 = 2k\pi > B, \exists b_2 = 2k\pi + \pi > b_1 > B, k \in \mathbb{N} \quad \left| \int_{b_1}^{b_2} \frac{\sin x}{x^p} dx \right| = \left| \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin x}{x^p} dx \right| =$$

$$\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin x}{x^p} dx \underset{\frac{1}{x^p} \geq 1 \ \forall x \geq 1}{\geq} \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \sin x dx = 2 = \varepsilon \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \text{ расходится. Аналогично } \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx \text{ расходится.}$$

$$\text{Итого: } \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx, \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx \text{ сходятся абсолютно при } p > 1, \text{ сходятся условно при } p \in (0; 1], \text{ расходятся при } p \leq 0.$$

6.12 Главное значение в смысле Коши несобственных интегралов первого и второго рода и его связь с величиной соответствующего несобственного интеграла.

Определение. Пусть $f(x)$ интегрируема в собственном смысле на $\forall [a, b] \subset (-\infty, +\infty)$. Главным значением $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ в смысле Коши называется число равное $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x)dx$ (если он существует). Обозначение: $v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ (Valeur Principale, фр).

Теорема 6.28. Если $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится по Риману, то он сходится и по Коши, причем к той же величине $\left(v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \right)$

Доказательство. $v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x)dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\int_{-R}^0 f(x)dx + \int_0^R f(x)dx \right] = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^0 f(x)dx + \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ □

Но не наоборот!

Доказательство. $v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg}(x)dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_{-R}^R \operatorname{arctg}(x)dx}_{\substack{\text{интеграл от функции} \\ \text{в симметричных пределах}}} = 0$, но $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg}(x)dx$ расходится, т.к.

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{arctg}(x)dx = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{arctg}(x)dx}_{\text{собственный}} + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty} \operatorname{arctg}(x)dx}_{\geq 1}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty} 1 \cdot dx \text{ расходится} \Rightarrow \int_0^{+\infty} \operatorname{arctg}(x)dx \text{ расходится.}$$
 □

Определение. Пусть $f(x)$ интегрируема в собственном смысле на $[a, c - \delta]$ и на $[c + \delta, b]$ $\forall \delta \in (0, \min(c - a, b - c))$. Главным значением $\int_a^b f(x)dx$ в смысле Коши называется число, равное

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+0} \left[\int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx \right] \text{ (если он существует). Обозначение: } v.p. \int_a^b f(x)dx.$$

Теорема 6.29. Если $\int_a^b f(x)dx$ сходится по Риману, то он сходится и по Коши, причем к той же величине $\left(v.p. \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \right)$

Доказательство. Самостоятельно. □

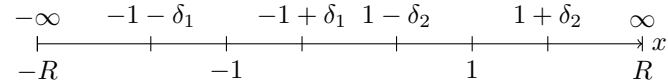
Но не наоборот! Пусть $a < c < b$. Рассмотрим $v.p.$ $\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \left[\int_a^{c-\delta} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\delta}^b \frac{dx}{x-c} \right] =$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \left[\ln(c-x) \Big|_{x=a}^{x=c-\delta} + \ln(x-c) \Big|_{x=c+\delta}^{x=b} \right] = \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \left[\underbrace{\ln(\delta) - \ln(c-a)}_{\nexists \lim_{\delta \rightarrow 0}} + \underbrace{\ln(b-c) - \ln \delta}_{\nexists \lim_{\delta \rightarrow 0}} \right] = \ln \left(\frac{b-c}{c-a} \right), \text{ но}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} \text{ расходится по Риману.}$$

Если особых точек несколько, то промежутки интегрирования разбиваем так, чтобы особые точки $x_0 - 0$ и $x_0 + 0$ (как и $-\infty$ и $+\infty$) входили попарно.

Пример: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$ расходится по Риману.



$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{\delta_1 \rightarrow 0+0} \left[\int_{-2}^{-1-\delta_1} \frac{dx}{x^2-1} + \int_{-1+\delta_1}^0 \frac{dx}{x^2-1} \right] + \lim_{\delta_2 \rightarrow 0+0} \left[\int_0^{1-\delta_2} \frac{dx}{x^2-1} + \int_{1+\delta_2}^2 \frac{dx}{x^2-1} \right] +$$

$$+ \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\int_2^R \frac{dx}{x^2-1} + \int_{-R}^{-2} \frac{dx}{x^2-1} \right] = \lim_{\delta_1 \rightarrow 0+0} \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_{-2}^{-1-\delta_1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_{-1+\delta_1}^0 \right] +$$

$$+ \lim_{\delta_2 \rightarrow 0+0} \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_0^{1-\delta_2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_{1+\delta_2}^2 \right] + \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_2^R + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_{-R}^{-2} \right] = \text{самостоятельно} =$$

$$= 0 \Rightarrow v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = 0$$

tg: @moksimga

Глава 7

Функции многих переменных

Лекция 12

21.03

7.1 Координатное n -мерное пространство

Определение. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - упорядоченная совокупность из n вещественных чисел. $\mathbb{E}_n \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_n \in \mathbb{R}$

Определение. $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}_n, y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{E}_n, \alpha \in \mathbb{R}. x + y \equiv (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n); \alpha x \equiv (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$

1. $x + y = y + x$

2. $(x + y) + z = x + (y + z)$

3. $\exists \theta : x + \theta = x$

4. $\forall x \in \mathbb{E}_n \exists x' : x + x' = \theta$ 5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

7. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

8. $1 \cdot x = x$

$\theta = (0, 0, \dots, 0) \quad x' = (-1)x$

Доказательство. Самостоятельно. □

Определение. $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}_n, y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{E}_n$. Скалярным произведением называется $(x, y) \equiv \sum_{k=1}^n x_k y_k \equiv x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. (В комплексном случае: $(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$)

Свойства скалярного произведения:

1. $(y, x) = (x, y)$ (В комплексном пространстве: $(y, x) = \overline{(x, y)}$)

2. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$

3. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

4. $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

Доказательство. Самостоятельно для x и y . □

$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$ - неравенство Коши - Буняковского.

$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$

Доказательство. $x = \theta \Rightarrow (x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$.

$x \neq \theta$. Рассмотрим $0 \leq \varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2 \underbrace{(x, x)}_{A>0} + 2\lambda \underbrace{(x, y)}_B + \underbrace{(y, y)}_C = A\lambda^2 + 2B\lambda + C \geq 0$

$$0 \geq \frac{\Delta}{4} = B^2 - AC$$

□

Определение. $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}_n$. Нормой x называется $\|x\| \equiv \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$

Свойства нормы:

1. $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Доказательство. 1, 2 - самостоятельно. 3. $\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq \|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$ □

$$\|x\| = \|y + (x - y)\| \leq \|y\| + \|x - y\| \Rightarrow \|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|$$

$$\|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = \|y - x\| \geq \|y\| - \|x\| \Rightarrow \boxed{\|x - y\| \geq \left| \|x\| - \|y\| \right|}$$

Определение. $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}_n, y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{E}_n$. Расстоянием от x до y называется $\rho(x, y) \equiv \|x - y\| = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2}$

Свойства расстояния:

1. $\rho(y, x) = \rho(x, y)$
2. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$
3. $\rho(x, y) \geq 0$, причем $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Определение. $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{E}_n, \varepsilon > 0$.

$U_\varepsilon(x^{(0)}) \equiv \{x \in \mathbb{E}_n : \rho(x, x^{(0)}) < \varepsilon\}$ — открытый шар с центром в $x^{(0)}$ и радиусом ε .

$\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x^{(0)}) \equiv \{x \in \mathbb{E}_n : 0 < \rho(x, x^{(0)}) < \varepsilon\} = U_\varepsilon(x^{(0)}) \setminus \{x^{(0)}\}$ — проколотый открытый шар.

$\varepsilon \geq 0, V_\varepsilon(x^{(0)}) \equiv \{x \in \mathbb{E}_n : \rho(x, x^{(0)}) \leq \varepsilon\}$ — замкнутый шар.

$S_\varepsilon(x^{(0)}) \equiv \{x \in \mathbb{E}_n : \rho(x, x^{(0)}) = \varepsilon\}$ — сфера.

$$\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x^{(0)}) \subset U_\varepsilon(x^{(0)}) \subset V_\varepsilon(x^{(0)}), S_\varepsilon(x^{(0)}) \subset V_\varepsilon(x^{(0)}); U_\varepsilon(x^{(0)}) \cup S_\varepsilon(x^{(0)}) = V_\varepsilon(x^{(0)})$$

Определение. $a_k < b_k, k = 1, 2, \dots, n$.

$(a_1 b_1; \dots, a_k b_k, \dots, a_n b_n) \equiv \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}_n : a_k < x_k < b_k, k = 1, 2, \dots, n\}$ — открытый параллелепипед.

$$a_k \leq b_k, k = 1, 2, \dots, n.$$

$[a_1 b_1, \dots, a_k b_k, \dots, a_n b_n] \equiv \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}_n : a_k \leq x_k \leq b_k, k = 1, 2, \dots, n\}$ — замкнутый параллелепипед.

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) : x_k^{(0)} = \frac{a_k + b_k}{2}, k = 1, 2, \dots, n - \text{центр.}$$

Определение. $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{E}_n, \varepsilon > 0$

$K_\varepsilon(x^{(0)}) \equiv \{x \in \mathbb{E}_n : x_k^{(0)} - \varepsilon < x_k < x_k^{(0)} + \varepsilon, k = 1, 2, \dots, n\}$ — открытый куб.

Определение. $x^{(0)} \in \mathbb{E}_n$. Шаровая окрестность $x^{(0)}$ — открытый шар с центром в $x^{(0)}$; Кубическая окрестность $x^{(0)}$ — открытый куб с центром в $x^{(0)}$

Лемма 7.1. $x^{(0)} \in \mathbb{E}_n$. 1. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : K_\delta(x^{(0)}) \subset U_\varepsilon(x^{(0)})$; 2. $\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x^{(0)}) \subset K_\delta(x^{(0)})$

Доказательство. 1. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} > 0 \quad \forall x \in K_\delta(x^{(0)}) \quad x = (x_1, \dots, x_n), x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$

$$|x_k - x_k^{(0)}| < \delta, k = 1, 2, \dots, n.$$

$$\rho(x, x^{(0)}) = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k - x_k^{(0)}|^2} < \sqrt{\delta^2 \cdot n} = \delta \sqrt{n} = \varepsilon \Rightarrow x \in U_\varepsilon(x^{(0)}) \Rightarrow K_\delta(x^{(0)}) \subset U_\varepsilon(x^{(0)})$$

2. $\forall \delta > 0 \exists \varepsilon = \delta > 0 \quad \forall x \in U_\varepsilon(x^{(0)}) \quad x = (x_1, \dots, x_n), x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \quad |x_k - x_k^{(0)}| < \delta, k = 1, 2, \dots, n.$

$$\rho(x, x^{(0)}) = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k - x_k^{(0)}|^2} < \delta = \varepsilon \Rightarrow |x_k - x_k^{(0)}|^2 < \delta^2 = \varepsilon^2, k = 1, 2, \dots, n \Rightarrow x \in K_\delta(x^{(0)}), \text{ т.е. } U_\varepsilon(x^{(0)}) \subset K_\delta(x^{(0)})$$

□

Лекция 13

25.03

Определение. $E \subset \mathbb{E}_n, x^{(0)} \in \mathbb{E}$. $x^{(0)}$ - внутренняя точка E , если $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x^{(0)}) \subset E$ ($\exists \delta > 0 : K_\delta(x^{(0)}) \subset E$)

Определение. $E \subset \mathbb{E}_n$, E - открытое множество, если $\forall x \in \mathbb{E}, x$ - внутренняя точка E .

Лемма 7.2. $\forall \varepsilon > 0 \forall x^{(0)} \in \mathbb{E}_n, U_\varepsilon(x^{(0)})$ - открытое множество.

Доказательство. $\forall x \in U_\varepsilon(x^{(0)})$, т.е. $\rho(x, x^{(0)}) < \varepsilon$. Рассмотрим $\delta = \varepsilon - \rho(x, x^{(0)}) > 0, U_\delta(x), \forall y \in U_\delta(x)$. Тогда $\rho(y, x^{(0)}) \leq \rho(y, x) + \rho(x, x^{(0)}) < \delta + \rho(x, x^{(0)}) = \varepsilon - \rho(x, x^{(0)}) + \rho(x, x^{(0)}) = \varepsilon \Rightarrow U_\delta(x) \subset U_\varepsilon(x^{(0)})$ □

Лемма 7.3. $\forall \varepsilon > 0 \forall x^{(0)} \in \mathbb{E}_n, K_\varepsilon(x^{(0)})$ - открытое множество.

Доказательство. Самостоятельно. □

Лемма 7.4. $a_k < b_k, k = 1, 2, \dots, n \Rightarrow (a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$ - открытое множество

Доказательство. Самостоятельно. Берем произвольный x из этого параллелепипеда и ищем кубическую окрестность. □

Определение. $E \subset \mathbb{E}_n, x^{(0)} \in \mathbb{E}, x^{(0)}$ - изолированная точка \mathbb{E} , если $\exists \varepsilon > 0 : \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x^{(0)}) \cap \mathbb{E} = \emptyset$

Определение. $E \subset \mathbb{E}_n, x^{(0)} \in E, x^{(0)}$ - предельная точка E , если $\forall \varepsilon > 0 \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x^{(0)}) \cap E \neq \emptyset$

Определение. $E \subset \mathbb{E}_n, x^{(0)} \in \mathbb{E}_n, x^{(0)}$ - точка прикосновения E , если $\forall \varepsilon > 0 U_\varepsilon(x^{(0)}) \cap E \neq \emptyset$

Определение. $E \subset \mathbb{E}_n$. Замыкание $E : \overline{E} \equiv \{x \in \mathbb{E}_n : x - \text{точка прикосновения } E\} \quad E \subset \overline{E}$

Определение. $E \subset \mathbb{E}_n, E$ - замкнутое, если $E = \overline{E}$

Лемма 7.5. $\forall \varepsilon \geq 0, \forall x^{(0)} \in \mathbb{E}_n, V_\varepsilon(x^{(0)})$ - замкнутое множество.

Доказательство. $\forall x \in \mathbb{E}_n : x \notin V_\varepsilon(x^{(0)})$, т.е. $\rho(x, x^{(0)}) > \varepsilon, \delta = \rho(x, x^{(0)}) - \varepsilon > 0$. Возьмем $U_\delta(x)$ и $\forall y \in U_\delta(x)$. $\rho(y, x) < \delta = \rho(x, x^{(0)}) - \varepsilon$. Воспользуемся неравенством треугольника: $\rho(x, x^{(0)}) \leq \rho(x, y) + \rho(y, x^{(0)}) \Rightarrow \rho(y, x^{(0)}) \geq \rho(x, x^{(0)}) - \rho(x, y) > \rho(x, x^{(0)}) - \delta = \rho(x, x^{(0)}) - \rho(x, x^{(0)}) + \varepsilon = \varepsilon \Rightarrow \rho(y, x^{(0)}) > \varepsilon \Rightarrow y \notin V_\varepsilon(x^{(0)}) \Rightarrow V_\varepsilon(x^{(0)}) \cap U_\delta(x) = \emptyset$ □

Лемма 7.6. $\forall \varepsilon > 0 \forall x^{(0)} \in \mathbb{E}_n, S_\varepsilon(x^{(0)})$ - замкнутое множество.

Доказательство. Самостоятельно. □

Лемма 7.7. $a_k \leq b_k, k = 1, 2, \dots, n \Rightarrow [a_1 b_1, \dots, a_n b_n]$ - замкнутое множество.

Доказательство. Самостоятельно. \square

Лемма 7.8. $E \subset \mathbb{E}_n \Rightarrow \overline{E}$ - замкнутое множество.

Доказательство. $E \subset \overline{E} \subset \overline{\overline{E}} \quad \forall x \in \overline{\overline{E}} \Rightarrow x$ - точка прикосновения \overline{E} , т.е. $\forall \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(x) \cap \overline{E} \neq \emptyset$.

Возьмем $y \in U_\varepsilon(x) \cap \overline{E} \Rightarrow y$ - точка прикосновения $E \Rightarrow \forall \delta > 0 \quad U_\delta(y) \cap E \neq \emptyset$. Возьмем $U_\delta(y) \subset U_\varepsilon(x)$

$z \in U_\delta(y) \cap E \subset U_\varepsilon(x) \cap E$. Таким образом, $\forall x \in \overline{\overline{E}} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists z \in U_\varepsilon(x) \cap E \Rightarrow x$ - точка прикосновения E , т.е. $x \in \overline{E}, \overline{\overline{E}} \subset \overline{E}$ \square

Определение. $E \in \mathbb{E}_n$. Дополнение к E : $CE \equiv \mathbb{E}_n \setminus E$

$$E \cap CE = \emptyset, E \cup CE = \mathbb{E}_n, C(CE) = E$$

Лемма 7.9. E - открытое множество $\Leftrightarrow CE$ - замкнутое множество.

Доказательство. $(\Rightarrow) E$ - открытое множество. $\forall x \notin CE$, т.е. $x \in E \quad \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset E \Rightarrow U_\varepsilon(x) \cap CE = \emptyset \Rightarrow x$ - не есть точка прикосновения $CE \Rightarrow CE$ - замкнутое множество.

$(\Leftarrow) CE$ - замкнутое множество. x - точка прикосновения $CE \Rightarrow x \in CE \Rightarrow \forall y \in E, y$ - не есть точка прикосновения $CE \Rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(y) \cap CE = \emptyset \Rightarrow U_\delta(y) \subset E \Rightarrow E$ - открытое множество. \square

Следствие 1. E - замкнутое $\Leftrightarrow CE$ - открытое.

7.2 Последовательности в \mathbb{E}_n

Определение. $E \subset \mathbb{E}_n, E$ - ограниченное множество, если $\exists M > 0 : \|x\| \leq M \quad \forall x \in E$

Определение. $\forall m \in \mathbb{N} \quad \exists x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}) \in \mathbb{E}_n. \{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty$ - последовательность.

$$\{x^{(m)}\}_{m=m_0}^\infty = \{x^{(m_0)}, x^{(m_0+1)}, \dots\}$$

Определение (сходимость по расстоянию). $a \in \mathbb{E}_n, a$ - предел $\{x^{(m)}\}$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall m > N \quad \rho(x^{(m)}, a) = \|x^{(m)} - a\| < \varepsilon \quad \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x^{(m)}, a) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|x^{(m)} - a\| = 0 \right)$

Определение (покоординатная сходимость). $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{E}_n, a$ - предел $\{x^{(m)}\}$, если $\forall k = 1, 2, \dots, n \quad \lim_{m \rightarrow \infty} x_k^{(m)} = a_k$, т.е. $\forall k = 1, 2, \dots, n \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_k : \forall m > N_k \quad |x_k^{(m)} - a_k| < \varepsilon$

Теорема 7.10. *Опр. 1* \Leftrightarrow *Опр. 2*.

Доказательство. $(\Rightarrow) \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall m > N \quad \rho(x^{(m)}, a) = \|x^{(m)} - a\| < \varepsilon \quad \sum_{k=1}^n |x_k^{(m)} - a_k|^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall k = 1, 2, \dots, n \quad |x_k^{(m)} - a_k| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} x_k^{(m)} = a_k$$

$(\Leftarrow) \forall k = 1, 2, \dots, n \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_k : \forall m > N_k \quad |x_k^{(m)} - a_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \Rightarrow \|x^{(m)} - a\|^2 = \sum_{k=1}^n |x_k^{(m)} - a_k|^2 < \frac{\varepsilon^2}{n} \cdot n = \varepsilon^2$, т.е. $\|x^{(m)} - a\| < \varepsilon$ \square

Определение. $E \subset \mathbb{E}_n, x \in \mathbb{E}_n, x$ - граничная точка E , если $\forall \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(x) \cap E \neq \emptyset, U_\varepsilon(x) \cap CE \neq \emptyset$

Определение. $E \subset \mathbb{E}_n$, граница E : $\partial E \equiv \{x \in \mathbb{E}_n, x - \text{граничная точка } E\}$

Лемма 7.11. $E \subset \mathbb{E}_n \Rightarrow \partial E \subset \overline{E}$

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x^{(0)} \in \mathbb{E}_n, \partial U_\varepsilon(x^{(0)}) = \partial V_\varepsilon(x^{(0)}) = \partial S_\varepsilon(x^{(0)}) = S_\varepsilon(x^{(0)}), \partial \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x^{(0)}) = S_\varepsilon(x^{(0)}) \cup \{x^{(0)}\}$ - проверить. \square

Определение. Если последовательность имеет предел, то она называется сходящейся, иначе - расходящейся.

Теорема 7.12 (Единственность предела). $\{x^{(m)}\}$ - сходитсся \Rightarrow ее предел единственный.

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 7.13. $\{x^{(m)}\}$ - сходитсся $\Rightarrow \{x^{(m)}\}$ ограничена

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 7.14. $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x, \lim_{m \rightarrow \infty} y^{(m)} = y, \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = \alpha \Rightarrow \exists \lim_{m \rightarrow \infty} (x^{(m)} + y^{(m)}) = x + y,$
 $\exists \lim_{m \rightarrow \infty} (\alpha_m x^{(m)}) = \alpha x, \exists \lim_{m \rightarrow \infty} (x^{(m)}, y^{(m)}) = (x, y)$

Доказательство. $\{x^{(m)}\}$ - сходитсся \Rightarrow ограничена, т.е $\exists M > 0 : \|x^{(m)}\| \leq M, \forall m = 1, 2, \dots$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x, \text{ т.е } \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall m > N_1 \|x^{(m)} - x\| < \frac{\varepsilon}{2(\|y\| + 1)}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} y^{(m)} = y, \text{ т.е } \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall m > N_2 \|y^{(m)} - y\| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = \max(N_1, N_2) : \forall n > N \left| (x^{(m)}, y^{(m)}) - (x, y) \right| = \left| (x^{(m)}, y^{(m)}) - (x^{(m)}, y) + (x^{(m)}, y) - (x, y) \right| \leq \left| (x^{(m)}, y^{(m)} - y) \right| + \left| (x^{(m)} - x, y) \right| \leq \|x^{(m)}\| \|y^{(m)} - y\| + \|x^{(m)} - x\| \|y\| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2(\|y\| + 1)} \|y\| < \varepsilon \quad \square$$

Следствие 1 (непрерывность нормы). $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x \Rightarrow \exists \lim_{m \rightarrow \infty} \|x^{(m)}\| = \|x\|$

$$\text{Доказательство. } \|x^{(m)}\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{(x^{(m)}, x^{(m)})} = \sqrt{\lim_{m \rightarrow \infty} (x^{(m)}, x^{(m)})} = \sqrt{(x, x)} = \|x\|$$

□

Следствие 2 (непрерывность расстояния). $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x, \lim_{m \rightarrow \infty} y^{(m)} = y \Rightarrow \exists \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x^{(m)}, y^{(m)}) = \rho(x, y)$

Доказательство. Самостоятельно □

Лекция 14

28.03

Определение. $\{x^{(m)}\}$ - последовательность в \mathbb{E}_n ; $1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_p < m_{p+1} < \dots$

Тогда $\{x^{(m_p)}\}_{p=1}^\infty$ называется подпоследовательностью $\{x^{(m)}\}$. Обозначение: $x^{(m_p)} \subset x^{(m)}$.

$$m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, \dots, m_p \geq p, \dots$$

Теорема 7.15. $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = a \Rightarrow \forall \{x^{(m_p)}\} \subset \{x^{(m)}\} \Rightarrow \exists \lim_{p \rightarrow \infty} x^{(m_p)} = a$

Доказательство. Самостоятельно. Расписываем определение предела, только индекс нумерации обозначим через p . □

Теорема 7.16 (Больцано-Вейерштрасса). $\{x^{(m)}\}$ - ограничена $\Rightarrow \exists \{x^{(m_p)}\} \subset \{x^{(m)}\} : \exists \lim_{p \rightarrow \infty} x^{(m_p)}$

Доказательство. $\{x^{(m)}\}$ - ограничена, т.е $\exists M > 0 : \|x^{(m)}\| \leq M$, т.е $\sum_{k=1}^n |x_k^{(m)}|^2 \leq M^2 \Rightarrow |x_1^{(m)}| \leq M$. Рассмотрим числовую последовательность только первых координат $\{x_1^{(m)}\}$ - ограничена \Rightarrow т. Больцано - Вейерштрасса

$\exists \{x_1^{(m_{p_1})}\}_{p_1=1}^\infty \subset \{x_1^{(m)}\} : \exists \lim_{p_1 \rightarrow \infty} x_1^{(m_{p_1})} = a_1 \in \mathbb{R}$. Рассмотрим $\{x^{(m_{p_1})}\}_{p_1=1}^\infty \subset \{x^{(m)}\}$. Для второй координаты получим $\{x_2^{(m_{p_2})}\}_{p_2=1}^\infty$ - ограничена \Rightarrow т. Больцано - Вейерштрасса $\exists \{x_2^{(m_{p_2})}\}_{p_2=1}^\infty \subset \{x_2^{(m)}\} : \exists \lim_{p_2 \rightarrow \infty} x_2^{(m_{p_2})} = a_2 \in \mathbb{R}$.

$\{x^{(m_{p_2})}\}_{p_2=1}^\infty \subset \{x^{(m_{p_1})}\}_{p_1=1}^\infty \subset \{x^{(m)}\}$. Сделаем конечное число шагов. На n -ом шаге $\exists \{x^{(m_{p_n})}\}_{p_n=1}^\infty \subset \{x^{(m)}\} : \exists \lim_{p_n \rightarrow \infty} x_k^{(m_{p_n})} = a_k \Rightarrow \exists \lim_{p_n \rightarrow \infty} x^{(m_{p_n})} = a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ □

Теорема 7.17 (Критерий Коши). $\{x^{(m)}\}$ - сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, p > N \rho(x^{(m)}, x^{(p)}) = \|x^{(m)} - x^{(p)}\| < \varepsilon$

Доказательство. $\Rightarrow \exists \lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = a$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m > N \|x^{(m)} - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\forall m, p > N \Rightarrow \|x^{(m)} - x^{(p)}\| = \|x^{(m)} - a + a - x^{(p)}\| \leq \|x^{(m)} - a\| + \|x^{(p)} - a\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

$\Leftarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, p > N \rho(x^{(m)}, x^{(p)}) = \|x^{(m)} - x^{(p)}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k^{(m)} - x_k^{(p)}|^2} < \varepsilon \Rightarrow \forall k = 1, 2, \dots, n |x_k^{(m)} - x_k^{(p)}| < \varepsilon \Rightarrow \{x_k^{(m)}\}_{m=1}^\infty$ - фундаментальная $\Rightarrow \exists \lim_{m \rightarrow \infty} x_k^{(m)} = a_k \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{E}_n$ \square

7.3 Функции в \mathbb{E}_n

Определение. $E_x \subset \mathbb{E}_n, \forall x \in E_x$ по некоторому закону (f) поставлено в соответствие число $y \in \mathbb{R}$, следовательно $y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$. E_x - множество определения, $E_y \equiv \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), x \in E_x\}$ - множество значений.

Определение. $y = f(x), x \in E \subset \mathbb{E}_n$. Тогда множество $G \equiv \{(x_1, \dots, x_n; y) : (x_1, \dots, x_n) \in E, y = f(x)\} \subset \mathbb{E}_{n+1}$, G - график функции $y = f(x)$

Примеры:

1. $f(x) \equiv c = \text{const} \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ - линейная форма.

7.4 Предел функции

Определение (Коши). $f(x)$ определена при $x \in E, x^{(0)}$ - предельная точка E . Число A называется пределом $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ по множеству E , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}) |f(x) - A| < \varepsilon$

Определение (Гейне). $f(x)$ определена при $x \in E, x^{(0)}$ - предельная точка E . Число A называется пределом $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ по множеству E , если $\forall \{x^{(m)}\} : x^{(m)} \in E, x^{(m)} \neq x^{(0)}, \lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x^{(0)} \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} f(x^{(m)}) = A$

Обозначение: $\lim_{x \rightarrow x^{(0)}} f(x) = A, x \in E$

Теорема 7.18. $f(x)$ определена при $x \in E, x^{(0)}$ - предельная точка $E \Rightarrow$ (Определение 1 \Leftrightarrow Определение 2)

Доказательство. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Берем $\forall \{x^{(m)}\} : x^{(m)} \neq x^{(0)}, \lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x^{(0)}, x^m \in E$

$\forall \delta > 0 \exists N : \forall m > N 0 < \|x^{(m)} - x^{(0)}\| < \delta$, т.е. $x^{(m)} \in \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow |f(x^{(m)}) - A| < \varepsilon$

$\Leftarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}), \text{ но } |f(x) - A| \geq \varepsilon$. Возьмем $\delta = \delta_m = \frac{1}{m} \quad \exists x^{(m)} \in E \cap \overset{\circ}{U}_{\delta_m}(x^{(0)})$, но $|f(x^{(m)}) - A| \geq \varepsilon$. Мы построили последовательность $\{x^{(m)}\}, x^{(m)} \in E, x^{(m)} \neq x^{(0)}, 0 < \|x^{(m)} - x^{(0)}\| < \delta_m = \frac{1}{m}$, т.е. $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x^{(0)} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} f(x^{(m)}) = A \Rightarrow 0 = \lim_{m \rightarrow \infty} |f(x^{(m)}) - A| \geq \varepsilon$ - противоречие. \square

Теорема 7.19. $f(x), x \in E, \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} f(x) = A \Rightarrow \forall F \subset E : x^{(0)}$ - предельная точка $F \Rightarrow \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in F}} f(x) = A$

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. Возьмем $\forall x \in F \cap \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}) \subset E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ □

Теорема 7.20. $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} f(x) = A, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} g(x) = B \Rightarrow \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B; \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B;$

если $B \neq 0 \Rightarrow \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

Доказательство. Самостоятельно. Берем определения по Гейне. □

Теорема 7.21. $\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} f(x) \Rightarrow \exists \eta > 0 \exists M > 0 : |f(x)| \leq M \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\eta(x^{(0)})$

Доказательство. Самостоятельно. Берем определение по Коши. □

Лекция 15

04.04

Теорема 7.22. $\lim_{\substack{x \rightarrow x^{(0)} \\ x \in E}} f(x) = A \neq 0 \Rightarrow \exists \eta > 0 : \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\eta(x^{(0)}) \Rightarrow \operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} A$

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 7.23. $\lim_{\substack{x \rightarrow x^{(0)} \\ x \in E}} f(x) = A, \lim_{\substack{x \rightarrow x^{(0)} \\ x \in E}} g(x) = B, f(x) \geq g(x) \forall x \in E \Rightarrow A \geq B$

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 7.24. $\lim_{\substack{x \rightarrow x^{(0)} \\ x \in E}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x^{(0)} \\ x \in E}} h(x) = A, f(x) \leq g(x) \leq h(x) \forall x \in E \Rightarrow \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x^{(0)} \\ x \in E}} g(x) = A$

Доказательство. Самостоятельно. □

Определение. $x^{(0)} \in \mathbb{E}_n, \delta > 0 \tilde{U}_\delta(x^{(0)}) \equiv U_\delta(x^{(0)}) \setminus (U_{k=1}^n \{x_k \neq x_k^{(0)}\})$
 $E = U_\delta(x^{(0)}), E = \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}), E = K_\delta(x^{(0)}), E = \overset{\circ}{K}_\delta(x^{(0)}), E = \tilde{U}_\delta(x^{(0)}) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \in E)}} f(x)$

Определение. $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{E}_n, \tilde{\delta} > 0, f(x) = f(x_1, \dots, x_n), x \in \tilde{U}_{\tilde{\delta}}(x^{(0)}) (k_1, k_2, \dots, k_n)$ - перестановка $(1, 2, \dots, n)$. Повторный предел: $\lim_{x_{k_1} \rightarrow x_{k_1}^{(0)}} \lim_{x_{k_2} \rightarrow x_{k_2}^{(0)}} \dots \lim_{x_{k_n} \rightarrow x_{k_n}^{(0)}} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если \exists

Примеры: ($n = 2$, точка $(0; 0)$)

1. $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1; \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0. \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}.$

Рассмотрим $\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (x, y) \in (x, kx)}} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{1}{1 + k^2} \Rightarrow \nexists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$

2. $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0; \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$

Рассмотрим $\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (x, y) \in (x, kx)}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k x^3}{x^4 + k^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k x}{k^2 + x^2} = 0.$

Посмотрим $\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (x, y) \in (x, x^2)}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \nexists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

3. $f(x, y) = y \sin \frac{1}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0; \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{x} \Rightarrow \nexists \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{x}.$

Рассмотрим $|f(x, y)| \leq |y|$, т.е. $\underbrace{-|y|}_{\rightarrow 0} \leq f(x, y) \leq \underbrace{|y|}_{\rightarrow 0} \Rightarrow \exists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$

7.5 Непрерывные функции нескольких переменных

Определение. $f(x)$ определена на $E \subset \mathbb{E}_n, x^{(0)} \in E$. $f(x)$ называется непрерывной при $x = x^{(0)} \in E$ по E , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E \cap U_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow |f(x) - f(x^{(0)})| < \varepsilon$.

$x^{(0)} \in E, x^{(0)}$ - не есть изолированная точка $\lim_{\substack{x \rightarrow x^{(0)} \\ x \in E}} f(x) = f(x^{(0)}) \Leftrightarrow f(x)$ непрерывна при $x = x^{(0)}$ по E .

Определение непрерывности функций по Гейне написать самостоятельно.

Определение. $f(x)$ определена на $E \subset \mathbb{E}_n$. $f(x)$ непрерывна на E по E , если $\forall x^{(0)} \in E, f(x)$ непрерывна при $x = x^{(0)}$ по E .

$f(x) = f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n), x \in$ окрестности $x^{(0)}$. Рассмотрим $\varphi(x_k) = f(x_1^{(0)}, \dots, x_{k-1}^{(0)}, x_k^{(0)}, x_{k+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$

Определение. $t = (t_1, t_2, \dots, t_p) \in E \subset \mathbb{E}_p; x = (x_1, \dots, x_n) \in F \subset \mathbb{E}_n; \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ определены на $E \subset \mathbb{E}_p$, причем $\forall t \in E (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in F \subset \mathbb{E}_n, f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ определена на $F \subset \mathbb{E}_n$.

Тогда $y(t) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, определенная на E , называется сложной функцией.

Теорема 7.25. $\exists y(t) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ в окрестности $t^{(0)} \in E$. Пусть $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ - непрерывны при $t = t^{(0)}$ по $E, f(x)$ - непрерывна при $x = x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = (\varphi_1(t^{(0)}), \dots, \varphi_n(t^{(0)})) \in F$ по F .

Тогда $y(t)$ - непрерывна при $t = t^{(0)}$ по E .

Доказательство. $f(x)$ непрерывна при $x = x^{(0)} \in F$ по F , т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \sigma > 0 : \forall x \in F \cap K_\sigma(x^{(0)}) \Rightarrow |f(x) - f(x^{(0)})| < \varepsilon$. $\forall k = 1, 2, \dots, n \varphi_k(t)$ непрерывна при $t = t^{(0)} \in E$ по E , т.е. $\forall \sigma > 0 \exists \delta_k > 0 : \forall t \in E \cap U_{\delta_k}(t^{(0)}) \Rightarrow |\varphi_k(t) - \varphi_k(t^{(0)})| < \sigma \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_n) > 0 \Rightarrow \forall k = 1, \dots, n |\varphi_k(t) - \varphi_k(t^{(0)})| < \sigma$. Рассмотрим $x = (x_1, \dots, x_n) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in F \cap K_\sigma(x^{(0)})$. Тогда $|y(t) - y(t^{(0)})| = |f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) - f(\varphi_1(t^{(0)}), \dots, \varphi_n(t^{(0)}))| < \varepsilon$. □

$$L \equiv M(t), t \in [\alpha, \beta]; M(t) \equiv (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)), \varphi_k(t) \in C[\alpha, \beta]$$

Определение. $E \subset \mathbb{E}_n$. Если $\forall x^{(1)}, x^{(2)} \in E \exists$ непрерывная кривая $M(t) : M(\alpha) = x^{(1)}, M(\beta) = x^{(2)}$, $\forall t \in [\alpha, \beta] M(t) \in E$, то E называется связным множеством.

Определение. $E \subset \mathbb{E}_n$. Если E открытое множество и E связное множество, то E - область.

Определение. Замыканием области E называется замкнутая область.

Теорема 7.26. $f(x)$ непрерывна на $E \in \mathbb{E}_n$ по E , где E - связное множество. Берем $\forall x^{(1)}, x^{(2)} \in E$. Пусть $f(x^{(1)}) = A, f(x^{(2)}) = B$. Тогда $\forall C \in [A, B] \exists x^{(0)} \in E : f(x^{(0)}) = C$.

Доказательство. $\exists M(t) : M(\alpha) = x^{(1)}, M(\beta) = x^{(2)}, \forall t \in [\alpha, \beta] M(t) \in E. M(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), \varphi_k(t) \in C[\alpha, \beta], k = 1, 2, \dots, n$. Рассмотрим $u(t) = f(M(t)) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$. Тогда $u(t) \in C[\alpha, \beta]$. $u(\alpha) = f(\varphi_1(\alpha), \dots, \varphi_n(\alpha)) = f(x^{(1)}) = A, u(\beta) = f(\varphi_1(\beta), \dots, \varphi_n(\beta)) = f(x^{(2)}) = B$. Согласно теореме из первого семестра $\forall c \in [A, B] \exists \gamma \in [\alpha, \beta] : c = u(\gamma) = f(M(\gamma)) = f(\varphi_1(\gamma), \dots, \varphi_n(\gamma)) = f(x^{(0)})$, где $x^{(0)} = (\varphi_1(\gamma), \dots, \varphi_n(\gamma)) \in E$, т.к. E связное множество. □

tg: @moksimga

Лекция 16

Теорема 7.27. E - ограниченное замкнутое множество $E \subset \mathbb{E}_n$; $f(x)$ непрерывна на E по $E \Rightarrow f(x)$ ограничена на E .

Доказательство. $f(x)$ неограничена на E , т.е. $\forall M > 0 \exists x \in E : |f(x)| > M$.

$$M = M_m = m = 1, 2, \dots \quad \exists x^{(m)} \in E : |f(x^{(m)})| > M_m = m.$$

$$\{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty \Rightarrow \exists \{x^{(m_p)}\} \subset \{x^{(m)}\} : \exists \lim_{p \rightarrow \infty} x^{(m_p)} = x^{(0)} \Rightarrow x^{(0)} - \text{точка прикосновения } E \Rightarrow x^{(0)} \in E.$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f(x^{(m_p)}) = f(x^{(0)}), |f(x^{(m_p)})| > m_p \geq 0 \Rightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} f(x^{(m_p)}) = \infty \quad \square$$

E - ограниченное замкнутое множество, $f(x)$ - непрерывная на E по $E \Rightarrow \exists M < +\infty, \exists m > -\infty :$

$$\sup_{x \in E} f(x) = M, \inf_{x \in E} f(x) = m, m \leq M.$$

Теорема 7.28. $E \subset \mathbb{E}_n$, E - ограниченное замкнутое множество, $f(x)$ - непрерывная на E по E , $m =$

$$\inf_{x \in E} f(x), M = \sup_{x \in E} f(x) \Rightarrow \exists x^{(1)}, x^{(2)} \in E : f(x_1) = m, f(x_2) = M.$$

Доказательство. Самостоятельно. \square

Определение. $E \subset \mathbb{E}_n$, $f(x)$ называется равномерно непрерывной на E , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 :$

$$\forall x, y \in E, \rho(x, y) = \|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Теорема 7.29. $E \subset \mathbb{E}_n$, $f(x)$ равномерно непрерывна на $E \Rightarrow f(x)$ непрерывна на E по E .

Доказательство. Самостоятельно. \square

Теорема 7.30. $E \subset \mathbb{E}_n$, E - ограниченное замкнутое множество, $f(x)$ - непрерывна на E по $E \Rightarrow f(x)$ равномерно непрерывна на E .

Доказательство. Самостоятельно. \square

7.6 Производные и дифференциалы функций нескольких переменных

Определение. $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{E}_n$, $f(x)$ определена в окрестности точки $x^{(0)}$. Частной производной по переменной $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ при $x = x^{(0)}$ (в точке $x^{(0)}$) функции $f(x)$ называется $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) =$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^{(0)}, \dots, x_i^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \equiv \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_i^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\Delta x_i}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \right|_{\text{пр}}; \left. \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \right|_{\text{лев}} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x^{(0)}) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x^{(0)}), u(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_i \partial x_i}(x^{(0)}) = \frac{\partial v}{\partial x_i}(x^{(0)}),$$

$$v(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x), \dots$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^{(0)}) = \frac{\partial w}{\partial x_i}(x^{(0)}), w(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$$

$$\text{Рассмотрим } f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

$$(x, y) \neq (0, 0) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = y \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right];$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y (y \neq 0) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y \quad \forall y.$$

$$\text{Найдем } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-\Delta y - 0}{\Delta y} = -1.$$

$$\text{Пусть } (x, y) \neq (0, 0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right]; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x (x \neq 0); \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) =$$

$$= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x \quad \forall x. \quad \text{Тогда } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0 + \Delta x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{\Delta x} = 1$$

Теорема 7.31. Пусть $f(x)$: в окрестности точки $x^{(0)} \ni \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \frac{\partial f}{\partial x_j}(x), \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x), \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x), \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ непрерывны при $x = x^{(0)} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^{(0)}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^{(0)})$.

Доказательство. Рассмотрим $W = f(x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_j^{(0)} + \Delta x_j) - f(x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_j^{(0)}) - f(x_i^{(0)}, x_j^{(0)} + \Delta x_j) + f(x_i^{(0)}, x_j^{(0)})$. Введем две функции от одной переменной $g_1(x_i) = f(x_i, x_j^{(0)} + \Delta x_j) - f(x_i, x_j^{(0)})$ в окрестности точки $x_i^{(0)}$ и $g_2(x_j) = f(x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_j) - f(x_i^{(0)}, x_j)$ в окрестности точки $x_j^{(0)}$.

$$\text{Тогда } W = g_1(x_i^{(0)} + \Delta x_i) - g_1(x_i^{(0)}) = g_2(x_j^{(0)} + \Delta x_j) - g_2(x_j^{(0)}).$$

$$\text{По теореме Лагранжа: } g_1'(x_i^{(0)} + \theta_1 \Delta x_i) \Delta x_i = g_2'(x_j^{(0)} + \theta_2 \Delta x_j) \Delta x_j; \quad g_1'(x_i^{(0)} + \theta_1 \Delta x_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i^{(0)} + \theta_1 \Delta x_i, x_j^{(0)} + \Delta x_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i^{(0)}, x_j^{(0)} + \Delta x_j) = \text{Т. Лагранжа} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_i^{(0)} + \theta_1 \Delta x_i, x_j^{(0)} + \theta_3 \Delta x_j) \Delta x_j;$$

$$g_2'(x_j^{(0)} + \theta_2 \Delta x_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_j^{(0)} + \theta_2 \Delta x_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_i^{(0)}, x_j^{(0)} + \theta_2 \Delta x_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_i^{(0)} + \theta_4 \Delta x_i, x_j^{(0)} + \theta_2 \Delta x_j) \Delta x_i.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_i^{(0)} + \theta_1 \Delta x_i, x_j^{(0)} + \theta_3 \Delta x_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_i^{(0)} + \theta_4 \Delta x_i, x_j^{(0)} + \theta_2 \Delta x_j)$$

□

Определение. $x^{(0)} \in \mathbb{E}_n$, $f(x)$ определена в окрестности точки $x^{(0)}$, $\omega \in \mathbb{E}_n, \|\omega\| = 1$. Производной функции $f(x)$ по направлению ω в точке $x^{(0)}$ называется $\frac{\partial f}{\partial \omega}(x^{(0)}) \equiv \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f(x^{(0)} + t\omega) - f(x^{(0)})}{t}$

$$\text{Пример: } \omega = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, \dots, 0) \quad \frac{\partial f}{\partial \omega}(x^{(0)}) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_i^{(0)} + t, \dots, x_n^{(0)}) - f(x^{(0)})}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \Big|_{\text{пр}}$$

$$\text{Проверить самостоятельно: } \omega = (0, \dots, 0, \overset{i}{-1}, \dots, 0) \quad \frac{\partial f}{\partial \omega}(x^{(0)}) = -\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \Big|_{\text{лев}}$$

$$\text{Пример: рассмотрим } f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$|f(x, y)| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \underbrace{-\sqrt{x^2 + y^2}}_{\rightarrow 0} \leq f(x, y) \leq \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_{\rightarrow 0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(0, 0), \omega = (\cos \alpha, \sin \alpha) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f(t\omega) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{t \sin \frac{1}{t}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+0} \sin \frac{1}{t} - \text{не существует. } \omega = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

$$\text{Рассмотрим } f(x, y) = \begin{cases} 1, & y = x^2, x \neq 0 \\ 0, & \text{в остальных точках} \end{cases} \quad \frac{\partial f}{\partial \omega}(0, 0) = 0 \quad \forall \omega = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

Лекция 17

11.04

Определение. $y = f(x)$ определена в окрестности $x^{(0)} \in \mathbb{E}_n$. Если $\Delta y = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$, где $A = (A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{E}_n$, $\alpha(\Delta x) = \bar{o}(\|\Delta x\|)$ ($\|\Delta x\| \rightarrow 0$), то $y = f(x)$ называется дифференцируемой при $x = x^{(0)}$, а $dy \equiv (A, \Delta x) = \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n$ - дифференциалом функции $f(x)$ при $x = x^{(0)}$.

Если x - независимая переменная, то $dx \equiv \Delta x (dx_i = \Delta x_i)$; $dy = \sum_{i=1}^n A_i dx_i$

Теорема 7.32. $y = f(x)$ - дифференцируемая при $x = x^{(0)} \Rightarrow y = f(x)$ непрерывна при $x = x^{(0)}$.

Доказательство. $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x) = \bar{o}(\|\Delta x\|)$ ($\|\Delta x\| \rightarrow 0$), т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : \forall \Delta x, \|\Delta x\| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(\Delta x)| < \frac{\varepsilon}{2}$
 $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2(\|A\| + 1)}, \delta = \min(\delta_1, \delta_2, 1) \Rightarrow \forall \Delta x : \|\Delta x\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x^{(0)})| = |\Delta y| \leq |(A, \Delta x)| + |\alpha(\Delta x)| \leq$
 нер-во Коши - Буняковского $\leq \|A\| \|\Delta x\| + \frac{\varepsilon}{2} \|\Delta x\| < \|A\| \cdot \frac{\varepsilon}{2(\|A\| + 1)} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$ \square

Теорема 7.33. $y = f(x)$ дифференцируемая при $x = x^{(0)}, dy = (A, dx) = \sum_{i=1}^n A_i dx_i \Rightarrow \forall i = 1, \dots, n \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = A_i$

Доказательство. $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x) = \bar{o}(\|\Delta x\|)$ ($\|\Delta x\| \rightarrow 0$), т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : \forall \Delta x, \|\Delta x\| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(\Delta x)| < \frac{\varepsilon}{2} \|\Delta x\|$ $\Delta x = (0, \dots, 0, \Delta x_i, 0, \dots, 0), 0 < |\Delta x_i| < \delta \|\Delta x\| = |\Delta x_i|$
 $\left| \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\Delta x_i} - A_i \right| = \left| \frac{(A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)}{\Delta x_i} - A_i \right| = \left| \frac{A_i \Delta x_i + \alpha(\Delta x)}{\Delta x_i} - A_i \right| =$
 $= dy = df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) dx_i$ \square

Теорема 7.34. $y = f(x) : \text{в окрестности } x^{(0)} \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \forall i = \overline{1, n}; \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \text{непрерывна при } x = x^{(0)} \Rightarrow y = f(x) \text{ дифференцируемая при } x = x^{(0)}.$

Доказательство. $\Delta y = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) =$

$$= \sum_{i=1}^n \left[f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \Delta x_i, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_i^{(0)}, x_{i+1}^{(0)} + \Delta x_{i+1}, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) \right] =$$

$$\text{т. Лагранжа} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)} + \underbrace{\theta_i \Delta x_i}_{\substack{\text{частичное приращение} \\ 0 < \theta_i < 1}}, x_{i+1}^{(0)} + \Delta x_{i+1}, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) \cdot \Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \cdot \Delta x_i + \alpha(\Delta x)$$

$$\alpha(\Delta x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(\Delta x) \Delta x_i, \text{ где } \alpha_i(\Delta x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \theta_i \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)} + \Delta x_{i+1}, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^{(0)}, \dots, x_i^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$$

$$|\Delta x_i| \leq \|\Delta x\| = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2} \Rightarrow |\alpha(\Delta x)| \leq \|\alpha\| \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n |\alpha_i(\Delta x)|}_{\rightarrow 0} = \bar{o}(\|\Delta x\|)$$
 \square

Определение. Плоскость π с уравнением $z = g(x, y)$ - касательная плоскость к поверхности $\sigma(z = f(x, y))$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \sigma(z = f(x, y))$, если $f(x, y) - g(x, y) = \bar{o}\left(\sqrt{\frac{(x-x_0)^2}{\Delta x^2} + \frac{(y-y_0)^2}{\Delta y^2}}\right)$ при $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$.
 $z_0 = f(x_0, y_0), M_0(x_0, y_0, z_0) \quad \pi : z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0), g(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0)$
 $f(x, y) - g(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0) - A(x - x_0) - B(y - y_0) = \Delta z - A\Delta x - B\Delta y$
 Δz

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) - \text{касательная плоскость.}$$

Нормалью к поверхности σ в какой-то точке называют вектор, перпендикулярный касательной плоскости в этой точке.

$$\vec{N} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right\}; \alpha \vec{N} - \text{нормальный вектор } (\alpha \neq 0).$$

$$\vec{n} = \pm \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} = \pm \frac{\left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right\}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^2 + 1}}; \quad \frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}} \Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}} \Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}; \quad \begin{cases} x = x_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} \cdot t \\ y = y_0 + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \cdot t \\ z = z_0 - t \end{cases}$$

Теорема 7.35. $y(t) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ в окрестности $t^{(0)} = (t_1^{(0)}, \dots, t_p^{(0)}) \in \mathbb{E}_p, f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ - дифференцируема при $x = x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = (\varphi_1(t^{(0)}), \dots, \varphi_n(t^{(0)})) \in \mathbb{E}_n$. Если $\exists j (j = \overline{1, p}) : \exists \frac{d\varphi_i}{dt_j}(t^{(0)}) \Rightarrow \exists \frac{\partial y}{\partial t_j}(t^{(0)}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \cdot \frac{d\varphi_i}{dt_j}(t^{(0)})$.

Если $\forall i = 1, \dots, n, \varphi_i(t)$ дифференцируема при $t = t^{(0)}$, то $y(t)$ - дифференцируема при $t = t^{(0)}$.

Доказательство. $\Delta y = \Delta f = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \cdot \Delta x_i + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x) = \bar{o}(\|\Delta x\|)$ ($\|\Delta x\| \rightarrow$

$$0), \alpha(\underbrace{\theta}_{\text{нулевой элемент}}) = \alpha(0, \dots, 0) = 0$$

$$\Delta t_j \neq 0; \frac{\Delta y}{\Delta t_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \cdot \underbrace{\frac{\Delta x_i}{\Delta t_j}}_{\rightarrow \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t^{(0)})} + \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta t_j}; \quad \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta t_j} = (\|\Delta x\| \neq 0) = \frac{\alpha(\Delta x)}{\|\Delta x\|} \cdot \frac{\sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2}}{\Delta t_j} =$$

$$= \underbrace{\frac{\alpha(\Delta x)}{\|\Delta x\|}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\Delta x_1}{\Delta t_j}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\Delta x_n}{\Delta t_j}\right)^2}}_{\text{огр., т.к. } \exists \lim} \rightarrow 0$$

$$\Delta x_i = \varphi_i(t^{(0)} + \Delta t_i) - \varphi_i(t^{(0)}) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t^{(0)}) \cdot \Delta t_j + \beta_i(\Delta t), \text{ где } \beta_i(\Delta t) = \bar{o}(\|\Delta t\|)$$

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \cdot \left(\sum_{j=1}^p \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t^{(0)}) \cdot \Delta t_j + \beta(\Delta t) + \alpha(\Delta x) \right); \quad \beta(\Delta t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \cdot \beta_i(\Delta t) = \bar{o}(\|\Delta t\|)$$

$$\frac{\alpha(\Delta x)}{\|\Delta t\|} = (\text{при } \|\Delta x\| \neq 0) = \underbrace{\frac{\alpha(\Delta x)}{\|\Delta x\|}}_{\rightarrow 0} \cdot \frac{\|\Delta x\|}{\|\Delta t\|} \quad \|\Delta t\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|\Delta x\| \rightarrow 0 \quad \frac{\|\Delta x\|}{\|\Delta t\|} \leq \frac{\sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2}}{\Delta t_j} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\Delta x_1}{\Delta t_j}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\Delta x_n}{\Delta t_j}\right)^2} - \text{огр., т.к. } \exists \lim$$

□

tg: @moksimqa

Лекция 18

18.04

$$y = y(x), x_i = x_i(t)$$

$$y = y(x), x - \text{независимая переменная, } dy = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i, \quad dx_i = \Delta x_i$$

$$y = y(x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad dy = \sum_{j=1}^p \frac{\partial y}{\partial t_j} dt_j = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j} \right) dt_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^p \frac{\partial x_i}{\partial t_j} dt_j \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i$$

Таким образом устанавливается инвариантность первого дифференциала.

Свойства:

$$1^\circ d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$2^\circ d(u \cdot v) = vdu + u dv$$

$$3^\circ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$$

Доказательство. 1° Рассмотрим $f(u, v) = u \cdot v$, пусть u и v - независимые переменные, тогда $\frac{\partial f}{\partial u} = v, \frac{\partial f}{\partial v} = u \Rightarrow d(uv) = vdu + u dv$

$2^\circ, 3^\circ$ - самостоятельно

□

Теорема 7.36. $y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ дифференцируема при $x = x^{(0)}$, т.е. $\Delta y = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x) = \bar{o}(\|\Delta x\|)$ ($\|\Delta x\| \rightarrow 0 \Rightarrow \forall \omega \in \mathbb{E}_n : \|\omega\| = 1 \exists \frac{\partial f}{\partial \omega}(x^{(0)}) = (A, \omega)$)

Доказательство. $t > 0 \quad \Delta x = t\omega \Rightarrow \|\Delta x\| = \|t\omega\| = t\|\omega\| = t$.

$$\text{Рассмотрим } \frac{\partial f}{\partial \omega}(x^{(0)}) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f(x^{(0)} + t\omega) - f(x^{(0)})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{(A, t\omega) + \alpha(\Delta x)}{t} = (A, \omega) + \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{\alpha(\Delta x)}{t} = (A, \omega)$$

□

Определение. $f(x)$ дифференцируема при $x = x^{(0)}$, т.е. $f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x) = \bar{o}(\|\Delta x\|)$ ($\|\Delta x\| \rightarrow 0$), тогда элемент (вектор) A называется градиентом функции $f(x)$ при $x = x^{(0)}$ и обозначается $A = \text{grad } f(x^{(0)}) = \nabla f(x^{(0)})$, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ - оператор Гамильтона.

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = (\nabla f, dx)$$

Свойства градиента:

$$1^\circ \nabla(f \pm g) = \nabla f \pm \nabla g$$

$$2^\circ \nabla(\alpha f) = \alpha \nabla f$$

$$3^\circ \nabla(f \cdot g) = g \nabla f + f \nabla g$$

$$4^\circ \nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2}$$

$$\text{Доказательство. } 3^\circ \text{ Рассмотрим } d(f \cdot g) = gdf + f dg = g(\nabla f, dx) + f(\nabla g, dx) = \underbrace{(g \nabla f + f \nabla g, dx)}_{\nabla(fg)}$$

$1^\circ, 2^\circ, 4^\circ$ - самостоятельно.

□

Теорема 7.37 (Т. Лагранжа для функции нескольких переменных). $f(x) \in C_1$ (в области $E \in \mathbb{E}_n$), $f(x)$ непрерывна в \bar{E} по \bar{E} , $x^{(0)}, \Delta x : x^{(0)} \in \bar{E}, x^{(0)} + \Delta x \in \bar{E}, x^{(0)} + t\Delta x \in E \forall t \in (0, 1) \Rightarrow \exists \Theta \in (0, 1) :$
 $f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (x^{(0)} + \Theta \Delta x) \Delta x_i$

Доказательство. Рассмотрим функцию одной переменной $t \in [0, 1]$ $F(t) = f(x^{(0)} + t\Delta x)$, $F(t) \in C[0, 1]$
 $\forall t \in (0, 1) \exists F'(t) \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (x^{(0)} + t\Delta x) \Delta x_i \Rightarrow \exists \Theta \in (0, 1) : F(1) - F(0) = F'(\Theta) \cdot (1 - 0)$. Таким образом
 $f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (x^{(0)} + \Theta \Delta x) \Delta x_i$ \square

Следствие 1. $f(x) \in C_1$ (в области $E \in \mathbb{E}_n$), $f(x)$, причем $\forall x^{(1)}, x^{(2)} \in E \exists$ конечнозвенная ломанная $\subset E$ с концами $x^{(1)}, x^{(2)}$, пусть $\forall x \in E \forall i = \overline{1, n} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow f(x) \equiv \text{const}$ в E .

Доказательство. Самостоятельно. Рассмотреть одно звено ломанной, и на каждом отрезке применить теорему Лагранжа. \square

7.7 Дифференциалы высших порядков для функций нескольких переменных

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \quad df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad \delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i$$

Определение. x - независимая переменная, $m \geq 2$, $f(x) \in C_m$ в области E , причем $dx = \Delta x = \text{const} \forall x \in E$. Дифференциалом m -го порядка функции $f(x)$ в точке x называется $d^m f(x) = \delta (d^{m-1} f(x)) \Big|_{\delta x = dx}$

$$\begin{aligned} d^2 f(x) &= \delta \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (x) dx_i \right) \Big|_{\delta x = dx} = \sum_{i=1}^n \delta \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} (x) \right) \Big|_{\delta x = dx} \cdot dx_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x) \delta x_j \right) \Big|_{\delta x = dx} \cdot dx_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} dx_i dx_j dx_k, \dots \\ d^m f &= \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}} dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_m}; H = a_1 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i; H^2 = H \cdot H = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n a_j \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j, \dots, H^m = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_m} \\ df &= (\nabla f, dx), d^2 f = (\nabla, dx)^2 f, \dots, d^m f = (\nabla, dx)^m f \end{aligned}$$

В общем случае, для дифференциалов высших порядков инвариантности нет.

Важный частный случай: $x_i = \sum_{j=1}^p \alpha_{ij} t_j + \beta_i, i = 1, 2, \dots, n$

$$dx_i = \sum_{j=1}^p \alpha_{ij} dt_j$$

7.8 Формула Тейлора для функции нескольких переменных

$$F(t) = F(t_0) + \frac{F'(t_0)}{1!} (t - t_0) + \frac{F''(t_0)}{2!} (t - t_0)^2 + \dots + \frac{F^{(m)}(t_0)}{m!} (t - t_0)^m + r_m(t, F), \text{ где } r_m(t, F) = \frac{F^{(m+1)}(t_0 + \Theta(t - t_0))}{(m+1)!} (t - t_0)^{m+1}$$

$$\begin{aligned} \text{Рассмотрим } dt = \Delta t = t - t_0, \Delta F(t_0) &= F(t_0 + \Delta t) - F(t_0) = \frac{dF(t_0)}{1!} + \frac{d^2 F(t_0)}{2!} + \dots + \frac{d^m F(t_0)}{m!} + \\ &+ r_m(t, F), \quad r_m(t, F) = \frac{d^{m+1} F(t_0 + \Theta \Delta t)}{(m+1)!} \end{aligned}$$

