Конспект лекций по математическому анализу

(2й семестр 2024-2025 учебного года)

Лектор:

Горячев А. П.

Верстка

Оглавление

Глава 1

Интегралы

Лекция 1

13.12

1.1 Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. X - промежуток $f(x)$ определена $x \in X.F(x), x \in X$, называется первообразной к $f(x)$, если $\forall x \in X \ \exists F'(x) = f(x)$

Определение. Множество всех первообразных к $f(x)$ на X называется неопределенным интегралом.(об. $\int f(x)dx, f(x$ - подынтегральная функция,$f(x)dx$ - подынтегральное выражение)

$F(x)-$ первообразная к $f(x) \Rightarrow F(x) + C$ - тоже первообразная.

$\Phi(x)$ - первообразная к $f(x) \qquad F'(x) = f(x) = \Phi'(x)$

Рассмотрим $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \ \forall x \in X$

$\Phi(x) - F(x) = C = const \qquad \Phi(x) = F(x) + C$

$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad d(\int (f(x)dx)) = f(x)dx; \ \int dF(x) = F(x) + C$

$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx \qquad d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = f(x)dx$

Теорема 1.1. *$f(x), g(x)$ имеют первообразные $\Rightarrow$ $f(x) \pm g(x)$ тоже имеют первообразные, причем $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.*

Доказательство. $\int f(x)dx = F(x)+C_1, \int g(x)dx = G(x)+C_2$. Рассмотрим $H_\pm(x) = F(x) \pm G(x), H'_\pm(x) = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$

$\int (f(x) \pm g(x))dx = F(x) \pm G(x) + C = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ □

Теорема 1.2. *$f(x)$ имеет первообразную $\Rightarrow \forall k, kf(x)$ тоже имеет первообразную, а если $k \neq 0$, то $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$*

Доказательство. $\int f(x)dx = F(x)+C \qquad (kF(x))' = kF'(x) = kf(x) \qquad \int kf(x)dx = kF(x)+C_1 \qquad k\int f(x)dx = k(F(x) + C) = kF(x) + kC, \quad \int kf(x)dx = kF(x) = C_1, \quad k\int f(x)dx = k(F(x) + C) = kF(x) + kC$, если $k \neq 0$, то $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ □

1.1.1 Таблица интегралов.

1. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1 (\alpha = 0 \Rightarrow x^{\alpha} = 1)$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = ln|x| + C$

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{lna} + C$

4. $\int sinxdx = -cosx + C$

5. $\int cosxdx = sinx + C$

6. $\int \dfrac{dx}{cos^2x} = tgx + C$

7. $\int \dfrac{dx}{sin^2x} = -ctgx + C$

8. $\int shxdx = chx + C$

9. $\int chxdx = shx + C$

10. $\int \dfrac{dx}{ch^2x} = thx + C$

11. $\int \dfrac{dx}{sh^2x} = -cthx + C$

12. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C, a > 0$

13. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C = -\arccos\dfrac{x}{a} + \tilde{C}, a > 0$

15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, a > 0$

Лекция 2

20.12

1.2 Способы вычисления неопределенных интегралов

1.2.1 Метод подстановки

$$\int f(u)du = F(u) + C \qquad u = \varphi(x) - \text{дифферен..} f(\varphi(x)) \text{ опр при} x \in -\text{промежуток.}$$

Рассмотрим $F(\varphi(x)), x \in X$. $(F(\varphi(x)))'_x = F'_u\Big|_{u=\varphi(x)}(u) * \varphi'(x) = f(u)\Big|_{u=\varphi(x)} * \varphi'(x) = f(\varphi(x)) * \varphi'(x)$

$\int f(\varphi(x))dx = F(\varphi(x)) + C$

$$\boxed{\begin{gathered}\int f(\varphi(x))\underbrace{\varphi'(x)dx}_{du} = \int f(u)du\Big|_{u=\varphi(x)} \\ \int f(x)dx\Big|_{x=\psi(t)} = \int f(\psi(t))\psi'(t)dt\Big|_{t=\psi^{-1}(x)}\end{gathered}}$$

Примеры.

1.

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C$$

$$x^2 + a^2 = u, \quad 2x\,dx = du$$

2.

$$\int \sin^3 x\,dx = -\int \sin^2 x(-\sin x\,dx) = -\int (1-u^2)\,du = -u + \frac{u^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

$$\cos x = u, \quad -\sin x\,dx = du$$

3.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} = \int \frac{6t^5\,dt}{t^3(1+t^2)} = 6\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,dt = 6(t - \operatorname{arctg} t) + C = 6(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}) + C$$

$$x = t^6 (\sqrt[6]{x} = t), \quad dx = 6t^5\,dt$$

4.

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C$$

$$\sin x = u, \quad du = \cos x\,dx$$

1.2.2 Интегрирование по частям

$$d(uv) = udv + vdu, udv = d(uv) - vdu, \quad \int udv = \int d(uv) - \int vdu; \quad \int d(uv) = uv + C$$

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Примеры

1.

$$\int \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

$$u = \ln x, \quad dv = dx, \quad du = \frac{dx}{x}, \quad v = x$$

2.

$$I = \int e^x \underbrace{\cos x\, dx}_{d(\sin x)} = \int e^x d(\sin x) = e^x \sin x - \int \sin x e^x\, dx = e^x \sin x + \int e^x d(\cos x) = e^x \sin x + e^x \cos x - \underbrace{\int \cos x e^x\, dx}_{I}$$

$$I = \int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$$

3.

$$I = \int \underbrace{\sqrt{x^2+a^2}}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = x\sqrt{x^2+a^2} - \int x\frac{2x\,dx}{2\sqrt{x^2+a^2}} = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - I + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$$

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

4.

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \qquad a > 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$J_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\, dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x\frac{(-n)}{(x^2+a^2)^{n+1}} 2x\, dx =$$

$$\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\, dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n(J_n - a^2 J_{n+1})$$

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)J_n\right] \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$J_1 = \int \frac{1}{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

$$J_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right] + C, \ldots$$

В качестве упражнения найти рекуррентную формулу для

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\, dx \qquad \deg P_m(x) = m, \quad \deg Q_n(x) = n$$

$$m > n \quad P_m(x) = R_{m-n}(x)Q_n(x) + T_k(x), \quad k < n \quad \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = R_{m-n}(x) + \frac{T_k(x)}{Q_n(x)}, \quad k < n$$

$$Q_n(x) = a_0x^n + \cdots + a_n = a_0(x-x_1)^{\alpha_1}\cdots(x-x_l)^{\alpha_l}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{\beta_r}$$

$$\frac{T_k(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \cdots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha_1 1}}{x-x_l} + \cdots + \frac{A_{\alpha_1\alpha_l}}{(x-x_l)^{\alpha_l}} + \frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \cdots + \frac{B_{1\beta_1}x+C_{1\beta_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}} + \ldots$$

Лекция 3

7.02

1.3 Определение интеграла Римана. Существование интегрируемых функций. Необратимое условие

$a < b$. Рассмотрим $[a, b]$.

T $= \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b\}$ - разбиение отрезка [a,b] Рассмотрим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k = 1, 2, 3, \ldots, n (k = \overline{1, n})$

$\delta_T \underset{1 \leqslant k \leqslant n}{=} max(\Delta x_k)$- характеристика разбиения.

$\xi \in [x_{k-1}, \ldots, x_k], k = \overline{1, n}, \qquad \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$

Пусть $f(x)$ определена на $[a, b]$. Рассмотрим $\sigma_T(f, \Xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ - интегральная сумма

Определение. Говорят, что $\exists \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T(f, \Xi)$, если $\exists I : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta, \forall \Xi \Rightarrow |\sigma_T(f, \Xi) - I| < \varepsilon$

! Свойства пределов переносятся.

Определение. $f(x)$ называется интегрируемой(по Риману) на $[a, b]$, если $\exists \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T(f, \Xi)$. Величина этого предела ($I = \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T(f, \Xi)$) называется определенным интегралом функции $f(x)$ на (a, b) (интегралом Римана))

Обозначение: $\int_a^b f(x)dx = I$

Примеры:

а) $f(x) \equiv C - const$ на $[a, b]; \forall T = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}, \forall \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$;

$\sigma_T(f, \Xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} c\Delta x_k = c\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta x_k = c((x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = c(x_n - x_0) = c(b - a) \underset{\delta_T \to 0}{\to} c(b - a); \Rightarrow \exists \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T(f, \Xi) = c(b - a). \Rightarrow f(x) -$ интегрируема на $[a, b]$, причем $\int_a^b cdx = c(b - a) \Rightarrow$ интегрируемые функции существуют.

б) $\chi(x) = \begin{cases} 1, x - \text{рац.} \\ 0, x - \text{иррац.} \end{cases}, x \in [a, b]$(функция Дирихле)

Предположим,что $\exists \int_a^b \chi(x)dx = I$, т.е $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta, \forall \Xi \Rightarrow |\sigma_T(\chi, \Xi) - I| < \varepsilon$

Возьмем $\Xi_1 = \{\xi_k^{(1)}\}_{k=1}^n -$ набор рац. точек $\qquad \sigma^{(1)} = \sigma_T(\chi, \Xi_1) = \sum\limits_{k=1}^{n} \chi(\xi_k^{(1)})\Delta x_k = b - a$

Возьмем$\Xi_2 = \{\xi_k^2\}_{k=1}^n -$ набор иррац. точек $\qquad \sigma^{(2)} = \sigma_T(\chi, \Xi_2) = \sum\limits_{k=1}^{n} \underbrace{\chi(\xi_k^{(2)})}_{=0} \Delta x_k = 0$

$b - a = |\sigma^{(1)} - \sigma^{(2)}| = |\sigma^{(1)} - I - \sigma^{(2)} + I| \leqslant |\sigma^{(1)} - I| + |\sigma^{(2)} - I| < \varepsilon + \varepsilon = b - a -$ противоречие $\Rightarrow \chi(x)$ не является интегрируемой на $[a, b]$

Теорема 1.3 (Необходимое условие интегрируемости)**.** *$f(x)$-интегрируема на $[a, b] \Rightarrow f(x)-$ ограничена на $[a, b]$*

Доказательство. От противного. Предположим,что $f(x)$ не является ограниченной на $[a, b]$, но при этом $\exists \int_a^b f(x)dx = I$, т.е $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta, \forall \Xi \Rightarrow |\sigma_T(f, \Xi) - I| < \varepsilon$.

Берем $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta, \forall \Xi \Rightarrow |\sigma_T(F, \Xi) - I| < 1$

Берем $\forall T = \{a = x_0 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b\}$;

Строим $\Xi = \{\xi\}_{k=1}^{n}$ $f(x)$ неограничена на $[a,b] \Rightarrow \exists K : f(x)$ неограничена на $[x_{K-1}, x_K]$,
$\Xi : \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n -$ произвольные.
Берем такое $\xi_k : |f(\xi_k)| > \dfrac{1 + |I| + |f(\xi_1)|\Delta x_1 + |f(\xi_2)|\Delta x_2 + \cdots + |f(\xi_{k-1})|\Delta x_{k-1} + \cdots + |f(\xi_n)|\Delta x_n}{\Delta x_k}|$
$|\sigma_T(f,\Xi) - I| \geqslant |\sigma_T(f,\Xi)| - |I| = |f(\xi_1)\Delta x_1 + \cdots + f(\xi_{k-1})\Delta x_{k-1} + f(\xi_k)\Delta x_k + f(\xi_{k+1})\Delta x_{k+1} + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n|$
$- |I| = |f(\xi_k)\Delta x_k - (-f(\xi_1)\Delta x_1 - \cdots - f(\xi_{k-1})\Delta x_{k-1} - f(\xi_{k+1})\Delta x_{k+1} - \cdots - f(\xi_n)\Delta x_n)| - |I| \geqslant$
$\geqslant |f(\xi_k)|\Delta x_k - |f(\xi_1)|\Delta x_1 - \cdots - |f(\xi_{k-1})|\Delta x_{k-1} - |f(\xi_{k+1})|\Delta x_{k+1} - \cdots - |f(\xi_n)|\Delta x_n - |I| > | = \varepsilon \Rightarrow$
противоречие $\square$

1.4 Суммы Дарбу и их свойства. Связь сумм Дарбу с интегральной суммой

Пусть $f(x)$ ограничена на $[a,b]$. $T = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$.$M_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} sup(f(x))$; $m_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} inf(f(x))$.
$S_T(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k -$ верхняя сумма Дарбу.
$s_T(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k -$ нижняя сумма Дарбу
Эти суммы не обязаны быть интегральными суммами, т.к точные грани не всегда достигаются. $\forall \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^{n} \Rightarrow m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k$. $s_T(f) \leqslant \sigma_T(f,\Xi) \leqslant S_T(f)$
Определение. $T_1 = \{a = x_0^{(1)} < x_1^{(1)} < \cdots < x_n^{(1)} = b\}$ $T_2 = \{a = x_0^{(2)} < x_1^{(2)} < \cdots < x_m^{(2)} = b\}$.
T_2 называется последующим к T_1, если $x_k^{(1)} \in T_2 \forall k = \overline{0,n}$.Обозначение $T_2 \succ T_1$

Теорема 1.4. *Если* $T_1 \succ T_2 \Rightarrow \begin{matrix} 1) & S_{T_1}(f) \leqslant S_{T_2}(f) \\ 2) & s_{T_1}(f) \geqslant s_{T_2}(f) \end{matrix}$

Доказательство. 1) Пусть у T_1 ровно на 1 точку больше, т.е $\begin{matrix} T_2 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n < b\}. \\ T_1 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < \tilde{x} < x_K < \cdots < x_n = b\}. \end{matrix}$
$M_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} sup f(x)$, $M_k' \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant \tilde{x}}{=} sup f(x) \leqslant M_k$, $M_k'' \underset{\tilde{x} \leqslant x \leqslant x_k}{=} sup f(x) \leqslant M_k$
Рассмотрим $S_{T_2}(f) - S_{T_1}(f) = M_k \Delta x_k - M_k'(\tilde{x} - x_{k-1}) - M_k''(x_k - \tilde{x}) = M_k(x_k - x_{k-1}) - M_k'(\tilde{x} - x_{k-1}) - M_k''(x_k - \tilde{x}) = M_k(x_k - \tilde{x} + \tilde{x} - x_{k-1}) - M_k'(\tilde{x} - x_{k-1}) = \underbrace{(M_k - M_k'')}_{\geqslant 0}\underbrace{(x_k - \tilde{x})}_{>0} + \underbrace{(M_k - M_k')}_{\geqslant 0}\underbrace{(\tilde{x} - x_{k-1})}_{>0} \geqslant 0 \Rightarrow$
$S_{T_2}(f) \geqslant S_{T_1}(f)$. Если у T_1 более, чем на одну точку больше, то делаем аналогично нужное число раз. $\square$

Теорема 1.5. $\forall T_1, T_2 \Rightarrow s_{T_1}(f) \leqslant S_{T_2}(f)$

Доказательство. Рассмотрим $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow \begin{cases} T_3 \succ T_1 \\ T_3 \succ T_2 \end{cases} \Rightarrow s_{T_1}(f) \underset{\text{T1.4}}{\leqslant} s_{T_3}(f) \underset{\text{T1.4}}{\leqslant} S_{T_3}(f) \leqslant S_{T_2}(f)$ $\square$

Теорема 1.6. $\forall T, \forall \varepsilon > 0 \exists \Xi_1, \exists \Xi_2 : \begin{cases} 0 \leqslant S_T(f) - \sigma_T(f,\Xi_1) < \varepsilon \\ 0 \leqslant \sigma_T(f,\Xi_2) - s_T(f) < \varepsilon \end{cases}$

Доказательство. Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b\}$. $\begin{matrix} M_k \underset{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k}{=} sup(f(x)), \\ m_k \underset{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k}{=} inf(f(x)) \end{matrix} \Rightarrow$

$$\forall\varepsilon > 0 \begin{matrix} \exists\xi_k^{(1)} \in [x_{k-1}, x_k] : 0 \leqslant M_k - f(\xi_k^{(1)}) < \dfrac{\varepsilon}{b-a} \\ \exists\xi_k^{(2)} \in [x_{k-1}, x_k] : 0 \leqslant f(\xi_k^{(2)}) - m_k < \dfrac{\varepsilon}{b-a} \end{matrix} \Delta x_k \text{ и } \sum_{k=1}^{n} \Rightarrow \begin{matrix} 0 \leqslant S_T(f) - \sigma_T(f, \Xi_1) < \varepsilon \\ 0 \leqslant \sigma_T(f, \Xi_2) - s_T(f) < \varepsilon \end{matrix}$$ □

1.5 Верхний и нижний интегралы Дарбу. Критерий интегрируемости

Из теоремы 1.5 $\Rightarrow \forall T_1, T_2 \quad \underbrace{s_{T_1}(f)}_{\text{огр. сверху}} \leqslant \underbrace{S_{T_2}(f)}_{\text{огр. снизу}}$

Рассмотрим $\bar{I} \underset{T}{=} inf S_T(f) -$ верхний интеграл Дарбу. $\underline{\mathrm{I}} \underset{T}{=} sup s_T(f) -$ нижний интеграл Дарбу

$s_{T_1}(f) \leqslant S_{T_2}(f)$. $\quad \underline{\mathrm{I}} \leqslant S_{T_2}(f)$. $\quad \boxed{\underline{\mathrm{I}} \leqslant \bar{I}}$

Теорема 1.7 (Критерий интегрируемости)**.** *$f(x)$ интегрируема на $[a, b]$* $\Leftrightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f) - s_T(f)) = 0$

Доказательство. $\Rightarrow$ $f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \exists \int_a^b f(x)dx = I$, т.е $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow$ $|\sigma_T(f, \Xi) - I| < \dfrac{\varepsilon}{4}$, т.е $I - \dfrac{\varepsilon}{4} < \sigma_T(f, \Xi) < I + \dfrac{\varepsilon}{4}$

Но$\varepsilon > 0 \underset{1.6}{\Rightarrow} \exists\Xi_1, \exists\Xi_2 :$ $\begin{matrix} 0 \leqslant S_T(f) - \sigma_T(f, \Xi_1) < \dfrac{\varepsilon}{4} \\ 0 \leqslant \sigma_T(f, \Xi_2) - s_T(f) < \dfrac{\varepsilon}{4} \end{matrix}$

$I - \dfrac{\varepsilon}{2} < \sigma_T(f, \Xi_2) - \dfrac{\varepsilon}{4} < s_T(f) \leqslant S_T(f) < \sigma_T(f, \Xi_1) + \dfrac{\varepsilon}{4} < I + \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow 0 \leqslant S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f) - s_T(f)) = 0$

$\Leftarrow$ Пусть $\lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f) - s_T(f)) = 0$, т.е $\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leqslant S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$

Но $s_T(f) \leqslant \underline{\mathrm{I}} \leqslant \bar{I} \leqslant S_T(f) \Rightarrow 0 \leqslant \bar{I} - \underline{\mathrm{I}} < \varepsilon \Rightarrow \bar{I} - \underline{\mathrm{I}} = 0 \Rightarrow \underline{\mathrm{I}} = \bar{I}$. Обозначим $\underline{\mathrm{I}} = \bar{I} = I$ $\begin{matrix} \Rightarrow s_T(f) \leqslant I \leqslant S_T(f) \\ \text{Но } \forall\Xi \Rightarrow s_T(f) \leqslant \sigma_T(f, \Xi) \leqslant S_T(f) \end{matrix} \Rightarrow$

$|\sigma_T(f, \Xi) - I| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T(f, \Xi) = I \Rightarrow f(x) -$ интегрируема на $[a, b]$ □

Следствие 1. *$f(x)$ интегрируема на $[a, b]$* $\Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0} s_T(f) = \lim\limits_{\delta_T \to 0} S_T(f) = I(\exists \int_a^b f(x)dx = I)$

Доказательство. $f(x)$ инт на $[a, b] \Rightarrow$ $\begin{matrix} 1) \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T)(f) - s_T(f)) = 0 \\ 2) \int_a^b f(x)dx = I, \forall T s_T(f) \leqslant I \leqslant S_T(f) \end{matrix}$ $\Rightarrow 0 \leqslant S_T(f) - I \leqslant S_T(f) -$ $s_T(f); 0 \leqslant I - s_T(f) \leqslant \underbrace{\to 0}\, S_T(f) - s_T(f) \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f) - I) = 0 \\ \lim\limits_{\delta_T \to 0}(I - s_T(f)) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0} S_T(f) = \lim\limits_{\delta_T \to 0} s_T(f) = I.$ □

Лекция 4

11.02

1.6 Интегрируемость непрерывной функции. Интегрируемость монотонной функции

Теорема 1.8. $f(x) \in C[a,b] \Rightarrow f(x)$ *инт на* $[a,b]$

Доказательство. $f(x) \in C[a,b] \underset{\text{т.Кантора}}{\Rightarrow} f(x)$ равномерно непрерывна на $[a,b]$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x', x'' \in [a,b] : |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.
Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$. $\quad \delta_T < \delta$;
$f(x) \in C[x_{k-1}, x_k] \underset{\text{т. Вейрштрасса}}{\Rightarrow} \exists x'_k, x''_k \in [x_{k-1}, x_k] : \begin{matrix} M_k \underset{x_{k-1} \leqslant x_k}{=} sup f(x) = f(x'_k) \\ m_k = inf(f(x)) = f(x''_k) \end{matrix}$. $\quad |x'_k - x''_k| \leqslant \Delta x_k \leqslant \delta_t \Rightarrow |M_k - m_k| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.
$0 \leqslant M_k - m_k \leqslant \dfrac{\varepsilon}{b-a} |\Delta x_k \text{и} \sum\limits_{k=1}^{n} \Rightarrow_0 \leqslant S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0 \underset{\text{Т3}}{\Rightarrow} f(x)$ инт на $[a,b]$

□

Теорема 1.9. $f(x)$ *монотонна на* $[a,b]$(*не имеет значения, что из себя представляет множество точек разрыва*) $\Rightarrow$ $f(x)$ *инт на* $[a,b]$

(

Доказательство. Пусть $f(x)$ монотонно возрастает на $[a,b] \Rightarrow f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b) \forall x \in [a,b] \Rightarrow f(x)$ ограничена на $[a,b]$.
Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ $\qquad f(x_{k-1}) \leqslant f(x) \leqslant f(x_k) \forall x \in [x_{k-1}, x_k] \Rightarrow \begin{matrix} M_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} sup f(x_k) \\ m_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} inf f(x) = f(x_{k-1}) \end{matrix}$
$0 \leqslant S_T(f) - s_T(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \Delta x_k \leqslant \delta_T \sum\limits_{k=1}^{n} (M_k - m_k) = \delta_T \sum\limits_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \delta_T (f(b) - f(a)) \underset{\delta_T \to 0}{\to} 0 \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0 \underset{\text{критерий инт. Т3}}{\Rightarrow} f(x)$ инт на $[a,b]$
Самостоятельно рассмотреть случай монотонного убывания.

□

Пример. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, x \in (\dfrac{1}{k+1}, \dfrac{1}{k}], k \in \mathbb{N} \\ 0, x = 0 \end{cases}$

$f(x) \infty$-но много точек разрыва на $[a,b] : x = \dfrac{1}{k}, k = 2, 3, 4, \cdots -$ точки разрыва 1-го рода)
$f(x)$ монотонно возрастает на $[0,1] \Rightarrow f(x)$ инт на $[a,b]$

1.7 Интегрируемость функции, отличающейся от интегрируемой в конечном количестве точек

Теорема 1.10. *Пусть* $f(x)$ *инт на* $[a,b] \Rightarrow \tilde{f(x)} = \begin{cases} A, x = \tilde{x} \in [a,b] \\ f(x), x \in [a,b] \text{искл} \{\tilde{x}\} \end{cases}$ *тоже инт на* $[a,b]$, *причем* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \tilde{f(x)}dx$

Доказательство. $f(x)$ инт на $[a,b] \Rightarrow f(x)$ ограничена на $1)[a,b],$ т.е $\exists M > 0 : |f(x)| \leqslant M \forall x \in [a,b]$ $2) \lim\limits_{\delta_T \to 0} S_T(f) = \int_a^b f(x)dx = I$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T : \delta_T < \delta \Rightarrow |S_T(f) - I| < \dfrac{\varepsilon}{2}.$

Берем $\delta_2 = \dfrac{\varepsilon}{4(M + |A|)} > 0 \Rightarrow \exists \delta = min(\delta_1, \delta_2) > 0.$ Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} : \delta_T < \delta.$

$\begin{matrix} M_k = supf(x) \\ \tilde{M_k} = supf\tilde{(x)}, k = 1, n \end{matrix}$. Рассмотрим $|S_T(f) - S_T(\tilde{f})| = |\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k - \tilde{M_k}\Delta x_k)| \leqslant \delta_T * 2(M + |A|) < 2\delta(M + |A|) \leqslant$ $2\delta_2(M + |A|) = \dfrac{\varepsilon}{2}$

Рассмотрим $|S_T(\tilde{f}) - I| = |S_T(\tilde{f}) - S_T(f) + S_T(f) - I| \leqslant |S_T(\tilde{f}) - S_T(f)| + \underbrace{|S_T(f) - I|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon,$ т.е $\lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f) - I) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0} S(\tilde{f}) = I$

Аналогично: $\lim\limits_{\delta_T \to 0} s_T(\tilde{f}) = I \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(\tilde{f}) - s_T(\tilde{f})) = 0 \Rightarrow f\tilde{(x)}$ инт на $[a,b]$.

Т.к $\int f\tilde{(x)}dx = \lim\limits_{\delta_T \to 0} S_T(f) = \lim\limits_{\delta_T \to 0} S_T(\tilde{f}) \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(\tilde{f})) = \int_a^b f\tilde{(x)}dx => \int_a^b f\tilde{(x)}dx = \int_a^b f(x)dx$ □

Следствие 1. *$f(x)$ инт на $[a,b] \Rightarrow f\tilde{(x)}$, отличающаяся от $f(x)$ в конечном количестве точек, тоже инт на $[a,b]$,причем $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f\tilde{(x)}dx$*

Доказательство. Применим последнюю теорему надлежащее число раз. □

Пример. $\chi(x) = \begin{cases} 1, x - \text{рац} \\ 0, x - \text{иррац} \end{cases}$ отличающаяся от $f_0(x) \equiv 0$ на $[a,b]$ в счетном количество точек, но при этом $\chi(x)$ не является инт на $[a,b]$, а $f_0(x)$ - является

Теорема 1.11 (Критерий Лебега). *Пусть $f(x)$ ограничена на $[a,b]$, а $R(f)-$ множество точек разрыва $f(x)$ на $[a,b]$, тогда $f(x)$ интегрируема по Риману на $[a,b] \Leftrightarrow R(f)$ имеет меру нуль, т.е $\forall \varepsilon > 0 \exists \{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^{\infty} : R(f) \cup (\alpha_i, \beta_i)$, приэтом $\sup\limits_m \sum\limits_{i=1}^{m}(\beta_i - \alpha_i) < \varepsilon$*

Доказательство. Без доказательства. □

1.8 Линейные свойства определенного интеграла

Определение. Если $f(x)$ определена при $x = a$, то положим $\int_a^a f(x)dx \equiv 0$

Определение. Если $a < b$, а еще $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то положим $\int_b^a f(x)dx \equiv -\int_a^b f(x)dx$

Теорема 1.12. *Если $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, $f(x) \pm g(x)$ тоже интегрируема на $[a,b]$,причем $\int_a^b (f(x) \pm g(x)dx) = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$*

Доказательство. Если $a = b$, то доказывать нечего: $0 = 0 \pm 0$.

Если $a < b$, то: Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$; Берем $\forall \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$, тогда: рассмотрим $\sigma_T(f \pm g, \Xi) = \sum\limits_{k=1}^{n}(f(\xi_k) \pm g(\xi_k))\Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \pm \sum\limits_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k = \underset{\delta_T \to 0}{\sigma_T(f, \Xi)} \xrightarrow{} I_1 \pm \underset{\delta_T \to 0}{\sigma_T(g, \Xi)} \xrightarrow{} I_2 \to I_1 + I_2$, т.е

$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

Если $a > b \Rightarrow \int_b^a (f(x) \pm g(x))dx = \int_b^a f(x)dx \pm \int_b^a g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$ □

Теорема 1.13. *$f(x)$ интегрируема на $[a,b] \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R} \quad c \in f(x)$ интегрируема на $[a,b]$,причем* $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

Доказательство. Самостоятельно. □

1.9 Интегрируемость произведения интегрируемых по Риману функций

Теорема 1.14. *Если $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a,b] \Rightarrow f(x)g(x)$ тоже интегрируема на $[a,b]$*

Доказательство. пусть $a < b$ $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a,b] \Rightarrow f(x), g(x) -$ ограничены на $[a,b]$, т.е $\exists M^{(f)} > 0, M^{(g)} > 0 : \begin{array}{c} |f(x)| \leqslant M^{(f)} \forall x \in [a,b] \\ |g(x)| \leqslant M^{(g)} \forall x \in [a,b] \end{array}$. Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$; Введем

$M_k^f = \sup\limits_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} f(x)$

$m_k^{(f) = inf f(x)}$

$M_k^{(g)} = sup g(x)$

$m_k^{(g)} = inf g(x)$

$M_k^{(fg)} = sup(f(x)g(x))$

$m_k^{fg} = inf(f(x)g(x))$

$\forall \varepsilon > 0 \exists x_k', x_k'' \in [x_{k-1}, x_k] : \begin{array}{c} M_k^{(fg)} < f(x_k')g(x_k') + \dfrac{\varepsilon}{2} \\ m_k^{(fg)} > f(x_k'')g(x_k'') - \dfrac{\varepsilon}{2} \end{array} \Rightarrow 0 \leqslant M_k^{(fg)} - m_k^{(fg)} < f(x_k')g(x_k') - f(x_k'')g(x_k'') + \varepsilon =$ $f(x_k')g(x_k') + f(x_k')g(x_k'') - f(x_k')g(x_k'') - f(x_k'')g(x_k'') + \varepsilon = f(x_k')(g(x_k') - g(x_k'')) + g(x_k'')(f(x_k') - f(x_k'')) + \varepsilon \leqslant$ $M^f((M_k)^g - m_k^{(g)}) + M^g(M_k^{(f)} - m_k^{(f)}) + \varepsilon \Rightarrow 0 \leqslant M_k^{(fg)} - m_k^{(fg)} \leqslant M^{(f)}((M_k)^g - m_k^{(g)}) + M^{(g)}(M_k^f - m_k^f) \Rightarrow$ $0 \leqslant S_T(fg) - s_T(fg) \leqslant M^{(f)}(S_T(g) - s_T(g)) + M^{(g)}(S_T(f) - s_T(f)) \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0}$

□