Конспект лекций по математическому анализу

(2й семестр 2024-2025 учебного года)

Лектор:

Горячев А. П., Хлистунов И. А.

Верстка

Оглавление

Глава 1

Интегралы

Лекция 1

13.12

1.1 Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. X - промежуток $f(x)$ определена $x \in X. F(x), x \in X$, называется первообразной к $f(x)$, если $\forall x \in X\ \exists F'(x) = f(x)$

Определение. Множество всех первообразных к $f(x)$ на X называется неопределенным интегралом.(об. $\int f(x)dx$, $f(x$ - подынтегральная функция,$f(x)dx$ - подынтегральное выражение)

$F(x)-$ первообразная к $f(x) \Rightarrow F(x)+C$ - тоже первообразная.

$\Phi(x)$ - первообразная к $f(x) \qquad F'(x) = f(x) = \Phi'(x)$

Рассмотрим $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0\ \forall x \in X$

$\Phi(x) - F(x) = C = const \qquad \Phi(x) = F(x) + C$

$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad d(\int (f(x)dx)) = f(x)dx; \int dF(x) = F(x) + C$

$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx \qquad d(\int f(x)dx) = d(F(x)+C) = f(x)dx$

Теорема 1.1. *$f(x), g(x)$ имеют первообразные $\Rightarrow$ $f(x) \pm g(x)$ тоже имеют первообразные, причем $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$*

Доказательство. $\int f(x)dx = F(x)+C_1, \int g(x)dx = G(x)+C_2$. Рассмотрим $H_{\pm}(x) = F(x)\pm G(x), H'_{\pm}(x) = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$

$\int (f(x) \pm g(x))dx = F(x) \pm G(x) + C = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ □

Теорема 1.2. *$f(x)$ имеет первообразную $\Rightarrow \forall k, kf(x)$ тоже имеет первообразную, а если $k \neq 0$, то $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$*

Доказательство. $\int f(x)dx = F(x)+C \qquad (kF(x))' = kF'(x) = kf(x) \qquad \int kf(x)dx = kF(x)+C_1 \qquad k\int f(x)dx = k(F(x)+C) = kF(x)+kC, \quad \int kf(x)dx = kF(x) = C_1, \quad k\int f(x)dx = k(F(x)+C) = kF(x)+kC$, если $k \neq 0$, то $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ □

1.1.1 Таблица интегралов.

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1 (\alpha = 0 \Rightarrow x^\alpha = 1)$

2. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C$

4. $\int sinxdx = -cosx + C$

5. $\int cosxdx = sinx + C$

6. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$

7. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$

8. $\int shxdx = chx + C$

9. $\int chxdx = shx + C$

10. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$

11. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$

12. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a > 0$

13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + \tilde{C}, a > 0$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, a > 0$

Лекция 2

20.12

1.2 Способы вычисления неопределенных интегралов

1.2.1 Метод подстановки

$$\int f(u)du = F(u) + C \qquad u = \varphi(x) - \text{дифферен..} f(\varphi(x)) \text{ опр при} x \in -\text{промежуток.}$$

Рассмотрим $F(\varphi(x)), x \in X$. $(F(\varphi(x)))'_x = F'_u\Big|_{u=\varphi(x)}(u) * \varphi'(x) = f(u)\Big|_{u=\varphi(x)} * \varphi'(x) = f(\varphi(x)) * \varphi'(x)$

$\int f(\varphi(x))dx = F(\varphi(x)) + C$

$$\boxed{\begin{gathered}\int f(\varphi(x))\underbrace{\varphi'(x)dx}_{du} = \int f(u)du\Big|_{u=\varphi(x)} \\ \int f(x)dx\Big|_{x=\psi(t)} = \int f(\psi(t))\psi'(t)dt\Big|_{t=\psi^{-1}(x)}\end{gathered}}$$

Примеры.

1.

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C$$

$$x^2 + a^2 = u, \quad 2x\,dx = du$$

2.

$$\int \sin^3 x\,dx = -\int \sin^2 x(-\sin x\,dx) = -\int (1-u^2)\,du = -u + \frac{u^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

$$\cos x = u, \quad -\sin x\,dx = du$$

3.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} = \int \frac{6t^5\,dt}{t^3(1+t^2)} = 6\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,dt = 6(t - \operatorname{arctg} t) + C = 6(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}) + C$$

$$x = t^6 (\sqrt[6]{x} = t), \quad dx = 6t^5\,dt$$

4.

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C$$

$$\sin x = u, \quad du = \cos x\,dx$$

1.2.2 Интегрирование по частям

$$d(uv) = udv + vdu, udv = d(uv) - vdu, \quad \int udv = \int d(uv) - \int vdu; \quad \int d(uv) = uv + C$$

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Примеры

1.

$$\int \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

$$u = \ln x, \quad dv = dx, \quad du = \frac{dx}{x}, \quad v = x$$

2.

$$I = \int e^x \underbrace{\cos x\, dx}_{d(\sin x)} = \int e^x d(\sin x) = e^x \sin x - \int \sin x e^x\, dx = e^x \sin x + \int e^x d(\cos x) = e^x \sin x + e^x \cos x - \underbrace{\int \cos x e^x\, dx}_{I}$$

$$I = \int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$$

3.

$$I = \int \underbrace{\sqrt{x^2+a^2}}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = x\sqrt{x^2+a^2} - \int x\frac{2x\, dx}{2\sqrt{x^2+a^2}} = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - I + a^2 \ln (x + \sqrt{x^2+a^2})$$

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \ln (x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$$

4.

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \qquad a > 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$J_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\, dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x\frac{(-n)}{(x^2+a^2)^{n+1}} 2x\, dx =$$

$$\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\, dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n(J_n - a^2 J_{n+1})$$

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)J_n\right] \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$J_1 = \int \frac{1}{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$J_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right] + C, \dots$$

В качестве упражнения найти рекуррентную формулу для

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\, dx \qquad \deg P_m(x) = m, \quad \deg Q_n(x) = n$$

$$m > n \quad P_m(x) = R_{m-n}(x) Q_n(x) + T_k(x), \quad k < n \quad \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = R_{m-n}(x) + \frac{T_k(x)}{Q_n(x)}, \quad k < n$$

$$Q_n(x) = a_0 x^n + \cdots + a_n = a_0 (x-x_1)^{\alpha_1} \cdots (x-x_l)^{\alpha_l} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \cdots (x^2 + p_r x + q_r)^{\beta_r}$$

$$\frac{T_k(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \cdots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha_1 1}}{x-x_l} + \cdots + \frac{A_{\alpha_1 \alpha_l}}{(x-x_l)^{\alpha_l}} + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \cdots + \frac{B_{1\beta_1}x + C_{1\beta_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}} + \dots$$

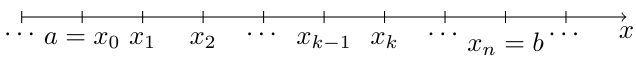
Глава 2

Определенный интеграл

Лекция 3

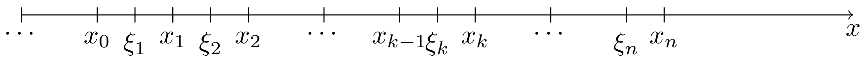
07.02

2.1 Определение интеграла Римана. Существование интегрируемых функций. Необратимое условие

$a < b$. Рассмотрим $[a, b]$. 

T $= \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b\}$ - разбиение отрезка [a,b] Рассмотрим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k = 1, 2, 3, \dots, n (k = \overline{1, n})$

$\delta_T \underset{1 \leqslant k \leqslant n}{=} max(\Delta x_k)$- характеристика разбиения.

$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1, n}, \qquad \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$ 

Пусть $f(x)$ определена на $[a, b]$. Рассмотрим $\sigma_T(f, \Xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k$ - интегральная сумма

Определение. Говорят, что $\exists \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T(f, \Xi)$, если $\exists I : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta, \forall \Xi \Rightarrow |\sigma_T(f, \Xi) - I| < \varepsilon$

! Свойства пределов переносятся.

Определение. $f(x)$ называется интегрируемой(по Риману) на $[a, b]$, если $\exists \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T(f, \Xi)$. Величина этого предела ($I = \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T(f, \Xi)$) называется определенным интегралом функции $f(x)$ на (a, b) (интегралом Римана))

Обозначение: $\int\limits_a^b f(x)dx = I$

Примеры:

а) $f(x) \equiv C - const$ на $[a, b]; \forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}, \forall \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$;

$\sigma_T(f, \Xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} c \Delta x_k = c \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta x_k = c((x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) = c(x_n - x_0) = c(b - a) \underset{\delta_T \to 0}{\to} c(b - a); \Rightarrow \exists \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T(f, \Xi) = c(b - a). \Rightarrow f(x) -$ интегрируема на $[a, b]$, причем $\int_a^b c dx = c(b - a) \Rightarrow$ интегрируемые функции существуют.

б) $\chi(x) = \begin{cases} 1, x - \text{рац.} \\ 0, x - \text{иррац.} \end{cases}, x \in [a,b]$ (функция Дирихле)

Предположим,что $\exists \int\limits_a^b \chi(x)dx = I,$ т.е $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta, \forall\Xi \Rightarrow |\sigma_T(\chi,\Xi) - I| < \varepsilon$

Возьмем $\Xi_1 = \{\xi_k^{(1)}\}_{k=1}^n$ – набор рац. точек $\qquad \sigma^{(1)} = \sigma_T(\chi,\Xi_1) = \sum\limits_{k=1}^n \underbrace{\chi(\xi_k^{(1)})}_{=1} \Delta x_k = b - a$

Возьмем $\Xi_2 = \{\xi_k^2\}_{k=1}^n$ – набор иррац. точек $\qquad \sigma^{(2)} = \sigma_T(\chi,\Xi_2) = \sum\limits_{k=1}^n \underbrace{\chi(\xi_k^{(2)})}_{=0} \Delta x_k = 0$

$b - a = |\sigma^{(1)} - \sigma^{(2)}| = |\sigma^{(1)} - I - \sigma^{(2)} + I| \leqslant \underbrace{|\sigma^{(1)} - I|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|\sigma^{(2)} - I|}_{<\varepsilon} < \varepsilon + \varepsilon = b - a$ – противоречие $\Rightarrow$ $\chi(x)$ не является интегрируемой на $[a,b]$

Теорема 2.1 (Необходимое условие интегрируемости)**.** *$f(x)$-интегрируема на $[a,b] \Rightarrow f(x)-$ ограничена на $[a,b]$*

Доказательство. От противного. Предположим,что $f(x)$ не является ограниченной на $[a,b]$, но при этом $\exists \int_a^b f(x)dx = I,$ т.е $\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta, \forall\Xi \Rightarrow |\sigma_T(f,\Xi) - I| < \varepsilon.$
Берем $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists\delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta, \forall\Xi \Rightarrow |\sigma_T(F,\Xi) - I| < 1$

Берем $\forall T = \{a = x_0 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b\}$;

Строим $\Xi = \{\xi\}_{k=1}^n$ $f(x)$ неограничена на $[a,b] \Rightarrow \exists k : f(x)$ неограничена на $[x_{k-1}, x_k]$,

$\Xi : \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n-$ произвольные.
Берем такое $\xi_k : |f(\xi_k)| > \dfrac{1 + |I| + |f(\xi_1)|\Delta x_1 + |f(\xi_2)|\Delta x_2 + \dots + |f(\xi_{k-1})|\Delta x_{k-1} + \dots + |f(\xi_n)|\Delta x_n}{\Delta x_k}|$

$|\sigma_T(f,\Xi) - I| \geqslant |\sigma_T(f,\Xi)| - |I| = |f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_{k-1})\Delta x_{k-1} + f(\xi_k)\Delta x_k + f(\xi_{k+1})\Delta x_{k+1} + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n|$ $- |I| = |f(\xi_k)\Delta x_k - (-f(\xi_1)\Delta x_1 - \dots - f(\xi_{k-1})\Delta x_{k-1} - f(\xi_{k+1})\Delta x_{k+1} - \dots - f(\xi_n)\Delta x_n)| - |I| \geqslant$ $\geqslant |f(\xi_k)|\Delta x_k - |f(\xi_1)|\Delta x_1 - \dots - |f(\xi_{k-1})|\Delta x_{k-1} - |f(\xi_{k+1})|\Delta x_{k+1} - \dots - |f(\xi_n)|\Delta x_n - |I| > | = \varepsilon \Rightarrow$ противоречие ☐

2.2 Суммы Дарбу и их свойства. Связь сумм Дарбу с интегральной суммой

Пусть $f(x)$ ограничена на $[a,b]$. $\quad T = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$. $\quad \begin{aligned} M_k &\underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \sup(f(x)); \\ m_k &\underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \inf(f(x)). \end{aligned}$

$S_T(f) = \sum\limits_{k=1}^n M_k \Delta x_k$ – верхняя сумма Дарбу.

$s_T(f) = \sum\limits_{k=1}^n m_k \Delta x_k$ – нижняя сумма Дарбу

Эти суммы не обязаны быть интегральными суммами, т.к точные грани не всегда достигаются.

$\forall\Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n \Rightarrow m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k. \qquad s_T(f) \leqslant \sigma_T(f,\Xi) \leqslant S_T(f)$

Определение. $T_1 = \{a = x_0^{(1)} < x_1^{(1)} < \dots < x_n^{(1)} = b\} \qquad T_2 = \{a = x_0^{(2)} < x_1^{(2)} < \dots < x_m^{(2)} = b\}$.

T_2 называется последующим к T_1, если $x_k^{(1)} \in T_2 \forall k = \overline{0,n}$.Обозначение $T_2 \succ T_1$

Теорема 2.2. *Если* $T_1 \succ T_2 \Rightarrow \begin{matrix} 1) & S_{T_1}(f) \leqslant S_{T_2}(f) \\ 2) & s_{T_1}(f) \geqslant s_{T_2}(f) \end{matrix}$

Доказательство. 1) Пусть у T_1 ровно на 1 точку больше, т.е $\begin{matrix} T_2 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n < b\}. \\ T_1 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < \tilde{x} < x_K < \dots < x_n = b\}. \end{matrix}$

$M_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \sup f(x), \quad M'_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant \tilde{x}}{=} \sup f(x) \leqslant M_k, \quad M''_k \underset{\tilde{x} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \sup f(x) \leqslant M_k$

Рассмотрим $S_{T_2}(f) - S_{T_1}(f) = M_k \Delta x_k - M'_k(\tilde{x} - x_{k-1}) - M''_k(x_k - \tilde{x}) = M_k(x_k - x_{k-1}) - M'_k(\tilde{x} - x_{k-1}) - M''_k(x_k - \tilde{x}) = M_k(x_k - \tilde{x} + \tilde{x} - x_{k-1}) - M'_k(\tilde{x} - x_{k-1}) = \underbrace{(M_k - M''_k)}_{\geqslant 0} \underbrace{(x_k - \tilde{x})}_{>0} + \underbrace{(M_k - M'_k)}_{\geqslant 0} \underbrace{(\tilde{x} - x_{k-1})}_{>0} \geqslant 0 \Rightarrow$

$S_{T_2}(f) \geqslant S_{T_1}(f)$. Если у T_1 более, чем на одну точку больше, то делаем аналогично нужное число раз. □

Теорема 2.3. $\forall T_1, T_2 \Rightarrow s_{T_1}(f) \leqslant S_{T_2}(f)$

Доказательство. Рассмотрим $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow \begin{cases} T_3 \succ T_1 \\ T_3 \succ T_2 \end{cases} \Rightarrow s_{T_1}(f) \underset{\text{Т2.2}}{\leqslant} s_{T_3}(f) \leqslant S_{T_3}(f) \underset{\text{Т2.2}}{\leqslant} S_{T_2}(f)$ □

Теорема 2.4. $\forall T, \forall \varepsilon > 0 \exists \Xi_1, \exists \Xi_2 : \begin{cases} 0 \leqslant S_T(f) - \sigma_T(f, \Xi_1) < \varepsilon \\ 0 \leqslant \sigma_T(f, \Xi_2) - s_T(f) < \varepsilon \end{cases}$

Доказательство. Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b\}$. $\begin{matrix} M_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \sup(f(x)), \\ m_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \inf(f(x)) \end{matrix} \Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \begin{matrix} \exists \xi_k^{(1)} \in [x_{k-1}, x_k] : 0 \leqslant M_k - f(\xi_k^{(1)}) < \dfrac{\varepsilon}{b-a} \\ \exists \xi_k^{(2)} \in [x_{k-1}, x_k] : 0 \leqslant f(\xi_k^{(2)}) - m_k < \dfrac{\varepsilon}{b-a} \end{matrix} \Bigg| \Delta x_k \text{ и } \sum_{k=1}^{n} \Rightarrow \begin{matrix} 0 \leqslant S_T(f) - \sigma_T(f, \Xi_1) < \varepsilon \\ 0 \leqslant \sigma_T(f, \Xi_2) - s_T(f) < \varepsilon \end{matrix}$$ □

2.3 Верхний и нижний интегралы Дарбу. Критерий интегрируемости

Из теоремы 2.3 $\Rightarrow \forall T_1, T_2 \quad \underbrace{s_{T_1}(f)}_{\text{огр. сверху}} \leqslant \underbrace{S_{T_2}(f)}_{\text{огр. снизу}}$

Рассмотрим $\bar{I} \underset{T}{=} \inf S_T(f) -$ верхний интеграл Дарбу. $\underline{I} \underset{T}{=} \sup s_T(f) -$ нижний интеграл Дарбу

$s_{T_1}(f) \leqslant S_{T_2}(f)$. $\quad \underline{I} \leqslant S_{T_2}(f)$. $\quad \boxed{\underline{I} \leqslant \bar{I}}$

Теорема 2.5 (Критерий интегрируемости). $f(x)$ *интегрируема на* $[a, b] \Leftrightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f) - s_T(f)) = 0$

Доказательство. $\Rightarrow$ $f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \exists \int\limits_a^b f(x)dx = I$, т.е $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow$

$|\sigma_T(f, \Xi) - I| < \dfrac{\varepsilon}{4}$, т.е $I - \dfrac{\varepsilon}{4} < \sigma_T(f, \Xi) < I + \dfrac{\varepsilon}{4}$

Но $\varepsilon > 0 \underset{\text{Т2.4}}{\Rightarrow} \exists \Xi_1, \exists \Xi_2 : \begin{matrix} 0 \leqslant S_T(f) - \sigma_T(f, \Xi_1) < \dfrac{\varepsilon}{4} \\ 0 \leqslant \sigma_T(f, \Xi_2) - s_T(f) < \dfrac{\varepsilon}{4} \end{matrix}$

$I - \dfrac{\varepsilon}{2} < \sigma_T(f, \Xi_2) - \dfrac{\varepsilon}{4} < s_T(f) \leqslant S_T(f) < \sigma_T(f, \Xi_1) + \dfrac{\varepsilon}{4} < I + \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow 0 \leqslant S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f) - s_T(f)) = 0$

$\Leftarrow$ Пусть $\lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f) - s_T(f)) = 0$, т.е $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leqslant S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$

Но $s_T(f) \leqslant \underline{I} \leqslant \bar{I} \leqslant S_T(f) \Rightarrow 0 \leqslant \bar{I} - \underline{I} < \varepsilon \Rightarrow \bar{I} - \underline{I} = 0 \Rightarrow \underline{I} = \bar{I}$.

Обозначим $\underline{I} = \bar{I} = I \Rightarrow \left.\begin{matrix} s_T(f) \leqslant I \leqslant S_T(f) \\ \text{Но } \forall \Xi \Rightarrow s_T(f) \leqslant \sigma_T(f,\Xi) \leqslant S_T(f) \end{matrix}\right\} \Rightarrow |\sigma_T(f,\Xi) - I| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T(f,\Xi) = I \Rightarrow f(x) -$ интегрируема на $[a,b]$ $\square$

Следствие 1. $f(x)$ *интегрируема на* $[a,b] \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0} s_T(f) = \lim\limits_{\delta_T \to 0} S_T(f) = I (\exists \int_a^b f(x)dx = I)$

Доказательство. $f(x)$ инт на $[a,b] \Rightarrow \begin{matrix} 1) \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T)(f) - s_T(f)) = 0 \\ 2) \int_a^b f(x)dx = I, \forall T s_T(f) \leqslant I \leqslant S_T(f) \end{matrix} \Rightarrow 0 \leqslant S_T(f) - I \leqslant S_T(f) - s_T(f); 0 \leqslant I - s_T(f) \leqslant \underbrace{S_T(f) - s_T(f)}_{\underbrace{\to 0}_{\delta_T \to 0}} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f) - I) = 0 \\ \lim\limits_{\delta_T \to 0}(I - s_T(f)) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0} S_T(f) = \lim\limits_{\delta_T \to 0} s_T(f) = I.$ $\square$

Лекция 4

11.02

2.4 Интегрируемость непрерывной функции. Интегрируемость монотонной функции

Теорема 2.6. $f(x) \in C[a,b] \Rightarrow f(x)$ *интегрируема на* $[a,b]$

Доказательство. $f(x) \in C[a,b] \underset{\text{т.Кантора}}{\Rightarrow} f(x)$ равномерно непрерывна на $[a,b]$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x', x'' \in [a,b] : |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.
Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$. $\quad \delta_T < \delta$;

$$f(x) \in C[x_{k-1}, x_k] \underset{\text{т. Вейрштрасса}}{\Rightarrow} \exists x_k', x_k'' \in [x_{k-1}, x_k] : \begin{array}{l} M_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \sup f(x) = f(x_k') \\ m_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \inf(f(x)) = f(x_k'') \end{array}$$

$|x_k' - x_k''| \leqslant \Delta x_k \leqslant \delta_t \Rightarrow |M_k - m_k| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

$$0 \leqslant M_k - m_k \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} \Big| \Delta x_k \text{ и } \sum_{k=1}^{n} \Rightarrow 0 \leqslant S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\delta_T \to 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0 \underset{\text{кр. инт.}}{\Rightarrow} f(x) \text{ интегрируема на } [a,b]$$

□

Теорема 2.7. $f(x)$ *монотонна на* $[a,b]$*(не имеет значения, что из себя представляет множество точек разрыва)* $\Rightarrow f(x)$ *интегрируема на* $[a,b]$

Доказательство. Пусть $f(x)$ монотонно возрастает на $[a,b] \Rightarrow f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b) \forall x \in [a,b] \Rightarrow f(x)$ ограничена на $[a,b]$.

$$\text{Берем } \forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} \qquad f(x_{k-1}) \leqslant f(x) \leqslant f(x_k) \forall x \in [x_{k-1}, x_k] \Rightarrow \begin{array}{l} M_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \sup f(x) = f(x_k) \\ m_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \inf f(x) = f(x_{k-1}) \end{array}$$

$$0 \leqslant S_T(f) - s_T(f) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \Delta x_k \leqslant \delta_T \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) = \delta_T \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \delta_T (f(b) - f(a)) \underset{\delta_T \to 0}{\to}$$
$0 \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0 \underset{\text{критерий инт.}}{\Rightarrow} f(x)$ интегрируема на $[a,b]$
Самостоятельно рассмотреть случай монотонного убывания. □

Пример. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, x \in \left(\dfrac{1}{k+1}, \dfrac{1}{k} \right], k \in \mathbb{N} \\ 0, x = 0 \end{cases}$

У $f(x)$ ∞-но много точек разрыва на $[a,b] : x = \dfrac{1}{k}, k = 2, 3, 4, \dots -$ точки разрыва 1-го рода
$f(x)$ монотонно возрастает на $[0,1] \Rightarrow f(x)$ интегрируема на $[0,1]$

2.5 Интегрируемость функции, отличающейся от интегрируемой в конечном количестве точек

Теорема 2.8. *Пусть* $f(x)$ *интегрируема на* $[a,b] \Rightarrow \tilde{f}(x) = \begin{cases} A, x = \tilde{x} \in [a,b] \\ f(x), x \in [a,b] \backslash \{\tilde{x}\} \end{cases}$ *тоже интегрируема на* $[a,b]$*, причем* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \tilde{f}(x)dx$

Доказательство. $f(x)$ интегрируема на $[a,b] \Rightarrow f(x)$

1) ограничена на $[a,b]$, т.е $\exists M > 0 : |f(x)| \leqslant M \forall x \in [a,b]$

2) $\lim\limits_{\delta_T \to 0} S_T(f) = \int\limits_a^b f(x)dx = I$, т.е

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T : \delta_T < \delta \Rightarrow |S_T(f) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Берем $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{4(M + |A|)} > 0 \Rightarrow \exists \delta = min(\delta_1, \delta_2) > 0$. Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} : \delta_T < \delta$;

$M_k = \sup f(x)$

$\tilde{M}_k = \sup \tilde{f}(x), \quad k = \overline{1,n}$

Рассмотрим $|S_T(f) - S_T(\tilde{f})| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k - \tilde{M}_k \Delta x_k)\right| \leqslant \delta_T * 2(M + |A|) <$

$< 2\delta(M + |A|) \leqslant 2\delta_2(M + |A|) = \frac{\varepsilon}{2}$

Рассмотрим $|S_T(\tilde{f}) - I| = |S_T(\tilde{f}) - S_T(f) + S_T(f) - I| \leqslant \underbrace{|S_T(\tilde{f}) - S_T(f)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|S_T(f) - I|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$, т.е $\lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f) - I) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0} S(\tilde{f}) = I$

Аналогично: $\lim\limits_{\delta_T \to 0} s_T(\tilde{f}) = I \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(\tilde{f}) - s_T(\tilde{f})) = 0 \underset{\text{кр. инт.}}{\Rightarrow} \tilde{f}(x)$ интегрируема на $[a,b]$.

Т.к $\int \tilde{f}(x)dx = \lim\limits_{\delta_T \to 0} S_T(f) = \lim\limits_{\delta_T \to 0} S_T(\tilde{f}) \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(\tilde{f})) = \int\limits_a^b \tilde{f}(x)dx => \int\limits_a^b \tilde{f}(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$ □

Следствие 1. *$f(x)$ интегрируема на $[a,b] \Rightarrow \tilde{f}(x)$, отличающася от $f(x)$ в <u>конечном</u> количестве точек, тоже интегрируема на $[a,b]$,причем* $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b \tilde{f}(x)dx$

Доказательство. Применим последнюю теорему надлежащее число раз. □

Пример. $\chi(x) = \begin{cases} 1, x - \text{рац.} \\ 0, x - \text{иррац.} \end{cases}$ отличающаяся от $f_0(x) \equiv 0$ на $[a,b]$ в счетном количество точек, но при этом $\chi(x)$ не является интегрируемой на $[a,b]$, а $f_0(x)$ - является.

Теорема 2.9 (Критерий Лебега)**.** *Пусть $f(x)$ ограничена на $[a,b]$, а $R(f)-$ множество ее точек разрыва $f(x)$ на $[a,b]$, тогда $f(x)$ интегрируема по Риману на $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $R(f)$ имеет меру нуль, т.е* $\forall \varepsilon > 0 \exists \{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^{\infty} : R(f) \subset \cup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i, \beta_i)$, *при этом* $\sup\limits_m \sum\limits_{i=1}^{m}(\beta_i - \alpha_i) < \varepsilon$

Доказательство. Без доказательства. □

Глава 3

Свойства определенного интеграла

Лекция 4

11.02

3.1 Линейные свойства определенного интеграла

Определение. Если $f(x)$ определена при $x = a$, то положим $\int_a^a f(x)dx \equiv 0$

Определение. Если $a < b$, а еще $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то положим $\int\limits_b^a f(x)dx \equiv -\int\limits_a^b f(x)dx$

Теорема 3.1. *Если $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, $f(x) \pm g(x)$ тоже интегрируема на $[a, b]$,причем* $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x)dx) = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$

Доказательство. Если $a = b$, то доказывать нечего: $0 = 0 \pm 0$.

Если $a < b$, то: Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$; Берем $\forall \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$, тогда: рассмотрим $\sigma_T(f \pm g, \Xi) = \sum\limits_{k=1}^n (f(\xi_k) \pm g(\xi_k))\Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \pm \sum\limits_{k=1}^n g(\xi_k)\Delta x_k = \underset{\delta_T \to 0}{\sigma_T(f, \Xi) \to I_1} \pm \underset{\delta_T \to 0}{\sigma_T(g, \Xi) \to I_2} \to I_1 + I_2$, т.е

$\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$

Если $a > b \Rightarrow \int\limits_b^a (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_b^a f(x)dx \pm \int\limits_b^a g(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$ ☐

Теорема 3.2. *$f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R} \quad c \in f(x)$ интегрируема на $[a, b]$,причем* $\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx$

Доказательство. Самостоятельно. ☐

3.2 Интегрируемость произведения интегрируемых по Риману функций

Теорема 3.3. *Если* $f(x), g(x)$ *интегрируемы на* $[a, b] \Rightarrow f(x)g(x)$ *тоже интегрируема на* $[a, b]$

Доказательство. пусть $a < b$. $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a, b] \Rightarrow f(x), g(x) -$ ограничены на $[a, b]$, т.е $\exists M^{(f)} > 0, M^{(g)} > 0 : \begin{matrix} |f(x)| \leqslant M^{(f)} \forall x \in [a, b] \\ |g(x)| \leqslant M^{(g)} \forall x \in [a, b] \end{matrix}$. Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$; Введем

$M_k^{(f)} = \sup\limits_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} f(x) \qquad M_k^{(g)} = \sup g(x) \qquad M_k^{(fg)} = \sup(f(x)g(x))$

$m_k^{(f)} = \inf f(x) \qquad m_k^{(g)} = \inf g(x) \qquad m_k^{(fg)} = \inf(f(x)g(x))$

$\forall \varepsilon > 0 \exists x_k', x_k'' \in [x_{k-1}, x_k] : \begin{matrix} M_k^{(fg)} < f(x_k')g(x_k') + \dfrac{\varepsilon}{2} \\ m_k^{(fg)} > f(x_k'')g(x_k'') - \dfrac{\varepsilon}{2} \end{matrix} \Rightarrow 0 \leqslant M_k^{(fg)} - m_k^{(fg)} < f(x_k')g(x_k') - f(x_k'')g(x_k'') + \varepsilon =$ $f(x_k')g(x_k') + f(x_k')g(x_k'') - f(x_k')g(x_k'') - f(x_k'')g(x_k'') + \varepsilon = f(x_k')(g(x_k') - g(x_k'')) + g(x_k'')(f(x_k') - f(x_k'')) + \varepsilon \leqslant$ $M^{(f)}((M_k)^g - m_k^{(g)}) + M^{(g)}(M_k^{(f)} - m_k^{(f)}) + \varepsilon \Rightarrow 0 \leqslant M_k^{(fg)} - m_k^{(fg)} \leqslant M^{(f)}((M_k)^g - m_k^{(g)}) + M^{(g)}(M_k^{(f)} - m_k^f) \Rightarrow$ $0 \leqslant S_T(fg) - s_T(fg) \leqslant M^{(f)}(S_T(g) - s_T(g)) + M^{(g)}(S_T(f) - s_T(f)) \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(fg) - s_T(fg)) = 0 \Rightarrow$ $f(x)g(x)$ интегрируема на $[a, b]$

$\square$

Лекция 5

14.02

3.3 Интегрируемость функции на внутреннем отрезке. Аддитивность определенного интеграла

Теорема 3.4. *$f(x)$ интегрируема на $[a,b] \Rightarrow \forall [c,d] \subset [a,b] f(x)$ интегрируема на $[a,b]$*

Доказательство. $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f,[a,b]) - s_T(f,[a,b]))$ $\Rightarrow$ т.е $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: $\forall T, \delta_T < \delta \to 0 \leqslant S_T(f,[a,b]) - s_T(f,[a,b]) < \varepsilon$

Берем $\forall \tau -$ разбиение $[c,d]$. Дополним его до T(разбиение $[a,b]$). Считаем, что $a \leqslant c < d \leqslant b$;

$T|_{[c,d]} = \tau; \delta_T < \delta$

Рассмотрим $0 \leqslant S_T(f,[c,d]) - s_T(f,[c,d]) \leqslant S_T(f,[a,b]) - s_T(f,[a,b]) < \varepsilon,$ т.е $\lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f,[c,d]) - s_T(f,[c,d])) = 0 \Rightarrow f(x)$ интегрируема на $[c,d]$ □

Теорема 3.5. *$f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и интегрируема на $[b,c] \Rightarrow f(x)$ интегрируема на $[a,c]$, причем*
$$\int\limits_a^c f(x) = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx$$

Доказательство. $\left.\begin{matrix} \exists \int\limits_a^b f(x)dx = I_1, \\ \exists \int\limits_b^c f(x)dx = I_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Пусть $a < b < c:$ $f(x)$ограничена на $[a,b]$ и ограничена на $[b,c] \Rightarrow$

$f(x)$ ограничена на $[a,c] \Rightarrow \exists m, M : m \leqslant f(x) \leqslant M \forall x \in [a,c]$

$\lim\limits_{\delta_{\tau_1} \to 0} S_{\tau_1}(f,[a,b]) = I_1, \quad \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : \forall \tau_1$(разбиение $[a,b]$)$, \delta_{\tau_1} < \delta_1 \Rightarrow |S_{\tau_1}(f,[a,b]) - I_1| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

$\lim\limits_{\delta_{\tau_2} \to 0} S_{\tau_2}(f,[b,c]) = I_2 \quad \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0$(разбиение $[b,c]$)$, \delta_{\tau_2} < \delta_2 \Rightarrow |S_{\tau_2}(f,[b,c]) - I_2| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

$\exists \delta_3 = \dfrac{\varepsilon}{3(M-m)+1} > 0$. Берем $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3) > 0$. Берем $\forall T$(разбиение $[a,c]$) $= \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = c\} \Rightarrow \exists k : b \in [x_{k-1}, x_k] \quad M_k = \sup f(x), \quad M'_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant b}{=} \sup f(x), \quad M''_k \underset{b \leqslant x \leqslant x_k}{=} \sup f(x).$

Рассмотрим $T_1 = T \cup b \Rightarrow \delta_{T_1} \leqslant \delta_T < \delta$

$|S_T(f,[a,c]) - (I_1 + I_2)| = |S_T(f,[a,c]) - S_{T_1}(f,[a,c]) + S_{T_1}(f,[a,c]) - (I_1+I_2)| \leqslant |S_T(f,[a,c]) - S_{T_1}(f,[a,c])| + |S_{T_1}(f,[a,c]) - I_1 - I_2| = \underbrace{|M_k(x_k - x_{k-1}) - M'_k(b - x_{k-1}) - M''_k(x_k - b)|}_{(M_k - M''_k)(x_k - b) + (M_k - M'_k)(b - x_{k-1}) \leqslant (M-m)(x_k - x_{k-1}) \leqslant (M-m)\delta_T < \delta(M-m) \leqslant \delta_3(M-m)} + |S_{\tau_1}(f,[a,b]) + S_{\tau_2}(f,[b,c]) - I_1 - I_2| \leqslant$

$\leqslant (M-m)\delta_3 + |S_{\tau_1}(f,[a,b] - I_1)| + |S_{\tau_2}(f,[b,c]) - I_2| < \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f,[a,c]) - I_1 - I_2) = 0 = \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f,[a,c])) = I_1 + I_2 \Rightarrow$

Аналогично (самостоятельно) $\lim\limits_{\delta_T \to 0} s_T(f,[a,c]) = I_1 + I_2$

$\Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f,[a,c]) - s_T(f,[a,c])) = 0 \underset{\text{кр. инт.}}{\Rightarrow} f(x)$ интегрируема на $[a,c]$, причем (т.к $\lim\limits_{\delta_T \to 0} S_T(f,[a,c]) = I_1 + I_2) \Rightarrow \int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx$

Теперь пусть $a < c < b \underset{\text{Т3.4}}{\Rightarrow} f(x)$ интегрируема на $[a,c] \Rightarrow$ работает только что рассмотренный случай $\Rightarrow$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx \Rightarrow \int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx$$ □

3.4 Монотонность определенного интеграла. Строгая монотонность определенного интеграла от непрерывной функции

Теорема 3.6. $\int\limits_a^b 1dx = b - a$

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 3.7. *Пусть* $a \leqslant b, f(x)$ *интегрируема на* $[a,b], f(x) \geqslant 0$ *на* $[a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \geqslant 0$

Доказательство. 1) $a = b$ - очевидно.

2) $a < b \Rightarrow \exists \int\limits_a^b f(x)dx = I \geqslant S_T(f) = \sum\limits_{k=1}^n \underbrace{m_k}_{\geqslant 0} \underbrace{\Delta x_k}_{\geqslant 0} \geqslant 0$ □

Теорема 3.8. $a \leqslant b; f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на* $[a,b]$, *причем* $f(x) \geqslant g(x) x \in [a,b] \Rightarrow$
$\Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \geqslant \int\limits_a^b g(x)dx$

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 3.9. $f(x) \in C[a,b](a < b), f(x) \geqslant 0 \forall x \in [a,b]$, *причем* $f(x) \not\equiv 0$ *на* $[a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx > 0$

Доказательство. $\exists \xi \in (a,b) : f(\xi) = A > 0 \underset{\text{по т. о сохр. знака}}{\Rightarrow} \exists \delta > 0 : \forall x \in (\xi - \delta, \xi + \delta) f(x) > \dfrac{A}{2}$

Рассмотрим $\int\limits_a^b f(x) = \underbrace{\int\limits_a^{\xi-\delta} f(x)dx}_{\geqslant 0} + \int\limits_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} f(x)dx + \underbrace{\int\limits_{\xi+\delta}^b f(x)dx}_{\geqslant 0} \geqslant 0 + \dfrac{A}{2} 2\delta + 0 = A + \delta \geqslant 0$ □

Теорема 3.10. $f(x), g(x) \in C[a,b](a < b); f(x) \geqslant g(x) \forall x \in [a,b]$, *причем* $f(x) \not\equiv g(x)$ *на* $[a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx >$
$\int\limits_a^b g(x)dx$

Доказательство. Самостоятельно. □

3.5 Интегрируемость модуля интегрируемых по Риману функций. Связь интеграла от функции с интегралом от ее модуля

Теорема 3.11. *$f(x)$ интегрируема на$[a,b] \Rightarrow |f(x)|$ тоже интегрируема на $[a,b]$, причем*
$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \left|\int\limits_a^b |f(x)|dx\right|.$$

Доказательство. 1) Если $a = b \Rightarrow 0 \leqslant 0 \Rightarrow$ доказывать нечего.

2) Если $a < b$, то : $f(x)$ интегрируема на $[a,b] \underset{\text{кр. инт.}}{\Rightarrow} \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f) - s_T(f)) = 0$, т.е $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leqslant S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$

Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}, \delta_T < \delta$

$$M_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \sup f(x) \qquad M'_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \sup |f(x|)$$
$$m_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \inf f(x) \qquad m'_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \inf |f(x)|$$

а) $0 \leqslant m_k \leqslant M_k \Rightarrow f(x) \geqslant 0$ на $[x_{k-1}, x_k \Rightarrow |f(x)| = f(x)$ на $[x_{k-1}, x_k] \Rightarrow m'_k = m_k, M'_k = M_k \Rightarrow M'_k - m'_k = M_k - m_k$

б) $m_k \leqslant M_k \leqslant 0 \Rightarrow f(x) \leqslant 0$ на $[x_{k-1}, x_k] \Rightarrow |f(x)| = -f(x)$ на $[x_{k-1}, x_k], M'_k = -m_k, m'_k = -M_k \Rightarrow M'_k - m'_k = M_k - m_k$

в) $m_k \leqslant 0 \leqslant M_k \Rightarrow M'_k = \max(m_k, -m_k) \Rightarrow M'_k - m'_K \leqslant M'_k \leqslant M_k - m_k \Rightarrow$ в любом случае $0 \leqslant M'_k - m'_k \leqslant M_k - m_k| \, \Delta x_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} \Rightarrow 0 \leqslant S_T(|f|) - s_T(|f|) \leqslant S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(|f|) - s_T(|f|)) = 0 \underset{\text{кр. инт}}{\Rightarrow} |f(x)|$ интегрируема на $[a,b]$.

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)| \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow -\int\limits_a^b |f(x)|dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx$$

Если $a > b \Rightarrow \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \left|\int\limits_a^b |f(x)|dx\right|$ □

3.6 Неравенство Коши-Буняковского для определенных интегралов. Теорема о среднем и ее обобщение

Теорема 3.12 (Неравенство Коши-Буняковского)**.** *$f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a,b] \Rightarrow$*
$$\Rightarrow \left[\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \leqslant \left[\int\limits_a^b f^2(x)dx\right]\left[\int\limits_a^b g^2(x)dx\right]$$

Доказательство. Пусть $a < b$.

Рассмотрим $\varphi(\lambda) = \int\limits_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2 = \lambda^2 \underbrace{\int\limits_a^b f^2(x)dx}_{=A} + 2\lambda \underbrace{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}_{=B} + \underbrace{\int\limits_a^b g^2(x)dx}_{=C} = A\lambda^2 + 2B\lambda + C$

Если $A = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow B^2 \leqslant AC$

Если $A \geqslant 0 \Rightarrow B^2 - AC \leqslant 0$, т.е $B^2 \leqslant AC \Rightarrow \left[\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\right] \leqslant \left(\int\limits_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int\limits_a^b g^2(x)dx\right)$

Если $a = b \Rightarrow$ верно

Если $a > b \Rightarrow$ верно $\square$

Теорема 3.13 (1-ая теорема о среднем)**.** $f(x), g(x)$ *интегрируемы на* $[a,b]$; $m \underset{[a,b]}{=} \inf f(x), M \underset{[a,b]}{=} \sup f(x)$, $g(x) \geqslant 0\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \exists \mu \in [m, M]: \quad \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx$

Доказательство. $a < b$. Пусть $g(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$.

$m \leqslant f(x) \leqslant M \quad \forall x \in [a,b]$

$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x) \Rightarrow m\int\limits_a^b g(x)dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int\limits_a^b g(x)dx$

1) Если $\int\limits_a^b g(x)dx = 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0 \Rightarrow$ утверждение верно $\forall \mu \in [m, M]$

2) Если $\int\limits_a^b g(x)dx > 0 \Rightarrow m \leqslant \underbrace{\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}}_{\mu} \leqslant M \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int\limits_a^b g(x)dx$

Если $g(x) \leqslant 0$ на $[a,b]$, то рассмотрим $\tilde{g}(x) = -g(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$.

Если $a \geqslant b \Rightarrow$ самостоятельно. $\square$

Следствие 1. *Если в условиях предыдущей теоремы* $f(x) \in C[a,b] \Rightarrow \exists \xi \in [a,b]: \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)dx$

Доказательство. По теореме Вейрештрасса: $\exists \alpha, \beta \in [a,b]: f(\alpha) = m \quad f(\beta) = M \qquad \mu \in [m, M] \underset{\text{т.Коши}}{\Rightarrow}$
$\exists \mu \in [\alpha, \beta] \subset [a,b]: f(\xi) = \mu$ $\square$

Следствие 2. *Если* $f(x)$ *интегрируема на* $[a,b], m \underset{a \leqslant x \leqslant b}{=} \inf f(x),\ M \underset{a \leqslant x \leqslant b}{=} \sup f(x) \Rightarrow \exists \mu \in [m, M]:$ $\int\limits_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$. *А если еще* $f(x) \in C[a,b] \Rightarrow \exists \xi \in [a,b]: \int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

Доказательство. Самостоятельно. $\square$

Глава 4

Основные правила интегрирования.

Лекция 6

21.02

4.1 Интеграл с переменным верхним (нижним) пределом, его непрерывность и дифференцируемость. Существование первообразной у непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница.

Определение. Пусть $f(x)-$ интегрируема на $[a,b]$. Рассмотрим функции $F(x)$ и $G(x)$, определенные на отрезке $[a,b]$:

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt - \text{ интеграл с переменный верхним пределом}$$

$$G(x) = \int\limits_x^b f(t)dt - \text{ интеграл с переменным нижним пределом}$$

$F(x) + G(x) = \int\limits_a^b f(t)dt \equiv const$ на $[a,b]$

Теорема 4.1. *$f(x)$ интегрируема на $[a,b] \Rightarrow F(x) \in C[a,b]$*

Доказательство. По Т1 $\exists M > 0 : |f(x)| \leqslant M \; \forall x \in [a,b]$. Берем $\forall x_0 \in [a,b]$ и $\Delta x : x_0+\Delta x \in [a,b]$. Тогда рассмотрим $|F(x_0+\Delta x) - F(x_0)| = \left|\int\limits_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^{x_0} f(t)dt\right| = \left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt\right| \leqslant \left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t)|dt\right| \leqslant M|\Delta x| \underset{\Delta x \to 0}{\to} 0 \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}(F(x_0+\Delta x) - F(x_0)) = 0,$ т.е $\lim\limits_{\Delta x \to 0} F(x_0+\Delta x) = F(x_0) \Rightarrow F(x)$ непрерывна при $x = x_0$.
Но x_0 - любое из $[a,b] \Rightarrow F(x) \in C[a,b]$ □

Теорема 4.2. *$f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, а также $f(x)$ непрерывна при $x = x_0 \Rightarrow \exists F'(x_0) = f(x_0)$ (на концах односторонние производные)*

Доказательство. $f(t)$ непрерывна при $t = x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap [a,b] \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Берем $\Delta x : \Delta x \in (-\delta,\delta)\backslash\{0\}, x_0+\Delta x \in [a,b]$. Рассмотрим $\left|\dfrac{F(x_0+\Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| =$

$$= \left| \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)dt \right| = \left| \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} \frac{f(t)-f(x_0)}{\Delta x} dt \right| \leqslant \left| \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} \frac{|f(t)|-|f(x_0)|}{|\Delta x|} dt \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{|\Delta x|} |\Delta x| =$$

$\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, т.е $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0+\Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = F(x_0)$, т.е $\exists F'(x_0) = f(x_0)$ □

Теорема 4.3. $f(x) \in C[a,b] \Rightarrow \exists$ *первообразная к* $f(x)$ *на* $[a,b]$

Доказательство. $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt \Rightarrow \forall x \in [a,b] \exists F'(x) = f(x)$, т.е $F(x)-$ первообразная к $f(x)$ на $[a,b]$ □

Теорема 4.4 (Основная теорема интегрального исчисления)**.** $f(x) \in C[a,b], \Phi(x)-$ *первообразная к* $f(x)$ *на* $[a,b] \Rightarrow$ $\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$ *(Формула Ньютона-Лейбница)*

Доказательство. $\left.\begin{array}{l} \Phi(x)- \text{ первообразная к } f(x) \text{ на } [a,b]. \\ F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt - \text{ тоже первообразная на } [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \Phi'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b] \\ F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow F(x) =$ $\Phi(x) + C$, т.е $\int\limits_a^x f(t)dt = \Phi(x) + C$

при $x = a \Rightarrow C = -\Phi(a) \Rightarrow \int\limits_a^x f(t)dt = \Phi(x) - \Phi(a)$. При $x = b \Rightarrow \int\limits_a^x f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a)$ □

Для $G(x)$ справедливы теоремы аналогичные T4.1 T4.2 T4.3

4.2 Вычисление определенных интегралов способами замены переменных и интегрирования по частям.

Теорема 4.5 (Замена переменных)**.** $f(x) \in C[a,b]$; $\varphi(t) : \varphi'(t) \in C[\alpha,\beta], \begin{array}{l} \varphi(\alpha) = a \\ \varphi(b) = b \end{array}$ $[a,b]-$ *множество значений* $\varphi(t)$ *на* $[a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Доказательство. По T3.16 $\Rightarrow \exists \Phi(x)-$ первообразная к $f(x)$ на $[a,b]$, причем $\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$.
Рассмотрим сложную функцию $\Phi(\varphi(t))-$ дифференцируема на $[a,b]$ (по т. о дифф сложной функции) $\frac{d}{dt}(\Phi(\varphi(t))) = \Phi'_x(x)\Big|_{x=\varphi(t)} * \varphi'_t(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \forall t \in [a,b] \Rightarrow \Phi(\varphi(t))-$ первообразная к $\underbrace{f(\varphi(t))\varphi'(t)}_{\in C[a,b]}$ на $[a,b] \Rightarrow$

$$\int\limits_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(\varphi(t))\Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int\limits_a^b f(x)dx$$ □

Теорема 4.6. $u(x), v(x) : u'(x), v'(x) \in C[a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = (u(x)v(x))\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx$

Доказательство. $\frac{d}{dx}(u(x)v(x)) = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow u(x)v(x)-$ первообразная к $\underbrace{u'(x)v(x)+u(x)v'(x)}_{\in C[a,b]}$ на $[a,b]$ $\underset{\text{линейность}}{\Rightarrow} \int\limits_a^b u(x)v'(x)dx + \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx = \int\limits_a^b (u(x)v'(x)+u'(x)v(x))dx = [u(x)v(x)]\Big|_a^b$ □

Пусть $f(x) : f^{(n+1)}(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $x = x_0$, тогда $\forall x$ из этой окрестности имеет место: $f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0)) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x_0) - \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)d(x-t) = f(x_0) - (x-t)f'(t)\Big|_{t=x_0}^{t=x} + \int\limits_{x_0}^{x}(x-t)f''(t)dt = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!}f'(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x}(x-t)f''(t)dt = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!}(x-x_0) - \int\limits_{x_0}^{x} f''(t)d(\frac{(x-t)^2}{2}) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) - \frac{(x-t)^2}{2!}f''(t)\Big|_{t=x_0}^{t=x} + \frac{1}{2!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^2 f'''(t)dt = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0) + \frac{f'(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{1}{2!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^2 f'''(t)dt = \dots = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$

Итого:

$$\boxed{\begin{gathered} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x,f), \\ \text{где } r_n(x,f) = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \end{gathered}}$$

- формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$r_n(x,f) = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$. На $[x_0,x]$ $(x-t)^n$ не меняет знак, а $f^{(n+1)}(t) \in C[x_0,x] \Rightarrow \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = \frac{f^{n+1}(\xi)}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n dt = -\frac{f^{n+1}(\xi)}{n!}\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\Big|_{t=x_0}^{t=x} = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}-$ остаточный член в форме Лагранжа (получено при больших ограничениях, чем раньше)

Глава 5

Геометрические приложения определенного интеграла.

Лекция 6

21.02

5.1 Спрямляемость гладкой кривой. Выражение длины дуги гладкой кривой в виде определенного интеграла. Формулы длины дуги плоской кривой, заданной в декартовых либо полярных координатах.

Определение. Пусть $\varphi(t), \psi(t), \chi(t) \in C[a, b]$. Рассмотрим множество точек в пространстве, которое обозначим $L = \{M(x, y, z), x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), t \in [\alpha, \beta]\}$ - такое множество точек нзывается простой кривой, если $\forall t_1, t_2 \in [\alpha, \beta] : t_1 \neq t_2 \Rightarrow M_1(x_1, y_1, z_1) \neq M_2(x_2, y_2, z_2)$, где $\begin{cases} x_i = \varphi(t_i) \\ y_i = \psi(t_i) \\ z_i = \chi(t_i) \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots$

Если при этом $z = \chi(t) \equiv 0$ на $[a, b]$, то плоская простая кривая.

Определение. Говорят, что система уравнений $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} \quad t \in \{t\} -$ промежуток, задает параметрически кривую L, если промежуток $\{t\}$ можно разбить на конечный или бесконечный (счетный) набор отрезков $[\alpha_i, \beta_i]$, покрывающих данный промежуток $\{t\}$ и пересекающихся не более чем концами, так, что на каждом отрезке $[\alpha_i, \beta_i]$ L - простая кривая.

Везде далее, если не оговорено противного кривая - параметрически заданная кривая

Определение. Кривая $L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$ называется гладкой, если $\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t) \in C[a, b],$ а еще $(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2 > 0 \forall t \in [\alpha, \beta]$

$$L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta] \quad T = \{\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = \beta\} \; M_k(x, y, z): \begin{cases} x = \varphi(t_k) \\ y = \psi(t_k) \\ z = \chi(t_k) \end{cases}$$

Рассмотрим $l_T = \sum\limits_{k=1}^{n} |\overrightarrow{M_{k-1}M_k}| = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{[\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})]^2 + [\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})]^2 + [\chi_k - \chi_{k-1}]^2} -$ длина ломаной, вписанной в L. $T_1 = T \cup \tilde{t} \Rightarrow l_{T_1} \geqslant l_T$ (по неравенству треугольника). Тогда: $T_1 \succ T \to l_{T_1} \geqslant l_T$

Определение. Кривая L называется спрямляемой, если $\{l_T\}$ - ограниченное сверху множество.

Определение. Если L - спрямляемая кривая, то число $l = l(L) = \sup\limits_T \{l_T\}$ называется длиной кривой L.

Теорема 5.1. $L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta] -$ *гладкая кривая* $\Rightarrow L$ *- спрямляемая, причем*

$$l(L) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}$$

tg: @moksimqa

Лекция 7

25.02

Доказательство. $\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t) \in C[\alpha, \beta] \Rightarrow \exists M > 0 : |\varphi'(t)| \leqslant M, |\psi'(t)| \leqslant M, |\chi'(t)| \leqslant M \forall t \in [\alpha, \beta]$.

Берем $\forall T = \{\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k < \cdots < t_n = \beta\}$.

По теореме Лагранжа $\exists \alpha_k, \beta_k, \gamma_k \in (t_{k-1}, t_k)$:
$$\begin{aligned} &\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \varphi'(\alpha_k)\Delta t_k \\ &\psi(t_k) - \psi_{t_{k-1}} = \psi'(\beta_k)\Delta t_k \qquad k = \overline{1, n} \Rightarrow \\ &\chi(t_k) - \chi(t_{k-1}) = \chi'(\gamma_k)\Delta t_k \end{aligned}$$

$$\Rightarrow l_t = \sum_{k=1}^n \sqrt{(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_{k-}) - \psi(t_{k-1}))^2 + (\chi(t_k) - \chi(t_{k-1}))^2} = \sum_{k=1}^n \underbrace{\sqrt{(\varphi'(\alpha_k))^2 + (\psi'(\beta_k))^2 + (\chi(\gamma_k))^2}}_{\leqslant 3M^2} \leqslant$$

$\leqslant M\sqrt{3} \sum_{k=1}^n \Delta t_k = M\sqrt{3}(\beta - \alpha) = \{l_T\}-$ ограничена сверху $\Rightarrow L-$ спрямляемая.

Введем $f(t) = \sqrt{(\varphi(t))^2 + (\psi(t))^2 + (\chi(t))^2} \in C[\alpha, \beta] \Rightarrow f(t)$ интегрируема на $[\alpha, \beta] \Rightarrow \exists \int\limits_\alpha^\beta f(t)dt = I$, т.е

$\underline{\forall \varepsilon > 0} \exists \delta_1 > 0 : \forall T, \delta_T < \delta_1, \forall \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n \Rightarrow |\sigma_T(f, \Xi) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t) \in C[\alpha, \beta] \underset{\text{т. Кантора}}{\Rightarrow} \varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t)-$ равномерно непрерывны на $[\alpha, \beta] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \delta_2 > 0 : \forall t', t'' \in [\alpha, \beta] : |t' - t''| < \delta_2 \Rightarrow |\phi'(t') - \varphi'(t'')| < \frac{\varepsilon}{4(\beta - \alpha)}$; $|\psi'(t') - \psi'(t'')| < \frac{\varepsilon}{4(\beta - \alpha)}$; $|\chi'(t') - \chi'(t'')| < \frac{\varepsilon}{4(\beta - \alpha)}$. Берем $\delta = \max(\delta_1, \delta_2) > 0, \quad \forall T, \delta_T < \delta, \forall \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$,

рассмотрим $|l_T - I| = |l_T - \sigma_T(f, \Xi) + \sigma_T(f, \Xi) - I| \leqslant |l_T - \sigma_T(f, \Xi)| + \underbrace{|\sigma_T(f, \Xi) - I|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < |l_T - \sigma_T(f, \Xi)| + \frac{\varepsilon}{2} =$

$$\left| \sum_{k=1}^n \left[\sqrt{(\varphi'(\alpha_k))^2 + (\psi'(\beta_k))^2 + (\chi'(\gamma_k))^2}\Delta t_k - \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\xi_k))^2 + (\chi'(\xi_k))^2}\Delta t_k \right] \right| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^n \left| \sqrt{(\varphi'(\alpha_k))^2 + (\psi'(\beta_k))^2 + (\chi'(\gamma_k))^2} - \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\xi_k))^2 + (\chi'(\xi_k))^2} \right| \Delta t_k \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^n \sqrt{(\varphi'(\alpha_k) - \varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\beta_k) - \psi'(\xi_k))^2 + (\chi'(\gamma_k) - \chi'(\xi_k))^2}\Delta t_k + 2 < \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{3\varepsilon^2}{16(\beta - \alpha)^2}}\Delta t_k + \frac{\varepsilon}{2} =$$

$$= \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{4(\beta - \alpha)}(\beta - \alpha) + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{4} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \lim_{\delta_T \to 0} l_T = I$$

Осталось докзаать, что $L_T \leqslant I \ \forall T$. От противного, предположим, что $\exists T_0 : l_{T_0} > I$. Известно, что $\lim\limits_{\delta_T \to 0} l_T = I$, т.е $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow |l_T - I| < \varepsilon$.

Берем $\varepsilon = \frac{l_{T_0} - I}{2} > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow |l_T - I| < \frac{l_{T_0} - I}{2}$. Берем $T_1 \succ T_0 : \delta_{T_1} < \delta \Rightarrow \frac{l_{T_0} - I}{2} = \varepsilon > |l_{T_1} - I| = l_{T_1} - I \geqslant l_{T_0} - I = 2\varepsilon \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ предположение неверно $\Rightarrow l_T \leqslant I \ \forall T$

$\square$

5.1.1 Частные случаи гладких кривых:

$$1) y = f(x), x \in [a,b] \quad \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \\ z \equiv 0 \end{cases} \quad t \in [a,b] \Rightarrow l(L) = \int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(t))^2}dt = \int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

$$2) r = r(\varphi), \varphi \in [\alpha,\beta], \quad \begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases} \quad (x'_\varphi(\varphi))^2 + (y'_\varphi(\varphi))^2 = (r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi)^2 +$$

$$(r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi)^2 = r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2 \Rightarrow l(L) = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}$$

5.2 Площадь плоской фигуры. Критерий квадратируемости

Определение. Плоская фигура - любое ограниченное множество на плоскости

Определение. P - плоская фигура. Число $\mu(P)-$ площадь, если:

1)$\mu(P) \geqslant 0$

2)Если фигуры $P_1 P_2$ равны в геометрическом смысле $\Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$

3)$P_1, P_2 : P_1 \cap P_2 = \varnothing \Longrightarrow \mu(P_1 \cup P_2) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$

4)Если $P-$ единичный квадрат $\Rightarrow \mu(P) = 1$

Объединение, пересечение, вычитание многоугольников - тоже многоугольник.

$\varnothing-$ тоже многоугольник ($\mu(\varnothing) = 0$). Если $P-$ многоугольник, то его площадь известна ($\tilde{\mu}(P)$ - обозначение площади)

P- плоская фигура $\Rightarrow Q, S : Q \subset P \subset S$

$\forall Q, S : Q \subset P \subset S \Rightarrow \tilde{\mu}(Q) \leqslant \tilde{\mu}(S) \Rightarrow \{\mu(Q)\}$ - ограничено сверху. $\{\mu(S)\}$ - ограничено снизу.

Определение. $P-$ плоская фигура. $\underline{\mu(P)} = \sup\limits_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q)$ - нижняя площадь. $\overline{\mu(P)} = \inf\limits_{S \supset P} \tilde{\mu}(S)$

$Q \subset P \subset S \Rightarrow \tilde{\mu}(Q) \leqslant \tilde{\mu}(S) \Rightarrow \underline{\mu}(p) \leqslant \tilde{\mu}(S) \Rightarrow \underline{\mu}(P) \leqslant \overline{\mu}(P)$

Определение. Плоская фигура P называется квадрируемой, если $\underline{\mu(P)} = \overline{\mu(P)}$. При этом $\mu(P) = \underline{\mu(P)} = \overline{\mu(P)}$

Теорема 5.2. *Введеная таким образом $\mu(P)$ - площадь т.е*

1) P - квадрируема фигура $\Rightarrow \mu(P) \geqslant 0$

2) P_1, P_2 - квадрируемые плоские фигуры, причем P_1 и P_2 равны в геометрическом смысле $\Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$

3) P_1, P_2 - квадрируемые плоские фигуры, причем $P_1 \cap P_2 = \varnothing \Rightarrow P = P_1 \cup P_2$ - тоже квадрируема, причем $\mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$

4) Если P - единичный квадрат $\Rightarrow P$ - плоская квадрируемая фигура, причем $\mu(P) = 1$

Доказательство. 1) $\exists \mu(P) = \underline{\mu(P)} = \sup\limits_{Q \subset P} \underbrace{\tilde{\mu}(P)}_{\geqslant 0} \geqslant 0$

2)$Q_1 \subset P_1 \subset S_1 \Leftrightarrow Q_2 \subset P_2 \subset S_2$, причем Q_1 и Q_2 равны в геометрическом смысле, S_1 и S_2 равны в геометрическом смысле $\Rightarrow \begin{matrix} \tilde{\mu_1}(Q_1) = \tilde{\mu}(Q_2) \\ \tilde{\mu_1}(S_1) = \tilde{\mu}(S_2) \end{matrix} \Rightarrow \underline{\mu(P_1)} = \underline{\mu}(P_2),\ \overline{\mu}(P_1) = \overline{\mu}(P_2) \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$

3) P_1, P_2 - квадрируемые $\Rightarrow \exists \mu(P_1), \mu(P_2)$, причем $\begin{matrix} \mu(P_1) = \overline{\mu}(P_1) = \underline{\mu}(P_1) \\ \mu(P_2) = \overline{\mu}(P_2) = \underline{\mu}(P_2) \end{matrix} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists Q_1, Q_2, S_1, S_2 :$

$Q_1 \subset P_1 \subset S_1 : \tilde{\mu}(Q_1) > \mu(P_1) - \dfrac{\varepsilon}{2}$

$Q_2 \subset P_2 \subset S_2 : \tilde{\mu}(Q_2) > \tilde{P}_2 - \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\tilde{\mu}(S_2) < \mu(P_2) + \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\tilde{\mu} S_1 < \mu(P_1) + \dfrac{\varepsilon}{2}$

$Q_1 \subset P_1, Q_2 \subset P_2$, но $P_1 \cap P_2 = \varnothing \Rightarrow Q_1 \cap Q_2 = \varnothing \Rightarrow \mu(Q_1 \cup Q_2) = \mu(Q_1) + \mu(Q_2)$, причем $\begin{matrix} Q = Q_1 \cup Q_2 \\ S = S_1 \cup S_2 \end{matrix}$

Рассмотрим $\mu(Q) = \mu(Q_1) + \mu(Q_2) > \mu(P_1) + \mu(P_2) - \varepsilon$.

$\underline{\mu}(P) = \underset{Q \subset P}{\tilde{\mu}(Q)} > \sup\limits_{\substack{Q : Q_1 \cup Q_2 \\ Q_1 \subset P_1 \\ Q_2 \subset P_2}} \tilde{\mu}(Q) \geqslant \tilde{\mu}(Q_1) + \tilde{\mu}(Q_2) > \mu(P_1) + \mu(P_2) - \varepsilon$

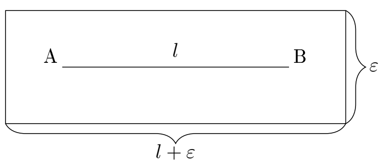
Получили, что $\forall \varepsilon > 0\ \underline{(\mu)}(P) > \mu(P_1) + \mu(P_2) - \varepsilon \Rightarrow \underline{\mu}(P) \geqslant \mu(P_1) + \mu(P_2)$

Аналогично: $\tilde{\mu}(S) \leqslant \tilde{\mu}(S_1) + \tilde{\mu}(S_2)$. $\quad \overline{\mu}(P) = \inf\limits_{S \supset P} \mu(S) \leqslant \inf\limits_{\substack{S : S_1 \cup S_2 \\ S_1 \supset P_1 \\ S_2 \supset P_2}} \mu(S) \leqslant \tilde{\mu}(S_1) + \tilde{\mu}(S_2) < \mu(P_1) + \mu(P_2) + \varepsilon$.

Получили, что $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \overline{\mu}(P) < \mu(P_1) + \mu(P_2) + \varepsilon \Rightarrow \overline{\mu}(P) \leqslant \mu(P_1) + \mu(P_2) \Rightarrow \mu(P_1) + \mu(P_2) \leqslant \underline{\mu}(P) \leqslant \overline{\mu}(P) \leqslant \mu(P_1) + \mu(P_2) \Rightarrow \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2) \Rightarrow P$ - квадрируема, причем $\mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$

4) $P-$ единичный квадрат. Берем $Q, S : Q = P = S$ $\left.\begin{matrix} \underline{\mu}(P) = \sup\limits_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q) \geqslant 1 \\ \overline{\mu}(P) = \inf\limits_{S \supset P} \tilde{\mu}(S) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1 \leqslant \underline{\mu}(P) \leqslant \overline{\mu}(P) \leqslant 1 \Rightarrow \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P) = 1 \Rightarrow$ единичный квадрат - плоская квадрируемая фигура, причем $\mu(P) = 1$ $\square$

Берем $\forall \varepsilon > 0$



$\varnothing \subset AB \subset S \qquad 0 \leqslant \overline{\mu}(AB) \leqslant \varepsilon(l + \varepsilon) \Rightarrow \overline{\mu}(AB) = 0; \quad 0 \leqslant \underline{\mu}(AB) \leqslant \overline{\mu}(AB) = 0 \Rightarrow \mu(AB) = 0$

tg: @moksimqa

Лекция 8

28.02

Теорема 5.3 (Критерий квадрируемости). *P - плоская фигура, тогда: $P-$ квадрируема $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists Q, S :$ $Q \subset P \subset S$, причем $0 \leqslant \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon$*

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть P - квадрируема $\Rightarrow \exists \mu(P) = \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P) \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists Q, S : Q \subset P \subset S$, причем

$$\begin{matrix} \tilde{\mu}(P) > \underline{(\mu)}(P) - \frac{\varepsilon}{2} \\ \tilde{(\mu)}(S) < \bar{(\mu)}(P) + \frac{\varepsilon}{2} \end{matrix} \Rightarrow 0 \leqslant \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < (\mu(P) + \frac{\varepsilon}{2}) - (\mu(P) - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$$

$\Leftarrow$ Пусть $\forall\varepsilon > 0 \exists Q, S : Q \subset P \subset S$, причем $0 \leqslant \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon$, но $\tilde{\mu}(Q) \leqslant \underline{(\mu)}(P) \leqslant \overline{\mu}(P) \leqslant \tilde{\mu}(S) \Rightarrow 0 \leqslant$ $\leqslant \overline{\mu}(P) - \underline{\mu}(P) < \varepsilon \Rightarrow \forall\varepsilon >)0 \leqslant \overline{\mu}(P) - \underline{\mu}(P) < \varepsilon \Rightarrow \overline{\mu}(P) - \underline{\mu}(P) = 0 \Rightarrow \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$, т.е P - квадрируема

□

5.3 Квадрируемость криволинейной трапеции. Выражение площади криволинейной трапеции в виде определенного интеграла. Формула площади криволинейного сектора (без доказательства)

Определение. Пусть $f(x) \in C[a,b], f(x) \geqslant 0\ \forall x \in [a,b]$. Плоская фигура $P = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ называется криволинейной трапецией.

Теорема 5.4 (Критерий квадрируемости). $f(x) \in C[a,b], f(x) \geqslant 0\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow$ *криволинейная трапеция* $P = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ *является квадрируемой фигурой, причем* $\mu(P) = \int\limits_a^b f(x)dx$

Доказательство. $f(x) \in C[a,b] \Rightarrow \exists \int\limits_a^b f(x)dx = I \underset{\text{кр.инт}}{\Rightarrow} \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leqslant S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$, т.е $\exists Q, S-$ ступенчатые фигуры (являются многоугольниками): $Q \subset P \subset S$, причем $0 \leqslant \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) <$

$$\varepsilon \underset{\text{T5.4}}{\Rightarrow} P-\text{квадрируемая фигура} \Rightarrow \exists\mu(P) : \left.\begin{matrix} \mu(P) = \underline{\mu}(P) = \sup\tilde{\mu}(Q) \geqslant \sup\limits_{\substack{Q:Q\subset P \\ Q-\text{ступенчатая} \\ \text{фигура}}} \tilde{\mu}(Q) = \sup\limits_T s_T(f) = \underline{I} = I \\ \mu(P) = \overline{\mu}(P) = \inf\limits_{S\supset P}\tilde{\mu}(S) \leqslant \inf\limits_{\substack{S:S\supset P \\ S-\text{ступенчатая} \\ \text{фигура}}} \tilde{\mu}(S) = \inf\limits_T S_T(f) = \overline{I} = I \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$I \leqslant \mu(P) \leqslant I \Rightarrow \mu(P) = I$ □

Замечание. Если $f(x) \in C[a,b], f(x) \leqslant 0$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = -\mu(P)$

Если $f(x) \in C[a,b]$, причем меняет знак на $[a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx-$ алгебраическая разность площадей.

Определение. $r, \varphi-$ полярные координаты. Пусть $r(\varphi) \in C[\alpha,\beta]$. Плоскя фигура $P = \{(r,\varphi) : \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta, 0 \leqslant r \leqslant r(\varphi)\}$

Теорема 5.5. *$r, \varphi-$ полярные координаты $r(\varphi) \in C[\alpha,\beta] \Rightarrow$ криволинейный сектор $P = \{(r,\varphi) : \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta, 0 \leqslant r \leqslant r(\varphi)\}-$ квадрируемая фигура, причем $\mu(P) = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$*

Глава 6

Собственные и несобственные интегралы.

Лекция 8

28.02

6.1 Несобственный интеграл первого рода, их сходимость и расходимость. Независимость сходимости (расходимости) несобственного интеграла первого рода от значения его постоянного (неособенного) предела

Определение. Пусть $\forall c \geqslant a$ $f(x)$ интегрируема на $[a, c]$. Выражение $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется несобственным интегралом I рода от $f(x)$ на $[a, +\infty)$. Если $\exists \lim\limits_{c \to +\infty} \int\limits_a^c f(x)dx = A$, то число A называется величиной этого интеграла. Обозначение: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = A$

Определение. Если $\exists \lim\limits_{c \to +\infty} \int\limits_a^c f(x)dx$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящися, иначе - расходящимся.

Теорема 6.1. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится (расходится)* $\Rightarrow \forall a' \geqslant a$ $\int\limits_{a'}^{+\infty} f(x)dx$ *тоже сходится (расходится).*

Доказательство. $\forall c \geqslant a, \forall a' \geqslant a$ $\exists \int\limits_a^c f(x)dx = \underbrace{\int\limits_a^{a'} f(x)dx}_{\substack{\text{собственный интеграл} \\ \text{(число)}}} + \int\limits_{a'}^c f(x)dx \underset{c \to +\infty}{\Rightarrow} \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_{a'}^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно. А их величины (в случае сходимости) отличаются на $\int\limits_a^{a'} f(x)dx$, (т.е на константу)

$\square$

Определение. Пусть $\forall c \leqslant a$ $f(x)$ интегрируема на $[c, a]$. Выражение $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ называется несобственным интегралом I рода от $f(x)$ на $(-\infty, a]$. Если $\exists \lim\limits_{c \to -\infty} \int\limits_{c}^{a} f(x)dx = A$, то число A называется величиной этого интеграла. Обозначение: $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = A$

Определение. Если $\exists \lim\limits_{c \to -\infty} \int\limits_{c}^{a} f(x)dx$, то $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ называется сходящимся, иначе - расходящимся.

Теорема 6.2. $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ *сходится (расходится)* $\Rightarrow \forall a' \leqslant a$ $\int\limits_{-\infty}^{a'} f(x)dx$ *тоже сходится (расходится)*

Доказательство. Самостоятельно. $\square$

Определение. Пусть $\forall a, b$ $f(x)$ - интегрируема на $[a, b]$. Выражение $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется несобственным интегралом I рода от $f(x)$ на $(-\infty, +\infty)$. Если $\exists c:$ $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ и $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ сходятся, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся, а число $A = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ называется величиной $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Обозначение: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = A$. Если такого c не существует, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется расходящимся.

Теорема 6.3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *сходится (расходится)* $\Rightarrow \forall c'$ $\int\limits_{-\infty}^{c'} f(x)dx$ *и* $\int\limits_{c'}^{+\infty} f(x)dx$ *являются сходящимися, при этом* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c'} f(x)dx + \int\limits_{c'}^{+\infty} f(x)dx$

Доказательство. $\exists c:$ $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx$ и $\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$ сходятся $\Rightarrow$

$$\begin{array}{l|l} \exists \lim\limits_{a \to +\infty} \int\limits_{c}^{a} f(x)dx & \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{a \to +\infty} \int\limits_{c}^{a} f(x)dx \\ \exists \lim\limits_{b \to -\infty} \int\limits_{b}^{c} f(x)dx & \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx = \lim\limits_{b \to -\infty} \int\limits_{b}^{c} f(x)dx \end{array} \stackrel{\text{T6.1}}{\underset{\text{T6.2}}{\Rightarrow}}$$

$$\forall c' \quad \begin{array}{l|l} \int\limits_{c'}^{+\infty} f(x)dx \text{ сходится} & \int\limits_{c'}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{a \to +\infty} \int\limits_{c'}^{a} f(x)dx - \text{ число} \\ \int\limits_{-\infty}^{c'} f(x)dx \text{ сходится} & \int\limits_{-\infty}^{c'} f(x)dx = \lim\limits_{b \to -\infty} \int\limits_{b}^{c'} f(x)dx - \text{ число} \end{array}$$

Рассмотрим $\int\limits_{c'}^{+\infty} f(x)dx + \int\limits_{-\infty}^{c'} f(x)dx =$

$$= \lim_{a \to +\infty} \int\limits_{c'}^{a} f(x)dx + \lim_{b \to -\infty} \int\limits_{b}^{c'} f(x)dx = \lim_{a \to +\infty} \left[\int\limits_{c'}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{a} f(x)dx \right] + \lim_{b \to -\infty} \left[\int\limits_{b}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{c'} f(x)dx \right] =$$

$$\int\limits_{c'}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{c'} f(x)dx + \lim_{a \to +\infty} \int\limits_{c}^{a} f(x)dx + \lim_{b \to -\infty} f(x)dx = \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx + \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

$\square$

Пример. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, $f(x) = \frac{1}{x^p}$ непрерывна при $x \geqslant 1$ (даже при $x > 0$) $\Rightarrow$интегрируема на $[a, c] \forall c \geqslant 1$

$p > 1$ $\int\limits_1^c \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_{x=1}^{x=c} = \frac{1}{x-p}\left(\frac{1}{c^{p-1}} - 1\right) \underset{c\to+\infty}{\to} \frac{1}{p-1} \Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$ (сходится)

$p < 1$ $\int\limits_1^c \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{c^{p-1}} - 1\right) \underset{c\to+\infty}{\to} +\infty \Rightarrow \int\limits_1^c \frac{dx}{x^p} = +\infty$ (расходится)

$p = 1$ $\int\limits_1^c \frac{dx}{x} = \ln(x)\Big|_{x=1}^{x=c} = \ln(c) \underset{c\to+\infty}{\to} +\infty \Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$ (расходится)

Итого: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ - сходится при $p > 1$. Расходится при $p \leqslant 1$. $\Rightarrow \forall a > 0$ $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ - сходится при $p > 1$. Расходится при $p \leqslant 1$

6.2 Несобственные интегралы второго рода, их сходимость и расходимость. Независимость сходимости (расходимости) несобственного интеграла второго рода от значения его постоянного (неособенного) предела

Определение. Пусть $\forall c \in [a, b)\left[\forall c \in (a, b]\right] f(x)$ интегрируема на $[a, c]$ $\left[\text{на } [c, b]\right]$. Выражение $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется несобственным интегралом второго рода с особой точкой $b-0$ $\left[a+0\right]$ от $f(x)$ на $[a, b)$ $\left[\text{на } (a, b]\right]$. Если $\exists \lim\limits_{c\to b-0} \int\limits_a^c f(x)dx = A$ $\left[\exists \lim\limits_{c\to a+0} \int\limits_c^b f(x)dx = A\right]$, то число A называется его величиной. Обозначение: $\int\limits_a^b f(x)dx = A$. Интеграл, имеющий конечную величину называется сходящимся, в противном случае - расходящимся.

Теорема 6.4. *$\int\limits_a^b f(x)dx$ с особой точкой $b-0$ сходится (расходится) $\Rightarrow \forall c \in [a, b)$ $\int\limits_c^b f(x)dx$ с особой точкой $b-0$ тоже сходится (расходится).*

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 6.5. *$\int\limits_a^b f(x)dx$ с особой точкой $a+0$ сходится $\Rightarrow \forall c \in (a, b]$ $\int\limits_a^c f(x)dx$ с особой точкой $a+0$ тоже сходится (расходится).*

Доказательство. Самостоятельно. □

Самостоятельно. Ввести понятие $\int\limits_a^b f(x)dx$ с двумя особыми точками $b-0$ и $a+0$. Дать определение сходимости (расходимости) такого интеграла. Доказать, что если такой интеграл сходится, то его величина не зависит от выбора промежуточной точки $c \in (a, b)$

tg: @moksimqa

Лекция 9

07.03

Теорема 6.6. *Собственный* $\int\limits_a^b f(x)dx$*, рассмотрим его как несобственный с особой точкой* $b-0$ *(с особой* $a+0$*), сходится, причем значения совпадают.*

Доказательство. $f(x)$ интегрируема на $\Rightarrow$ ограничена $\Rightarrow \exists M>0 : \forall x \in [a,b]\ |f(x)| \leqslant M$

1) Особая точка $\boxed{b-0}$ $\quad \forall C \in [a,b) \quad \left|\int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^c f(x)dx\right| = \left|\int\limits_c^b f(x)dx\right| \leqslant \left|\int\limits_c^b |f(x)|dx\right| = \int\limits_c^b |f(x)|dx \leqslant$

$\leqslant \int\limits_c^b Mdx = M(b-c) \underset{c\to b-0}{\to} 0 \Rightarrow \lim\limits_{c\to b-0}\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$

2) Особая точка $\boxed{a+0}$ - самостоятельно. ☐

Пример: $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} \qquad \frac{1}{x^p}$ – непрерывна при $x>0$

1) $\boxed{p>1}$ $\int\limits_c^1 \frac{dx}{x^p} = \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_{x=c}^{x=1} = \frac{1}{1-p}\left(1-\frac{1}{c^{p-1}}\right) \underset{c\to 0+0}{\to} +\infty \Rightarrow \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = +\infty$ - расходится

2) $\boxed{p<1}$ $\int\limits_c^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}\left(1-\frac{1}{c^{p-1}}\right) \underset{c\to 0+0}{\to} \frac{1}{1-p} \Rightarrow \int\limits_c^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}$ - сходится

3) $\boxed{p=1}$ $\int\limits_c^1 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_{x=c}^{x=1} = \ln 1 - \ln c = -\ln c \underset{c\to 0+0}{\to} +\infty \Rightarrow \int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty$ - расходится

Итого: $\int\limits_0^a \frac{dx}{x^p}$ - сходится при $p<1$, расходится при $p \geqslant 1 \underset{\text{Т6.6}}{\Rightarrow} \forall a>0 \int\limits_0^a \frac{dx}{x^p}$ - сходится при $p<1$, расходится при $p \geqslant 1$.

6.3 Несобственные интегралы с несколькими особыми точками.

В общем случае несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, где a - число или $-\infty$, b - число или $+\infty$, причем на промежутке (a,b) - лишь конечное количество точек, в которых $f(x)$ не является интегрируемой в собственном смысле, разбивается на сумму конечного количества слагаемых, каждое из которых - несобственный интеграл с единственной особенностью (один из пределов интегрирования). Его величина (если $\boxed{\text{все}}$ слагаемые сходятся) не зависит от выбора промежуточных точек.

Пример: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \int\limits_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^2-1} + \int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2-1} + \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2-1} + \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2-1} + \int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^2-1} + \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$

Рассмотрим $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2-1} \quad \forall c \in (1;2] \quad \int\limits_c^2 \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\Big|_{x=c}^{x=2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{c+1}{c-1}\right) \underset{c\to 1+0}{\to} +\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2-1} = +\infty$ - расходится $\Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$ - расходится.

6.4 Формула Ньютона-Лейбница для несобственных интегралов. Вычисление несобственных интегралов способами замены переменной и интегрирования по частям.

Теорема 6.7. *Пусть $f(x) \in C[a,b)$, где b - число или $+\infty$, $F(x)$ - первообразная к $f(x)$ на $[a,b) \Rightarrow$ из существования одного из пределов следует существования другого и равно:* $\int\limits_a^b f(x)dx = \underbrace{\lim\limits_{c\to b-0} F(c)}_{\text{обозн.}F(b-0)} - F(a)$ $\left(\text{т.е} \int\limits_a^b F(x)dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b-0}\right)$ *Т.е формула Ньютона-Лейбница справедлива и для сходящихся несобственных интегралов.*

Доказательство. $f(x) \in C[a,b) \Rightarrow \exists F(x)-$ первообразная к $f(x)$ на $[a,b)$. $\forall c \in [a,b)$ рассмотрим $\int\limits_a^c f(x)dx = F(c) - F(a)$, а теперь $c \to b-0$ $\square$

Случай где a - число или $-\infty$, b - число или $+\infty$ рассматривается аналогично.

$$\text{Примеры: } \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{x=1}^{+\infty} = 1, \qquad \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_{x=0}^{x=1} = 2$$

Теорема 6.8. *$f(x) \in C[a,b)$ (где b - число или $+\infty$), $\varphi(t) : \varphi(t)$ строго возрастает на $[\alpha,\beta)$ (где β - число или $+\infty$), $\varphi(\alpha) = a$, $\lim\limits_{t\to\beta-0} \varphi(t) = b-0, \varphi'(t) \in C[\alpha,\beta) \Rightarrow$ из существования одного из интегралов следует существование другого и их равенство:* $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Доказательство. $\exists\Theta(x)-$ обратная функция к $\varphi(t) \Rightarrow \Theta(a) = \alpha$, $\lim\limits_{x\to b-0} \Theta(x) = \beta - 0$. Берем $\forall c \in [a,b) \Rightarrow \exists!\gamma \in [\alpha,\beta) : \Theta(c) = \gamma$, т.е $\varphi(\gamma) = c$. Рассмотрим $\int\limits_a^c f(x)dx \underset{\substack{\text{по Т о}\\\text{замене}\\\text{переменной}}}{=} \int\limits_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, а теперь $c \to b-0$ $\square$

Случай где a - число или $-\infty$ ($\varphi(t)$ строго убывает) аналогично.

По теореме 6.8 : если после замены получен собственный интеграл, то так устанавливается сходимость.

Пример: $\int\limits_1^2 \frac{xe^x dx}{\sqrt{x^2-1}} = \left| \begin{matrix} \sqrt{x^2-1} = t, x^2 = t^2+1, xdx = tdt, \\ x = 2 \Leftrightarrow t = \sqrt{3}, x \to 1+0 \Leftrightarrow t \to 0+0 \end{matrix} \right| = \int\limits_0^{\sqrt{3}} e^{\sqrt{t^2+1}} dt \Rightarrow \int\limits_1^2 \frac{xe^x dx}{\sqrt{x^2-1}}$ - сходится.

По теореме 6.8 особую точку можно перевести в $+\infty$.

1) $\int\limits_{-\infty}^a f(x)dx = \left| \begin{matrix} x = -t, dx = -dt, \\ x = a \Leftrightarrow t = -a, x \to -\infty \Leftrightarrow t \to +\infty \end{matrix} \right| = -\int\limits_{+\infty}^{-a} f(-t)dt = \int\limits_{-a}^{+\infty} f(-t)dt$

2) $\int\limits_a^b f(x)dx = \left| \begin{matrix} b-0 - \text{ особая точка }, x = \dfrac{a+bt}{1+t}, t = \dfrac{x-a}{b-x}, \\ x = a \Leftrightarrow t = 0, x \to b-0 \Leftrightarrow t \to +\infty, dx = \dfrac{(b-a)dt}{(1+t)^2} \end{matrix} \right| = \int\limits_0^{+\infty} f\left(\frac{a+bt}{1+t}\right)\frac{(b-a)dt}{(1+t)^2} =$

$= (b-a)\int\limits_0^{+\infty} f\left(\frac{a+bt}{1+t}\right)\frac{dt}{(1+t)^2}$

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{c} a+0 - \text{особая точка}, x = \dfrac{b+at}{1+t} \Rightarrow t = \dfrac{x-b}{a-x}, \\ x = b \Leftrightarrow t = 0, x \to a+0 \Rightarrow t \to +\infty, dx \dfrac{(a-b)dt}{(1+t)^2} \end{array} \right| = \int\limits_{+\infty}^{0} f\left(\dfrac{b+at}{1+t}\right) \dfrac{(a-b)dt}{(1+t)^2} =$

$= (b-a) \int\limits_0^{+\infty} f\left(\dfrac{b+at}{1+t}\right) \dfrac{dt}{(1+t)^2}$

Теорема 6.9. $u(x), v(x) : u'(x), v'(x) \in C[a,b)$ *(где b - число или $+\infty$)* $\Rightarrow$ *из существования двух пределов следует существование третьего, а также равенство:* $\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = \lim\limits_{c \to b-0} u(c)v(c) - \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx -$

$- u(a)v(a) \quad \left(\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^{b-0} - \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx \right)$

Доказательство. Берем $\forall c \in [a,b) \Rightarrow$(по формуле интегрирования по частям в собственных интегрелах)$\Rightarrow$ $\int\limits_a^c u(x)v(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^c - \int\limits_a^c u'(x)v(x)dx$, а теперь $c \to b-0$ □

Случай, где a - число или $-\infty$ - аналогично. По теореме 6.9 также можно устанавливать сходимость.

Пример: $\int\limits_0^1 \dfrac{\ln(x)dx}{1+x^2} = \int\limits_0^1 \ln(x) d(\operatorname{arctg}(x)) = \ln(x) \operatorname{arctg}(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \dfrac{\operatorname{arctg}(x)}{x} dx$

Рассмотрим $\lim\limits_{x \to 0+0} (\ln(x) \underbrace{\operatorname{arctg}(x)}_{\sim x}) = \lim\limits_{x \to 0+0} (x \ln(x)) = \lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)} = 0 \Rightarrow \int\limits_0^1 \dfrac{\ln(x)dx}{1+x^2} =$

$= -\int\limits_0^1 \dfrac{\operatorname{arctg}(x)dx}{x}$

$\dfrac{\operatorname{arctg}(x)}{x} \underset{x \to 0+0}{\to} 1 \Rightarrow \int\limits_0^1 \dfrac{\operatorname{arctg}(x)dx}{x}$ можно рассматривать как собственный, так как подынтегральную функцию в данном случае можно доопределить по непрерывности в точке $x = 0$

6.5 Линейные свойства несобственного интеграла. Пример неинтегрируемого произведения интегрируемых функций.

Пусть дан $\int\limits_a^b f(x)dx$, где $a < b$, причем b - число или $+\infty$, b - единственная особенность.

Определение. $f(x)$ называется интегрируемой на $[a,b)$, если $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится.

Остальные случаи аналогично.

Теорема 6.10. $f(x)$ *интегрируема на* $[a,b) \Rightarrow \forall k \in \mathbb{R}\ k \cdot f(x)$ *- тоже интегрируема на* $[a,b)$*, причем* $\int\limits_a^b k \cdot f(x)dx = k \int\limits_a^b f(x)dx$

Доказательство. $\forall c \in [a,b) \Rightarrow \int\limits_a^c k \cdot f(x)dx = k \int\limits_a^c f(x)dx$, а теперь $c \to b-0$ □

Теорема 6.11. *$f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a, b)$ $\Rightarrow$ $f(x) \pm g(x)$ тоже интегрируемы на $[a, b)$, причем* $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 6.10 и теорема 6.11 - линейные свойства несобственных интегралов.

Теорема 6.12. *$f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a, b)$, причем $f(x) \geqslant g(x)$ $\forall x \in [a, b) \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \geqslant \int\limits_a^b g(x)dx$*

Доказательство. $\forall c \in [a, b)$ $\quad \int\limits_a^c f(x)dx \geqslant \int\limits_a^c g(x)dx$, а теперь $c \to b - 0$ □

Пример: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $\quad \int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}} -$ сходится. Рассмотрим $g(x) = f(x)$, рассмотрим $\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx =$ $= \int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x}$- расходится.

6.6 Связь интеграла от функции с интегралом от ее модуля в случае их интегрируемости

Теорема 6.13. *$f(x), |f(x)|$ интегрируемы на $[a, b) \Rightarrow \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx$*

Доказательство. Самостоятельно. □

tg: @moksimqa