Глава 1

Интегралы

Лекция 1

13.12

1.1 Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. X - промежуток $f(x)$ определена $x \in X.F(x), x \in X$, называется первообразной к $f(x)$, если $\forall x \in X\ \exists F'(x) = f(x)$

Определение. Множество всех первообразных к $f(x)$ на X называется неопределенным интегралом.(об. $\displaystyle\int f(x)dx, f(x)$ - подынтегральная функция,$f(x)dx$ - подынтегральное выражение)

$F(x)-$ первообразная к $f(x) \Rightarrow F(x) + C$ - тоже первообразная.

$\Phi(x)$ - первообразная к $f(x) \qquad F'(x) = f(x) = \Phi'(x)$

Рассмотрим $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0\ \forall x \in X$

$\Phi(x) - F(x) = C = const \qquad \Phi(x) = F(x) + C$

$\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C, \quad d(\int (f(x)dx)) = f(x)dx; \int dF(x) = F(x) + C$

$\displaystyle dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx \qquad d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = f(x)dx$

Теорема 1.1. *$f(x), g(x)$ имеют первообразные $\Rightarrow$ $f(x) \pm g(x)$ тоже имеют первообразные, причем $\displaystyle\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$*

Доказательство. $\displaystyle\int f(x)dx = F(x)+C_1, \int g(x)dx = G(x)+C_2$. Рассмотрим $H_{\pm}(x) = F(x)\pm G(x), H'_{\pm}(x) = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$

$\displaystyle\int (f(x) \pm g(x))dx = F(x) \pm G(x) + C = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ □

Теорема 1.2. *$f(x)$ имеет первообразную $\Rightarrow \forall k, kf(x)$ тоже имеет первообразную, а если $k \neq 0$, то $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$*

Доказательство. $\displaystyle\int f(x)dx = F(x)+C \qquad (kF(x))' = kF'(x) = kf(x) \qquad \int kf(x)dx = kF(x)+C_1 \qquad k\int f(x)dx = k(F(x) + C) = kF(x) + kC, \quad \int kf(x)dx = kF(x) = C_1, \quad k\int f(x)dx = k(F(x) + C) = kF(x) + kC$, если

$k \neq 0$, то $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ □

1.1.1 Таблица интегралов.

1. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1 (\alpha = 0 \Rightarrow x^\alpha = 1)$
2. $\int \dfrac{dx}{x} = ln|x| + C$
3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{lna} + C$
4. $\int sinxdx = -cosx + C$
5. $\int cosxdx = sinx + C$
6. $\int \dfrac{dx}{cos^2x} = tgx + C$
7. $\int \dfrac{dx}{sin^2x} = -ctgx + C$
8. $\int shxdx = chx + C$
9. $\int chxdx = shx + C$
10. $\int \dfrac{dx}{ch^2x} = thx + C$
11. $\int \dfrac{dx}{sh^2x} = -cthx + C$
12. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C, a > 0$
13. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$
14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C = -\arccos\dfrac{x}{a} + \tilde{C}, a > 0$
15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, a > 0$

Лекция 1

13.12

1.2 Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. X - промежуток $f(x)$ определена $x \in X.F(x), x \in X$, называется первообразной к $f(x)$, если $\forall x \in X\ \exists F'(x) = f(x)$

Определение. Множество всех первообразных к $f(x)$ на X называется неопределенным интегралом.(об. $\int f(x)dx, f(x)$ - подынтегральная функция,$f(x)dx$ - подынтегральное выражение)

$F(x)-$ первообразная к $f(x) \Rightarrow F(x) + C$ - тоже первообразная.

$\Phi(x)$ - первообразная к $f(x) \qquad F'(x) = f(x) = \Phi'(x)$

Рассмотрим $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0\ \forall x \in X$

$\Phi(x) - F(x) = C = const \qquad \Phi(x) = F(x) + C$

$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad d(\int(f(x)dx)) = f(x)dx; \ \int dF(x) = F(x) + C$

$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx \qquad d(\int f(x)dx) = d(F(x)+C) = f(x)dx$

Теорема 1.3. *$f(x), g(x)$ имеют первообразные $\Rightarrow$ $f(x) \pm g(x)$ тоже имеют первообразные, причем* $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Доказательство. $\int f(x)dx = F(x)+C_1$, $\int g(x)dx = G(x)+C_2$. Рассмотрим $H_{\pm}(x) = F(x) \pm G(x)$, $H'_{\pm}(x) = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$

$\int (f(x) \pm g(x))dx = F(x) \pm G(x) + C = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ □

Теорема 1.4. *$f(x)$ имеет первообразную $\Rightarrow$ $\forall k, kf(x)$ тоже имеет первообразную, а если $k \neq 0$, то* $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

Доказательство. $\int f(x)dx = F(x)+C \qquad (kF(x))' = kF'(x) = kf(x) \qquad \int kf(x)dx = kF(x)+C_1 \qquad k\int f(x)dx = k(F(x)+C) = kF(x)+kC$, $\int kf(x)dx = kF(x) = C_1$, $k\int f(x)dx = k(F(x)+C) = kF(x)+kC$, если $k \neq 0$, то $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ □

1.2.1 Таблица интегралов.

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1 (\alpha = 0 \Rightarrow x^{\alpha} = 1)$
2. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C$
4. $\int sinxdx = -cosx + C$
5. $\int cosxdx = sinx + C$
6. $\int \frac{dx}{cos^2x} = tgx + C$
7. $\int \frac{dx}{sin^2x} = -ctgx + C$
8. $\int shxdx = chx + C$
9. $\int chxdx = shx + C$
10. $\int \frac{dx}{ch^2x} = thx + C$
11. $\int \frac{dx}{sh^2x} = -cthx + C$
12. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C, a > 0$
13. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + \tilde{C}, a > 0$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, a > 0$