Глава 1

Свойства определенного интеграла

Лекция 4

11.02

1.1 Линейные свойства определенного интеграла

Определение. Если $f(x)$ определена при $x = a$, то положим $\int_a^a f(x)dx \equiv 0$

Определение. Если $a < b$, а еще $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то положим $\int\limits_b^a f(x)dx \equiv -\int\limits_a^b f(x)dx$

Теорема 1.1. *Если $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, $f(x) \pm g(x)$ тоже интегрируема на $[a, b]$,причем* $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x)dx) = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$

Доказательство. Если $a = b$, то доказывать нечего: $0 = 0 \pm 0$.

Если $a < b$, то: Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$; Берем $\forall \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$, тогда: рассмотрим $\sigma_T(f \pm g, \Xi) = \sum\limits_{k=1}^n (f(\xi_k) \pm g(\xi_k))\Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \pm \sum\limits_{k=1}^n g(\xi_k)\Delta x_k = \underset{\delta_T \to 0}{\sigma_T(f, \Xi)} \overset{\to}{} {}^{I_1} \pm \underset{\delta_T \to 0}{\sigma_T(g, \Xi)} \overset{\to}{} {}^{I_2} \to I_1 + I_2$, т.е $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$

Если $a > b \Rightarrow \int\limits_b^a (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_b^a f(x)dx \pm \int\limits_b^a g(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$ $\square$

Теорема 1.2. *$f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R} \quad c \in f(x)$ интегрируема на $[a, b]$,причем* $\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx$

Доказательство. Самостоятельно. $\square$

1.2 Интегрируемость произведения интегрируемых по Риману функций

Теорема 1.3. *Если* $f(x), g(x)$ *интегрируемы на* $[a, b] \Rightarrow f(x)g(x)$ *тоже интегрируема на* $[a, b]$

Доказательство. пусть $a < b$. $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a, b] \Rightarrow f(x), g(x) -$ ограничены на $[a, b]$, т.е $\exists M^{(f)} > 0, M^{(g)} > 0 : \begin{matrix} |f(x)| \leqslant M^{(f)} \forall x \in [a, b] \\ |g(x)| \leqslant M^{(g)} \forall x \in [a, b] \end{matrix}$. Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$; Введем

$M_k^{(f)} = \sup\limits_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} f(x) \qquad M_k^{(g)} = \sup g(x) \qquad M_k^{(fg)} = \sup(f(x)g(x))$

$m_k^{(f)} = \inf f(x) \qquad m_k^{(g)} = \inf g(x) \qquad m_k^{(fg)} = \inf(f(x)g(x))$

$\forall \varepsilon > 0 \exists x_k', x_k'' \in [x_{k-1}, x_k] : \begin{matrix} M_k^{(fg)} < f(x_k')g(x_k') + \dfrac{\varepsilon}{2} \\ m_k^{(fg)} > f(x_k'')g(x_k'') - \dfrac{\varepsilon}{2} \end{matrix} \Rightarrow 0 \leqslant M_k^{(fg)} - m_k^{(fg)} < f(x_k')g(x_k') - f(x_k'')g(x_k'') + \varepsilon =$ $f(x_k')g(x_k') + f(x_k')g(x_k'') - f(x_k')g(x_k'') - f(x_k'')g(x_k'') + \varepsilon = f(x_k')(g(x_k') - g(x_k'')) + g(x_k'')(f(x_k') - f(x_k'')) + \varepsilon \leqslant$ $M^{(f)}((M_k)^g - m_k^{(g)}) + M^{(g)}(M_k^{(f)} - m_k^{(f)}) + \varepsilon \Rightarrow 0 \leqslant M_k^{(fg)} - m_k^{(fg)} \leqslant M^{(f)}((M_k)^g - m_k^{(g)}) + M^{(g)}(M_k^{(f)} - m_k^f) \Rightarrow$ $0 \leqslant S_T(fg) - s_T(fg) \leqslant M^{(f)}(S_T(g) - s_T(g)) + M^{(g)}(S_T(f) - s_T(f)) \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(fg) - s_T(fg)) = 0 \Rightarrow$ $f(x)g(x)$ интегрируема на $[a, b]$

□

Лекция 5

14.02

1.3 Интегрируемость функции на внутреннем отрезке. Аддитивность определенного интеграла

Теорема 1.4. *$f(x)$ интегрируема на $[a,b] \Rightarrow \forall [c,d] \subset [a,b] f(x)$ интегрируема на $[a,b]$*

Доказательство. $f(x)$ интегрируема на $[a,b] \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f,[a,b]) - s_T(f,[a,b])) \Rightarrow$ т.е $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 :$ $\forall T, \delta_T < \delta \to 0 \leqslant S_T(f,[a,b]) - s_T(f,[a,b]) < \varepsilon$

Берем $\forall \tau -$ разбиение $[c,d]$. Дополним его до T(разбиение $[a,b]$). Считаем, что $a \leqslant c < d \leqslant b$;

$T|_{[c,d]} = \tau; \delta_T < \delta$

Рассмотрим $0 \leqslant S_T(f,[c,d]) - s_T(f,[c,d]) \leqslant S_T(f,[a,b]) - s_T(f,[a,b]) < \varepsilon,$ т.е $\lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f,[c,d]) - s_T(f,[c,d])) = 0 \Rightarrow f(x)$ интегрируема на $[c,d]$ ☐

Теорема 1.5. *$f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и интегрируема на $[b,c] \Rightarrow f(x)$ интегрируема на $[a,c]$, причем* $\int\limits_a^c f(x) = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx$

Доказательство. $\left.\begin{matrix} \exists \int\limits_a^b f(x)dx = I_1, \\ \exists \int\limits_b^c f(x)dx = I_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Пусть $a < b < c :$ $f(x)$ограничена на $[a,b]$ и ограничена на $[b,c] \Rightarrow$

$f(x)$ ограничена на $[a,c] \Rightarrow \exists m, M : m \leqslant f(x) \leqslant M \forall x \in [a,c]$

$\lim\limits_{\delta_{\tau_1} \to 0} S_{\tau_1}(f,[a,b]) = I_1, \quad \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : \forall \tau_1$(разбиение $[a,b]$)$, \delta_{\tau_1} < \delta_1 \Rightarrow |S_{\tau_1}(f,[a,b]) - I_1| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

$\lim\limits_{\delta_{\tau_2} \to 0} S_{\tau_2}(f,[b,c]) = I_2 \quad \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0$(разбиение $[b,c]$)$, \delta_{\tau_2} < \delta_2 \Rightarrow |S_{\tau_2}(f,[b,c]) - I_2| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

$\exists \delta_3 = \dfrac{\varepsilon}{3(M-m)+1} > 0$. Берем $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3) > 0$. Берем $\forall T$(разбиение $[a,c]$) $= \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = c\} \Rightarrow \exists k : b \in [x_{k-1}, x_k] \quad M_k = \sup f(x), \quad M'_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant b}{=} \sup f(x), \quad M''_k \underset{b \leqslant x \leqslant x_k}{=} \sup f(x).$

Рассмотрим $T_1 = T \cup b \Rightarrow \delta_{T_1} \leqslant \delta_T < \delta$

$|S_T(f,[a,c]) - (I_1 + I_2)| = |S_T(f,[a,c]) - S_{T_1}(f,[a,c]) + S_{T_1}(f,[a,c]) - (I_1+I_2)| \leqslant |S_T(f,[a,c]) - S_{T_1}(f,[a,c])| +$
$|S_{T_1}(f,[a,c]) - I_1 - I_2| = \underbrace{|M_k(x_k - x_{k-1}) - M'_k(b - x_{k-1}) - M''_k(x_k - b)|}_{(M_k - M''_k)(x_k - b) + (M_k - M'_k)(b - x_{k-1}) \leqslant (M-m)(x_k - x_{k-1}) \leqslant (M-m)\delta_T < \delta(M-m) \leqslant \delta_3(M-m)} + |S_{\tau_1}(f,[a,b]) +$
$S_{\tau_2}(f,[b,c]) - I_1 - I_2| \leqslant$
$\leqslant (M-m)\delta_3 + |S_{\tau_1}(f,[a,b] - I_1)| + |S_{\tau_2}(f,[b,c]) - I_2| < \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f,[a,c]) - I_1 - I_2) = 0 =$
$\lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f,[a,c])) = I_1 + I_2 \Rightarrow$

Аналогично (самостоятельно) $\lim\limits_{\delta_T \to 0} s_T(f,[a,c]) = I_1 + I_2$

$\Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f,[a,c]) - s_T(f,[a,c])) = 0 \underset{\text{кр. инт.}}{\Rightarrow} f(x)$ интегрируема на $[a,c]$, причем (т.к $\lim\limits_{\delta_T \to 0} S_T(f,[a,c]) = I_1 + I_2) \Rightarrow \int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx$

Теперь пусть $a < c < b \underset{\text{Т3.4}}{\Rightarrow} f(x)$ интегрируема на $[a,c] \Rightarrow$ работает только что рассмотренный случай $\Rightarrow$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx \Rightarrow \int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx$$ □

1.4 Монотонность определенного интеграла. Строгая монотонность определенного интеграла от непрерывной функции

Теорема 1.6. $\int\limits_a^b 1dx = b - a$

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 1.7. *Пусть* $a \leqslant b, f(x)$ *интегрируема на* $[a,b], f(x) \geqslant 0$ *на* $[a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \geqslant 0$

Доказательство. 1) $a = b$ - очевидно.

2) $a < b \Rightarrow \exists \int\limits_a^b f(x)dx = I \geqslant S_T(f) = \sum\limits_{k=1}^n \underset{\geqslant 0}{m_k} \underset{\geqslant 0}{\Delta x_k} \geqslant 0$ □

Теорема 1.8. $a \leqslant b; f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на* $[a,b]$, *причем* $f(x) \geqslant g(x) x \in [a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \geqslant \int\limits_a^b g(x)dx$

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 1.9. $f(x) \in C[a,b](a < b), f(x) \geqslant 0 \forall x \in [a,b]$, *причем* $f(x) \not\equiv 0$ *на* $[a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx > 0$

Доказательство. $\exists \xi \in (a,b) : f(\xi) = A > 0 \underset{\text{по т. о сохр. знака}}{\Rightarrow} \exists \delta > 0 : \forall x \in (\xi - \delta, \xi + \delta) f(x) > \frac{A}{2}$

Рассмотрим $\int\limits_a^b f(x) = \underbrace{\int\limits_a^{\xi-\delta} f(x)dx}_{\geqslant 0} + \int\limits_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} f(x)dx + \underbrace{\int\limits_{\xi+\delta}^b f(x)dx}_{\geqslant 0} \geqslant 0 + \frac{A}{2} 2\delta + 0 = A + \delta \geqslant 0$ □

Теорема 1.10. $f(x), g(x) \in C[a,b](a < b); f(x) \geqslant g(x) \forall x \in [a,b]$, *причем* $f(x) \not\equiv g(x)$ *на* $[a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx >$

$\int\limits_a^b g(x)dx$

Доказательство. Самостоятельно. □

1.5 Интегрируемость модуля интегрируемых по Риману функций. Связь интеграла от функции с интегралом от ее модуля

Теорема 1.11. $f(x)$ *интегрируема на*$[a,b] \Rightarrow |f(x)|$ *тоже интегрируема на* $[a,b]$, *причем*
$\left| \int\limits_a^b f(x)dx \right| \leqslant \left| \int\limits_a^b |f(x)|dx \right|$.

Доказательство. 1) Если $a = b \Rightarrow 0 \leqslant 0 \Rightarrow$ доказывать нечего.

2) Если $a < b,$ то : $f(x)$ интегрируема на $[a,b] \underset{\text{кр. инт.}}{\Rightarrow} \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f) - s_T(f)) = 0,$ т.е $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leqslant S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$

Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}, \delta_T < \delta$

$$M_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \sup f(x) \qquad M'_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \sup |f(x|)$$

$$m_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \inf f(x) \qquad m'_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \inf |f(x)|$$

а) $0 \leqslant m_k \leqslant M_k \Rightarrow f(x) \geqslant 0$ на $[x_{k-1}, x_k \Rightarrow |f(x)| = f(x)$ на $[x_{k-1}, x_k] \Rightarrow m'_k = m_k, M'_k = M_k \Rightarrow M'_k - m'_k = M_k - m_k$

б) $m_k \leqslant M_k \leqslant 0 \Rightarrow f(x) \leqslant 0$ на $[x_{k-1}, x_k] \Rightarrow |f(x)| = -f(x)$ на $[x_{k-1}, x_k], M'_k = -m_k, m'_k = -M_k \Rightarrow M'_k - m'_k = M_k - m_k$

в) $m_k \leqslant 0 \leqslant M_k \Rightarrow M'_k = \max(m_k, -m_k) \Rightarrow M'_k - m'_K \leqslant M'_k \leqslant M_k - m_k \Rightarrow$ в любом случае

$0 \leqslant M'_k - m'_k \leqslant M_k - m_k| \,\Delta x_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} \Rightarrow 0 \leqslant S_T(|f|) - s_T(|f|) \leqslant S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(|f|) - s_T(|f|)) = 0 \underset{\text{кр. инт}}{\Rightarrow} |f(x)|$ интегрируема на $[a,b]$.

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)| \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow -\int\limits_a^b |f(x)|dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx$$

Если $a > b \Rightarrow \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \left|\int\limits_a^b |f(x)|dx\right|$ □

1.6 Неравенство Коши-Буняковского для определенных интегралов. Теорема о среднем и ее обобщение

Теорема 1.12 (Неравенство Коши-Буняковского). *$f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a,b] \Rightarrow$*

$$\Rightarrow \left[\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \leqslant \left[\int\limits_a^b f^2(x)dx\right]\left[\int\limits_a^b g^2(x)dx\right]$$

Доказательство. Пусть $a < b$.

Рассмотрим $\varphi(\lambda) = \int\limits_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2 = \lambda^2 \underbrace{\int\limits_a^b f^2(x)dx}_{=A} + 2\lambda \underbrace{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}_{=B} + \underbrace{\int\limits_a^b g^2(x)dx}_{=C} = A\lambda^2 + 2B\lambda + C$

Если $A = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow B^2 \leqslant AC$

Если $A \geqslant 0 \Rightarrow B^2 - AC \leqslant 0,$ т.е $B^2 \leqslant AC \Rightarrow \left[\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\right] \leqslant \left(\int\limits_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int\limits_a^b g^2(x)dx\right)$

Если $a = b \Rightarrow$ верно

Если $a > b \Rightarrow$ верно □

Теорема 1.13 (1-ая теорема о среднем). *$f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a,b]; m \underset{[a,b]}{=} \inf f(x), M \underset{[a,b]}{=} \sup f(x),$*

$g(x) \geqslant 0 \ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \exists \mu \in [m, M]: \quad \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx$

Доказательство. $a < b$. Пусть $g(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$.

$m \leqslant f(x) \leqslant M \quad \forall x \in [a,b]$

$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x) \Rightarrow m\int\limits_a^b g(x)dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int\limits_a^b g(x)dx$

1) Если $\int\limits_a^b g(x)dx = 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0 \Rightarrow$ утверждение верно $\forall \mu \in [m, M]$

2) Если $\int\limits_a^b g(x)dx > 0 \Rightarrow m \leqslant \underbrace{\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}}_{\mu} \leqslant M \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int\limits_a^b g(x)dx$

Если $g(x) \leqslant 0$ на $[a,b]$, то рассмотрим $\tilde{g}(x) = -g(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$.

Если $a \geqslant b \Rightarrow$ самостоятельно. □

Следствие 1. *Если в условиях предыдущей теоремы* $f(x) \in C[a,b] \Rightarrow \exists \xi \in [a,b]: \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)dx$

Доказательство. По теореме Вейрештрасса: $\exists \alpha, \beta \in [a,b] : f(\alpha) = m \quad f(\beta) = M \qquad \mu \in [m, M] \underset{\text{т.Коши}}{\Rightarrow}$
$\exists \mu \in [\alpha, \beta] \subset [a,b] : f(\xi) = \mu$ □

Следствие 2. *Если* $f(x)$ *интегрируема на* $[a,b], m \underset{a \leqslant x \leqslant b}{=} \inf f(x), \ M \underset{a \leqslant x \leqslant b}{=} \sup f(x) \Rightarrow \exists \mu \in [m, M]$: $\int\limits_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$. *А если еще* $f(x) \in C[a,b] \Rightarrow \exists \xi \in [a,b] : \int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

Доказательство. Самостоятельно. □