Конспект лекций
по математическому анализу

(2й семестр 2024-2025 учебного года)

Лектор:

Горячев А. П.

Верстка

Белоусов М.

Оглавление

Глава 1

Интегралы

Лекция 1

13.12

1.1 Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. X - промежуток $f(x)$ определена $x \in X.F(x), x \in X$, называется первообразной к $f(x)$, если $\forall x \in X \ \exists F'(x) = f(x)$

Определение. Множество всех первообразных к $f(x)$ на X называется неопределенным интегралом.(об. $\int f(x)dx, f(x$ - подынтегральная функция,$f(x)dx$ - подынтегральное выражение)

$F(x)-$ первообразная к $f(x) \Rightarrow F(x) + C$ - тоже первообразная.

$\varPhi(x)$ - первообразная к $f(x) \qquad F'(x) = f(x) = \varPhi'(x)$

Рассмотрим $(\varPhi(x) - F(x))' = \varPhi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \ \forall x \in X$

$\varPhi(x) - F(x) = C = const \qquad \varPhi(x) = F(x) + C$

$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad d(\int (f(x)dx)) = f(x)dx; \ \int dF(x) = F(x) + C$

$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx \qquad d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = f(x)dx$

Теорема 1.1. *$f(x), g(x)$ имеют первообразные $\Rightarrow$ $f(x) \pm g(x)$ тоже имеют первообразные, причем $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.*

Доказательство. $\int f(x)dx = F(x)+C_1, \int g(x)dx = G(x)+C_2$. Рассмотрим $H_\pm(x) = F(x)\pm G(x), H'_\pm(x) = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$

$\int (f(x) \pm g(x))dx = F(x) \pm G(x) + C = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ □

Теорема 1.2. *$f(x)$ имеет первообразную $\Rightarrow \forall k, kf(x)$ тоже имеет первообразную, а если $k \neq 0$, то $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$*

Доказательство. $\int f(x)dx = F(x)+C \qquad (kF(x))' = kF'(x) = kf(x) \qquad \int kf(x)dx = kF(x)+C_1 \qquad k\int f(x)dx = k(F(x) + C) = kF(x) + kC, \quad \int kf(x)dx = kF(x) = C_1, \quad k\int f(x)dx = k(F(x) + C) = kF(x) + kC$, если $k \neq 0$, то $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ □

1.1.1 Таблица интегралов.

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1 (\alpha = 0 \Rightarrow x^\alpha = 1)$
2. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C$
4. $\int sinx dx = -cosx + C$
5. $\int cosx dx = sinx + C$
6. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$
7. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$
8. $\int shx dx = chx + C$
9. $\int chx dx = shx + C$
10. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$
11. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$
12. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a > 0$
13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + \tilde{C}, a > 0$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, a > 0$

Лекция 2

20.12

1.2 Способы вычисления неопределенных интегралов

1.2.1 Метод подстановки

$$\int f(u)du = F(u) + C \qquad u = \varphi(x) - \text{дифферен..} f(\varphi(x)) \text{ опр при} x \in -\text{промежуток.}$$

Рассмотрим $F(\varphi(x)), x \in X$. $(F(\varphi(x)))'_x = F'_u\Big|_{u=\varphi(x)}(u) * \varphi'(x) = f(u)\Big|_{u=\varphi(x)} * \varphi'(x) = f(\varphi(x)) * \varphi'(x)$

$\int f(\varphi(x))dx = F(\varphi(x)) + C$

$$\boxed{\begin{gathered}\int f(\varphi(x))\underbrace{\varphi'(x)dx}_{du} = \int f(u)du\Big|_{u=\varphi(x)} \\ \int f(x)dx\Big|_{x=\psi(t)} = \int f(\psi(t))\psi'(t)dt\Big|_{t=\psi^{-1}(x)}\end{gathered}}$$

Примеры.

1.

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C$$
$$x^2 + a^2 = u, \quad 2x\,dx = du$$

2.

$$\int \sin^3 x\,dx = -\int \sin^2 x(-\sin x\,dx) = -\int (1-u^2)\,du = -u + \frac{u^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$
$$\cos x = u, \quad -\sin x\,dx = du$$

3.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} = \int \frac{6t^5\,dt}{t^3(1+t^2)} = 6\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,dt = 6(t - \operatorname{arctg} t) + C = 6(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}) + C$$
$$x = t^6(\sqrt[6]{x} = t), \quad dx = 6t^5\,dt$$

4.

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C$$
$$\sin x = u, \quad du = \cos x\,dx$$

1.2.2 Интегрирование по частям

$$d(uv) = udv + vdu, udv = d(uv) - vdu, \quad \int udv = \int d(uv) - \int vdu; \quad \int d(uv) = uv + C$$

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Примеры

1.

$$\int \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

$$u = \ln x, \quad dv = dx, \quad du = \frac{dx}{x}, \quad v = x$$

2.

$$I = \int e^x \underbrace{\cos x\, dx}_{d(\sin x)} = \int e^x d(\sin x) = e^x \sin x - \int \sin x e^x\, dx = e^x \sin x + \int e^x d(\cos x) = e^x \sin x + e^x \cos x - \underbrace{\int \cos x e^x\, dx}_{I}$$

$$I = \int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C$$

3.

$$I = \int \underbrace{\sqrt{x^2+a^2}}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = x\sqrt{x^2+a^2} - \int x\frac{2x\, dx}{2\sqrt{x^2+a^2}} = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx = x\sqrt{x^2+a^2} - I + a^2 \ln\left(x + \sqrt{x^2+a\right.$$

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C$$

4.

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \qquad a > 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$J_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\, dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x\frac{(-n)}{(x^2+a^2)^{n+1}}2x\, dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\, dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n(J_n - a^2$$

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)J_n\right] \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$J_1 = \int \frac{1}{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

$$J_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right] + C, \ldots$$

В качестве упражнения найти рекуррентную формулу для

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\, dx \qquad \deg P_m(x) = m, \quad \deg Q_n(x) = n$$

$$m > n \quad P_m(x) = R_{m-n}(x)Q_n(x) + T_k(x), \quad k < n \quad \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = R_{m-n}(x) + \frac{T_k(x)}{Q_n(x)}, \quad k < n$$

$$Q_n(x) = a_0x^n + \cdots + a_n = a_0(x-x_1)^{\alpha_1}\cdots(x-x_l)^{\alpha_l}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{\beta_r}$$

$$\frac{T_k(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \cdots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha_1 1}}{x-x_l} + \cdots + \frac{A_{\alpha_1\alpha_l}}{(x-x_l)^{\alpha_l}} + \frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \cdots + \frac{B_{1\beta_1}x+C_{1\beta_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}} + \ldots$$