Конспект лекций по математическому анализу

(2й семестр 2024-2025 учебного года)

Лектор:

Горячев А. П., Хлистунов И. А.

Верстка

Оглавление

1 Интегралы **5**

1.1 Первообразная и неопределенный интеграл . . . 5

1.1.1 Таблица интегралов. . . . 6

1.2 Способы вычисления неопределенных интегралов . . . 7

1.2.1 Метод подстановки . . . 7

1.2.2 Интегрирование по частям . . . 7

2 Определенный интеграл **9**

2.1 Определение интеграла Римана. Существование интегрируемых функций. Необратимое условие . . . 9

2.2 Суммы Дарбу и их свойства. Связь сумм Дарбу с интегральной суммой . . . 10

2.3 Верхний и нижний интегралы Дарбу. Критерий интегрируемости . . . 11

2.4 Интегрируемость непрерывной функции. Интегрируемость монотонной функции . . . 13

2.5 Интегрируемость функции, отличающейся от интегрируемой в конечном количестве точек . 13

3 Свойства определенного интеграла **15**

3.1 Линейные свойства определенного интеграла . . . 15

3.2 Интегрируемость произведения интегрируемых по Риману функций . . . 16

3.3 Интегрируемость функции на внутреннем отрезке. Аддитивность определенного интеграла 17

3.4 Монотонность определенного интеграла. Строгая монотонноость определенного интеграла от непрерывной функции . . . 18

3.5 Интегрируемость модуля интегрируемых по Риману функций. Связь интеграла от функции с интегралом от ее модуля . . . 19

3.6 Неравенство Коши-Буняковского для определенных интегралов. Теорема о среднем и ее обобщение . . . 19

4 Основные правила интегрирования. **21**

4.1 Интеграл с переменным верхним (нижним) пределом, его непрерывность и дифференцируемость. Существование первообразной у непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница. 21

4.2 Вычисление определенных интегралов способами замены переменных и интегрирования по частям. . . . 22

5 Геометрические приложения определенного интеграла. 24

5.1 Спрямляемость гладкой кривой. Выражение длины дуги гладкой кривой в виде определенного интеграла. Формулы длины дуги плоской кривой, заданной в декартовых либо полярных координатах. . . . 24

5.1.1 Частные случаи гладких кривых: . . . 27

5.2 Площадь плоской фигуры. Критерий квадратируемости . . . 27

5.3 Квадрируемость криволинейной трапеции. Выражение плоащиди криволинейной трапеции в виде определенного интеграла. Формула площади криволинейного сектора (без доказательства) . . . 29

6 Собственные и несобственные интегралы. 30

6.1 Несобственный интеграл первого рода, их сходимость и расходимость. Независимость сходимости (расходимости) несобственного интеграла первого рода от значения его постоянного (неособенного) предела . . . 30

6.2 Несобственные интегралы второго рода, их сходимость и расходимость. Независимость сходимости (расходимости) несобственного интеграла второго рода от значения его постоянного (неособенного) предела . . . 32

6.3 Несобственные интегралы с несколькими особыми точками. . . . 33

6.4 Формула Ньютона-Лейбница для несобственных интегралов. Вычисление несобственных интегралов способами замены переменной и интегрирования по частям. . . . 34

6.5 Линейные свойства несобственного интеграла. Пример неинтегрируемого произведения интегрируемых функций. . . . 35

6.6 Связь интеграла от функции с интегралом от ее модуля в случае их интегрируемости . . . 36

6.7 Критерий Коши сходимости несобственных интегралов первого и второго рода. . . . 37

6.8 Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Сходимость абсолютно сходящихся несобственных интегралов. . . . 38

6.9 Необходимое и достаточное условие сходимости несобственных интегралов первого и второго рода от неотрицательных функций. . . . 38

6.10 Признак сравнения (в допредельной и предельной форме) для сходимости несобственных интегралов первого и второго рода от неотрицательных функций. . . . 39

6.11 Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Признаки Дирихле и Абеля для сходимости несобственных интегралов первого и второго рода. . . . 41

6.11.1 Пример неинтегрируемости модуля интегрируемых в несобственном смысле функций. 43

6.12 Главное значение в смысле Коши несобственных интегралов первого и второго рода и его связь с величиной соответствующего несобственного интеграла. . . . 44

7 Функции многих переменных 46

7.1 Координатное n-мерное пространство . . . 46

7.2 Последовательности в $\mathbb{E}_n$ . . . 49

7.3 Функции в $\mathbb{E}_n$ . . . 51

7.4 Предел функции 51
7.5 Непрерывные функции нескольких переменных 53
7.6 Производные и дифференциалы функций нескольких переменных 54

Глава 1

Интегралы

Лекция 1

13.12

1.1 Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. X - промежуток $f(x)$ определена $x \in X.F(x), x \in X$, называется первообразной к $f(x)$, если $\forall x \in X\ \exists F'(x) = f(x)$

Определение. Множество всех первообразных к $f(x)$ на X называется неопределенным интегралом.(об. $\int f(x)dx, f(x$ - подынтегральная функция,$f(x)dx$ - подынтегральное выражение)

$F(x)-$ первообразная к $f(x) \Rightarrow F(x) + C$ - тоже первообразная.

$\Phi(x)$ - первообразная к $f(x) \qquad F'(x) = f(x) = \Phi'(x)$

Рассмотрим $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0\ \forall x \in X$

$\Phi(x) - F(x) = C = const \qquad \Phi(x) = F(x) + C$

$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad d(\int(f(x)dx)) = f(x)dx; \int dF(x) = F(x) + C$

$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx \qquad d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = f(x)dx$

Теорема 1.1. *$f(x), g(x)$ имеют первообразные $\Rightarrow$ $f(x) \pm g(x)$ тоже имеют первообразные, причем $\int(f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.*

Доказательство. $\int f(x)dx = F(x)+C_1, \int g(x)dx = G(x)+C_2$. Рассмотрим $H_\pm(x) = F(x)\pm G(x), H'_\pm(x) = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$

$\int(f(x) \pm g(x))dx = F(x) \pm G(x) + C = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ □

Теорема 1.2. *$f(x)$ имеет первообразную $\Rightarrow \forall k, kf(x)$ тоже имеет первообразную, а если $k \neq 0$, то $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$*

Доказательство. $\int f(x)dx = F(x)+C \qquad (kF(x))' = kF'(x) = kf(x) \qquad \int kf(x)dx = kF(x)+C_1 \qquad k\int f(x)dx = k(F(x) + C) = kF(x) + kC, \quad \int kf(x)dx = kF(x) = C_1, \quad k\int f(x)dx = k(F(x) + C) = kF(x) + kC$, если $k \neq 0$, то $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ □

1.1.1 Таблица интегралов.

1. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1 (\alpha = 0 \Rightarrow x^\alpha = 1)$
2. $\int \dfrac{dx}{x} = ln|x| + C$
3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{lna} + C$
4. $\int sinx dx = -cosx + C$
5. $\int cosx dx = sinx + C$
6. $\int \dfrac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$
7. $\int \dfrac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$
8. $\int shx dx = chx + C$
9. $\int chx dx = shx + C$
10. $\int \dfrac{dx}{ch^2 x} = thx + C$
11. $\int \dfrac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$
12. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C, a > 0$
13. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{x-a}{x+a} \right| + C$
14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C = -\arccos \dfrac{x}{a} + \tilde{C}, a > 0$
15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, a > 0$

Лекция 2

20.12

1.2 Способы вычисления неопределенных интегралов

1.2.1 Метод подстановки

$$\int f(u)du = F(u) + C \qquad u = \varphi(x) - \text{дифферен..} f(\varphi(x)) \text{ опр при} x \in -\text{промежуток.}$$

Рассмотрим $F(\varphi(x)), x \in X$. $(F(\varphi(x)))'_x = F'_u\Big|_{u=\varphi(x)}(u) * \varphi'(x) = f(u)\Big|_{u=\varphi(x)} * \varphi'(x) = f(\varphi(x)) * \varphi'(x)$

$\int f(\varphi(x))dx = F(\varphi(x)) + C$

$$\boxed{\begin{gathered} \int f(\varphi(x))\underbrace{\varphi'(x)dx}_{du} = \int f(u)du\Big|_{u=\varphi(x)} \\ \int f(x)dx\Big|_{x=\psi(t)} = \int f(\psi(t))\psi'(t)dt\Big|_{t=\psi^{-1}(x)} \end{gathered}}$$

Примеры.

1.

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C$$

$$x^2 + a^2 = u, \quad 2x\,dx = du$$

2.

$$\int \sin^3 x\,dx = -\int \sin^2 x(-\sin x\,dx) = -\int (1-u^2)\,du = -u + \frac{u^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

$$\cos x = u, \quad -\sin x\,dx = du$$

3.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} = \int \frac{6t^5\,dt}{t^3(1+t^2)} = 6\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,dt = 6(t - \operatorname{arctg} t) + C = 6(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}) + C$$

$$x = t^6(\sqrt[6]{x} = t), \quad dx = 6t^5\,dt$$

4.

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C$$

$$\sin x = u, \quad du = \cos x\,dx$$

1.2.2 Интегрирование по частям

$$d(uv) = udv + vdu, udv = d(uv) - vdu, \quad \int udv = \int d(uv) - \int vdu; \quad \int d(uv) = uv + C$$

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Примеры

1.

$$\int \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

$$u = \ln x, \quad dv = dx, \quad du = \frac{dx}{x}, \quad v = x$$

2.

$$I = \int e^x \underbrace{\cos x\, dx}_{d(\sin x)} = \int e^x d(\sin x) = e^x \sin x - \int \sin x e^x\, dx = e^x \sin x + \int e^x d(\cos x) = e^x \sin x + e^x \cos x - \underbrace{\int \cos x e^x\, dx}_{I}$$

$$I = \int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C$$

3.

$$I = \int \underbrace{\sqrt{x^2+a^2}}_{u}\underbrace{dx}_{dv} = x\sqrt{x^2+a^2} - \int x\frac{2x\, dx}{2\sqrt{x^2+a^2}} = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - I + a^2 \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)$$

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C$$

4.

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \qquad a > 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$J_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\, dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x\frac{(-n)}{(x^2+a^2)^{n+1}} 2x\, dx =$$

$$\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\, dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n(J_n - a^2 J_{n+1})$$

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)J_n\right] \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$J_1 = \int \frac{1}{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

$$J_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right] + C, \dots$$

В качестве упражнения найти рекуррентную формулу для

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\, dx \qquad \deg P_m(x) = m, \quad \deg Q_n(x) = n$$

$$m > n \quad P_m(x) = R_{m-n}(x)Q_n(x) + T_k(x), \quad k < n \quad \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = R_{m-n}(x) + \frac{T_k(x)}{Q_n(x)}, \quad k < n$$

$$Q_n(x) = a_0x^n + \dots + a_n = a_0(x-x_1)^{\alpha_1}\cdots(x-x_l)^{\alpha_l}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{\beta_r}$$

$$\frac{T_k(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \dots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{A_{\alpha_1 1}}{x-x_l} + \dots + \frac{A_{\alpha_1\alpha_l}}{(x-x_l)^{\alpha_l}} + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \dots + \frac{B_{1\beta_1}x + C_{1\beta_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}} + \dots$$

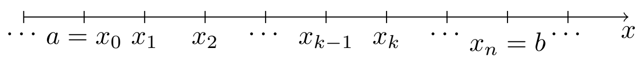
Глава 2

Определенный интеграл

Лекция 3

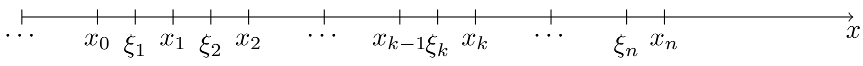
07.02

2.1 Определение интеграла Римана. Существование интегрируемых функций. Необратимое условие

$a < b$. Рассмотрим $[a, b]$. 

T $= \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b\}$ - разбиение отрезка [a,b] Рассмотрим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k = 1, 2, 3, \ldots, n (k = \overline{1, n})$

$\delta_T \underset{1 \leqslant k \leqslant n}{=} max(\Delta x_k)$- характеристика разбиения.

$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1, n}, \qquad \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^{n}$ 

Пусть $f(x)$ определена на $[a, b]$. Рассмотрим $\sigma_T(f, \Xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k$ - интегральная сумма

Определение. Говорят, что $\exists \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T(f, \Xi)$, если $\exists I : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta, \forall \Xi \Rightarrow |\sigma_T(f, \Xi) - I| < \varepsilon$

! Свойства пределов переносятся.

Определение. $f(x)$ называется интегрируемой(по Риману) на $[a, b]$, если $\exists \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T(f, \Xi)$. Величина этого предела ($I = \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T(f, \Xi)$) называется определенным интегралом функции $f(x)$ на (a, b) (интегралом Римана))

Обозначение: $\int\limits_a^b f(x) dx = I$

Примеры:

а) $f(x) \equiv C - const$ на $[a, b]; \forall T = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}, \forall \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^{n};$

$\sigma_T(f, \Xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} c \Delta x_k = c \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta x_k = c((x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = c(x_n - x_0) = c(b - a) \underset{\delta_T \to 0}{\to} c(b - a); \Rightarrow \exists \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T(f, \Xi) = c(b - a). \Rightarrow f(x) -$ интегрируема на $[a, b]$, причем $\int_a^b c dx = c(b - a) \Rightarrow$ интегрируемые функции существуют.

б) $\chi(x) = \begin{cases} 1, x - \text{рац.} \\ 0, x - \text{иррац.} \end{cases}, x \in [a,b]$ (функция Дирихле)

Предположим,что $\exists \int\limits_a^b \chi(x)dx = I,$ т.е $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta, \forall \Xi \Rightarrow |\sigma_T(\chi, \Xi) - I| < \varepsilon$

Возьмем $\Xi_1 = \{\xi_k^{(1)}\}_{k=1}^n$ – набор рац. точек $\qquad \sigma^{(1)} = \sigma_T(\chi, \Xi_1) = \sum\limits_{k=1}^n \underbrace{\chi(\xi_k^{(1)})}_{=1} \Delta x_k = b - a$

Возьмем $\Xi_2 = \{\xi_k^2\}_{k=1}^n$ – набор иррац. точек $\qquad \sigma^{(2)} = \sigma_T(\chi, \Xi_2) = \sum\limits_{k=1}^n \underbrace{\chi(\xi_k^{(2)})}_{=0} \Delta x_k = 0$

$b - a = |\sigma^{(1)} - \sigma^{(2)}| = |\sigma^{(1)} - I - \sigma^{(2)} + I| \leqslant \underbrace{|\sigma^{(1)} - I|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|\sigma^{(2)} - I|}_{<\varepsilon} < \varepsilon + \varepsilon = b - a$ – противоречие $\Rightarrow$ $\chi(x)$ не является интегрируемой на $[a,b]$

Теорема 2.1 (Необходимое условие интегрируемости)**.** *$f(x)$-интегрируема на $[a,b] \Rightarrow f(x)-$ ограничена на $[a,b]$*

Доказательство. От противного. Предположим,что $f(x)$ не является ограниченной на $[a,b]$, но при этом $\exists \int_a^b f(x)dx = I,$ т.е $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta, \forall \Xi \Rightarrow |\sigma_T(f, \Xi) - I| < \varepsilon.$

Берем $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta, \forall \Xi \Rightarrow |\sigma_T(F, \Xi) - I| < 1$

Берем $\forall T = \{a = x_0 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b\}$;

Строим $\Xi = \{\xi\}_{k=1}^n$ $f(x)$ неограничена на $[a,b] \Rightarrow \exists k : f(x)$ неограничена на $[x_{k-1}, x_k]$,

$\Xi : \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n-$ произвольные.

Берем такое $\xi_k : |f(\xi_k)| > \dfrac{1 + |I| + |f(\xi_1)|\Delta x_1 + |f(\xi_2)|\Delta x_2 + \dots + |f(\xi_{k-1})|\Delta x_{k-1} + \dots + |f(\xi_n)|\Delta x_n}{\Delta x_k}|$

$|\sigma_T(f, \Xi) - I| \geqslant |\sigma_T(f, \Xi)| - |I| = |f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_{k-1})\Delta x_{k-1} + f(\xi_k)\Delta x_k + f(\xi_{k+1})\Delta x_{k+1} + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n|$ $- |I| = |f(\xi_k)\Delta x_k - (-f(\xi_1)\Delta x_1 - \dots - f(\xi_{k-1})\Delta x_{k-1} - f(\xi_{k+1})\Delta x_{k+1} - \dots - f(\xi_n)\Delta x_n)| - |I| \geqslant$ $\geqslant |f(\xi_k)|\Delta x_k - |f(\xi_1)|\Delta x_1 - \dots - |f(\xi_{k-1})|\Delta x_{k-1} - |f(\xi_{k+1})|\Delta x_{k+1} - \dots - |f(\xi_n)|\Delta x_n - |I| > | = \varepsilon \Rightarrow$ противоречие $\square$

2.2 Суммы Дарбу и их свойства. Связь сумм Дарбу с интегральной суммой

Пусть $f(x)$ ограничена на $[a,b]$. $\quad T = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$. $\qquad \begin{matrix} M_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \sup(f(x)); \\ m_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \inf(f(x)). \end{matrix}$

$S_T(f) = \sum\limits_{k=1}^n M_k \Delta x_k$ – верхняя сумма Дарбу.

$s_T(f) = \sum\limits_{k=1}^n m_k \Delta x_k$ – нижняя сумма Дарбу

Эти суммы не обязаны быть интегральными суммами, т.к точные грани не всегда достигаются.

$\forall \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n \Rightarrow m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k. \qquad s_T(f) \leqslant \sigma_T(f, \Xi) \leqslant S_T(f)$

Определение. $T_1 = \{a = x_0^{(1)} < x_1^{(1)} < \dots < x_n^{(1)} = b\} \qquad T_2 = \{a = x_0^{(2)} < x_1^{(2)} < \dots < x_m^{(2)} = b\}$.

T_2 называется последующим к $T_1,$ если $x_k^{(1)} \in T_2 \forall k = \overline{0,n}$.Обозначение $T_2 \succ T_1$

Теорема 2.2. *Если* $T_1 \succ T_2 \Rightarrow \begin{matrix} 1) & S_{T_1}(f) \leqslant S_{T_2}(f) \\ 2) & s_{T_1}(f) \geqslant s_{T_2}(f) \end{matrix}$

Доказательство. 1) Пусть у T_1 ровно на 1 точку больше, т.е $\begin{matrix} T_2 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n < b\}. \\ T_1 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < \tilde{x} < x_K < \dots < x_n = b\}. \end{matrix}$

$M_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \sup f(x), \quad M_k' \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant \tilde{x}}{=} \sup f(x) \leqslant M_k, \quad M_k'' \underset{\tilde{x} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \sup f(x) \leqslant M_k$

Рассмотрим $S_{T_2}(f) - S_{T_1}(f) = M_k \Delta x_k - M_k'(\tilde{x} - x_{k-1}) - M_k''(x_k - \tilde{x}) = M_k(x_k - x_{k-1}) - M_k'(\tilde{x} - x_{k-1}) - M_k''(x_k - \tilde{x}) = M_k(x_k - \tilde{x} + \tilde{x} - x_{k-1}) - M_k'(\tilde{x} - x_{k-1}) = \underbrace{(M_k - M_k'')}_{\geqslant 0} \underbrace{(x_k - \tilde{x})}_{>0} + \underbrace{(M_k - M_k')}_{\geqslant 0} \underbrace{(\tilde{x} - x_{k-1})}_{>0} \geqslant 0 \Rightarrow$

$S_{T_2}(f) \geqslant S_{T_1}(f)$. Если у T_1 более, чем на одну точку больше, то делаем аналогично нужное число раз. □

Теорема 2.3. $\forall T_1, T_2 \Rightarrow s_{T_1}(f) \leqslant S_{T_2}(f)$

Доказательство. Рассмотрим $T_3 = T_1 \cup T_2 \Rightarrow \begin{cases} T_3 \succ T_1 \\ T_3 \succ T_2 \end{cases} \Rightarrow s_{T_1}(f) \underset{\text{Т2.2}}{\leqslant} s_{T_3}(f) \leqslant S_{T_3}(f) \underset{\text{Т2.2}}{\leqslant} S_{T_2}(f)$ □

Теорема 2.4. $\forall T, \forall \varepsilon > 0 \exists \Xi_1, \exists \Xi_2 : \begin{cases} 0 \leqslant S_T(f) - \sigma_T(f, \Xi_1) < \varepsilon \\ 0 \leqslant \sigma_T(f, \Xi_2) - s_T(f) < \varepsilon \end{cases}$

Доказательство. Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b\}$. $\begin{matrix} M_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \sup(f(x)), \\ m_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \inf(f(x)) \end{matrix} \Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \begin{matrix} \exists \xi_k^{(1)} \in [x_{k-1}, x_k] : 0 \leqslant M_k - f(\xi_k^{(1)}) < \dfrac{\varepsilon}{b-a} \\ \exists \xi_k^{(2)} \in [x_{k-1}, x_k] : 0 \leqslant f(\xi_k^{(2)}) - m_k < \dfrac{\varepsilon}{b-a} \end{matrix} \Bigg| \Delta x_k \text{ и } \sum_{k=1}^{n} \Rightarrow \begin{matrix} 0 \leqslant S_T(f) - \sigma_T(f, \Xi_1) < \varepsilon \\ 0 \leqslant \sigma_T(f, \Xi_2) - s_T(f) < \varepsilon \end{matrix}$$ □

2.3 Верхний и нижний интегралы Дарбу. Критерий интегрируемости

Из теоремы 2.3 $\Rightarrow \forall T_1, T_2 \quad \underbrace{s_{T_1}(f)}_{\text{огр. сверху}} \leqslant \underbrace{S_{T_2}(f)}_{\text{огр. снизу}}$

Рассмотрим $\bar{I} \underset{T}{=} \inf S_T(f) -$ верхний интеграл Дарбу. $\underline{I} \underset{T}{=} \sup s_T(f) -$ нижний интеграл Дарбу

$s_{T_1}(f) \leqslant S_{T_2}(f). \qquad \underline{I} \leqslant S_{T_2}(f). \qquad \boxed{\underline{I} \leqslant \bar{I}}$

Теорема 2.5 (Критерий интегрируемости)**.** $f(x)$ *интегрируема на* $[a, b] \Leftrightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$

Доказательство. $\Rightarrow$ $f(x)$ интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \exists \int\limits_a^b f(x)dx = I$, т.е $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow$

$|\sigma_T(f, \Xi) - I| < \dfrac{\varepsilon}{4}$, т.е $I - \dfrac{\varepsilon}{4} < \sigma_T(f, \Xi) < I + \dfrac{\varepsilon}{4}$

Но $\varepsilon > 0 \underset{\text{Т2.4}}{\Rightarrow} \exists \Xi_1, \exists \Xi_2 : \begin{matrix} 0 \leqslant S_T(f) - \sigma_T(f, \Xi_1) < \dfrac{\varepsilon}{4} \\ 0 \leqslant \sigma_T(f, \Xi_2) - s_T(f) < \dfrac{\varepsilon}{4} \end{matrix}$

$I - \dfrac{\varepsilon}{2} < \sigma_T(f, \Xi_2) - \dfrac{\varepsilon}{4} < s_T(f) \leqslant S_T(f) < \sigma_T(f, \Xi_1) + \dfrac{\varepsilon}{4} < I + \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow 0 \leqslant S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$

$\Leftarrow$ Пусть $\lim\limits_{\delta_T \to 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0$, т.е $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leqslant S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$

Но $s_T(f) \leqslant \underline{I} \leqslant \bar{I} \leqslant S_T(f) \Rightarrow 0 \leqslant \bar{I} - \underline{I} < \varepsilon \Rightarrow \bar{I} - \underline{I} = 0 \Rightarrow \underline{I} = \bar{I}$.

Обозначим $\underline{I} = \bar{I} = I \Rightarrow \left.\begin{matrix} s_T(f) \leqslant I \leqslant S_T(f) \\ \text{Но } \forall \Xi \Rightarrow s_T(f) \leqslant \sigma_T(f, \Xi) \leqslant S_T(f) \end{matrix}\right\} \Rightarrow |\sigma_T(f, \Xi) - I| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T(f, \Xi) = I \Rightarrow f(x) -$ интегрируема на $[a, b]$ □

Следствие 1. *$f(x)$ интегрируема на $[a, b]$* $\Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0} s_T(f) = \lim\limits_{\delta_T \to 0} S_T(f) = I (\exists \int_a^b f(x)dx = I)$

Доказательство. $f(x)$ инт на $[a, b] \Rightarrow \begin{matrix} 1) \lim\limits_{\delta_T \to 0} (S_T)(f) - s_T(f)) = 0 \\ 2) \int_a^b f(x)dx = I, \forall T s_T(f) \leqslant I \leqslant S_T(f) \end{matrix} \Rightarrow 0 \leqslant S_T(f) - I \leqslant S_T(f) - s_T(f); 0 \leqslant I - s_T(f) \leqslant \underbrace{S_T(f) - s_T(f)}_{\underbrace{\to 0}_{\delta_T \to 0}} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \lim\limits_{\delta_T \to 0} (S_T(f) - I) = 0 \\ \lim\limits_{\delta_T \to 0} (I - s_T(f)) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0} S_T(f) = \lim\limits_{\delta_T \to 0} s_T(f) = I.$ □

Лекция 4

11.02

2.4 Интегрируемость непрерывной функции. Интегрируемость монотонной функции

Теорема 2.6. *$f(x) \in C[a,b] \Rightarrow f(x)$ интегрируема на $[a,b]$*

Доказательство. $f(x) \in C[a,b] \underset{\text{т.Кантора}}{\Rightarrow} f(x)$ равномерно непрерывна на $[a,b]$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x', x'' \in [a,b] : |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.
Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$. $\quad \delta_T < \delta$;

$$f(x) \in C[x_{k-1}, x_k] \underset{\text{т. Вейрштрасса}}{\Rightarrow} \exists x'_k, x''_k \in [x_{k-1}, x_k] : \begin{array}{l} M_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \sup f(x) = f(x'_k) \\ m_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \inf(f(x)) = f(x''_k) \end{array}$$

$|x'_k - x''_k| \leqslant \Delta x_k \leqslant \delta_t \Rightarrow |M_k - m_k| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

$$0 \leqslant M_k - m_k \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} \Big| \Delta x_k \text{ и } \sum_{k=1}^{n} \Rightarrow 0 \leqslant S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\delta_T \to 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0 \underset{\text{кр. инт.}}{\Rightarrow} f(x) \text{ интегрируема на } [a,b]$$

$\square$

Теорема 2.7. *$f(x)$ монотонна на $[a,b]$(не имеет значения, что из себя представляет множество точек разрыва) $\Rightarrow$ $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$*

Доказательство. Пусть $f(x)$ монотонно возрастает на $[a,b] \Rightarrow f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b) \forall x \in [a,b] \Rightarrow f(x)$ ограничена на $[a,b]$.

$$\text{Берем } \forall T = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\} \qquad f(x_{k-1}) \leqslant f(x) \leqslant f(x_k) \forall x \in [x_{k-1}, x_k] \Rightarrow \begin{array}{l} M_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \sup f(x) = f(x_k) \\ m_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \inf f(x) = f(x_{k-1}) \end{array}$$

$$0 \leqslant S_T(f) - s_T(f) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \Delta x_k \leqslant \delta_T \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) = \delta_T \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \delta_T (f(b) - f(a)) \underset{\delta_T \to 0}{\to}$$
$0 \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0} (S_T(f) - s_T(f)) = 0 \underset{\text{критерий инт.}}{\Rightarrow} f(x)$ интегрируема на $[a,b]$
Самостоятельно рассмотреть случай монотонного убывания. $\square$

Пример. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, x \in \left(\dfrac{1}{k+1}, \dfrac{1}{k} \right], k \in \mathbb{N} \\ 0, x = 0 \end{cases}$

У $f(x)$ ∞-но много точек разрыва на $[a,b] : x = \dfrac{1}{k}, k = 2, 3, 4, \cdots -$ точки разрыва 1-го рода
$f(x)$ монотонно возрастает на $[0,1] \Rightarrow f(x)$ интегрируема на $[0,1]$

2.5 Интегрируемость функции, отличающейся от интегрируемой в конечном количестве точек

Теорема 2.8. *Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a,b] \Rightarrow \tilde{f}(x) = \begin{cases} A, x = \tilde{x} \in [a,b] \\ f(x), x \in [a,b] \backslash \{\tilde{x}\} \end{cases}$ тоже интегрируема на $[a,b]$, причем $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \tilde{f}(x)dx$*

Доказательство. $f(x)$ интегрируема на $[a,b] \Rightarrow f(x)$
1) ограничена на $[a,b]$, т.е $\exists M > 0 : |f(x)| \leqslant M \forall x \in [a,b]$
2) $\lim\limits_{\delta_T \to 0} S_T(f) = \int\limits_a^b f(x)dx = I$, т.е

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T : \delta_T < \delta \Rightarrow |S_T(f) - I| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Берем $\delta_2 = \dfrac{\varepsilon}{4(M + |A|)} > 0 \Rightarrow \exists \delta = min(\delta_1, \delta_2) > 0$. Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} : \delta_T < \delta$;
$M_k = \sup f(x)$
$\tilde{M}_k = \sup \tilde{f}(x), \quad k = \overline{1,n}$
Рассмотрим $|S_T(f) - S_T(\tilde{f})| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k - \tilde{M}_k \Delta x_k)\right| \leqslant \delta_T * 2(M + |A|) <$
$< 2\delta(M + |A|) \leqslant 2\delta_2(M + |A|) = \dfrac{\varepsilon}{2}$
Рассмотрим $|S_T(\tilde{f}) - I| = |S_T(\tilde{f}) - S_T(f) + S_T(f) - I| \leqslant \underbrace{|S_T(\tilde{f}) - S_T(f)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|S_T(f) - I|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$, т.е $\lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f) - I) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0} S(\tilde{f}) = I$
Аналогично: $\lim\limits_{\delta_T \to 0} s_T(\tilde{f}) = I \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(\tilde{f}) - s_T(\tilde{f})) = 0 \underset{\text{кр. инт.}}{\Rightarrow} \tilde{f}(x)$ интегрируема на $[a,b]$.

Т.к $\int \tilde{f}(x)dx = \lim\limits_{\delta_T \to 0} S_T(f) = \lim\limits_{\delta_T \to 0} S_T(\tilde{f}) \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(\tilde{f})) = \int\limits_a^b \tilde{f}(x)dx => \int\limits_a^b \tilde{f}(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$ □

Следствие 1. *$f(x)$ интегрируема на $[a,b] \Rightarrow \tilde{f}(x)$, отличающася от $f(x)$ в конечном количестве точек, тоже интегрируема на $[a,b]$,причем* $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b \tilde{f}(x)dx$

Доказательство. Применим последнюю теорему надлежащее число раз. □

Пример. $\chi(x) = \begin{cases} 1, x - \text{рац.} \\ 0, x - \text{иррац.} \end{cases}$ отличающаяся от $f_0(x) \equiv 0$ на $[a,b]$ в счетном количество точек, но при этом $\chi(x)$ не является интегрируемой на $[a,b]$, а $f_0(x)$ - является.

Теорема 2.9 (Критерий Лебега)**.** *Пусть $f(x)$ ограничена на $[a,b]$, а $R(f)-$ множество ее точек разрыва $f(x)$ на $[a,b]$, тогда $f(x)$ интегрируема по Риману на $[a,b] \Leftrightarrow R(f)$ имеет меру нуль, т.е* $\forall \varepsilon > 0 \exists \{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^{\infty} : R(f) \subset \cup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i, \beta_i)$, *при этом* $\sup\limits_m \sum\limits_{i=1}^{m}(\beta_i - \alpha_i) < \varepsilon$

Доказательство. Без доказательства. □

Глава 3

Свойства определенного интеграла

Лекция 4

11.02

3.1 Линейные свойства определенного интеграла

Определение. Если $f(x)$ определена при $x = a$, то положим $\int_a^a f(x)dx \equiv 0$

Определение. Если $a < b$, а еще $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то положим $\int\limits_b^a f(x)dx \equiv -\int\limits_a^b f(x)dx$

Теорема 3.1. *Если $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, $f(x) \pm g(x)$ тоже интегрируема на $[a, b]$,причем* $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x)dx) = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$

Доказательство. Если $a = b$, то доказывать нечего: $0 = 0 \pm 0$.

Если $a < b$, то: Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$; Берем $\forall \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$, тогда: рассмотрим $\sigma_T(f \pm g, \Xi) = \sum\limits_{k=1}^n (f(\xi_k) \pm g(\xi_k))\Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \pm \sum\limits_{k=1}^n g(\xi_k)\Delta x_k = \underset{\delta_T \to 0}{\sigma_T(f, \Xi)} \overset{}{\to} I_1 \pm \underset{\delta_T \to 0}{\sigma_T(g, \Xi)} \to I_2 \to I_1 + I_2$, т.е $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$

Если $a > b \Rightarrow \int\limits_b^a (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_b^a f(x)dx \pm \int\limits_b^a g(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$ $\square$

Теорема 3.2. $f(x)$ *интегрируема на* $[a, b] \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R} \quad c \in f(x)$ *интегрируема на* $[a, b]$,*причем* $\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx$

Доказательство. Самостоятельно. $\square$

3.2 Интегрируемость произведения интегрируемых по Риману функций

Теорема 3.3. *Если* $f(x), g(x)$ *интегрируемы на* $[a,b] \Rightarrow f(x)g(x)$ *тоже интегрируема на* $[a,b]$

Доказательство. пусть $a < b$. $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a,b] \Rightarrow f(x), g(x) -$ ограничены на $[a,b]$, т.е $\exists M^{(f)} > 0, M^{(g)} > 0 : \begin{matrix} |f(x)| \leqslant M^{(f)} \forall x \in [a,b] \\ |g(x)| \leqslant M^{(g)} \forall x \in [a,b] \end{matrix}$. Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$; Введем

$M_k^{(f)} = \sup\limits_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} f(x) \quad M_k^{(g)} = \sup g(x) \quad M_k^{(fg)} = \sup(f(x)g(x))$

$m_k^{(f)} = \inf f(x) \quad m_k^{(g)} = \inf g(x) \quad m_k^{(fg)} = \inf(f(x)g(x))$

$\forall \varepsilon > 0 \exists x_k', x_k'' \in [x_{k-1}, x_k] : \begin{matrix} M_k^{(fg)} < f(x_k')g(x_k') + \dfrac{\varepsilon}{2} \\ m_k^{(fg)} > f(x_k'')g(x_k'') - \dfrac{\varepsilon}{2} \end{matrix} \Rightarrow 0 \leqslant M_k^{(fg)} - m_k^{(fg)} < f(x_k')g(x_k') - f(x_k'')g(x_k'') + \varepsilon =$ $f(x_k')g(x_k') + f(x_k')g(x_k'') - f(x_k')g(x_k'') - f(x_k'')g(x_k'') + \varepsilon = f(x_k')(g(x_k') - g(x_k'')) + g(x_k'')(f(x_k') - f(x_k'')) + \varepsilon \leqslant$ $M^{(f)}((M_k)^g - m_k^{(g)}) + M^{(g)}(M_k^{(f)} - m_k^{(f)}) + \varepsilon \Rightarrow 0 \leqslant M_k^{(fg)} - m_k^{(fg)} \leqslant M^{(f)}((M_k)^g - m_k^{(g)}) + M^{(g)}(M_k^{(f)} - m_k^f) \Rightarrow$ $0 \leqslant S_T(fg) - s_T(fg) \leqslant M^{(f)}(S_T(g) - s_T(g)) + M^{(g)}(S_T(f) - s_T(f)) \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(fg) - s_T(fg)) = 0 \Rightarrow$ $f(x)g(x)$ интегрируема на $[a,b]$

$\square$

Лекция 5

14.02

3.3 Интегрируемость функции на внутреннем отрезке. Аддитивность определенного интеграла

Теорема 3.4. *$f(x)$ интегрируема на $[a,b] \Rightarrow \forall [c,d] \subset [a,b] f(x)$ интегрируема на $[a,b]$*

Доказательство. $f(x)$ интегрируема на $[a,b] \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f,[a,b]) - s_T(f,[a,b])) \Rightarrow$ т.е $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 :$ $\forall T, \delta_T < \delta \to 0 \leqslant S_T(f,[a,b]) - s_T(f,[a,b]) < \varepsilon$

Берем $\forall \tau -$ разбиение $[c,d]$. Дополним его до T(разбиение $[a,b]$). Считаем, что $a \leqslant c < d \leqslant b$;

$T|_{[c,d]} = \tau; \delta_T < \delta$

Рассмотрим $0 \leqslant S_T(f,[c,d]) - s_T(f,[c,d]) \leqslant S_T(f,[a,b]) - s_T(f,[a,b]) < \varepsilon,$ т.е $\lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f,[c,d]) - s_T(f,[c,d])) =$ $0 \Rightarrow f(x)$ интегрируема на $[c,d]$ □

Теорема 3.5. *$f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и интегрируема на $[b,c] \Rightarrow f(x)$ интегрируема на $[a,c]$, причем*
$$\int\limits_a^c f(x) = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx$$

Доказательство. $\left.\begin{aligned} \exists \int\limits_a^b f(x)dx = I_1, \\ \exists \int\limits_b^c f(x)dx = I_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ Пусть $a < b < c :$ $f(x)$ограничена на $[a,b]$ и ограничена на $[b,c] \Rightarrow$

$f(x)$ ограничена на $[a,c] \Rightarrow \exists m, M : m \leqslant f(x) \leqslant M \forall x \in [a,c]$

$\lim\limits_{\delta_{\tau_1} \to 0} S_{\tau_1}(f,[a,b]) = I_1, \quad \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : \forall \tau_1$(разбиение $[a,b]$)$, \delta_{\tau_1} < \delta_1 \Rightarrow |S_{\tau_1}(f,[a,b]) - I_1| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

$\lim\limits_{\delta_{\tau_2} \to 0} S_{\tau_2}(f,[b,c]) = I_2 \quad \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0$(разбиение $[b,c]$)$, \delta_{\tau_2} < \delta_2 \Rightarrow |S_{\tau_2}(f,[b,c]) - I_2| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

$\exists \delta_3 = \dfrac{\varepsilon}{3(M-m)+1} > 0$. Берем $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3) > 0$. Берем $\forall T$(разбиение $[a,c]$) $= \{a = x_0 < x_1 < \dots <$ $x_n = c\} \Rightarrow \exists k : b \in [x_{k-1}, x_k] \quad M_k = \sup f(x), \quad M'_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant b}{=} \sup f(x), \quad M''_k \underset{b \leqslant x \leqslant x_k}{=} \sup f(x).$

Рассмотрим $T_1 = T \cup b \Rightarrow \delta_{T_1} \leqslant \delta_T < \delta$

$|S_T(f,[a,c]) - (I_1 + I_2)| = |S_T(f,[a,c]) - S_{T_1}(f,[a,c]) + S_{T_1}(f,[a,c]) - (I_1+I_2)| \leqslant |S_T(f,[a,c]) - S_{T_1}(f,[a,c])| +$ $|S_{T_1}(f,[a,c]) - I_1 - I_2| = \underbrace{|M_k(x_k - x_{k-1}) - M'_k(b - x_{k-1}) - M''_k(x_k - b)|}_{(M_k - M''_k)(x_k - b) + (M_k - M'_k)(b - x_{k-1}) \leqslant (M-m)(x_k - x_{k-1}) \leqslant (M-m)\delta_T < \delta(M-m) \leqslant \delta_3(M-m)} + |S_{\tau_1}(f,[a,b]) +$ $S_{\tau_2}(f,[b,c]) - I_1 - I_2| \leqslant$

$\leqslant (M-m)\delta_3 + |S_{\tau_1}(f,[a,b] - I_1)| + |S_{\tau_2}(f,[b,c]) - I_2| < \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f,[a,c]) - I_1 - I_2) = 0 =$ $\lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f,[a,c])) = I_1 + I_2 \Rightarrow$

Аналогично (самостоятельно) $\lim\limits_{\delta_T \to 0} s_T(f,[a,c]) = I_1 + I_2$

$\Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f,[a,c]) - s_T(f,[a,c])) = 0 \underset{\text{кр. инт.}}{\Rightarrow} f(x)$ интегрируема на $[a,c]$, причем (т.к $\lim\limits_{\delta_T \to 0} S_T(f,[a,c]) =$ $I_1 + I_2) \Rightarrow \displaystyle\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx$

Теперь пусть $a < c < b \underset{\text{Т3.4}}{\Rightarrow} f(x)$ интегрируема на $[a,c] \Rightarrow$ работает только что рассмотренный случай $\Rightarrow$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx \Rightarrow \int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx$$ □

3.4 Монотонность определенного интеграла. Строгая монотонность определенного интеграла от непрерывной функции

Теорема 3.6. $\int\limits_a^b 1dx = b - a$

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 3.7. *Пусть* $a \leqslant b, f(x)$ *интегрируема на* $[a,b], f(x) \geqslant 0$ *на* $[a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \geqslant 0$

Доказательство. 1) $a = b$ - очевидно.

2) $a < b \Rightarrow \exists \int\limits_a^b f(x)dx = I \geqslant S_T(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} \underbrace{m_k}_{\geqslant 0} \underbrace{\Delta x_k}_{\geqslant 0} \geqslant 0$ □

Теорема 3.8. $a \leqslant b; f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на* $[a,b]$, *причем* $f(x) \geqslant g(x) x \in [a,b] \Rightarrow$
$\Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \geqslant \int\limits_a^b g(x)dx$

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 3.9. $f(x) \in C[a,b](a < b), f(x) \geqslant 0 \forall x \in [a,b]$, *причем* $f(x) \not\equiv 0$ *на* $[a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx > 0$

Доказательство. $\exists \xi \in (a,b) : f(\xi) = A > 0 \underset{\text{по т. о сохр. знака}}{\Rightarrow} \exists \delta > 0 : \forall x \in (\xi - \delta, \xi + \delta) f(x) > \frac{A}{2}$

Рассмотрим $\int\limits_a^b f(x) = \underbrace{\int\limits_a^{\xi-\delta} f(x)dx}_{\geqslant 0} + \int\limits_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} f(x)dx + \underbrace{\int\limits_{\xi+\delta}^{b} f(x)dx}_{\geqslant 0} \geqslant 0 + \frac{A}{2} 2\delta + 0 = A + \delta \geqslant 0$ □

Теорема 3.10. $f(x), g(x) \in C[a,b](a < b); f(x) \geqslant g(x) \forall x \in [a,b]$, *причем* $f(x) \not\equiv g(x)$ *на* $[a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx >$
$\int\limits_a^b g(x)dx$

Доказательство. Самостоятельно. □

3.5 Интегрируемость модуля интегрируемых по Риману функций. Связь интеграла от функции с интегралом от ее модуля

Теорема 3.11. *$f(x)$ интегрируема на$[a,b] \Rightarrow |f(x)|$ тоже интегрируема на $[a,b]$, причем*
$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \left|\int\limits_a^b |f(x)|dx\right|.$$

Доказательство. 1) Если $a = b \Rightarrow 0 \leqslant 0 \Rightarrow$ доказывать нечего.

2) Если $a < b$, то : $f(x)$ интегрируема на $[a,b] \underset{\text{кр. инт.}}{\Rightarrow} \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(f) - s_T(f)) = 0$, т.е $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leqslant S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$

Берем $\forall T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}, \delta_T < \delta$

$$M_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \sup f(x) \qquad M'_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \sup |f(x|)$$
$$m_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \inf f(x) \qquad m'_k \underset{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k}{=} \inf |f(x)|$$

а) $0 \leqslant m_k \leqslant M_k \Rightarrow f(x) \geqslant 0$ на $[x_{k-1}, x_k \Rightarrow |f(x)| = f(x)$ на $[x_{k-1}, x_k] \Rightarrow m'_k = m_k, M'_k = M_k \Rightarrow M'_k - m'_k = M_k - m_k$

б) $m_k \leqslant M_k \leqslant 0 \Rightarrow f(x) \leqslant 0$ на $[x_{k-1}, x_k] \Rightarrow |f(x)| = -f(x)$ на $[x_{k-1}, x_k], M'_k = -m_k, m'_k = -M_k \Rightarrow M'_k - m'_k = M_k - m_k$

в) $m_k \leqslant 0 \leqslant M_k \Rightarrow M'_k = \max(m_k, -m_k) \Rightarrow M'_k - m'_K \leqslant M'_k \leqslant M_k - m_k \Rightarrow$ в любом случае $0 \leqslant M'_k - m'_k \leqslant M_k - m_k|\,\Delta x_k$ и $\sum\limits_{k=1}^n \Rightarrow 0 \leqslant S_T(|f|) - s_T(|f|) \leqslant S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T(|f|) - s_T(|f|)) = 0 \underset{\text{кр. инт}}{\Rightarrow} |f(x)|$ интегрируема на $[a,b]$.

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)| \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow -\int\limits_a^b |f(x)|dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx$$

Если $a > b \Rightarrow \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \left|\int\limits_a^b |f(x)|dx\right|$ □

3.6 Неравенство Коши-Буняковского для определенных интегралов. Теорема о среднем и ее обобщение

Теорема 3.12 (Неравенство Коши-Буняковского)**.** *$f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a,b] \Rightarrow$*
$$\Rightarrow \left[\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \leqslant \left[\int\limits_a^b f^2(x)dx\right]\left[\int\limits_a^b g^2(x)dx\right]$$

Доказательство. Пусть $a < b$.

Рассмотрим $\varphi(\lambda) = \int\limits_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2 = \lambda^2 \underbrace{\int\limits_a^b f^2(x)dx}_{=A} + 2\lambda \underbrace{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}_{=B} + \underbrace{\int\limits_a^b g^2(x)dx}_{=C} = A\lambda^2 + 2B\lambda + C$

Если $A = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow B^2 \leqslant AC$

Если $A \geqslant 0 \Rightarrow B^2 - AC \leqslant 0,$ т.е $B^2 \leqslant AC \Rightarrow \left[\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\right] \leqslant \left(\int\limits_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int\limits_a^b g^2(x)dx\right)$

Если $a = b \Rightarrow$ верно

Если $a > b \Rightarrow$ верно □

Теорема 3.13 (1-ая теорема о среднем). *$f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a,b]; m \underset{[a,b]}{=} \inf f(x), M \underset{[a,b]}{=} \sup f(x),$ $g(x) \geqslant 0\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \exists \mu \in [m,M]: \quad \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx$*

Доказательство. $a < b$. Пусть $g(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$.

$m \leqslant f(x) \leqslant M \quad \forall x \in [a,b]$

$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x) \Rightarrow m\int\limits_a^b g(x)dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int\limits_a^b g(x)dx$

1) Если $\int\limits_a^b g(x)dx = 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0 \Rightarrow$ утверждение верно $\forall \mu \in [m,M]$

2) Если $\int\limits_a^b g(x)dx > 0 \Rightarrow m \leqslant \underbrace{\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}}_{\mu} \leqslant M \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int\limits_a^b g(x)dx$

Если $g(x) \leqslant 0$ на $[a,b]$, то рассмотрим $\tilde{g}(x) = -g(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$.

Если $a \geqslant b \Rightarrow$ самостоятельно. □

Следствие 1. *Если в условиях предыдущей теоремы $f(x) \in C[a,b] \Rightarrow \exists \xi \in [a,b]: \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)dx$*

Доказательство. По теореме Вейрештрасса: $\exists \alpha, \beta \in [a,b] : f(\alpha) = m \quad f(\beta) = M \qquad \mu \in [m,M] \underset{\text{т.Коши}}{\Rightarrow}$ $\exists \mu \in [\alpha,\beta] \subset [a,b] : f(\xi) = \mu$ □

Следствие 2. *Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b], m \underset{a\leqslant x\leqslant b}{=} \inf f(x),\ M \underset{a\leqslant x\leqslant b}{=} \sup f(x) \Rightarrow \exists \mu \in [m,M]:$ $\int\limits_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$. А если еще $f(x) \in C[a,b] \Rightarrow \exists \xi \in [a,b] : \int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$*

Доказательство. Самостоятельно. □

Глава 4

Основные правила интегрирования.

Лекция 6

21.02

4.1 Интеграл с переменным верхним (нижним) пределом, его непрерывность и дифференцируемость. Существование первообразной у непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница.

Определение. Пусть $f(x)-$ интегрируема на $[a,b]$. Рассмотрим функции $F(x)$ и $G(x)$, определенные на отрезке $[a,b]$:

$$F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt - \text{ интеграл с переменный верхним пределом}$$

$$G(x)=\int\limits_x^b f(t)dt - \text{ интеграл с переменным нижним пределом}$$

$F(x)+G(x)=\int\limits_a^b f(t)dt \equiv const$ на $[a,b]$

Теорема 4.1. *$f(x)$ интегрируема на $[a,b] \Rightarrow F(x)\in C[a,b]$*

Доказательство. По Т1 $\exists M>0 : |f(x)|\leqslant M\ \forall x\in[a,b]$. Берем $\forall x_0\in[a,b]$ и $\Delta x : x_0+\Delta x\in[a,b]$. Тогда рассмотрим $|F(x_0+\Delta x)-F(x_0)| = \left|\int\limits_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^{x_0} f(t)dt\right| = \left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt\right| \leqslant \left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t)|dt\right| \leqslant M|\Delta x| \underset{\Delta x\to 0}{\to} 0 \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}(F(x_0+\Delta x)-F(x_0))=0,$ т.е $\lim\limits_{\Delta x\to 0} F(x_0+\Delta x)=F(x_0) \Rightarrow F(x)$ непрерывна при $x=x_0$.
Но x_0 - любое из $[a,b]\Rightarrow F(x)\in C[a,b]$ □

Теорема 4.2. *$f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, а также $f(x)$ непрерывна при $x=x_0 \Rightarrow \exists F'(x_0)=f(x_0)$ (на концах односторонние производные)*

Доказательство. $f(t)$ непрерывна при $t=x_0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0\exists\delta>0 : \forall t\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap[a,b] \Rightarrow |f(t)-f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Берем $\Delta x : \Delta x\in(-\delta,\delta)\backslash\{0\}, x_0+\Delta x\in[a,b]$. Рассмотрим $\left|\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| =$

$$= \left| \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)dt \right| = \left| \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} \frac{f(t)-f(x_0)}{\Delta x} dt \right| \leqslant \left| \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} \frac{|f(t)|-|f(x_0)|}{|\Delta x|} dt \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{|\Delta x|} |\Delta x| =$$

$\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, т.е $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} = F(x_0)$, т.е $\exists F'(x_0) = f(x_0)$ □

Теорема 4.3. *$f(x) \in C[a,b] \Rightarrow \exists$ первообразная к $f(x)$ на $[a,b]$*

Доказательство. $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt \Rightarrow \forall x \in [a,b] \exists F'(x) = f(x)$, т.е $F(x)-$ первообразная к $f(x)$ на $[a,b]$ □

Теорема 4.4 (Основная теорема интегрального исчисления)**.** *$f(x) \in C[a,b], \Phi(x)-$ первообразная к $f(x)$ на $[a,b] \Rightarrow$ $\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$ (Формула Ньютона-Лейбница)*

Доказательство. $\left.\begin{array}{l} \Phi(x) - \text{ первообразная к } f(x) \text{ на } [a,b]. \\ F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt - \text{ тоже первообразная на } [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \Phi'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b] \\ F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow F(x) =$ $\Phi(x) + C$, т.е $\int\limits_a^x f(t)dt = \Phi(x) + C$

при $x = a \Rightarrow C = -\Phi(a) \Rightarrow \int\limits_a^x f(t)dt = \Phi(x) - \Phi(a)$. При $x = b \Rightarrow \int\limits_a^x f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a)$ □

Для $G(x)$ справедливы теоремы аналогичные Т4.1 Т4.2 Т4.3

4.2 Вычисление определенных интегралов способами замены переменных и интегрирования по частям.

Теорема 4.5 (Замена переменных)**.** *$f(x) \in C[a,b]$; $\varphi(t) : \varphi'(t) \in C[\alpha,\beta]$, $\begin{array}{l} \varphi(\alpha) = a \\ \varphi(b) = b \end{array}$ $[a,b]-$ множество значений $\varphi(t)$ на $[a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$*

Доказательство. По Т3.16 $\Rightarrow \exists \Phi(x) -$ первообразная к $f(x)$ на $[a,b]$, причем $\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Рассмотрим сложную функцию $\Phi(\varphi(t)) -$ дифференцируема на $[a,b]$ (по т. о дифф сложной функции) $\frac{d}{dt}(\Phi(\varphi(t))) = \Phi'_x(x)\Big|_{x=\varphi(t)} * \varphi'_t(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \forall t \in [a,b] \Rightarrow \Phi(\varphi(t))-$ первообразная к $\underbrace{f(\varphi(t))\varphi'(t)}_{\in C[a,b]}$ на $[a,b] \Rightarrow$

$\int\limits_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(\varphi(t))\Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int\limits_a^b f(x)dx$ □

Теорема 4.6. *$u(x), v(x) : u'(x), v'(x) \in C[a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = (u(x)v(x))\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx$*

Доказательство. $\dfrac{d}{dx}(u(x)v(x)) = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow u(x)v(x)-$ первообразная к $\underbrace{u'(x)v(x)+u(x)v'(x)}_{\in C[a,b]}$ на $[a,b] \underset{\text{линейность}}{\Rightarrow} \int\limits_a^b u(x)v'(x)dx + \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx = \int\limits_a^b (u(x)v'(x)+u'(x)v(x))dx = [u(x)v(x)]\Big|_a^b$ □

Пусть $f(x)\ :\ f^{(n+1)}(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $x = x_0$, тогда $\forall x$ из этой окрестности имеет место: $f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0)) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x_0) - \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)d(x-t) = f(x_0) - (x-t)f'(t)\Big|_{t=x_0}^{t=x} + \int\limits_{x_0}^{x}(x-t)f''(t)dt = f(x_0) + \dfrac{x-x_0}{1!}f'(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x}(x-t)f''(t)dt = f(x_0) + \dfrac{x-x_0}{1!}(x-x_0) - \int\limits_{x_0}^{x} f''(t)d(\dfrac{(x-t)^2}{2}) = f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) - \dfrac{(x-t)^2}{2!}f''(t)\Big|_{t=x_0}^{t=x} + \dfrac{1}{2!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^2 f'''(t)dt = f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1}(x-x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dfrac{1}{2!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^2 f'''(t)dt = \dots = f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dfrac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$

Итого:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x,f),$$
$$\text{где } r_n(x,f) = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

- формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$r_n(x,f) = \dfrac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$. На $[x_0,x]$ $(x-t)^n$ не меняет знак, а $f^{(n+1)}(t) \in C[x_0,x] \Rightarrow \dfrac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = \dfrac{f^{n+1}(\xi)}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n dt = -\dfrac{f^{n+1}(\xi)}{n!}\dfrac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\Big|_{t=x_0}^{t=x} = \dfrac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}-$ остаточный член в форме Лагранжа (получено при больших ограничениях, чем раньше)

Глава 5

Геометрические приложения определенного интеграла.

Лекция 6

21.02

5.1 Спрямляемость гладкой кривой. Выражение длины дуги гладкой кривой в виде определенного интеграла. Формулы длины дуги плоской кривой, заданной в декартовых либо полярных координатах.

Определение. Пусть $\varphi(t), \psi(t), \chi(t) \in C[a, b]$. Рассмотрим множество точек в пространстве, которое обозначим $L = \{M(x, y, z), x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), t \in [\alpha, \beta]\}$ - такое множество точек нзывается простой кривой, если $\forall t_1, t_2 \in [\alpha, \beta] : t_1 \neq t_2 \Rightarrow M_1(x_1, y_1, z_1) \neq M_2(x_2, y_2, z_2)$, где $\begin{cases} x_i = \varphi(t_i) \\ y_i = \psi(t_i) \\ z_i = \chi(t_i) \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots$

Если при этом $z = \chi(t) \equiv 0$ на $[a, b]$, то плоская простая кривая.

Определение. Говорят, что система уравнений $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} \quad t \in \{t\} -$ промежуток, задает параметрически кривую L, если промежуток $\{t\}$ можно разбить на конечный или бесконечный (счетный) набор отрезков $[\alpha_i, \beta_i]$, покрывающих данный промежуток $\{t\}$ и пересекающихся не более чем концами, так, что на каждом отрезке $[\alpha_i, \beta_i]$ L - простая кривая.

Везде далее, если не оговорено противного кривая - параметрически заданная кривая

Определение. Кривая $L : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}$ $t \in [\alpha, \beta]$ называется гладкой, если $\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t) \in C[a, b]$, а еще $(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2 > 0 \forall t \in [\alpha, \beta]$

$L : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}$ $t \in [\alpha, \beta]$ $T = \{\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = \beta\}$ $M_k(x, y, z) : \begin{cases} x = \varphi(t_k) \\ y = \psi(t_k) \\ z = \chi(t_k) \end{cases}$

Рассмотрим $l_T = \sum\limits_{k=1}^{n} |\overrightarrow{M_{k-1}M_k}| = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{[\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})]^2 + [\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})]^2 + [\chi_k - \chi_{k-1}]^2}$ – длина ломаной, вписанной в L. $T_1 = T \cup \tilde{t} \Rightarrow l_{T_1} \geqslant l_T$ (по неравенству треугольника). Тогда: $T_1 \succ T \to l_{T_1} \geqslant l_T$

Определение. Кривая L называется спрямляемой, если $\{l_T\}$ - ограниченное сверху множество.

Определение. Если L - спрямляемая кривая, то число $l = l(L) = \sup\limits_T \{l_T\}$ называется длиной кривой L.

Теорема 5.1. $L : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}$ $t \in [\alpha, \beta]-$ *гладкая кривая* $\Rightarrow L$ *- спрямляемая, причем*

$$l(L) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}$$

tg: @moksimqa

Лекция 7

25.02

Доказательство. $\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t) \in C[\alpha,\beta] \Rightarrow \exists M>0 : |\varphi'(t)| \leqslant M, |\psi'(t)| \leqslant M, |\chi'(t)| \leqslant M \forall t \in [\alpha,\beta]$.

Берем $\forall T = \{\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = \beta\}$.

По теореме Лагранжа $\exists \alpha_k, \beta_k, \gamma_k \in (t_{k-1}, t_k)$: $\begin{array}{l} \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \varphi'(\alpha_k)\Delta t_k \\ \psi(t_k) - \psi_{t_{k-1}} = \psi'(\beta_k)\Delta t_k \quad k = \overline{1,n} \Rightarrow \\ \chi(t_k) - \chi(t_{k-1}) = \chi'(\gamma_k)\Delta t_k \end{array}$

$$\Rightarrow l_t = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_{k-}) - \psi(t_{k-1}))^2 + (\chi(t_k) - \chi(t_{k-1}))^2} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sqrt{(\varphi'(\alpha_k))^2 + (\psi'(\beta_k))^2 + (\chi(\gamma_k))^2}}_{\leqslant 3M^2} \leqslant$$

$\leqslant M\sqrt{3}\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta t_k = M\sqrt{3}(\beta - \alpha) = \{l_T\}-$ ограничена сверху $\Rightarrow L-$ спрямляемая.

Введем $f(t) = \sqrt{(\varphi(t))^2 + (\psi(t))^2 + (\chi(t))^2} \in C[\alpha,\beta] \Rightarrow f(t)$ интегрируема на $[\alpha,\beta] \Rightarrow \exists \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = I$, т.е

$\underline{\forall \varepsilon > 0}\exists \delta_1 > 0 : \forall T, \delta_T < \delta_1, \forall \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n \Rightarrow |\sigma_T(f,\Xi) - I| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t) \in C[\alpha,\beta] \underset{\text{т. Кантора}}{\Rightarrow} \varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t)-$ равномерно непрерывны на $[\alpha,\beta] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \delta_2 > 0 : \forall t', t'' \in [\alpha,\beta] : |t' - t''| < \delta_2 \Rightarrow |\phi'(t') - \varphi'(t'')| < \dfrac{\varepsilon}{4(\beta-\alpha)}$; $|\psi'(t') - \psi'(t'')| < \dfrac{\varepsilon}{4(\beta-\alpha)}$; $|\chi'(t') - \chi'(t'')| < \dfrac{\varepsilon}{4(\beta-\alpha)}$. Берем $\delta = \max(\delta_1, \delta_2) > 0, \quad \forall T, \delta_T < \delta, \forall \Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$,

рассмотрим $|l_T - I| = |l_T - \sigma_T(f,\Xi) + \sigma_T(f,\Xi) - I| \leqslant |l_T - \sigma_T(f,\Xi)| + \underbrace{|\sigma_T(f,\Xi) - I|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < |l_T - \sigma_T(f,\Xi)| + \dfrac{\varepsilon}{2} =$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{(\varphi'(\alpha_k))^2 + (\psi'(\beta_k))^2 + (\chi'(\gamma_k))^2}\Delta t_k - \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\xi_k))^2 + (\chi'(\xi_k))^2}\Delta t_k\right]\right| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left|\sqrt{(\varphi'(\alpha_k))^2 + (\psi'(\beta_k))^2 + (\chi'(\gamma_k))^2} - \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\xi_k))^2 + (\chi'(\xi_k))^2}\right|\Delta t_k \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\sqrt{(\varphi'(\alpha_k) - \varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\beta_k) - \psi'(\xi_k))^2 + (\chi'(\gamma_k) - \chi'(\xi_k))^2}\Delta t_k + 2 < \sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{3\varepsilon^2}{16(\beta-\alpha)^2}}\Delta t_k + \frac{\varepsilon}{2} =$$

$$= \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{4(\beta-\alpha)}(\beta-\alpha) + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{4} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \lim_{\delta_T \to 0} l_T = I$$

Осталось докзаать, что $L_T \leqslant I \ \forall T$. От противного, предположим, что $\exists T_0 : l_{T_0} > I$. Известно, что $\lim\limits_{\delta_T \to 0} l_T = I$, т.е $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow |l_T - I| < \varepsilon$.

Берем $\varepsilon = \dfrac{l_{T_0} - I}{2} > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow |l_T - I| < \dfrac{l_{T_0} - I}{2}$. Берем $T_1 \succ T_0 : \delta_{T_1} < \delta \Rightarrow \dfrac{l_{T_0} - I}{2} = \varepsilon > |l_{T_1} - I| = l_{T_1} - I \geqslant l_{T_0} - I = 2\varepsilon \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ предположение неверно $\Rightarrow l_T \leqslant I \ \forall T$

$\square$

5.1.1 Частные случаи гладких кривых:

$$1) y=f(x), x\in[a,b] \quad \begin{cases} x=t \\ y=f(t) \\ z\equiv 0 \end{cases} \quad t\in[a,b]\Rightarrow l(L)=\int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(t))^2}dt=\int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

$2) r = r(\varphi), \varphi \in [\alpha,\beta]$, $\begin{cases} x=r(\varphi)\cos\varphi \\ y=r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$ $(x'_\varphi(\varphi))^2 + (y'_\varphi(\varphi))^2 = (r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi)^2 + (r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi)^2 = r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2 \Rightarrow l(L)=\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}$

5.2 Площадь плоской фигуры. Критерий квадратируемости

Определение. Плоская фигура - любое ограниченное множество на плоскости

Определение. P - плоская фигура. Число $\mu(P)-$ площадь, если:

$1)\mu(P)\geqslant 0$

2)Если фигуры P_1P_2 равны в геометрическом смысле $\Rightarrow \mu(P_1)=\mu(P_2)$

$3)P_1,P_2 : P_1\cap P_2=\varnothing \Longrightarrow \mu(P_1\cup P_2)=\mu(P_1)+\mu(P_2)$

4)Если $P-$ единичный квадрат $\Rightarrow \mu(P)=1$

Объединение, пересечение, вычитание многоугольников - тоже многоугольник.

$\varnothing-$ тоже многоугольник ($\mu(\varnothing)=0$). Если $P-$ многоугольник, то его площадь известна ($\tilde\mu(P)$ - обозначение площади)

P- плоская фигура $\Rightarrow Q,S : Q\subset P\subset S$

$\forall Q,S : Q\subset P\subset S \Rightarrow \tilde\mu(Q)\leqslant\tilde\mu(S)\Rightarrow\{\mu(Q)\}$ - ограничено сверху. $\{\mu(S)\}$ - ограничено снизу.

Определение. $P-$ плоская фигура. $\underline{\mu(P)}=\sup\limits_{Q\subset P}\tilde\mu(Q)$ - нижняя площадь. $\overline{\mu(P)}=\inf\limits_{S\supset P}\tilde\mu(S)$

$Q\subset P\subset S\Rightarrow\tilde\mu(Q)\leqslant\tilde\mu(S)\Rightarrow\underline{\mu}(p)\leqslant\tilde\mu(S)\Rightarrow\underline{\mu}(P)\leqslant\overline{\mu}(P)$

Определение. Плоская фигура P называется квадрируемой, если $\underline{\mu(P)}=\overline{\mu(P)}$. При этом $\mu(P)=\underline{\mu(P)}=\overline{\mu(P)}$

Теорема 5.2. *Введеная таким образом $\mu(P)$ - площадь т.е*

1) P - квадрируема фигура $\Rightarrow\mu(P)\geqslant 0$

2) P_1,P_2 - квадрируемые плоские фигуры, причем P_1 и P_2 равны в геометрическом смысле $\Rightarrow\mu(P_1)=\mu(P_2)$

3) P_1,P_2 - квадрируемые плоские фигуры, причем $P_1\cap P_2=\varnothing\Rightarrow P=P_1\cup P_2$ - тоже квадрируема, причем $\mu(P)=\mu(P_1)+\mu(P_2)$

4) Если P - единичный квадрат $\Rightarrow P$ - плоская квадрируемая фигура, причем $\mu(P)=1$

Доказательство. 1) $\exists\mu(P)=\underline{\mu(P)}=\sup\limits_{Q\subset P}\underbrace{\tilde\mu(P)}_{\geqslant 0}\geqslant 0$

$2)Q_1\subset P_1\subset S_1\Leftrightarrow Q_2\subset P_2\subset S_2$, причем Q_1 и Q_2 равны в геометрическом смысле, S_1 и S_2 равны в геометрическом смысле $\Rightarrow \begin{matrix} \tilde{\mu_1}(Q_1) = \tilde{\mu}(Q_2) \\ \tilde{\mu_1}(S_1) = \tilde{\mu}(S_2) \end{matrix} \Rightarrow \underline{\mu(P_1)} = \underline{\mu}(P_2),\ \overline{\mu}(P_1) = \overline{\mu}(P_2) \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$

3) P_1, P_2 - квадрируемые $\Rightarrow \exists \mu(P_1), \mu(P_2)$, причем $\begin{matrix} \mu(P_1) = \overline{\mu}(P_1) = \underline{\mu}(P_1) \\ \mu(P_2) = \overline{\mu}(P_2) = \underline{\mu}(P_2) \end{matrix} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists Q_1, Q_2, S_1, S_2 :$

$Q_1 \subset P_1 \subset S_1 : \tilde{\mu}(Q_1) > \mu(P_1) - \frac{\varepsilon}{2}$

$Q_2 \subset P_2 \subset S_2 : \tilde{\mu}(Q_2) > \tilde{P}_2 - \frac{\varepsilon}{2}$

$\tilde{\mu}(S_2) < \mu(P_2) + \frac{\varepsilon}{2}$

$\tilde{\mu} S_1 < \mu(P_1) + \frac{\varepsilon}{2}$

$Q_1 \subset P_1, Q_2 \subset P_2$, но $P_1 \cap P_2 = \varnothing \Rightarrow Q_1 \cap Q_2 = \varnothing \Rightarrow \mu(Q_1 \cup Q_2) = \mu(Q_1) + \mu(Q_2)$, причем $\begin{matrix} Q = Q_1 \cup Q_2 \\ S = S_1 \cup S_2 \end{matrix}$

Рассмотрим $\mu(Q) = \mu(Q_1) + \mu(Q_2) > \mu(P_1) + \mu(P_2) - \varepsilon$.

$\underline{\mu}(P) = \underset{Q \subset P}{\tilde{\mu}(Q)} > \sup\limits_{\substack{Q: Q_1 \cup Q_2 \\ Q_1 \subset P_1 \\ Q_2 \subset P_2}} \tilde{\mu}(Q) \geqslant \tilde{\mu}(Q_1) + \tilde{\mu}(Q_2) > \mu(P_1) + \mu(P_2) - \varepsilon$

Получили, что $\forall \varepsilon > 0\ \underline{(\mu)}(P) > \mu(P_1) + \mu(P_2) - \varepsilon \Rightarrow \underline{\mu}(P) \geqslant \mu(P_1) + \mu(P_2)$

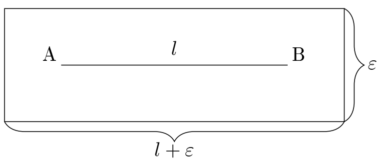
Аналогично: $\tilde{\mu}(S) \leqslant \tilde{\mu}(S_1) + \tilde{\mu}(S_2)$. $\quad \overline{\mu}(P) = \inf\limits_{S \supset P} \mu(S) \leqslant \inf\limits_{\substack{S: S_1 \cup S_2 \\ S_1 \supset P_1 \\ S_2 \supset P_2}} \mu(S) \leqslant \tilde{\mu}(S_1) + \tilde{\mu}(S_2) < \mu(P_1) + \mu(P_2) + \varepsilon$.

Получили, что $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \overline{\mu}(P) < \mu(P_1) + \mu(P_2) + \varepsilon \Rightarrow \overline{\mu}(P) \leqslant \mu(P_1) + \mu(P_2) \Rightarrow \mu(P_1) + \mu(P_2) \leqslant \underline{\mu}(P) \leqslant \overline{\mu}(P) \leqslant \mu(P_1) + \mu(P_2) \Rightarrow \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2) \Rightarrow P$ - квадрируема, причем $\mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$

4) $P-$ единичный квадрат. Берем $Q, S : Q = P = S$ $\left.\begin{matrix} \underline{\mu}(P) = \sup\limits_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q) \geqslant 1 \\ \overline{\mu}(P) = \inf\limits_{S \supset P} \tilde{\mu}(S) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1 \leqslant \underline{\mu}(P) \leqslant \overline{\mu}(P) \leqslant 1 \Rightarrow$

$\underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P) = 1 \Rightarrow$ единичный квадрат - плоская квадрируемая фигура, причем $\mu(P) = 1$ $\square$

Берем $\forall \varepsilon > 0$



$\varnothing \subset AB \subset S \qquad 0 \leqslant \overline{\mu}(AB) \leqslant \varepsilon(l + \varepsilon) \Rightarrow \overline{\mu}(AB) = 0; \quad 0 \leqslant \underline{\mu}(AB) \leqslant \overline{\mu}(AB) = 0 \Rightarrow \mu(AB) = 0$

tg: @moksimqa

Лекция 8

28.02

Теорема 5.3 (Критерий квадрируемости). *P - плоская фигура, тогда: $P-$ квадрируема $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists Q, S :$ $Q \subset P \subset S$, причем $0 \leqslant \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon$*

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть P - квадрируема $\Rightarrow \exists\mu(P) = \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P) \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\exists Q, S : Q \subset P \subset S$, причем

$$\left.\begin{matrix}\tilde{\mu}(P) > \underline{(}\mu)(P) - \frac{\varepsilon}{2} \\ \tilde{(}\mu)(S) < \bar{(}\mu)(P) + \frac{\varepsilon}{2}\end{matrix}\right. \Rightarrow 0 \leqslant \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < (\mu(P) + \frac{\varepsilon}{2}) - (\mu(P) - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$$

$\Leftarrow$ Пусть $\forall\varepsilon > 0\exists Q, S : Q \subset P \subset S$, причем $0 \leqslant \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon$, но $\tilde{\mu}(Q) \leqslant \underline{(}\mu)(P) \leqslant \overline{\mu}(P) \leqslant \tilde{\mu}(S) \Rightarrow 0 \leqslant$ $\leqslant \overline{\mu}(P) - \underline{\mu}(P) < \varepsilon \Rightarrow \forall\varepsilon >)0 \leqslant \overline{\mu}(P) - \underline{\mu}(P) < \varepsilon \Rightarrow \overline{\mu}(P) - \underline{\mu}(P) = 0 \Rightarrow \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$, т.е P - квадрируема

□

5.3 Квадрируемость криволинейной трапеции. Выражение площади криволинейной трапеции в виде определенного интеграла. Формула площади криволинейного сектора (без доказательства)

Определение. Пусть $f(x) \in C[a, b], f(x) \geqslant 0\ \forall x \in [a, b]$. Плоская фигура $P = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ называется криволинейной трапецией.

Теорема 5.4 (Критерий квадрируемости). *$f(x) \in C[a, b], f(x) \geqslant 0\ \forall x \in [a, b] \Rightarrow$ криволинейная трапеция $P = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ является квадрируемой фигурой, причем $\mu(P) = \int\limits_a^b f(x)dx$*

Доказательство. $f(x) \in C[a, b] \Rightarrow \exists \int\limits_a^b f(x)dx = I \underset{\text{кр.инт}}{\Rightarrow} \forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \Rightarrow 0 \leqslant S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$, т.е $\exists Q, S-$ ступенчатые фигуры (являются многоугольниками): $Q \subset P \subset S$, причем $0 \leqslant \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) <$

$$\varepsilon \underset{\text{T5.4}}{\Rightarrow} P-\text{квадрируемая фигура} \Rightarrow \exists\mu(P) : \left.\begin{matrix}\mu(P) = \underline{\mu}(P) = \sup\tilde{\mu}(Q) \geqslant \sup\limits_{\substack{Q:Q\subset P \\ Q-\text{ступенчатая} \\ \text{фигура}}} \tilde{\mu}(Q) = \sup\limits_T s_T(f) = \underline{I} = I \\ \mu(P) = \overline{\mu}(P) = \inf\limits_{S\supset P}\tilde{\mu}(S) \leqslant \inf\limits_{\substack{S:S\supset P \\ S-\text{ступенчатая} \\ \text{фигура}}} \tilde{\mu}(S) = \inf\limits_T S_T(f) = \overline{I} = I\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$I \leqslant \mu(P) \leqslant I \Rightarrow \mu(P) = I$ □

Замечание. Если $f(x) \in C[a, b], f(x) \leqslant 0$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = -\mu(P)$

Если $f(x) \in C[a, b]$, причем меняет знак на $[a, b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx-$ алгебраическая разность площадей.

Определение. $r, \varphi-$ полярные координаты. Пусть $r(\varphi) \in C[\alpha, \beta]$. Плоскя фигура $P = \{(r, \varphi) : \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta, 0 \leqslant r \leqslant r(\varphi)\}$

Теорема 5.5. *$r, \varphi-$ полярные координаты $r(\varphi) \in C[\alpha, \beta] \Rightarrow$ криволинейный сектор $P = \{(r, \varphi) : \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta, 0 \leqslant r \leqslant r(\varphi)\}-$ квадрируемая фигура, причем $\mu(P) = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$*

Глава 6

Собственные и несобственные интегралы.

Лекция 8

28.02

6.1 Несобственный интеграл первого рода, их сходимость и расходимость. Независимость сходимости (расходимости) несобственного интеграла первого рода от значения его постоянного (неособенного) предела

Определение. Пусть $\forall c \geqslant a$ $f(x)$ интегрируема на $[a, c]$. Выражение $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется несобственным интегралом I рода от $f(x)$ на $[a, +\infty)$. Если $\exists \lim\limits_{c\to+\infty} \int\limits_a^c f(x)dx = A$, то число A называется величиной этого интеграла. Обозначение: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = A$

Определение. Если $\exists \lim\limits_{c\to+\infty} \int\limits_a^c f(x)dx$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящися, иначе - расходящимся.

Теорема 6.1. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится (расходится)* $\Rightarrow \forall a' \geqslant a$ $\int\limits_{a'}^{+\infty} f(x)dx$ *тоже сходится (расходится).*

Доказательство. $\forall c \geqslant a, \forall a' \geqslant a$ $\exists \int\limits_a^c f(x)dx = \underbrace{\int\limits_a^{a'} f(x)dx}_{\substack{\text{собственный интеграл} \\ \text{(число)}}} + \int\limits_{a'}^c f(x)dx \underset{c\to+\infty}{\Rightarrow} \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_{a'}^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно. А их величины (в случае сходимости) отличаются на $\int\limits_a^{a'} f(x)dx$, (т.е на константу)

$\square$

Определение. Пусть $\forall c \leqslant a$ $f(x)$ интегрируема на $[c,a]$. Выражение $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ называется несобственным интегралом I рода от $f(x)$ на $(-\infty,a]$. Если $\exists \lim\limits_{c\to-\infty}\int\limits_{c}^{a} f(x)dx = A$, то число A называется величиной этого интеграла. Обозначение: $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = A$

Определение. Если $\exists \lim\limits_{c\to-\infty}\int\limits_{c}^{a} f(x)dx$, то $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ называется сходящимся, иначе - расходящимся.

Теорема 6.2. $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ *сходится (расходится)* $\Rightarrow \forall a' \leqslant a$ $\int\limits_{-\infty}^{a'} f(x)dx$ *тоже сходится (расходится)*

Доказательство. Самостоятельно. $\square$

Определение. Пусть $\forall a,b$ $f(x)$ - интегрируема на $[a,b]$. Выражение $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется несобственным интегралом I рода от $f(x)$ на $(-\infty,+\infty)$. Если $\exists c:$ $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ и $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ сходятся, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся, а число $A = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ называется величиной $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Обозначение: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = A$. Если такого c не существует, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется расходящимся.

Теорема 6.3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *сходится (расходится)* $\Rightarrow \forall c'$ $\int\limits_{-\infty}^{c'} f(x)dx$ *и* $\int\limits_{c'}^{+\infty} f(x)dx$ *являются сходящимися, при этом* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c'} f(x)dx + \int\limits_{c'}^{+\infty} f(x)dx$

Доказательство. $\exists c:$ $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx$ и $\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$ сходятся $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \exists \lim\limits_{a\to+\infty}\int\limits_{c}^{a} f(x)dx \\ \exists \lim\limits_{b\to-\infty}\int\limits_{b}^{c} f(x)dx \end{array}\right| \begin{array}{l} \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{a\to+\infty}\int\limits_{c}^{a} f(x)dx \\ \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx = \lim\limits_{b\to-\infty}\int\limits_{b}^{c} f(x)dx \end{array}\Bigg| \overset{\text{T6.1}}{\underset{\text{T6.2}}{\Rightarrow}}$$

$$\forall c' \quad \left.\begin{array}{l} \int\limits_{c'}^{+\infty} f(x)dx \text{ сходится} \\ \int\limits_{-\infty}^{c'} f(x)dx \text{ сходится} \end{array}\right| \begin{array}{l} \int\limits_{c'}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{a\to+\infty}\int\limits_{c'}^{a} f(x)dx - \text{ число} \\ \int\limits_{-\infty}^{c'} f(x)dx = \lim\limits_{b\to-\infty}\int\limits_{b}^{c'} f(x)dx - \text{ число} \end{array}$$

Рассмотрим $\int\limits_{c'}^{+\infty} f(x)dx + \int\limits_{-\infty}^{c'} f(x)dx =$

$$= \lim\limits_{a\to+\infty}\int\limits_{c'}^{a} f(x)dx + \lim\limits_{b\to-\infty}\int\limits_{b}^{c'} f(x)dx = \lim\limits_{a\to+\infty}\left[\int\limits_{c'}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{a} f(x)dx\right] + \lim\limits_{b\to-\infty}\left[\int\limits_{b}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{c'} f(x)dx\right] =$$

$$\int\limits_{c'}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{c'} f(x)dx + \lim\limits_{a\to+\infty}\int\limits_{c}^{a} f(x)dx + \lim\limits_{b\to-\infty} f(x)dx = \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx + \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

$\square$

Пример. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, $\quad f(x) = \frac{1}{x^p}$ непрерывна при $x \geqslant 1$ (даже при $x > 0$) $\Rightarrow$интегрируема на $[a, c] \forall c \geqslant 1$

$p > 1 \quad \int\limits_1^c \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_{x=1}^{x=c} = \frac{1}{x-p}\left(\frac{1}{c^{p-1}} - 1\right) \underset{c\to+\infty}{\to} \frac{1}{p-1} \Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$ (сходится)

$p < 1 \quad \int\limits_1^c \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{c^{p-1}} - 1\right) \underset{c\to+\infty}{\to} +\infty \Rightarrow \int\limits_1^c \frac{dx}{x^p} = +\infty$ (расходится)

$p = 1 \quad \int\limits_1^c \frac{dx}{x} = \ln(x)\Big|_{x=1}^{x=c} = \ln(c) \underset{c\to+\infty}{\to} +\infty \Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$ (расходится)

Итого: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ - сходится при $p > 1$. Расходится при $p \leqslant 1$. $\Rightarrow \forall a > 0 \int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ - сходится при $p > 1$. Расходится при $p \leqslant 1$

6.2 Несобственные интегралы второго рода, их сходимость и расходимость. Независимость сходимости (расходимости) несобственного интеграла второго рода от значения его постоянного (неособенного) предела

Определение. Пусть $\forall c \in [a, b) \Big[\forall c \in (a, b]\Big] f(x)$ интегрируема на $[a, c]$ $\Big[$на $[c, b]\Big]$. Выражение $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется несобственным интегралом второго рода с особой точкой $b-0$ $\Big[a+0\Big]$ от $f(x)$ на $[a, b)$ $\Big[$на $(a, b]\Big]$. Если $\exists \lim\limits_{c\to b-0} \int\limits_a^c f(x)dx = A \left[\exists \lim\limits_{c\to a+0} \int\limits_c^b f(x)dx = A\right]$, то число A называется его величиной. Обозначение: $\int\limits_a^b f(x)dx = A$. Интеграл, имеющий конечную величину называется сходящимся, в противном случае - расходящимся.

Теорема 6.4. *$\int\limits_a^b f(x)dx$ с особой точкой $b-0$ сходится (расходится) $\Rightarrow \forall c \in [a, b)$ $\int\limits_c^b f(x)dx$ с особой точкой $b-0$ тоже сходится (расходится).*

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 6.5. *$\int\limits_a^b f(x)dx$ с особой точкой $a+0$ сходится $\Rightarrow \forall c \in (a, b]$ $\int\limits_a^c f(x)dx$ с особой точкой $a+0$ тоже сходится (расходится).*

Доказательство. Самостоятельно. □

Самостоятельно. Ввести понятие $\int\limits_a^b f(x)dx$ с двумя особыми точками $b-0$ и $a+0$. Дать определение сходимости (расходимости) такого интеграла. Доказать, что если такой интеграл сходится, то его величина не зависит от выбора промежуточной точки $c \in (a, b)$

tg: @moksimqa

Лекция 9

07.03

Теорема 6.6. *Собственный* $\int\limits_a^b f(x)dx$, *рассмотрим его как несобственный с особой точкой* $b-0$ *(с особой* $a+0$*), сходится, причем значения совпадают.*

Доказательство. $f(x)$ интегрируема на $\Rightarrow$ ограничена $\Rightarrow \exists M>0 : \forall x \in [a,b]\ |f(x)| \leqslant M$

1) Особая точка $\boxed{b-0}$ $\quad \forall C \in [a,b)$ $\quad \left|\int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^c f(x)dx\right| = \left|\int\limits_c^b f(x)dx\right| \leqslant \left|\int\limits_c^b |f(x)|dx\right| = \int\limits_c^b |f(x)|dx \leqslant$

$\leqslant \int\limits_c^b Mdx = M(b-c) \underset{c\to b-0}{\to} 0 \Rightarrow \lim\limits_{c\to b-0}\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$

2) Особая точка $\boxed{a+0}$ - самостоятельно. ☐

Пример: $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$ $\qquad \frac{1}{x^p}$ – непрерывна при $x>0$

1) $\boxed{p>1}$ $\int\limits_c^1 \frac{dx}{x^p} = \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_{x=c}^{x=1} = \frac{1}{1-p}\left(1-\frac{1}{c^{p-1}}\right) \underset{c\to 0+0}{\to} +\infty \Rightarrow \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = +\infty$ - расходится

2) $\boxed{p<1}$ $\int\limits_c^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}\left(1-\frac{1}{c^{p-1}}\right) \underset{c\to 0+0}{\to} \frac{1}{1-p} \Rightarrow \int\limits_c^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}$ - сходится

3) $\boxed{p=1}$ $\int\limits_c^1 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_{x=c}^{x=1} = \ln 1 - \ln c = -\ln c \underset{c\to 0+0}{\to} +\infty \Rightarrow \int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty$ - расходится

Итого: $\int\limits_0^a \frac{dx}{x^p}$ - сходится при $p<1$, расходится при $p \geqslant 1 \underset{\text{Т6.6}}{\Rightarrow} \forall a>0 \int\limits_0^a \frac{dx}{x^p}$ - сходится при $p<1$, расходится при $p \geqslant 1$.

6.3 Несобственные интегралы с несколькими особыми точками.

В общем случае несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, где a - число или $-\infty$, b - число или $+\infty$, причем на промежутке (a,b) - лишь конечное количество точек, в которых $f(x)$ не является интегрируемой в собственном смысле, разбивается на сумму конечного количества слагаемых, каждое из которых - несобственный интеграл с единственной особенностью (один из пределов интегрирования). Его величина (если $\boxed{\text{все}}$ слагаемые сходятся) не зависит от выбора промежуточных точек.

Пример: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \int\limits_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^2-1} + \int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2-1} + \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2-1} + \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2-1} + \int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^2-1} + \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$

Рассмотрим $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2-1}$ $\quad \forall c \in (1;2]$ $\quad \int\limits_c^2 \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\Big|_{x=c}^{x=2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{c+1}{c-1}\right) \underset{c\to 1+0}{\to} +\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2-1} = +\infty$ - расходится $\Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$ - расходится.

6.4 Формула Ньютона-Лейбница для несобственных интегралов. Вычисление несобственных интегралов способами замены переменной и интегрирования по частям.

Теорема 6.7. *Пусть $f(x) \in C[a,b)$, где b - число или $+\infty$, $F(x)$ - первообразная к $f(x)$ на $[a,b) \Rightarrow$ из существования одного из пределов следует существования другого и равно:* $\int\limits_a^b f(x)dx = \underbrace{\lim\limits_{c \to b-0} F(c)}_{\text{обозн.}F(b-0)} - F(a)$ $\left(\text{т.е } \int\limits_a^b F(x)dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b-0} \right)$ *Т.е формула Ньютона-Лейбница справедлива и для сходящихся несобственных интегралов.*

Доказательство. $f(x) \in C[a,b) \Rightarrow \exists F(x)-$ первообразная к $f(x)$ на $[a,b)$. $\forall c \in [a,b)$ рассмотрим $\int\limits_a^c f(x)dx = F(c) - F(a)$, а теперь $c \to b-0$ $\square$

Случай где a - число или $-\infty$, b - число или $+\infty$ рассматривается аналогично.

$$\text{Примеры: } \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{x=1}^{+\infty} = 1, \qquad \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_{x=0}^{x=1} = 2$$

Теорема 6.8. *$f(x) \in C[a,b)$ (где b - число или $+\infty$), $\varphi(t) : \varphi(t)$ строго возрастает на $[\alpha,\beta)$ (где β - число или $+\infty$), $\varphi(\alpha) = a$, $\lim\limits_{t \to \beta-0} \varphi(t) = b-0, \varphi'(t) \in C[\alpha,\beta) \Rightarrow$ из существования одного из интегралов следует существование другого и их равенство:* $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Доказательство. $\exists\Theta(x)-$ обратная функция к $\varphi(t) \Rightarrow \Theta(a) = \alpha$, $\lim\limits_{x \to b-0} \Theta(x) = \beta - 0$. Берем $\forall c \in [a,b) \Rightarrow \exists! \gamma \in [\alpha,\beta) : \Theta(c) = \gamma$, т.е $\varphi(\gamma) = c$. Рассмотрим $\int\limits_a^c f(x)dx \underset{\substack{\text{по Т о}\\ \text{замене}\\ \text{переменной}}}{=} \int\limits_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, а теперь $c \to b-0$ $\square$

Случай где a - число или $-\infty$ ($\varphi(t)$ строго убывает) аналогично.

По теореме 6.8 : если после замены получен собственный интеграл, то так устанавливается сходимость.

$$\text{Пример: } \int\limits_1^2 \frac{xe^x dx}{\sqrt{x^2-1}} = \left| \begin{array}{c} \sqrt{x^2-1} = t, x^2 = t^2+1, xdx = tdt, \\ x = 2 \Leftrightarrow t = \sqrt{3}, x \to 1+0 \Leftrightarrow t \to 0+0 \end{array} \right| = \int\limits_0^{\sqrt{3}} e^{\sqrt{t^2+1}} dt \Rightarrow \int\limits_1^2 \frac{xe^x dx}{\sqrt{x^2-1}} \text{ - сходится.}$$

По теореме 6.8 особую точку можно перевести в $+\infty$.

$$1) \int\limits_{-\infty}^a f(x)dx = \left| \begin{array}{c} x = -t, dx = -dt, \\ x = a \Leftrightarrow t = -a, x \to -\infty \Leftrightarrow t \to +\infty \end{array} \right| = -\int\limits_{+\infty}^{-a} f(-t)dt = \int\limits_{-a}^{+\infty} f(-t)dt$$

$$2) \int\limits_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{c} b-0- \text{ особая точка }, x = \dfrac{a+bt}{1+t}, t = \dfrac{x-a}{b-x}, \\ x = a \Leftrightarrow t = 0, x \to b-0 \Leftrightarrow t \to +\infty, dx = \dfrac{(b-a)dt}{(1+t)^2} \end{array} \right| = \int\limits_0^{+\infty} f\left(\frac{a+bt}{1+t}\right) \frac{(b-a)dt}{(1+t)^2} =$$

$$= (b-a) \int\limits_0^{+\infty} f\left(\frac{a+bt}{1+t}\right) \frac{dt}{(1+t)^2}$$

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{c} a+0 - \text{особая точка}, x = \dfrac{b+at}{1+t} \Rightarrow t = \dfrac{x-b}{a-x}, \\ x = b \Leftrightarrow t = 0, x \to a+0 \Rightarrow t \to +\infty, dx \dfrac{(a-b)dt}{(1+t)^2} \end{array} \right| = \int\limits_{+\infty}^0 f\left(\dfrac{b+at}{1+t}\right)\dfrac{(a-b)dt}{(1+t)^2} =$

$= (b-a)\int\limits_0^{+\infty} f\left(\dfrac{b+at}{1+t}\right)\dfrac{dt}{(1+t)^2}$

Теорема 6.9. $u(x), v(x) : u'(x), v'(x) \in C[a,b)$ *(где b - число или $+\infty$)* $\Rightarrow$ *из существования двух пределов следует существование третьего, а также равенство:* $\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = \lim\limits_{c\to b-0} u(c)v(c) - \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx -$

$- u(a)v(a) \quad \left(\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^{b-0} - \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx\right)$

Доказательство. Берем $\forall c \in [a,b)$ $\Rightarrow$(по формуле интегрирования по частям в собственных интегрелах)$\Rightarrow$ $\int\limits_a^c u(x)v(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^c - \int\limits_a^c u'(x)v(x)dx$, а теперь $c \to b-0$ □

Случай, где a - число или $-\infty$ - аналогично. По теореме 6.9 также можно устанавливать сходимость.

Пример: $\int\limits_0^1 \dfrac{\ln(x)dx}{1+x^2} = \int\limits_0^1 \ln(x)d(\operatorname{arctg}(x)) = \ln(x)\operatorname{arctg}(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \dfrac{\operatorname{arctg}(x)}{x}dx$

Рассмотрим $\lim\limits_{x\to 0+0}(\ln(x)\underbrace{\operatorname{arctg}(x)}_{\sim x}) = \lim\limits_{x\to 0+0}(x\ln(x)) = \lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)} = 0 \Rightarrow \int\limits_0^1 \dfrac{\ln(x)dx}{1+x^2} =$

$= -\int\limits_0^1 \dfrac{\operatorname{arctg}(x)dx}{x}$

$\dfrac{\operatorname{arctg}(x)}{x} \underset{x\to 0+0}{\to} 1 \Rightarrow \int\limits_0^1 \dfrac{\operatorname{arctg}(x)dx}{x}$ можно рассматривать как собственный, так как подынтегральную функцию в данном случае можно доопределить по непрерывности в точке $x = 0$

6.5 Линейные свойства несобственного интеграла. Пример неинтегрируемого произведения интегрируемых функций.

Пусть дан $\int\limits_a^b f(x)dx$, где $a < b$, причем b - число или $+\infty$, b - единственная особенность.

Определение. $f(x)$ называется интегрируемой на $[a,b)$, если $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится.

Остальные случаи аналогично.

Теорема 6.10. $f(x)$ *интегрируема на* $[a,b) \Rightarrow \forall k \in \mathbb{R}\ k\cdot f(x)$ *- тоже интегрируема на* $[a,b)$*, причем* $\int\limits_a^b k\cdot f(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$

Доказательство. $\forall c \in [a,b) \Rightarrow \int\limits_a^c k\cdot f(x)dx = k\int\limits_a^c f(x)dx$, а теперь $c \to b-0$ □

Теорема 6.11. *$f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a, b)$ $\Rightarrow$ $f(x) \pm g(x)$ тоже интегрируемы на $[a, b)$, причем* $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 6.10 и теорема 6.11 - линейные свойства несобственных интегралов.

Теорема 6.12. *$f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a, b)$, причем $f(x) \geqslant g(x)$ $\forall x \in [a, b) \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \geqslant \int\limits_a^b g(x)dx$*

Доказательство. $\forall c \in [a, b)$ $\quad \int\limits_a^c f(x)dx \geqslant \int\limits_a^c g(x)dx$, а теперь $c \to b - 0$ □

Пример: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $\quad \int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}}-$ сходится. Рассмотрим $g(x) = f(x)$, рассмотрим $\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx =$ $= \int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x}$- расходится.

6.6 Связь интеграла от функции с интегралом от ее модуля в случае их интегрируемости

Теорема 6.13. *$f(x), |f(x)|$ интегрируемы на $[a, b) \Rightarrow \left| \int\limits_a^b f(x)dx \right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx$*

Доказательство. Самостоятельно. □

tg: @moksimqa

Лекция 10

11.03

6.7 Критерий Коши сходимости несобственных интегралов первого и второго рода.

Теорема 6.14 (Критерий Коши). *$f(x)$ интегрируема в собственном смысле на $[a,c]$ $\forall c \geqslant a$, тогда* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится* $\Leftrightarrow \exists B \geqslant a : \forall b_1, b_2 > B \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$ сходится $\Rightarrow \exists \underbrace{\lim\limits_{c\to+\infty}\int\limits_a^c f(x)dx}_{=\text{A}}$, т.е $\forall\varepsilon > 0\ \exists B \geqslant a : \forall b > B\ \left|\int\limits_a^b f(x)dx - A\right| <$
$< \dfrac{\varepsilon}{2}$

Берем $\forall b_1, b_2 > B \Rightarrow \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| = \left|\int\limits_a^{b_2} f(x)dx - A + A - \int\limits_a^{b_1} f(x)dx\right| \leqslant \left|\int\limits_a^{b_1} f(x)dx - A\right| + \left|\int\limits_a^{b_2} f(x)dx - A\right| <$
$\dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Leftarrow$ Пусть $\forall\varepsilon > 0\ \exists B \geqslant 0 : \forall b_1, b_2 > B \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$. Рассмотрим $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt, x \geqslant a$

Возьмем $\forall\{x_n\} : x_n \geqslant a, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (т.е $\forall B \geqslant a \exists N : \forall n > N\ \ x_n > B$), возьмем $\forall m, n > N$ и рассмотрим $|F(x_m) - F(x_n)| = \left|\int\limits_a^{x_m} f(t)dt - \int\limits_a^{x_n} f(t)dt\right| = \left|\int\limits_{x_m}^{x_n} f(t)dt\right| < \varepsilon$, т.е $\forall\varepsilon > 0\ \exists N : \forall m, n > N \Rightarrow |F(x_m) - F(x_n)| <$
$< \varepsilon$, т.е $\{F(x_n)\}$ - фундаментальная $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} F(x_n)$ - может зависеть от x_n.

Пусть $\exists x'_n : x'_n \geqslant a, \lim\limits_{n\to\infty} x'_n = +\infty, \lim\limits_{n\to\infty} F(x'_n) = A'$

$\exists x''_n : x''_n \geqslant a, \lim\limits_{n\to\infty} x''_n = +\infty, \lim\limits_{n\to\infty} F(x''_n) = A''$ Рассмотрим $\{z_n\} : \underbrace{z_1}_{=x'_1}, \underbrace{z_2}_{=x''_1}, \underbrace{z_3}_{x'_2}, \underbrace{z_4}_{x''_2}, \ldots, \underbrace{z_{2n-1}}_{x'_n}, \underbrace{z_{2n}}_{x''_n}, \cdots \Rightarrow$
$z_m \geqslant a, \lim\limits_{n\to\infty} z_m = +\infty \Rightarrow \exists \lim\limits_{m\to\infty} F(z_m)$. Рассмотрим $A' = \lim\limits_{n\to\infty} F(\underbrace{z_{2n-1}}_{x'_n}) = \lim\limits_{n\to\infty} F(\underbrace{z_{2n}}_{x''_n}) = A'' \Rightarrow$
$\exists \lim\limits_{n\to\infty} F(x)$, т.е $\exists \lim\limits_{c\to+\infty}\int\limits_a^c f(x)dx$, т.е $\int\limits_a^c f(x)dx$ сходится □

$\int\limits_{-\infty}^a f(x)dx$ формулировка и доказательство - самостоятельно.

Теорема 6.15. *$f(x)$ интегрируема в собственном смысле на $[a,c]$ $\forall c \in [a,b)$, тогда:* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *(с особой точкой $b - a$) сходится* $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists B \in [a,b) : \forall b_1, b_2 \in (B,b) \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$

Доказательство. Самостоятельно. □

$\int\limits_a^b f(x)dx$ с особой точкой $a + 0$ формулировка и доказательство - самостоятельно.

6.8 Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Сходимость абсолютно сходящихся несобственных интегралов.

Определение. Пусть $f(x)$ интегрируема в собственном смысле на $[a,c]$ $\forall c \geqslant a$. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ является сходящимся.

$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$, $\int\limits_a^b f(x)dx$ с особой точкой $b-0$, $\int\limits_a^b f(x)dx$ с особой точкой $a+0$ - формулировка определений абсолютной сходимости - самостоятельно.

Теорема 6.16. *$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно $\Rightarrow$ $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится.*

Доказательство. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно, т.е $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится $\underset{\text{кр. Коши}}{\Rightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists B \geqslant a$: $\forall b_1, b_2 > B$ $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx\right| < \varepsilon$. Но $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx\right| < \varepsilon \underset{\text{кр. Коши}}{\Rightarrow} \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. □

$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ - формулировка и доказательство - самостоятельно.

Теорема 6.17. *$\int\limits_a^b f(x)dx$ с особой точкой $b-0$ сходится абсолютно $\Rightarrow$ $\int\limits_a^b f(x)dx$ с особой точкой $b-0$ сходится.*

Доказательство. Самостоятельно. □

$\int\limits_a^b f(x)dx$ с особой точкой $a+0$ - формулировка и доказательство - самостоятельно.

6.9 Необходимое и достаточное условие сходимости несобственных интегралов первого и второго рода от неотрицательных функций.

Теорема 6.18. *$f(x) \geqslant 0$ $\forall x \geqslant a, f(x)$ интегрируема в собственном смысле на $[a,c]$ $\forall c \geqslant a; F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, тогда: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится $\Leftrightarrow \exists M > 0 : 0 \leqslant F(x) \leqslant M$ $\forall x \geqslant a$*

Доказательство. $\forall x_1, x_2 : a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow F(x_2) = \int\limits_a^{x_2} f(t)dt = \underbrace{\int\limits_a^{x_1} f(t)dt}_{=F(x_1)} + \underbrace{\int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)dt}_{\geqslant 0} \geqslant F(x_1) \Rightarrow F(x)$ монотонно возрастает на $[a, +\infty)(*)$

$\Rightarrow$ Пусть $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится $\Rightarrow \exists \lim\limits_{c\to+\infty} \int\limits_a^c f(x)dx = A \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)dx = A \underset{(*)}{\Rightarrow} 0 \leqslant F(x) \leqslant A \; \forall x \geqslant a$

$\Leftarrow$ Пусть $\exists M > 0: \; 0 \leqslant F(x) \leqslant M \; \forall x \geqslant a \Rightarrow \exists \sup\limits_{x\geqslant a} F(x) = A$ - число, т.е $\begin{matrix} 1) F(x) \leqslant A \; \forall x \geqslant a \\ 2) \forall \varepsilon > 0 \; \exists B \geqslant A : F(B) > A - \varepsilon \end{matrix} \underset{(*)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \forall x > B \; F(x) \geqslant F(B) > A - \varepsilon$, т.е $\forall \varepsilon > 0 \; \exists B \geqslant a : \forall x > B \quad A - \varepsilon < F(x) \leqslant A < A + \varepsilon$, т.е $|F(x) - A| < \varepsilon$, т.е $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = A$, т.е $\lim\limits_{c\to+\infty} \int\limits_a^c f(x)dx$, т.е $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. ☐

$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ - формулировка и доказательство - самостоятельно.

Теорема 6.19. $f(x) \geqslant 0 \; \forall x \in [a, b), f(x)$ *интегрируема в собственном смысле на* $[a, c] \; \forall c \in [a, b), F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, *тогда:* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *с особой точкой* $b - 0$ *сходится* $\Leftrightarrow \exists M > 0 : 0 \leqslant F(x) \leqslant M \; \forall x \in [a, b)$

Доказательство. Самостоятельно. ☐

$\int\limits_a^b f(x)dx$ с особой точкой $a + 0$ - формулировка и доказательство - самостоятельно.

6.10 Признак сравнения (в допредельной и предельной форме) для сходимости несобственных интегралов первого и второго рода от неотрицательных функций.

Теорема 6.20 (признак сравнения в допредельной форме)**.** $f(x), g(x)$ *интегрируемы в собственном смысле на* $[a, c] \; \forall c \geqslant a, 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x) \; \forall x \geqslant a \Rightarrow$

$$\begin{matrix} 1) \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \text{ сходится} \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \text{ сходится} \\ 2) \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \text{ расходится } \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} g(x) \text{ расходится.} \end{matrix}$$

Доказательство. Рассмотрим $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt, G(x) = \int\limits_a^x g(t)dt \Rightarrow 0 \leqslant F(x) \leqslant G(x) \; \forall x \geqslant a$

1) Пусть $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится $\Rightarrow \exists M > 0 : 0 \leqslant G(x) \leqslant M \; \forall x \geqslant a \Rightarrow 0 \leqslant F(x) \leqslant G(x) \leqslant M \; \forall x \geqslant a \underset{\text{Т6.18}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

2) Пусть $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Предположим, что $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится $\underset{(1)}{\Rightarrow} \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ - сходится - противоречие $\Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится. ☐

Следствие 1. *$f(x) \geqslant 0\ \forall x \geqslant a, f(x)$ интегрируема в собственном смысле на $[a, c]\ \forall c \geqslant a; \exists p > 1 : f(x) = \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{x^p}\right)$ при $x \to +\infty \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится.*

Доказательство. $\exists C > 0, \exists b \geqslant \max(a, 1) : 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{c}{x^p}\ \forall x \geqslant b.\quad \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится (т.к $p > 1$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_b^{+\infty} \frac{cdx}{x^p} \underset{\text{T6.20}}{\Rightarrow} \int\limits_b^{+\infty} f(x)dx$ сходится ☐

$\int\limits_{-\infty}^{a}$ - формулировка и доказательство признака сравнения (без следствия) - самостоятельно.

Теорема 6.21. *$f(x), g(x)$ интегрируемы в собственном смысле на $[a, c]\ \forall c \in [a, b); 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)\ \forall x \in [a, b) \Rightarrow$*

1) *$\int\limits_a^b g(x)dx$ с особой точкой $b - 0$ сходится $\Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx$ с особой точкой $b - 0$ сходится*

2) *$\int\limits_a^b f(x)dx$ с особой точкой $b - 0$ расходится $\Rightarrow \int\limits_a^b g(x)dx$ с особой точкой $b - 0$ расходится*

Доказательство. Самостоятельно. ☐

$\int\limits_a^b f(x)dx$ с особой точкой $a + 0$ - формулировка и доказательство самостоятельно.

Следствие 1. *$f(x) \geqslant 0\ \forall x \in (0; a], f(x)$ интегрируема в собственном смысле на $[c, a]\ \forall c \in (0; a], \exists p < 1 : f(x) = \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{x^p}\right)$ при $x \to 0 + 0 \Rightarrow \int\limits_0^a f(x)dx$ сходится*

Доказательство. Самостоятельно. ☐

Теорема 6.22 (признак сравнения в предельной форме)**.** *$f(x), g(x)$ интегрируемы в собственном смысле на $[a, c]\ \forall c \geqslant a, f(x) \geqslant 0\ \forall x \geqslant a, g(x) > 0\ \forall x \geqslant a, \exists \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in (0, +\infty) \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, т.е $\forall \varepsilon > 0\ \exists B \geqslant a : \forall x \geqslant b \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - k\right| < \varepsilon$, т.е $k - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < k + \varepsilon$

Берем $\varepsilon = \frac{k}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{k}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3k}{2} \\ \frac{k}{2}g(x) < f(x) < \frac{3k}{2}g(x) \qquad \frac{2}{3k}f(x) < g(x) < \frac{2}{k}f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow$ T6.20 ☐

$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ формулировка и доказательство - самостоятельно.

Теорема 6.23. *$f(x), g(x)$ интегрируемы в собственном смысле на $[a, c]\ \forall c \in [a, b), f(x) \geqslant 0 \forall x \in [a, b)$, $g(x) > 0 \forall x \in [a, b), \exists \lim\limits_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in (0, +\infty) \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx$ с особой точкой $b - 0$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ с особой точкой $b - 0$ сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Самостоятельно. ☐

$\int\limits_a^b f(x)dx$ с особой точкой $a+0$ формулировка и доказательство - самостоятельно.

6.11 Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Признаки Дирихле и Абеля для сходимости несобственных интегралов первого и второго рода.

Определение. $f(x)$ интегрируема в собственном смысле на $[a,c]$ $\forall c \geqslant a$. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется условно сходящимся, если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, но $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ расходится.

Формулировка определений условно сходящихся $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$, $\int\limits_a^b f(x)dx$ с особой точкой $b-0$, $\int\limits_a^b f(x)dx$ с особой точкой $a+0$ - самостоятельно.

Теорема 6.24 (признак Дирихле)**.** *$f(x)$ непрерывна при $x \geqslant a, F(x)$ - первообразная к $f(x)$ на $[a,+\infty)$, причем $\exists M>0 : |F(x)| \leqslant M$ $\forall x \geqslant a, g(x)$:*

$$\begin{matrix} \exists g'(x) \forall x \geqslant a, \\ g'(x) \text{ непрерывна при } x \geqslant a, \\ g'(x) \leqslant 0 \forall x \geqslant a, \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0 \end{matrix} \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \text{ сходится.}$$

Лекция 11

14.03

Доказательство. $\begin{matrix} g(x) \geqslant 0 \ \forall x \geqslant a, \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0 \end{matrix} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists B > 0 : \forall x > B \ 0 \leqslant g(x) < \dfrac{\varepsilon}{3M}$. Берем $\forall b_1, b_2 > B \Rightarrow$

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx\right| = \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)d(F(x))\right| = \left|F(x)g(x)\Big|_{b_1}^{b_2} + \int\limits_{b_1}^{b_2} F(x)(-g'(x))dx\right| = \left|F(b_2)g(b_2) - F(b_1)g(b_1) + \int\limits_{b_1}^{b_2} F(x)(-g'(x))dx\right|$$

$$\leqslant |F(b_2)g(b_2)| + |F(b_1)g(b_1)| + \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} F(x)(-g'(x))dx\right| < \frac{\varepsilon}{3M}\cdot M + \frac{\varepsilon}{3M}\cdot M + M\left|\int\limits_{b_1}^{b_2}(-g'(x))dx\right| = \frac{2\varepsilon}{3} +$$

$$+M\left|g(b_1) - g(b_2)\right| \underset{\text{БОО } b_2 \geqslant b_1}{=} \frac{2\varepsilon}{3} + M(\underbrace{g(b_1)}_{\geqslant 0} - \underbrace{g(b_2)}_{\geqslant 0}) \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + M\cdot\frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon \underset{\text{Кр. Коши}}{\Rightarrow} \int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \text{ сходится.} \quad \square$$

$\int\limits_{-\infty}^{a}$ - формулировка и доказательство - самостоятельно.

Теорема 6.25. *$f(x)$ непрерывна при $x \in [a,b), F(x) -$ первообразная к $f(x)$ на $[a,b), \exists M > 0 : |F(x)| \leqslant$ $\leqslant M$ $\forall x \in [a,b), g(x) : \exists g'(x)$ $\forall x \in [a,b), g'(x)$ непрерывна на $[a,b), g'(x) \leqslant 0$ $\forall x \in [a,b)$, $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ с особой точкой $b-0$ сходится.*

Доказательство. Самостоятельно. $\square$

$\int\limits_a^b$ с особой точкой $a+0$ - формулировка и доказательство - самостоятельно.

Теорема 6.26. *(признак Абеля)* $f(x):\begin{array}{l} f(x) \text{ непрерывна при } x \geqslant 0, \\ \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ сходится.}\end{array}$, $g(x):\begin{array}{l} \exists g'(x)\ \forall x \geqslant a, \\ g'(x) \text{ непрерывна при } x \geqslant a, \\ g'(x) \leqslant 0\ \forall x \geqslant a, \\ \exists k>0 : |g(x)| \leqslant k\ \forall x \geqslant a.\end{array}$

$\Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ *сходится.*

Доказательство. Рассмотрим $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt, \quad \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится $\Rightarrow \exists \lim\limits_{c\to+\infty}\int\limits_a^c f(x)dx = A = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0 \exists B \geqslant a:\ \forall x>B\ |F(x)-A| < \dfrac{\varepsilon}{4k}$

$F(x)$ - первообразная к $f(x)$ на $[a,+\infty)$; Берем $\forall b_1, b_2 > B \Rightarrow \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx\right| = \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)d\left(F(x)-A\right)\right| =$

$$= \left|(F(x)-A)g(x)\Big|_{b_1}^{b_2} + \int\limits_{b_1}^{b_2}(F(x)-A)(-g'(x))dx\right| = \left|(F(b_2)-A)g(b_2) - (F(b_1)-A)(g(b_1)) + \int\limits_{b_1}^{b_2}(F(x)-A)(-g'(x))dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant |F(b_2)-A|\cdot|g(b_2)| + |F(b_1)-A|\cdot|g(b_1)| + \left|\int\limits_{b_1}^{b_2}(F(x)-A(-g'(x))dx\right| < \frac{\varepsilon}{4k}\cdot k + \frac{\varepsilon}{4k}\cdot k + \frac{\varepsilon}{4k}\cdot\left|\int\limits_{b_1}^{b_2}(-g'(x))dx\right| =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4k}\left|(g(b_1)-g(b_2))\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4k}(k+k) = \varepsilon \underset{\text{Кр. Коши}}{\Rightarrow} \int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \text{ сходится.}$$ □

$\int\limits_{-\infty}^a$ - формулировка и доказательство - самостоятельно.

Теорема 6.27. $\begin{array}{l} f(x) \text{ непрерывна при } x \in [a,b), \\ \int\limits_a^b f(x)dx \text{ с особой точкой } b-0 \text{ сходится,}\end{array}$, $g(x):\begin{array}{l} \exists g'(x)\ \forall x \in [a,b), \\ g'(x) \text{ непрерывна при } x \in [a,b), \\ g'(x) \leqslant 0\ \forall x \in [a,b), \\ \exists k>0 : |g(x)| \leqslant k\ \forall x \in [a,b)\end{array} \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$

с особой точкой $b-0$ сходится.

Доказательство. Самостоятельно. □

$\int\limits_a^b$ с особой точкой $a+0$ - формулировка и доказательство - самостоятельно.

6.11.1 Пример неинтегрируемости модуля интегрируемых в несобственном смысле функций.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}dx,\ \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}dx$$

1) $p > 1$: $\left|\frac{\sin x}{x^p}\right| \leqslant \frac{1}{x^p}$, $\left|\frac{\cos x}{x^p}\right|$, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится $(p > 1) \Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^p}\right| dx$ и $\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^p}\right| dx$ сходятся $\Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}dx$ и $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}dx$ сходятся абсолютно.

2) $0 < p \leqslant 1$: Рассмотрим $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}dx$, $\begin{array}{l} f(x) = \cos x;\ F(x) = \sin x, |F(x)| \leqslant 1 \\ g(x) = \frac{1}{x^p};\ g'(x) = \frac{-p}{x^{p+1}} \in C[1, +\infty), \\ \frac{-p}{x^{p+1}} \leqslant 0\ \forall x \geqslant 1, \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^p} = 0 \end{array}$ $\Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}dx$ сходится по признаку Дирихле.

$\left|\frac{\cos x}{x^p}\right| = \frac{|\cos x|}{x^p} \geqslant \frac{\cos^2 x}{x^p} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^p} + \frac{\cos 2x}{x^p}\right)$, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^p}dx$ сходится по Дирихле, но $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ расходится (т.к $p \leqslant 1$) $\Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^p} + \frac{\cos 2x}{x^p}\right)dx$ расходится. $\Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^p}\right| dx$ расходится по признаку сравнения $\Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}dx$ сходится условно. Аналогично $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}dx$ сходится условно.

3) $p \leqslant 0$: Рассмотрим $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}dx$. Докажем расходимость.

Отрицание критерия Коши: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}dx$ расходится $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall B \geqslant a\ \exists b_1, b_2 > B : \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{\sin x}{x^p}dx\right| \geqslant \varepsilon$ (?)

$\varepsilon = 2$, берем $\forall B \geqslant a \Rightarrow \exists b_1 = 2k\pi > B, \exists b_2 = 2k\pi + \pi > b_1 > B, k \in \mathbb{N}$ $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{\sin x}{x^p}dx\right| = \left|\int\limits_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin x}{x^p}dx\right| = \int\limits_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin x}{x^p}dx \underset{\frac{1}{x^p} \geqslant 1 \forall x \geqslant 1}{\geqslant} \int\limits_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \sin x dx = 2 = \varepsilon \Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}dx$ расходится. Аналогично $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}dx$ расходится.

Итого: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}dx,\ \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}dx$ сходятся абсолютно при $p > 1$, сходятся условно при $p \in (0; 1]$, расходятся при $p \leqslant 0$.

6.12 Главное значение в смысле Коши несобственных интегралов первого и второго рода и его связь с величиной соответствующего несобственного интеграла.

Определение. Пусть $f(x)$ интегрируема в собственном смысле на $\forall[a,b] \subset (-\infty,+\infty)$. Главным значением $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ в смысле Коши называется число равное $\lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx$ (если он существует). Обозначение: $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ (Valeur Principale, фр).

Теорема 6.28. *Если* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *сходится по Риману, то он сходится и по Коши, причем к той же величине* $\left(v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\right)$

Доказательство. $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx = \lim\limits_{R\to+\infty} \left[\int\limits_{-R}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{R} f(x)dx\right] = \lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{0} f(x) +$
$+ \lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_{0}^{R} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ☐

Но не наооборот!

Доказательство. $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg}(x)dx = \lim\limits_{R\to+\infty} \underbrace{\int\limits_{-R}^{R} \operatorname{arctg}(x)dx}_{\substack{\text{интеграл от функции}\\ \text{в симметричных пределах}}} = 0$, но $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg}(x)dx$ расходится, т.к

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \operatorname{arctg}(x)dx = \underbrace{\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{arctg}(x)dx}_{\text{собственный}} + \underbrace{\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty} \operatorname{arctg}(x)dx}_{\geqslant 1}$$

$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty} 1 \cdot dx$ расходится $\Rightarrow \int\limits_{0}^{+\infty} \operatorname{arctg}(x)dx$ расходится. ☐

Определение. Пусть $f(x)$ интегрируема в собственном смысле на $[a, c-\delta]$ и на $[c+\delta, b]$ $\forall\delta \in$ $\in (a, \min(c-a, b-c))$. Главным значением $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ в смысле Коши называется число, равное $\lim\limits_{\delta\to0+0} \left[\int\limits_{a}^{c-\delta} f(x)dx + \int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)dx\right]$ (если он существует). Обозначение: $v.p. \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$.

Теорема 6.29. *Если* $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ *сходится по Риману, то он сходится и по Коши, причем к той же величине* $\left(v.p. \int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx\right)$

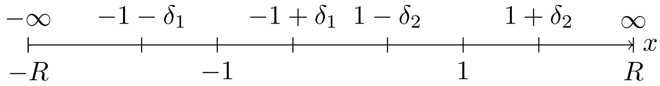
Доказательство. Самостоятельно. ☐

Но не наоборот! Пусть $a < c < b$. Рассмотрим $v.p. \int\limits_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim\limits_{\delta \to 0+0} \left[\int\limits_a^{c-\delta} \frac{dx}{x-c} + \int\limits_{c+\delta}^b \frac{dx}{x-c} \right] =$

$= \lim\limits_{\delta \to 0+0} \left[\ln(c-x)\Big|_{x=a}^{x=c-\delta} + \ln(x-c)\Big|_{x=c+\delta}^{x=b} \right] = \lim\limits_{\delta \to 0+0} \left[\underbrace{\ln(\delta) - \ln(c-a)}_{\nexists \lim\limits_{\delta \to 0}} + \underbrace{\ln(b-c) - \ln\delta}_{\nexists \lim\limits_{\delta \to 0}} \right] = \ln\left(\frac{b-c}{c-a}\right)$, но $\int\limits_a^b \frac{dx}{x-c}$ расходится по Риману.

Если особых точек несколько, то промежуток интегрирования разбиваем так, чтобы особые точки $x_0 - 0$ и $x_0 + 0$ (как и $-\infty$ и $+\infty$) входили попарно.

Пример: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$ расходится по Риману.



$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \lim\limits_{\delta_1 \to 0+0} \left[\int\limits_{-2}^{-1-\delta_1} \frac{dx}{x^2-1} + \int\limits_{-1+\delta_1}^{0} \frac{dx}{x^2-1} \right] + \lim\limits_{\delta_2 \to 0+0} \left[\int\limits_{0}^{1-\delta_2} \frac{dx}{x^2-1} + \int\limits_{1+\delta_2}^{2} \frac{dx}{x^2-1} \right] +$$

$$+ \lim\limits_{R \to +\infty} \left[\int\limits_{2}^{R} \frac{dx}{x^2-1} + \int\limits_{-R}^{-2} \frac{dx}{x^2-1} \right] = \lim\limits_{\delta_1 \to 0+0} \left[\frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \Bigg|_{-2}^{-1-\delta_1} + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \Bigg|_{-1+\delta_1}^{0} \right] +$$

$$+ \lim\limits_{\delta_2 \to 0+0} \left[\frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \Bigg|_{0}^{1-\delta_2} + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \Bigg|_{1+\delta_2}^{2} \right] + \lim\limits_{R \to +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \Bigg|_{2}^{R} + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \Bigg|_{-R}^{-2} \right] = \underset{\text{самостоятельно}}{\ldots} =$$

$$= 0 \Rightarrow \text{ v. p. } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = 0$$

tg: @moksimqa

Глава 7

Функции многих переменных

Лекция 12

21.03

7.1 Координатное n-мерное пространство

Определение. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - упорядоченная совокупность из n вещественных чисел. $\mathbb{E}_n \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_n \in \mathbb{R}$

Определение. $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}_n, y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{E}_n, \alpha \in \mathbb{R}. x + y \equiv (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n); \alpha x \equiv (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$

1. $x + y = y + x$

2. $(x + y) + z = x + (y + z)$

3. $\exists \theta : x + \theta = x$

4. $\forall x \in \mathbb{E}_n \exists x' : x + x' = \theta$ 5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

7. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

8. $1 \cdot x = x$

$\theta = (0, 0, \dots, 0) \quad x' = (-1)x$

Доказательство. Самостоятельно. □

Определение. $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}_n, y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{E}_n$. Скалярным произведением называется $(x, y) \equiv \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k \equiv x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. (В комплексном случае: $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$)

Свойства скалярного произведения:

1. $(y, x) = (x, y)$ (В комплексном пространстве: $(y, x) = \overline{(x, y)}$)

2. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$

3. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

4. $(x, x) \geqslant 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

Доказательство. Самостоятельно для x и y. □

$|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y)$ - неравенство Коши - Буняковского. $\qquad |(x, y)| \leqslant \|x\| \|y\|$

Доказательство. $x = \theta \Rightarrow (x,y)^2 \leqslant (x,x)(y,y)$.

$x \neq \theta$. Рассмотрим $0 \leqslant \varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2 \underbrace{(x,x)}_{A>0} + 2\lambda \underbrace{(x,y)}_{B} + \underbrace{(y,y)}_{C} = A\lambda^2 + 2B\lambda + C \geqslant 0$

$0 \geqslant \dfrac{\Delta}{4} = B^2 - AC$ □

Определение. $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{E}_n$. Нормой x называется $\|x\| \equiv \sqrt{(x,x)} = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$

Свойства нормы:

1. $\|x\| \geqslant 0$, причем $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Доказательство. 1, 2 - самостоятельно. 3. $\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \leqslant \|x\|^2 + 2|(x,y)| + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$ □

$\|x\| = \|y + (x-y)\| \leqslant \|y\| + \|x - y\| \Rightarrow \|x-y\| \geqslant \|x\| - \|y\|$

$\|x - y\| = \|(-1)(y-x)\| = \|y - x\| \geqslant \|y\| - \|x\| \Rightarrow \boxed{\|x-y\| \geqslant |\|x\| - \|y\||}$

Определение. $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{E}_n, y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{E}_n$. Расстоянием от x до y называется $\rho(x,y) \equiv \|x - y\| = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2}$

Свойства расстояния:

1. $\rho(y,x) = \rho(x,y)$
2. $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$
3. $\rho(x,y) \geqslant 0$, причем $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Определение. $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{E}_n, \varepsilon > 0$.

$U_\varepsilon(x^{(0)}) \equiv \{x \in \mathbb{E}_n : \rho\left(x, x^{(0)}\right) < \varepsilon\} -$ открытый шар с центром в $x^{(0)}$ и радиусом ε.

$\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x^{(0)}) \equiv \{x \in \mathbb{E}_n : 0 < \rho\left(x, x^{(0)}\right) < \varepsilon\} = U_\varepsilon(x^{(0)}) \backslash \{x^{(0)}\} -$ проколотый открытый шар.

$\varepsilon \geqslant 0$ $V_\varepsilon(x^{(0)}) \equiv \{x \in \mathbb{E}_n : \rho\left(x, x^{(0)}\right) \leqslant \varepsilon\} -$ замкнутый шар.

$S_\varepsilon(x^{(0)}) \equiv \{x \in \mathbb{E}_n : \rho\left(x, x^{(0)}\right) = \varepsilon\} -$ сфера.

$\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x^{(0)}) \subset U_\varepsilon(x^{(0)}) \subset V_\varepsilon(x^{(0)}), S_\varepsilon(x^{(0)}) \subset V_\varepsilon(x^{(0)}); U_\varepsilon(x^{(0)}) \cup S_\varepsilon(x^{(0)}) = V_\varepsilon(x^{(0)})$

Определение. $a_k < b_k, k = 1, 2, \ldots, n$.

$(a_1 b_1; , \ldots, a_k b_k, \ldots, a_n b_n) \equiv \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{E}_n : a_k < x_k < b_k, k = 1, 2, \ldots, n\} -$ открытый параллелепипед.

$a_k \leqslant b_k, k = 1, 2, \ldots, n$.

$[a_1 b_1, \ldots, a_k b_k, \ldots, a_n b_n] \equiv \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{E}_n : a_k \leqslant x_k \leqslant b_k, k = 1, 2, \ldots, n\} -$ замкнутый параллелепипед.

$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) : x_k^{(0)} = \dfrac{a_k + b_k}{2}, k = 1, 2, \ldots, n -$ центр.

Определение. $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{E}_n, \varepsilon > 0$

$K_\varepsilon(x^{(0)}) \equiv \{x \in \mathbb{E}_n : x_k^{(0)} - \varepsilon < x_k < x_k^{(0)} + \varepsilon, k = 1, 2, \ldots, n\}$ - открытый куб.

Определение. $x^{(0)} \in \mathbb{E}_n$. Шаровая окрестность $x^{(0)}$ - открытый шар с центром в $x^{(0)}$; Кубическая окрестность $x^{(0)}$ - открытый куб с центром в $x^{(0)}$

Лемма 7.1. $x^{(0)} \in \mathbb{E}_n$. *1.* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : K_\delta(x^{(0)}) \subset U_\varepsilon(x^{(0)})$; *2.* $\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x^{(0)}) \subset K_\delta(x^{(0)})$

Доказательство. 1. $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}} > 0 \quad \forall x \in K_\delta(x^{(0)}) \quad x = (x_1, \dots, x_n), x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$
$|x_k - x_k^{(0)}| < \delta, k = 1, 2, \dots, n.$
$\rho\left(x, x^{(0)}\right) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \left|x_k - x_k^{(0)}\right|^2} < \sqrt{\delta^2 \cdot n} = \delta\sqrt{n} = \varepsilon \Rightarrow x \in U_\varepsilon(x^{(0)}) => K_\delta(x^{(0)}) \subset U_\varepsilon(x^{(0)})$
2. $\forall\delta > 0\ \exists\varepsilon = \delta > 0\ \forall x \in U_\varepsilon(x^{(0)}) \quad x = (x_1, \dots, x_n), x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \quad |x_k - x_k^{(0)}| < \delta, k = 1, 2, \dots, n.$
$\rho\left(x, x^{(0)}\right) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \left|x_k - x_k^{(0)}\right|^2} < \delta = \varepsilon \Rightarrow \left|x_k - x_k^{(0)}\right|^2 < \delta^2 = \varepsilon^2, k = 1, 2, \dots, n => x \in K_\delta(x^{(0)})$, т.е $U_\varepsilon(x^{(0)}) \subset K_\delta(x^{(0)})$

□

Лекция 13

25.03

Определение. $E \subset \mathbb{E}_n, x^{(0)} \in \mathbb{E}$. $\quad x^{(0)}$ - внутренняя точка E, если $\exists\varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x^{(0)}) \subset E$ ($\exists\delta > 0 : K_\delta(x^{(0)}) \subset E$)

Определение. $E \subset \mathbb{E}_n, \quad E$ - открытое множество, если $\forall x \in \mathbb{E}, x$ - внутренняя точка E.

Лемма 7.2. $\forall\varepsilon > 0\ \forall x^{(0)} \in \mathbb{E}_n, U_\varepsilon(x^{(0)})$ - *открытое множество.*

Доказательство. $\forall x \in U_\varepsilon(x^{(0)})$, т.е $\rho(x, x^{(0)}) < \varepsilon$. Рассмотрим $\delta = \varepsilon - \rho(x, x^{(0)}) > 0, U_\delta(x), \ \forall y \in U_\delta(x)$. Тогда $\rho(y, x^{(0)}) \leqslant \rho(y, x) + \rho(x, x^{(0)}) < \delta + \rho(x, x^0) = \varepsilon - \rho(x, x^{(0)}) + \rho(x, x^{(0)}) = \varepsilon \Rightarrow U_\delta(x) \subset U_\varepsilon(x^{(0)})$ □

Лемма 7.3. $\forall\varepsilon > 0\ \forall x^{(0)} \in \mathbb{E}_n, K_\varepsilon(x^{(0)})$ - *открытое множество.*

Доказательство. Самостоятельно. □

Лемма 7.4. $a_k < b_k, k = 1, 2, \dots, n \Rightarrow (a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$ - *открытое множество*

Доказательство. Самостоятельно. Берем произвольный x из этого параллелепипеда и ищем кубическую окрестность. □

Определение. $E \subset \mathbb{E}_n, x^{(0)} \in \mathbb{E}, x^{(0)}$ - изолированная точка $\mathbb{E}$, если $\exists\varepsilon > 0 : \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x^{(0)}) \cap \mathbb{E} = \varnothing$

Определение. $E \subset \mathbb{E}_n, x^{(0)} \in E_n, x^{(0)}$ - предельная точка E, если $\forall\varepsilon > 0\ \overset{\circ}{U}(x^{(0)}) \cap E \neq \varnothing$

Определение. $E \subset \mathbb{E}_n, x^{(0)} \in \mathbb{E}_n, x^{(0)}$ - точка прикосновения E, если $\forall\varepsilon > 0\ U_\varepsilon(x^{(0)}) \cap E \neq \varnothing$

Определение. $E \subset \mathbb{E}_n$. Замыкание $E : \overline{E} \equiv \{x \in \mathbb{E}_n : x -$ точка прикосновения $E\} \qquad E \subset \overline{E}$

Определение. $E \subset \mathbb{E}_n, E$ - замкнутое, если $E = \overline{E}$

Лемма 7.5. $\forall\varepsilon \geqslant 0, \forall x^{(0)} \in \mathbb{E}_n, V_\varepsilon(x^{(0)})$ - *замкнутое множество.*

Доказательство. $\forall x \in \mathbb{E}_n : x \notin V_\varepsilon(x^{(0)})$, т.е $\rho(x, x^{(0)}) > \varepsilon, \delta = \rho(x, x^{(0)}) - \varepsilon > 0$. Возьем $U_\delta(x)$ и $\forall y \in U_\delta(x)$. $\rho(y, x) < \delta = \rho(x, x^{(0)}) - \varepsilon$. Воспользуемся неравенством треугольника: $\rho(x, x^{(0)}) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, x^{(0)}) \Rightarrow \rho(y, x^{(0)}) \geqslant \rho(x, x^{(0)}) - \rho(x, y) > \rho(x, x^{(0)}) - \delta = \rho(x, x^{(0)}) - \rho(x, x^{(0)}) + \varepsilon = \varepsilon \Rightarrow \rho(y, x^{(0)}) > \varepsilon \Rightarrow y \notin V_\varepsilon(x^{(0)}) \Rightarrow V_\varepsilon(x^{(0)}) \cap U_\delta(x) = \varnothing$ □

Лемма 7.6. $\forall\varepsilon > 0\ \forall x^{(0)} \in \mathbb{E}_n, S_\varepsilon(x^{(0)})$ - *замкнутое множество.*

Доказательство. Самостоятельно. □

Лемма 7.7. $a_k \leqslant b_k, k = 1, 2, \dots, n \Rightarrow [a_1 b_1, \dots, a_n b_n]$ - *замкнутое множество.*

Доказательство. Самостоятельно. $\square$

Лемма 7.8. *$E \subset \mathbb{E}_n \Rightarrow \overline{E}$ - замкнутое множество.*

Доказательство. $E \subset \overline{E} \subset \overline{\overline{E}} \quad \forall x \in \overline{\overline{E}} \Rightarrow x$ - точка прикосновения $\overline{E}$, т.е $\forall \varepsilon > 0\ U_\varepsilon(x) \cap \overline{E} \neq \varnothing$.

Возьмем $y \in U_\varepsilon(x) \cap \overline{E} \Rightarrow y$ - точка прикосновения $E \Rightarrow \forall \delta > 0\ U_\delta(y) \cap E \neq \varnothing$. Возьем $U_\delta(y) \subset U_\varepsilon(x)$

$z \in U_\delta(y) \cap E \subset U_\varepsilon(x) \cap E$. Таким образом, $\forall x \in \overline{\overline{E}}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists z \in U_\varepsilon(x) \cap E \Rightarrow x$ - точка прикосновения E, т.е $x \in \overline{E}, \overline{\overline{E}} \subset \overline{E}$ $\square$

Определение. $E \in \mathbb{E}_n$. Дополнение к $E : CE \equiv \mathbb{E}_n \backslash E$

$$E \cap CE = \varnothing, E \cup CE = \mathbb{E}_n, C(CE) = E$$

Лемма 7.9. *E - открытое множество $\Leftrightarrow CE$ - замкнутое множество.*

Доказательство. $\Rightarrow$ E - открытое множество. $\forall x \notin CE$, т.е $x \in E\ \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset E \Rightarrow U_\varepsilon(x) \cap CE = \varnothing \Rightarrow x$ - не есть точка прикосновения $CE \Rightarrow CE$ - замкнутое множество.

$\Leftarrow$ CE - замкнутое множество. x - точка прикосновения $CE \Rightarrow x \in CE \Rightarrow \forall y \in E, y$ - не есть точка прикосновения $CE \Rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(y) \cap CE = \varnothing \Rightarrow U_\delta(y) \subset E \Rightarrow E$ - открытое множество. $\square$

Следствие 1. *E - замкнутое $\Leftrightarrow CE$ - открытое.*

7.2 Последовательности в $\mathbb{E}_n$

Определение. $E \subset \mathbb{E}_n, E$ - ограниченное множество, если $\exists M > 0 : \|x\| \leqslant M\ \forall x \in E$

Определение. $\forall m \in \mathbb{N}\ \exists x^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}\right) \in \mathbb{E}_n$. $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ - последовательность.

$$\{x^{(m)}\}_{m=m_0}^{\infty} = \{x^{(m_0)}, x^{(m_0+1)}, \dots\}$$

Определение (сходимость по расстоянию). $a \in \mathbb{E}_n, a$ - предел $\{x^{(m)}\}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall m > N\ \rho(x^{(m)}, a) = \|x^{(m)} - a\| < \varepsilon \left(\lim\limits_{m\to\infty} \rho(x^{(m)}, a) = \lim\limits_{m\to\infty} \|x^{(m)} - a\| = 0\right)$

Определение (покоординатная сходимость). $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{E}_n, a$ - предел $\{x^{(m)}\}$, если $\forall k = 1, 2, \dots, n$ $\lim\limits_{m\to\infty} x_k^{(m)} = a_k$, т.е $\forall k = 1, 2, \dots, n\ \forall \varepsilon > 0 \exists N_k : \forall m > N_k\ |x_k^{(m)} - a_k| < \varepsilon$

Теорема 7.10. *Опр. 1 $\Leftrightarrow$ Опр. 2.*

Доказательство. $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall m > N\ \rho(x^{(m)}, a) = \|x^{(m)} - a\| < \varepsilon \quad \sum\limits_{k=1}^{n} \left|x_k^{(m)} - a\right|^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall k = 1, 2, \dots, n\ \left|x_k^{(m)} - a\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} x_k^{(m)} = a_k$

$\Leftarrow$ $\forall k = 1, 2, \dots, n\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N_k : \forall m > N_k\ \left|x_k^{(m)} - a_k\right| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \Rightarrow \|x^{(m)} - a\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \left|x_k^{(m)} - a_k\right|^2 < \dfrac{\varepsilon^2}{n} \cdot n = \varepsilon^2$,т.е $\|x^{(m)} - a\| < \varepsilon$ $\square$

Определение. $E \subset \mathbb{E}_n, x \in \mathbb{E}_n, x$ - граничаня точка E, если $\forall \varepsilon > 0\ U_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing, U_\varepsilon(x) \cap CE \neq \varnothing$

Определение. $E \subset \mathbb{E}_n$, граница $E : \partial E \equiv \{x \in \mathbb{E}_n, x -$ граничная точка $E\}$

Лемма 7.11. $E \subset \mathbb{E}_n \Rightarrow \partial E \subset \overline{E}$

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0\ \forall x^{(0)} \in \mathbb{E}_n, \partial U_\varepsilon(x^{(0)}) = \partial V_\varepsilon(x^{(0)}) = \partial S_\varepsilon(x^{(0)}) = S_\varepsilon(x^{(0)}), \partial \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x^{(0)}) = S_\varepsilon(x^{(0)}) \cup \{x^{(0)}\}$ - проверить. $\square$

Определение. Если последовательность имеет предел, то она называется сходящейся, иначе - расходящейся.

Теорема 7.12 (Единственность предела). $\{x^{(m)}\}$ *- сходится* $\Rightarrow$ *ее предел единственный.*

Доказательство. Самостоятельно. $\square$

Теорема 7.13. $\{x^{(m)}\}$ *- сходится* $\Rightarrow \{x^{(m)}\}$ *ограничена*

Доказательство. Самостоятельно. $\square$

Теорема 7.14. $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x$, $\lim\limits_{m\to\infty} y^{(m)} = y$, $\lim\limits_{m\to\infty} \alpha_m = \alpha \Rightarrow \exists \lim\limits_{m\to\infty} \left(x^{(m)} + y^{(m)}\right) = x + y$,
$\exists \lim\limits_{m\to\infty} \left(\alpha_m x^{(m)}\right) = \alpha x, \exists \lim\limits_{m\to\infty} \left(x^{(m)}, y^{(m)}\right) = (x, y)$

Доказательство. $\{x^{(m)}\}$ - сходится $\Rightarrow$ ограничена, т.е $\exists M > 0 : \|x^{(m)}\| \leqslant M, \forall m = 1, 2, \dots$.
$\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x$, т.е $\forall\varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall m > N_1\ \|x^{(m)} - x\| < \dfrac{\varepsilon}{2(\|y\| + 1)}$
$\lim\limits_{m\to\infty} y^{(m)} = y$, т.е $\forall\varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall m > N_2\ \|y^{(m)} - y\| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$
$\forall\varepsilon > 0 \exists N = \max(N_1, N_2) : \forall n > N\ \left|(x^{(m)}, y^{(m)}) - (x, y)\right| = \left|(x^{(m)}, y^{(m)}) - (x^{(m)}, y) + (x^{(m)}, y) - (x, y)\right| \leqslant$
$\left|(x^{(m)}, y^{(m)} - y)\right| + \left|(x^{(m)} - x, y)\right| \leqslant \|x^{(m)}\|\|y^{(m)} - y\| + \|x^{(m)} - x\|\|y\| < M \cdot \dfrac{\varepsilon}{2M} + \dfrac{\varepsilon}{2(\|y\| + 1)}\|y\| < \varepsilon$ $\square$

Следствие 1 (непрерывность нормы). $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x \Rightarrow \exists \lim\limits_{m\to\infty} \|x^{(m)}\| = \|x\|$

Доказательство. $\|x^{(m)}\| = \lim\limits_{m\to\infty} \sqrt{(x^{(m)}, x^{(m)})} = \sqrt{\lim\limits_{m\to\infty} (x^{(m)}, x^{(m)})} = \sqrt{(x, x)} = \|x\|$
$\square$

Следствие 2 (непрерывность расстояния). $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x$, $\lim\limits_{m\to\infty} y^{(m)} = y \Rightarrow \exists \lim\limits_{m\to\infty} \rho(x^{(m)}, y^{(m)}) = \rho(x, y)$

Доказательство. Самостоятельно $\square$

Лекция 14

28.03

Определение. $\{x^{(m)}\}$ - последовательность в $\mathbb{E}_n$; $1 \leqslant m_1 < m_2 < \dots < m_p < m_{p+1} < \dots$
Тогда $\{x^{(m_p)}\}_{p=1}^{\infty}$ называется подпоследовательностью $\{x^{(m)}\}$. Обозначение: $x^{(m_p)} \subset x^{(m)}$.

$$m_1 \geqslant 1, m_2 \geqslant 2, m_3 \geqslant 3, \dots, m_p \geqslant p, \dots$$

Теорема 7.15. $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = a \Rightarrow \forall\{x^{(m_p)}\} \subset \{x^{(m)}\} \Rightarrow \exists \lim\limits_{p\to\infty} x^{(m_p)} = a$

Доказательство. Самостоятельно. Расписываем определение предела, только индекс нумерации обозначим через p. $\square$

Теорема 7.16 (Больцано-Вейерштрасса). $\{x^{(m)}\}$ *- ограничена* $\Rightarrow \exists\{x^{(m_p)}\} \subset \{x^{(m)}\} : \exists \lim\limits_{p\to\infty} x^{(m_p)}$

Доказательство. $\{x^{(m)}\}$ - ограничена, т.е $\exists M > 0 : \|x^{(m)}\| \leqslant M$, т.е $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k^{(m)}|^2 \leqslant M^2 \Rightarrow |x_1^{(m)}| \leqslant M$. Рассмотрим числовую последовательность только первых координат $\{x_1^{(m)}\}$ - ограничена $\underset{\text{т. Больцано - Вейерштрасса}}{\Rightarrow}$ $\exists\{x_1^{(m_{p_1})}\}_{p_1=1}^{\infty} \subset \{x_1^{(m)}\} : \exists \lim\limits_{p_1\to\infty} x_1^{(m_{p_1})} = a_1 \in \mathbb{R}$. Рассмотрим $\{x^{m_{p_1}}\}_{p_1=1}^{\infty} \subset \{x^{(m)}\}$. Для второй координаты получим $\{x_2^{(m_{p_2})}\}$ - ограничена $\underset{\text{т. Больцано - Вейерштрасса}}{\Rightarrow}$ $\exists\{x_2^{(m_{p_2})}\}_{p_2=1}^{\infty} \subset \{x_2^{(m)}\} : \exists \lim\limits_{p_2\to\infty} x_2^{(m_{p_2})} = a_2 \in \mathbb{R}$.
$\{x^{(m_{p_2})}\}_{p_2=1}^{\infty} \subset \{x^{(m_{p_1})}\} \subset \{x^{(m)}\}$. Сделаем конечное число шагов. На n-ом шаге $\exists\{x^{(m_{p_n})}\}_{p_n=1}^{\infty} \subset \{x^{(m)}\}$:
$\exists \lim\limits_{p_k\to\infty} x_k^{(m_{p_k})} = a_k \Rightarrow \exists \lim\limits_{p_n\to\infty} x^{(m_{p_n})} = a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ $\square$

Теорема 7.17 (Критерий Коши). $\{x^{(m)}\}$ *- сходится* $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists N : \forall m, p > n\ \rho(x^{(m)}, x^{(p)}) = \|x^{(m)} - x^{(p)}\| < \varepsilon$

Доказательство. $\Rightarrow \exists \lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = a$, т.е $\forall\varepsilon > 0 \exists N : \forall m > N\ \|x^{(m)} = a\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
$\forall m, p > N \Rightarrow \|x^{(m)} - x^{(p)}\| = \|x^{(m)} - a + a - x^{(p)}\| \leqslant \|x^{(m)} - a\| + \|x^{(p)} - a\| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

$\Leftarrow \forall\varepsilon > 0 \exists N : \forall m, p > N\ \rho(x^{(m)}, x^{(p)}) = \|x^{(m)} - x^{(p)}\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \left|x_k^{(m)} - x_k^{(p)}\right|^2} < \varepsilon \Rightarrow \forall k = 1, 2, \ldots, n\ |x_k^{(m)} - x_k^{(p)}| < \varepsilon \Rightarrow \{x_k^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ - фундаментальная $\Rightarrow \exists \lim\limits_{m\to\infty} x_k^{(m)} = a_k \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{E}_n$ □

7.3 Функции в $\mathbb{E}_n$

Определение. $E_x \subset \mathbb{E}_n, \forall x \in E_x$ по некоторому закону (f) поставлено в соответствие число $y \in R$, следовательно $y = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$. E_x - множество определения, $E_y \equiv \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), x \in E_x\}$ - множество значений.

Определение. $y = f(x), x \in E \subset \mathbb{E}_n$. Тогда множество $G \equiv \{(x_1, \ldots, x_n; y) : (x_1, \ldots, x_n) \in E, y = f(x)\} \subset \mathbb{E}_{n+1}, G$ - график функции $y = f(x)$

Примеры:

1. $f(x) \equiv c = const \qquad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + an_x$ - линейная форма.

7.4 Предел функции

Определение (Коши)**.** $f(x)$ определена при $x \in E, x^{(0)}$ - предельная точка E. Число A называется пределом $f(x)$ при $x \to x_0$ по множеству E, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)})\ |f(x) - A| < \varepsilon$

Определение (Гейне)**.** $f(x)$ определена при $x \in E, x^{(0)}$ - предельная точка E. Число A называется пределом $f(x)$ при $x \to x_0$ по множеству E, если $\forall\{x^{(m)}\} : x^{(m)} \in E, x^{(m)} \neq x^{(0)}, \lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x^{(0)} \Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} f(x^{(m)}) = A$

Обозначение: $\lim\limits_{x\to x^{(0)}} f(x) = A, x \in E$

Теорема 7.18. $f(x)$ *определена при* $x \in E, x^{(0)}$ *- предельная точка* $E \Rightarrow$ *(Определение 1* $\Leftrightarrow$ *Определение 2)*

Доказательство. $\Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in \cap\overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.
Берем $\forall\{x^{(m)}\} : x^{(m)} \neq x^{(0)}, \lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x^{(0)}, x^m \in E$
$\forall\delta > 0 \exists N : \forall m > N\ 0 < \|x^{(m)} - x^{(0)}\| < \delta$, т.е $x^{(m)} \in \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow |f(x^{(m)}) - A| < \varepsilon$
$\Leftarrow \exists\varepsilon > 0 : \forall\delta > 0\ \exists x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)})$, но $|f(x) - A| \geqslant \varepsilon$. Возьмем $\delta = \delta_m = \dfrac{1}{m} \quad \exists x^{(m)} \in E \cap \overset{\circ}{U}_{\delta_m}(x^{(0)})$, но $|f(x^{(m)}) - A| \geqslant \varepsilon$. Мы построили последовательность $\{x^{(m)}\}, x^{(m)} \in E, x^{(m)} \neq x^{(0)}, 0 < \|x^{(m)} - x^{(0)}\| < < \delta_m = \dfrac{1}{m}$, т.е $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x^{(0)} \quad \lim\limits_{m\to\infty} f(x^{(m)}) = A \Rightarrow 0 = \lim\limits_{m\to\infty} \left|f(x^{(m)}) - A\right| \geqslant \varepsilon$ - противоречие. □

Теорема 7.19. $f(x), x \in E, \exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}} f(x) = A \Rightarrow \forall F \subset E : x^{(0)}$ *- предельная точка* $F \Rightarrow \exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in F}} f(x) = A$

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. Возьем $\forall x \in F \cap \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}) \subset$
$\subset E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ □

Теорема 7.20. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in E}} f(x) = A, \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in E}} g(x) = B \Rightarrow \exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in E}} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B; \exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in E}} (f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B;$ *если* $B \neq 0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in E}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$

Доказательство. Самостоятельно. Берем определения по Гейне. □

Теорема 7.21. $\exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in E}} f(x) \Rightarrow \exists \eta > 0\ \exists M > 0 : |f(x)| \leqslant M\ \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\eta(x^{(0)})$

Доказательство. Самостоятельно. Берем определение по Коши. □

Лекция 15

04.04

Теорема 7.22. $\lim\limits_{\substack{x\to x^{(0)}\\x\in E}} f(x) = A \neq 0 \Rightarrow \exists \eta > 0 : \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\eta(x^{(0)}) \Rightarrow \operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} A$

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 7.23. $\lim\limits_{\substack{x\to x^{(0)}\\x\in E}} f(x) = A, \lim\limits_{\substack{x\to x^{(0)}\\x\in E}} g(x) = B, f(x) \geqslant g(x)\ \forall x \in E \Rightarrow A \geqslant B$

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 7.24. $\lim\limits_{\substack{x\to x^{(0)}\\x\in E}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x^{(0)}\\x\in E}} h(x) = A, f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)\ \forall x \in E \Rightarrow \exists \lim\limits_{\substack{x\to x^{(0)}\\x\in E}} g(x) = A$

Доказательство. Самостоятельно. □

Определение. $x^{(0)} \in \mathbb{E}_n, \delta > 0\ \tilde{U}_\delta(x^{(0)}) \equiv U_\delta(x^{(0)}) \setminus \left(U_{k=1}^n \{x_k \neq x_k^{(0)}\}\right)$

$$E = U_\delta(x^{(0)}), E = \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}), E = K_\delta(x^{(0)}), E = \overset{\circ}{K}_\delta(x^{(0)}), E = \tilde{U}_\delta(x^{(0)}) \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\in E)}} f(x)$$

Определение. $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{E}_n, \tilde{\delta} > 0, f(x) = f(x_1, \ldots, x_n), x \in \tilde{U}_{\tilde{\delta}}(x^{(0)})$ $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ - перестановка $(1, 2, \ldots, n)$. Повторный предел: $\lim\limits_{x_{k_1}\to x_{k_1}^{(0)}} \lim\limits_{x_{k_2}\to x_{k_2}^{(0)}} \ldots \lim\limits_{x_{k_n}\to x_{k_n}^{(0)}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если $\exists$

Примеры: $(n = 2,$ точка $(0;0))$

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \quad \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1; \quad \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0. \quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}.$

Рассмотрим $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in(x,kx)}} \dfrac{x^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2+k^2x^2} = \dfrac{1}{1+k^2} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$

2. $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} \quad \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0; \quad \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0.$

Рассмотрим $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in(x,kx)}} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{kx^3}{x^4+k^2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{kx}{k^2+x^2} = 0.$

Посмотрим $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in(x,x^2)}} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4}{x^4+x^4} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

3. $f(x,y) = y\sin\dfrac{1}{x} \quad \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} y\sin\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0; \quad \lim\limits_{y\to 0}\underbrace{\lim\limits_{x\to 0} y\sin\dfrac{1}{x}}_{\nexists} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} y\sin\dfrac{1}{x}.$

Рассмотрим $|f(x,y)| \leqslant |y|$, т.е $\underbrace{-|y|}_{\to 0} \leqslant f(x,y) \leqslant \underbrace{|y|}_{\to 0} \Rightarrow \exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

7.5 Непрерывные функции нескольких переменных

Определение. $f(x)$ определена на $E \subset \mathbb{E}_n, x^{(0)} \in E$. $f(x)$ называется непрерывной при $x = x^{(0)} \in E$ по E, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in E \cap U_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow |f(x) - f(x^{(0)})| < \varepsilon$.

$x^{(0)} \in E, x^{(0)}$ - не есть изолированная точка $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = f(x^{(0)}) \Leftrightarrow f(x)$ непрерывна при $x = x^{(0)}$ по E.

Определение непрерывности функции по Гейне написать самостоятельно.

Определение. $f(x)$ определена на $E \subset \mathbb{E}_n$. $f(x)$ непрерывна на E по E, если $\forall x^{(0)} \in E, f(x)$ непрерывна при $x = x_0$ по E.

$f(x) = f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$, $x \in$ окрестности $x^{(0)}$. Рассмотрим $\varphi(x_k) = f(x_1^{(0)}, \dots, x_{k-1}^{(0)}, x_k^{(0)}, x_{k+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$

Определение. $t = (t_1, t_2, \dots, t_p) \in E \subset \mathbb{E}_p;\ x = (x_1, \dots, x_n) \in F \subset \mathbb{E}_n;\ \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ определены на $E \in \mathbb{E}_p$, причем $\forall t \in E\ (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in F \subset \mathbb{E}_n, f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ определена на $F \subset \mathbb{E}_n$.

Тогда $y(t) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, определенная на E, называется сложной функцией.

Теорема 7.25. *$\exists y(t) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ в окрестности $t^{(0)} \in E$. Пусть $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ - непрерывны при $t = t^{(0)}$ по E, $f(x)$ - непрерывна при $x = x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = (\varphi_1(t^{(0)}), \dots, \varphi_n(t^{(0)})) \in F$ по F. Тогда $y(t)$ - непрерывна при $t = t^{(0)}$ по E.*

Доказательство. $f(x)$ непрерывна при $x = x^{(0)} \in F$ по F, т.е $\forall \varepsilon > 0\ \exists \sigma > 0 : \forall x \in F \cap K_\sigma(x^{(0)}) \Rightarrow |f(x) - f(x^{(0)})| < \varepsilon$. $\forall k = 1, 2, \dots, n\ \varphi_k(t)$ непрерывна при $t = t^{(0)} \in E$ по E, т.е $\forall \sigma > 0\ \exists \delta_k > 0 :$ $\forall t \in E \cap U_{\delta_k}(t^{(0)}) \Rightarrow |\varphi_k(t) - \varphi_k(t^{(0)})| < \sigma \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_n) > 0 \Rightarrow \forall k = 1, \dots, n\ |\varphi_k(t) -$ $- \varphi_k(t^{(0)})| < \sigma$. Рассмотрим $x = (x_1, \dots, x_n) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in F \cap K_\sigma(x^{(0)})$. Тогда $|y(t) - y(t^{(0)})| =$ $= |f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) - f(\varphi_1(t^{(0)}), \dots, \varphi_n(t^{(0)}))| < \varepsilon$. □

$L \equiv M(t), t \in [\alpha, \beta]; M(t) \equiv (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)), \varphi_k(t) \in C[\alpha, \beta]$

Определение. $E \subset \mathbb{E}_n$. Если $\forall x^{(1)}, x^{(2)} \in E\ \exists$ непрерывная кривая $M(t) : M(\alpha) = x^{(1)}, M(\beta) = x^{(2)}$, $\forall t \in [\alpha, \beta]\ M(t) \in E$, то E называется связным множеством.

Определение. $E \subset \mathbb{E}_n$. Если E открытое множество и E связное множество, то E - область.

Определение. Замыканием области E называется замкнутая область.

Теорема 7.26. *$f(x)$ непрерывна на $E \in \mathbb{E}_n$ по E, где E - связное множество. Берем $\forall x^{(1)}, x^{(2)} \in E$. Пусть $f(x^{(1)}) = A, f(x^{(2)}) = B$. Тогда $\forall C \in [A, B]\ \exists x^{(0)} \in E : f(x^{(0)}) = C$.*

Доказательство. $\exists M(t) : M(\alpha) = x^{(1)}, M(\beta) = x^{(2)}, \forall t \in [\alpha, \beta]\ M(t) \in E$. $M(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, $\varphi_k(t) \in C[\alpha, \beta], k = 1, 2, \dots, n$. Рассмотрим $u(t) = f(M(t)) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$. Тогда $u(t) \in C[\alpha, \beta]$. $u(\alpha) = f(\varphi_1(\alpha), \dots, \varphi_n(\alpha)) = f(x^{(1)}) = A, u(\beta) = f(\varphi_1(\beta), \dots, \varphi_n(\beta)) = f(x^{(2)}) = B$. Согласно теореме из первого семестра $\forall c \in [A, B]\ \exists \gamma \in [\alpha, \beta] : c = u(\gamma) = f(M(\gamma)) = f(\varphi_1(\gamma), \dots, \varphi_n(\gamma)) = f(x^{(0)})$, где $x^{(0)} = (\varphi_1(\gamma), \dots, \varphi_n(\gamma)) \in E$, т.к E связное множество. □

tg: @moksimqa

Лекция 16

08.04

Теорема 7.27. *E - ограниченное замкнутое множество $E \subset \mathbb{E}_n$; $f(x)$ непрерывна на E по $E \Rightarrow f(x)$ ограничена на E.*

Доказательство. $f(x)$ неограничена на E, т.е $\forall M > 0\ \exists x \in E : |f(x)| > M$.
$M = M_m = m = 1, 2, \ldots \quad \exists x^{(m)} \in E : |f(x^{(m)})| > M_m = m$.
$\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty} \Rightarrow \exists\{x^{(m_p)}\} \subset \{x^{(m)}\} : \exists \lim\limits_{p\to\infty} x^{(m_p)} = x^{(0)} \Rightarrow x^{(0)}$ - точка прикосновения $E \Rightarrow x^{(0)} \in E$.
$\lim\limits_{p\to\infty} f(x^{(m_p)}) = f(x^{(0)}), |f(x^{(m_p)}) > m_p \geqslant 0 \Rightarrow \lim\limits_{p\to\infty} f(x^{(m_p)}) = \infty$ □

E - ограниченное замкнутое множество, $f(x)$ - непрерывная на E по $E \Rightarrow \exists M < +\infty, \exists m > -\infty$: $\sup\limits_{x\in E} f(x) = M$, $\inf\limits_{x\in E} f(x) = m, m \leqslant M$.

Теорема 7.28. *$E \subset \mathbb{E}_n, E$ - ограниченное замкнутое множество, $f(x)$ - непрерывная на E по E, $m = \inf\limits_{x\in E} f(x), M = \sup\limits_{x\in E} f(x) \Rightarrow \exists x^{(1)}, x^{(2)} \in E : f(x_1) = m, f(x_2) = M$.*

Доказательство. Самостоятельно. □

Определение. $E \subset \mathbb{E}_n$, $f(x)$ называется равномерно непрерывной на E, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$:
$\forall x, y \in E, \rho(x, y) = \|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Теорема 7.29. *$E \subset \mathbb{E}_n$, $f(x)$ равномерно непрерывна на $E \Rightarrow f(x)$ непрерывна на E по E.*

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 7.30. *$E \subset \mathbb{E}_n$, E - ограниченное замкнутое множество, $f(x)$ - непрерывна на E по $E \Rightarrow f(x)$ равномерно непрерывна на E.*

Доказательство. Самостоятельно. □

7.6 Производные и дифференциалы функций нескольких переменных

Определение. $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{E}_n$, $f(x)$ определена в окрестности точки $x^{(0)}$. Частной производной по переменной $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ при $x = x^{(0)}$ (в точке $x^{(0)}$) функции $f(x)$ называется $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) =$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^{(0)}, \ldots, x_i^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \equiv \lim_{\Delta x_i\to 0} \frac{f(x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)}, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n) - f(x_1^{(0)}, \ldots, x_i^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})}{\Delta x_i}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})\Big|_{\text{пр}}; \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})\Big|_{\text{лев}} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x^{(0)}) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x^{(0)}), u(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_i \partial x_i}(x^{(0)}) = \frac{\partial v}{\partial x_i}(x^{(0)}),$$
$$v(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x), \ldots$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^{(0)}) = \frac{\partial w}{\partial x_i}(x^{(0)}), w(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$$

Рассмотрим $f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 > 0 \\ 0, x = y = 0 \end{cases}$

$$(x, y) \neq (0, 0) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy\frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = y\left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right];$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=-y(y\neq 0)$ $\quad\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=-y\ \forall y.$

Найдем $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta y-0}{\Delta y}=-1.$

Пусть $(x,y)\neq(0,0)$ $\quad\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=x(x\neq 0)$; $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=$

$=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=x\ \forall x$. Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0+\Delta x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\Delta x}=1$

Теорема 7.31. *Пусть* $f(x)$: *в окрестности точки* $x^{(0)}$ $\exists\frac{\partial f}{\partial x_i}(x),\frac{\partial f}{\partial x_j}(x),\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x),\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x),\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ *и* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$ *непрерывны при* $x=x^{(0)}\Rightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x^{(0)})=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x^{(0)})$.

Доказательство. Рассмотрим $W=f(x_i^{(0)}+\Delta x_i,x_j^{(0)}+\Delta x_j)-f(x_i^{(0)}+\Delta x_i,x_j^{(0)})-f(x_i^{(0)},x_j^{(0)}+\Delta x_j)+$ $+f(x_i^{(0)},x_j^{(0)})$. Введем две функции от одной переменной $g_1(x_i)=f(x_i,x_j^{(0)}+\Delta x_j)-f(x_i,x_j^{(0)})$ в окрестности точки $x_i^{(0)}$ и $g_2(x_j)=f(x_i^{(0)}+\Delta x_i,x_j)-f(x_i^{(0)},x_j)$ в окрестности точки $x_j^{(0)}$.

Тогда $W=g_1(x_i^{(0)}+\Delta x_i)-g_1(x_i^{(0)})=g_2(x_j^{(0)}+\Delta x_j)-g_2(x_j^{(0)})$.

По теореме Лагранжа: $g_1'(x_i^{(0)}+\theta_1\Delta x_i)\Delta x_i=g_2'(x_j^{(0)}+\theta_2\Delta x_j)\Delta x_j$; $\quad g_1'(x_i^{(0)}+\theta_1\Delta x_i)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i^{(0)}+\theta_1\Delta x_i,x_j^{(0)}+\Delta x_j)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i^{(0)}+\theta_1\Delta x_i,x_j^{(0)})=$ Т. Лагранжа $=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x_i^{(0)}+\theta_1\Delta x_i,x_j^{(0)}+\theta_3\Delta x_j)\Delta x_j$;

$g_2'(x_j^{(0)}+\theta_2\Delta x_j)=\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_i^{(0)}+\Delta x_i,x_j^{(0)}+\theta_2\Delta x_j)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_i^{(0)},x_j^{(0)}+\theta_2\Delta x_j)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x_i^{(0)}+\theta_4\Delta x_i,x_j^{(0)}+\theta_2\Delta x_i)\Delta x_i$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x_i^{(0)}+\theta_1\Delta x_i,x_j^{(0)}+\theta_3\Delta x_j)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x_i^{(0)}+\theta_4\Delta x_i,x_j^{(0)}+\theta_2\Delta x_j)$$

□

Определение. $x^{(0)}\in\mathbb{E}_n$, $f(x)$ определена в окрестности точки $x^{(0)}$, $\omega\in\mathbb{E}_n,\|\omega\|=1$. Производной функции $f(x)$ по направлению ω в точке $x^{(0)}$ называется $\frac{\partial f}{\partial\omega}(x^{(0)})\equiv\lim\limits_{t\to 0+0}\frac{f(x^{(0)}+t\omega)-f(x^{(0)})}{t}$

Пример: $\omega=(0,\dots,0,\overset{i}{1},\dots,0)$ $\quad\frac{\partial f}{\partial\omega}(x^{(0)})=\lim\limits_{t\to 0+0}\frac{f(x_1^{(0)},\dots,x_i^{(0)}+t,\dots,x_n^{(0)})-f(x^{(0)})}{t}=\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})\right|_{\text{пр}}$

Проверить самостоятельно: $\omega=(0,\dots,0,\overset{i}{-1},\dots,0)$ $\quad\frac{\partial f}{\partial\omega}(x^{(0)})=-\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})\right|_{\text{лев}}$

Пример: рассмотрим $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

$|f(x,y)|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow\underbrace{-\sqrt{x^2+y^2}}_{\to 0}\leqslant f(x,y)\leqslant\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\to 0}$

$\frac{\partial f}{\partial\omega}(0,0),\omega=(\cos\alpha,\sin\alpha)=\lim\limits_{t\to 0+0}\frac{f(t\omega)-f(0,0)}{t}=\lim\limits_{t\to 0+0}\frac{t\sin\frac{1}{t}}{t}=\lim\limits_{t\to 0+0}\sin\frac{1}{t}$ - не существует. $\omega=(\cos\alpha,\sin\alpha)$

Рассмотрим $f(x,y)=\begin{cases}1,y=x^2,x\neq 0\\ 0,\ \text{в остальных точках}\end{cases}$ $\qquad\frac{\partial f}{\partial\omega}(0,0)=0\ \forall\omega=(\cos\alpha,\sin\alpha)$