Арифметика с плавающей запятой

Лисицын Сергей
МФТИ 2020г.

История

1976

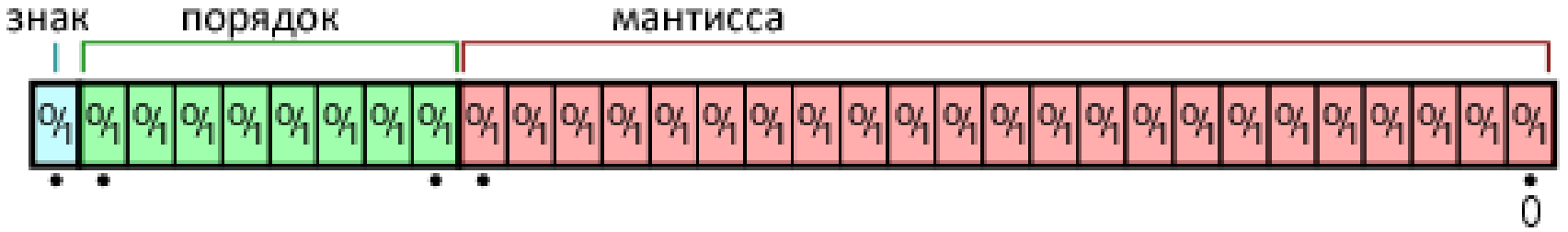
DEC, National Superconductor, Zilog, Motorola, Intel

VAX (DEC) VS K-C-S (Уильям Кэхэн, Джероми Кунен и Гарольд Стоун)

Стандарт IEEE 754:

- формат чисел с плавающей точкой;
- представление положительного и отрицательного нуля, положительной и отрицательной бесконечностей, а также нечисла́;
- методы, используемые для преобразования числа при выполнении математических операций;
- исключительные ситуации: деление на ноль, переполнение, потеря значимости, работа с денормализованными числами и другие;
- операции: арифметические и другие.

Основы



$(-1)^s \times M \times B^E$

s — знак

B – основание

E — порядок

M — мантисса

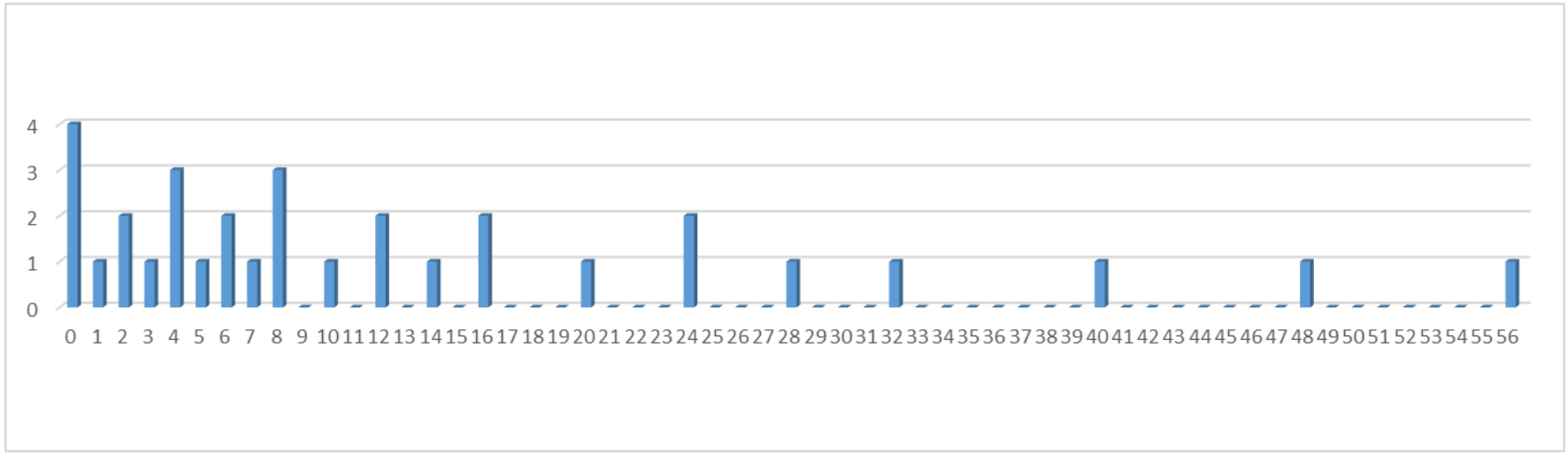
B = 2 наиболее устойчиво к ошибкам округления

1,010e+1 = 10,10e+0 = $1\times2^1+0\times2^0+1\times2^{-1}+0\times2^{-2}=2+0,5=2,5$

Тип float6

s e e m m m.

$(-1)^s \times M \times 2^E$

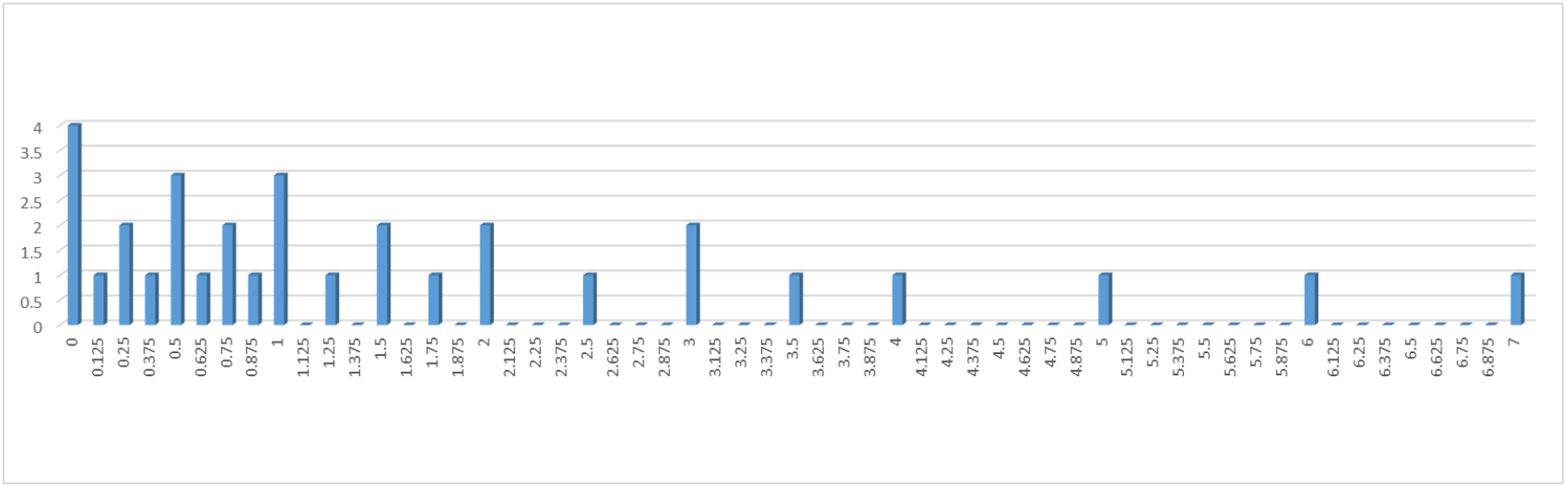


exp		mantissa				res
0	0	0	0	0	=	0
0	0	0	0	1	=	1
0	0	0	1	0	=	2
0	0	0	1	1	=	3
0	0	1	0	0	=	4
0	0	1	0	1	=	5
0	0	1	1	0	=	6
0	0	1	1	1	=	7
0	1	0	0	0	=	0
0	1	0	0	1	=	2
0	1	0	1	0	=	4
0	1	0	1	1	=	6
0	1	1	0	0	=	8
0	1	1	0	1	=	10
0	1	1	1	0	=	12
0	1	1	1	1	=	14
1	0	0	0	0	=	0
1	0	0	0	1	=	4
1	0	0	1	0	=	8
1	0	0	1	1	=	12
1	0	1	0	0	=	16
1	0	1	0	1	=	20
1	0	1	1	0	=	24
1	0	1	1	1	=	28
1	1	0	0	0	=	0
1	1	0	0	1	=	8
1	1	0	1	0	=	16
1	1	0	1	1	=	24
1	1	1	0	0	=	32
1	1	1	0	1	=	40
1	1	1	1	0	=	48
1	1	1	1	1	=	56

Нормальная форма

s e e 0.m m m

$(-1)^s \times 0.M \times 2^E$



	exp		mantissa				res
$0.M \times 2^0$	0	0	0	0	0	=	0
	0	0	0	0	1	=	0.125
	0	0	0	1	0	=	0.25
	0	0	0	1	1	=	0.375
	0	0	1	0	0	=	0.5
	0	0	1	0	1	=	0.625
	0	0	1	1	0	=	0.75
	0	0	1	1	1	=	0.875
$0.M \times 2^1$	0	1	0	0	0	=	0
	0	1	0	0	1	=	0.25
	0	1	0	1	0	=	0.5
	0	1	0	1	1	=	0.75
	0	1	1	0	0	=	1
	0	1	1	0	1	=	1.25
	0	1	1	1	0	=	1.5
	0	1	1	1	1	=	1.75
$0.M \times 2^2$	1	0	0	0	0	=	0
	1	0	0	0	1	=	0.5
	1	0	0	1	0	=	1
	1	0	0	1	1	=	1.5
	1	0	1	0	0	=	2
	1	0	1	0	1	=	2.5
	1	0	1	1	0	=	3
	1	0	1	1	1	=	3.5
$0.M \times 2^3$	1	1	0	0	0	=	0
	1	1	0	0	1	=	1
	1	1	0	1	0	=	2
	1	1	0	1	1	=	3
	1	1	1	0	0	=	4
	1	1	1	0	1	=	5
	1	1	1	1	0	=	6
	1	1	1	1	1	=	7

Повтор значений

exp		mantissa				res
0	0	0	0	0	=	0
0	1	0	0	0	=	0
1	0	0	0	0	=	0
1	1	0	0	0	=	0

exp		mantissa				res
0	0	0	1	0	=	0.25
0	1	0	0	1	=	0.25

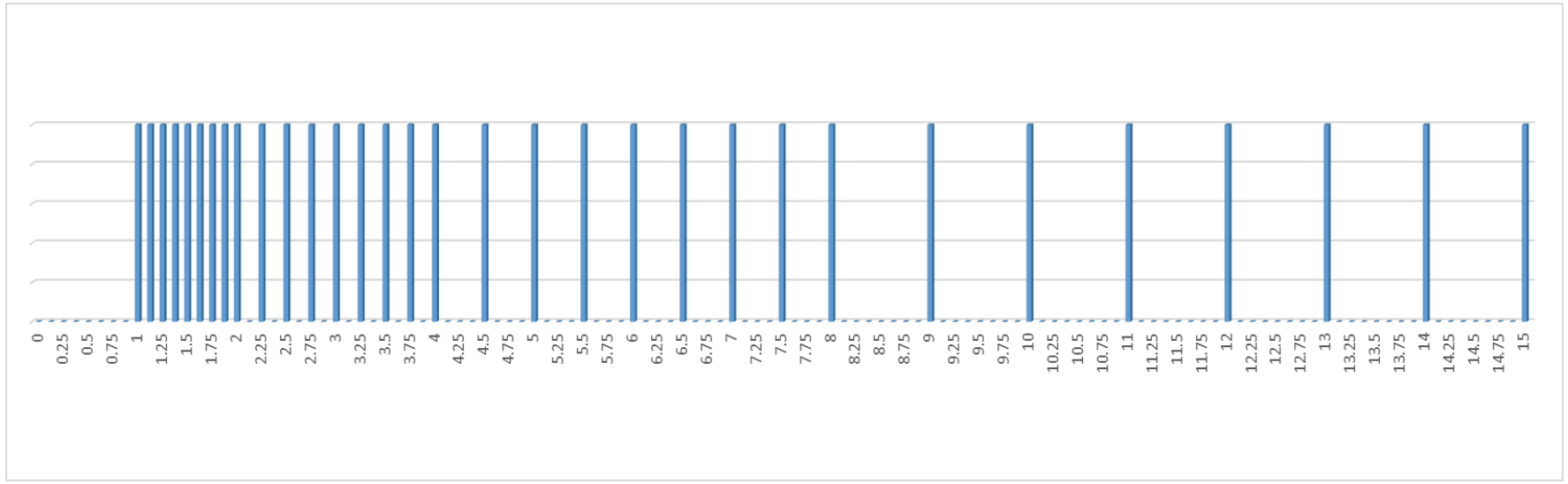
exp		mantissa				res
0	0	1	0	0	=	0.5
0	1	0	1	0	=	0.5
1	0	0	0	1	=	0.5

exp		mantissa				res
0	1	1	0	0	=	1
1	0	0	1	0	=	1
1	1	0	0	1	=	1

Нормализованные числа

s e e 1.m m m

$(-1)^s \times 1.M \times 2^E$



	exp		mantissa				res
$1.M \times 2^0$	0	0	0	0	0	=	1
	0	0	0	0	1	=	1.125
	0	0	0	1	0	=	1.25
	0	0	0	1	1	=	1.375
	0	0	1	0	0	=	1.5
	0	0	1	0	1	=	1.625
	0	0	1	1	0	=	1.75
	0	0	1	1	1	=	1.875
$1.M \times 2^1$	0	1	0	0	0	=	2
	0	1	0	0	1	=	2.25
	0	1	0	1	0	=	2.5
	0	1	0	1	1	=	2.75
	0	1	1	0	0	=	3
	0	1	1	0	1	=	3.25
	0	1	1	1	0	=	3.5
	0	1	1	1	1	=	3.75
$1.M \times 2^2$	1	0	0	0	0	=	4
	1	0	0	0	1	=	4.5
	1	0	0	1	0	=	5
	1	0	0	1	1	=	5.5
	1	0	1	0	0	=	6
	1	0	1	0	1	=	6.5
	1	0	1	1	0	=	7
	1	0	1	1	1	=	7.5
$1.M \times 2^3$	1	1	0	0	0	=	8
	1	1	0	0	1	=	9
	1	1	0	1	0	=	10
	1	1	0	1	1	=	11
	1	1	1	0	0	=	12
	1	1	1	0	1	=	13
	1	1	1	1	0	=	14
	1	1	1	1	1	=	15

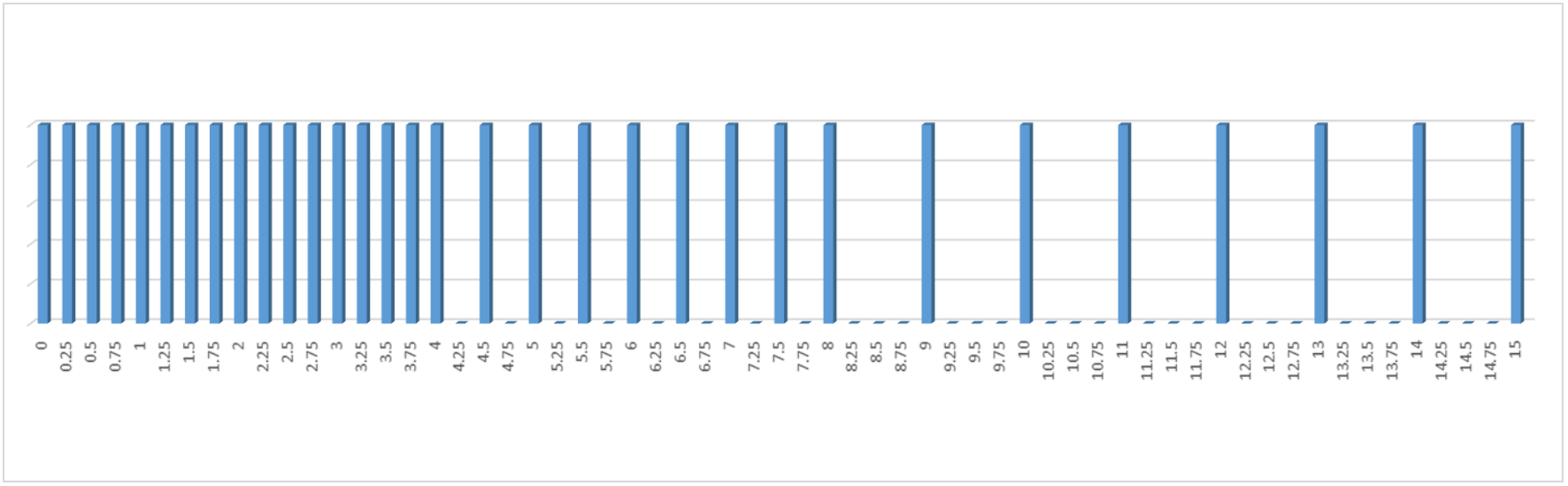
Денормализованные числа

s e e 1/0. m m m

$(-1)^s \times 1.M \times 2^E$, если $E_{min} \le E \le E_{max}$

$(-1)^s \times 0.M \times 2^{E_{min}}$, если $E = E_{min} - 1$

Emax = 3, Emin = 1, E = 0 – денормализованные числа



	exp		mantissa				res
0.M × 2^1	0	0	0	0	0	=	0
	0	0	0	0	1	=	0.25
	0	0	0	1	0	=	0.5
	0	0	0	1	1	=	0.75
	0	0	1	0	0	=	1
	0	0	1	0	1	=	1.25
	0	0	1	1	0	=	1.5
	0	0	1	1	1	=	1.75
1.M × 2^1	0	1	0	0	0	=	2
	0	1	0	0	1	=	2.25
	0	1	0	1	0	=	2.5
	0	1	0	1	1	=	2.75
	0	1	1	0	0	=	3
	0	1	1	0	1	=	3.25
	0	1	1	1	0	=	3.5
	0	1	1	1	1	=	3.75
1.M × 2^2	1	0	0	0	0	=	4
	1	0	0	0	1	=	4.5
	1	0	0	1	0	=	5
	1	0	0	1	1	=	5.5
	1	0	1	0	0	=	6
	1	0	1	0	1	=	6.5
	1	0	1	1	0	=	7
	1	0	1	1	1	=	7.5
1.M × 2^3	1	1	0	0	0	=	8
	1	1	0	0	1	=	9
	1	1	0	1	0	=	10
	1	1	0	1	1	=	11
	1	1	1	0	0	=	12
	1	1	1	0	1	=	13
	1	1	1	1	0	=	14
	1	1	1	1	1	=	15

Специальные числа

s e e 1/0. m m m

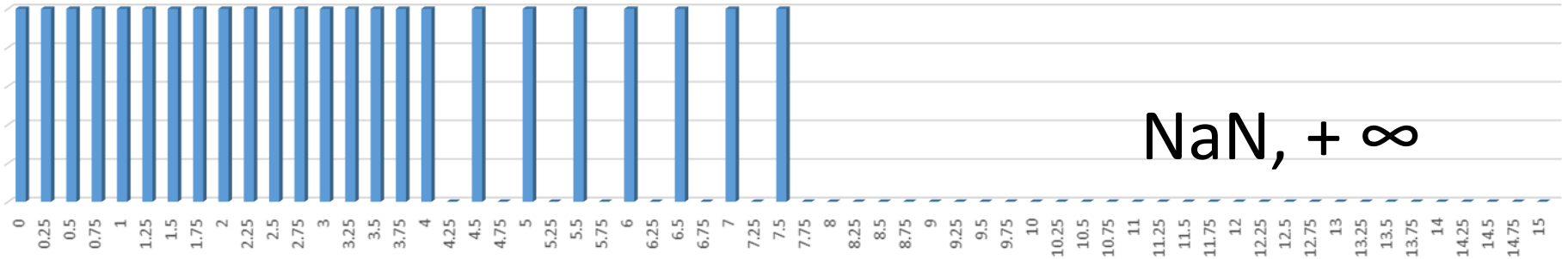
$(-1)^s \times 1.M \times 2^E$, если $E_{min} \le E \le E_{max}$

$(-1)^s \times 0.M \times 2^{E_{min}}$, если $E = E_{min} - 1$

$E_{min} = 1$, $E_{max} = 2$

E = 0 – денормализованные числа

E = 3 – специальные числа (±∞, NaN)



NaN, + ∞

NaN:

∞+(- ∞)

0 × ∞

0/0, ∞/∞

sqrt(x), где x<0

±0:

(+∞/0) + ∞ = +∞

(+∞/-0) + ∞ = NaN

	exp		mantissa				res
$0.M \times 2^1$	0	0	0	0	0	=	0
	0	0	0	0	1	=	0.25
	0	0	0	1	0	=	0.5
	0	0	0	1	1	=	0.75
	0	0	1	0	0	=	1
	0	0	1	0	1	=	1.25
	0	0	1	1	0	=	1.5
	0	0	1	1	1	=	1.75
$1.M \times 2^1$	0	1	0	0	0	=	2
	0	1	0	0	1	=	2.25
	0	1	0	1	0	=	2.5
	0	1	0	1	1	=	2.75
	0	1	1	0	0	=	3
	0	1	1	0	1	=	3.25
	0	1	1	1	0	=	3.5
	0	1	1	1	1	=	3.75
$1.M \times 2^2$	1	0	0	0	0	=	4
	1	0	0	0	1	=	4.5
	1	0	0	1	0	=	5
	1	0	0	1	1	=	5.5
	1	0	1	0	0	=	6
	1	0	1	0	1	=	6.5
	1	0	1	1	0	=	7
	1	0	1	1	1	=	7.5
NaN, + ∞	1	1	0	0	0	=	+∞
	1	1	0	0	1	=	NaN
	1	1	0	1	0	=	NaN
	1	1	0	1	1	=	NaN
	1	1	1	0	0	=	NaN
	1	1	1	0	1	=	NaN
	1	1	1	1	0	=	NaN
	1	1	1	1	1	=	NaN

Неассоциативность арифметики

1	0	0	0	0	=	4
+						
0	0	0	1	1	=	0.75
+						
0	0	0	1	1	=	0.75
=						
1	0	0	1	0	=	5

0	0	0	1	1	=	0.75
+						
0	0	0	1	1	=	0.75
+						
1	0	0	0	0	=	4
=						
1	0	0	1	1	=	5.5

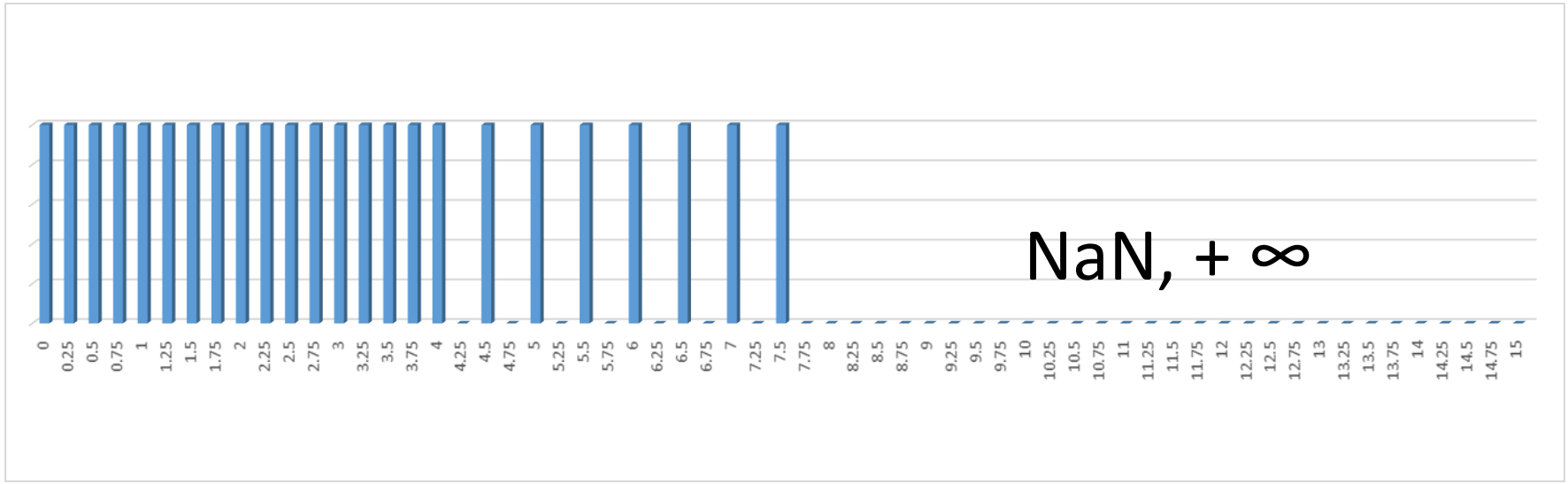
$(10^{20} + 1) - 10^{20} == 0$

$(10^{20} - 10^{20}) + 1 == 1$

$x^2 - y^2$ vs $(x - y)(x + y)$

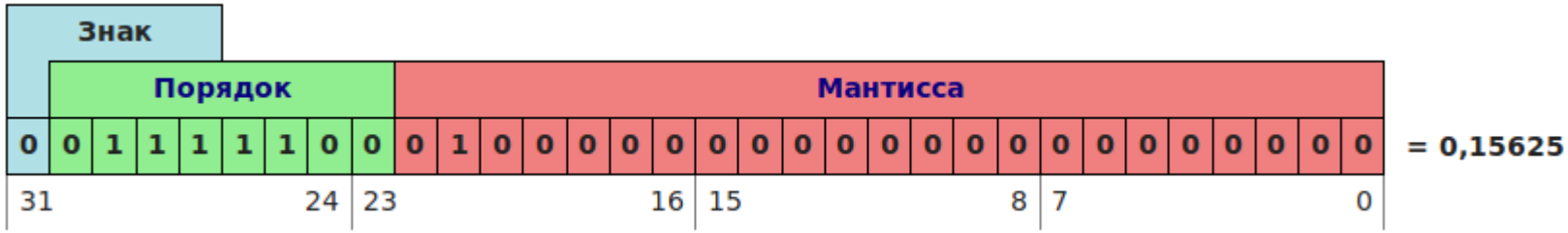
$x == y$ vs $(x - y) < \varepsilon$

$\Delta = 2^{E-M.size-1}$



exp		mantissa				res
0	0	0	0	0	=	0
0	0	0	0	1	=	0.25
0	0	0	1	0	=	0.5
0	0	0	1	1	=	0.75
0	0	1	0	0	=	1
0	0	1	0	1	=	1.25
0	0	1	1	0	=	1.5
0	0	1	1	1	=	1.75
0	1	0	0	0	=	2
0	1	0	0	1	=	2.25
0	1	0	1	0	=	2.5
0	1	0	1	1	=	2.75
0	1	1	0	0	=	3
0	1	1	0	1	=	3.25
0	1	1	1	0	=	3.5
0	1	1	1	1	=	3.75
1	0	0	0	0	=	4
1	0	0	0	1	=	4.5
1	0	0	1	0	=	5
1	0	0	1	1	=	5.5
1	0	1	0	0	=	6
1	0	1	0	1	=	6.5
1	0	1	1	0	=	7
1	0	1	1	1	=	7.5
1	1	0	0	0	=	+∞
1	1	0	0	1	=	NaN
1	1	0	1	0	=	NaN
1	1	0	1	1	=	NaN
1	1	1	0	0	=	NaN
1	1	1	0	1	=	NaN
1	1	1	1	0	=	NaN
1	1	1	1	1	=	NaN

IEEE 754




```
3f80 0000 = 1
c000 0000 = −2

7f7f ffff ≈ 3.4028234 × 10^38  (максимальное одинарной точности)
0000 0001 = 2^-149 ≈ 1.401298464 × 10^−45 (Минимальное положительное число одинарной точности — денормализованное)
0080 0000 = 2^-126 ≈ 1.175494351 × 10^−38 (Минимальное нормализованное положительное число одинарной точности)

0000 0000 = 0
8000 0000 = −0

7f80 0000 = infinity
ff80 0000 = −infinity

3eaa aaab ≈ 1/3
```

$(-1)^s \times 1.M \times 2^{E-127}$, если $Emin \le E-127 \le Emax$

$(-1)^s \times 0.M \times 2^{Emin}$, если $E=Emin-1$

Emin = -126, Emax = 127

E-127 = -127 – денормализованные числа

E-127 = 128 – специальные числа (±∞, NaN)

Округление до четного

Название	Полное название	Основание	Кол-во двоичных разрядов мантиссы	Число десятичных разрядов	Экспонента (бит)	Десятичный E max	Смещение экспоненты[1]	E min	E max	Примечания
binary16	Половинная точность	2	11	3.31	5	4.51	$2^4-1=15$	−14	+15	Не основной
binary32	Одинарная точность	2	24	7.22	8	38.23	$2^7-1=127$	−126	+127	
binary64	Двойная точность	2	53	15.95	11	307.95	$2^{10}-1=1023$	−1022	+1023	
binary128	Четырёхкратная точность	2	113	34.02	15	4931.77	$2^{14}-1=16383$	−16382	+16383	
binary256	Восьмикратная точность	2	237	71.34	19	78913.2	$2^{18}-1=262143$	−262142	+262143	Не основной
decimal32		10	7	7	7.58	96	101	−95	+96	Не основной
decimal64		10	16	16	9.58	384	398	−383	+384	
decimal128		10	34	34	13.58	6144	6176	−6143	+6144	

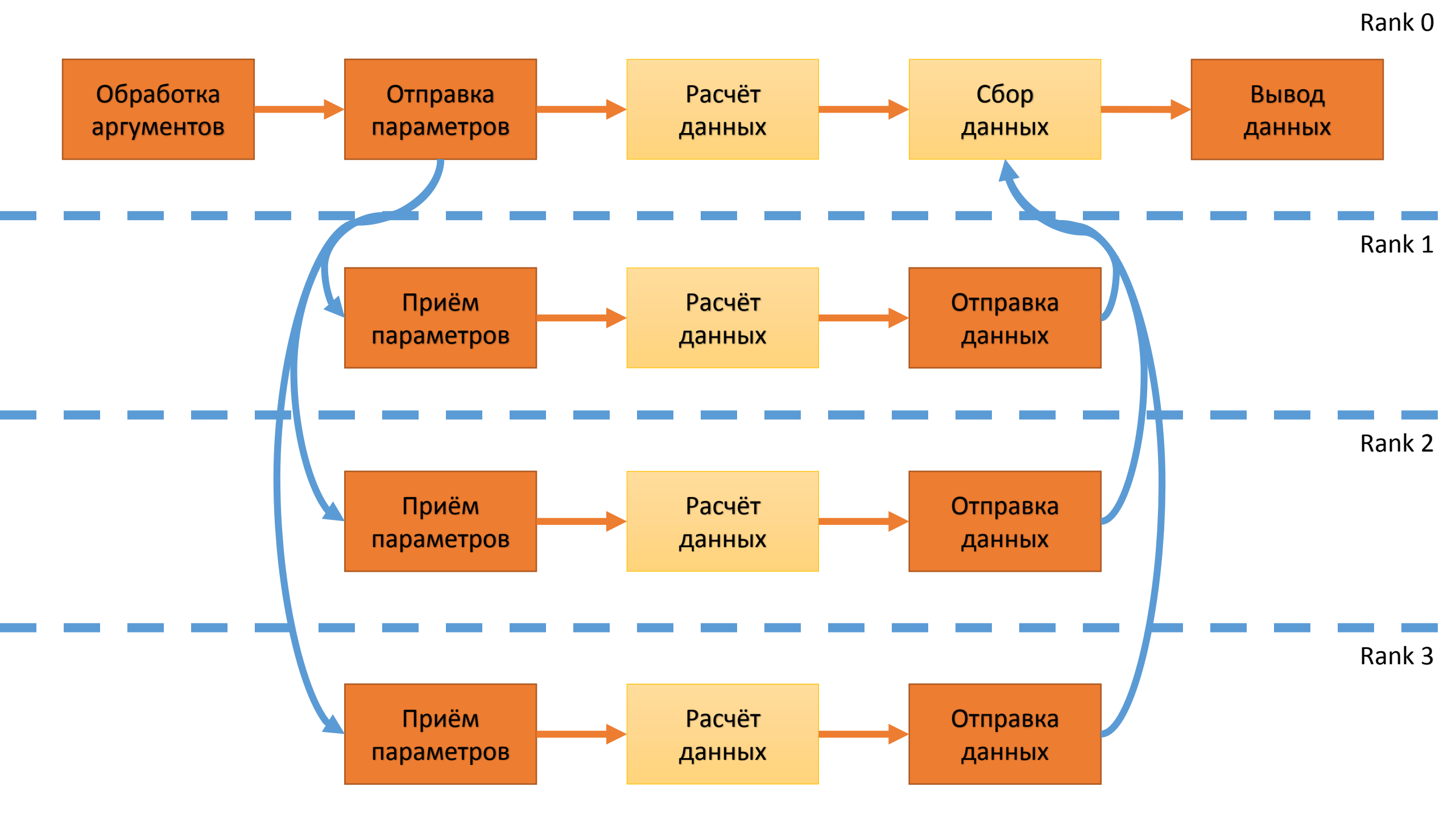
Вычисление ряда

$$\sum_{x=1}^{len} \frac{6}{\pi^2 x^2}$$

$ mpirun –n [processes] ./series [seriesLength]

- Проверить аргументы
- Разослать seriesLength
- Посчитать
- Собрать результат
- Вывести

[RES] 1.00000 [TIME] 1.85353


Rank 0
Обработка аргументов
Отправка параметров
Расчёт данных
Сбор данных
Вывод данных
Rank 1
Приём параметров
Расчёт данных
Отправка данных
Rank 2
Приём параметров
Расчёт данных
Отправка данных
Rank 3
Приём параметров
Расчёт данных
Отправка данных

Арифметика с плавающей запятой

Лисицын Сергей
МФТИ 2020г.