Задача 1.

Рассматривается краевая задача вида $y'' - f(x,y) = 0,\ \ y(0) = a,\ y(1) = b$

В 1924 году Б. Нумеров для нелинейных функций, не зависящих от первой производной решения, предложил «компактную» аппроксимацию четвертого порядка. Она имеет вид

$$\frac{y_{m+1} - 2y_m + y_{m-1}}{h^2} = f_m + \frac{1}{12}(f_{m+1} - 2f_m + f_{m-1})$$

Реализация граничных условий трудностей не вызывает.

С помощью аппроксимации Нумерова с линеаризацией по Ньютону и последующей заменой прогонки редукционным алгоритмом решить следующие краевые задачи.

В1 (слабый) $y'' - e^y = 0,\ \ y(0) = 1,\ y(1) = b$, b меняется от 0 до 1 с шагом 0,1. Разбить на 4 исполнителя, количество точек на отрезке от 400 до 4000

В2 (средний) $y'' - e^{-y} = 0,\ \ y(0) = 1,\ y(1) = b$, b меняется от 0 до 1 с шагом 0,1. Разбить на 4 исполнителя, количество точек на отрезке от 400 до 4000

- Подробно исследовать окрестности b=1.5 Что происходит в этой окрестности?

В3 (Средний) $y'' = a(y - y^3)\ \ y(-10) = y(10) = \sqrt{2}$ а меняется от 100 до 1000000, Разбить на несколько исполнителей, количество точек на каждого исполнителя от 400 до 4000, условие на пространственный шаг - $h << \frac{1}{\sqrt{a}}$

В4 (Тяжелый) $y'' = a(y^3 - y)\ \ y(-10) = y(10) = \sqrt{2}$ а меняется от 100 до 1000000, Разбить на несколько исполнителей, количество точек на каждого исполнителя от 400 до 4000, условие на пространственный шаг - $h << \frac{1}{\sqrt{a}}$

В5 (средний) $y'' - a(y - |x|)^5 = 0,\ \ y(0) = 1,\ y(1) = b >> 1$, а меняется от 100 до 10000. Разбить на 4 исполнителя, количество точек на отрезке от 400 до 4000

Как можно усовершенствовать разбиение области на зоны ответственности, если использовать априорную информацию о существовании в окрестности нуля внутреннего погранслоя?

Задача 2 Для уравнения теплопроводности построить неявную разностную схему, с ее помощью решить краевую задачу. Для решения уравнений на верхнем слое применять либо нелинейность с нижнего слоя (слабый вариант – с), либо линеализацию по Ньютону с итерациями по нелинейности (Средний вариант – М, тяжелый вариант – Т). Для решения линейных систем применять редукционный алгоритм. Расчетную область разбить на зоны ответственности не менее 4 исполнителей.

В8 (С, М)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} u^3 \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u(0,t) = 2t^{1/3}, u(100,t) = 0, u(x,0) = 0.$$

Для проверки. При $t < 40$ точным решением этой задачи является функция с разрывной производной

$$u = \begin{cases} (-8(x - \frac{8t}{3}))^{1/3}, if\ x - \frac{8t}{3} < 0 \\ 0, if\ x - \frac{8t}{3} \geq 0 \end{cases}$$

В9 (с,т)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} u^3 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{9} u^5$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, u(100,t) = 0, u(x,0) = \begin{cases} u_0 > 0\ if\ x \leq \pi \\ else\ 0 \end{cases}$$

В10 (с, т)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} u^3 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{9} u^4 - 0.1u$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, u(100,t) = 0, u(x,0) = \begin{cases} u_0 > 0\ if\ x \leq \pi \\ else\ 0 \end{cases}$$