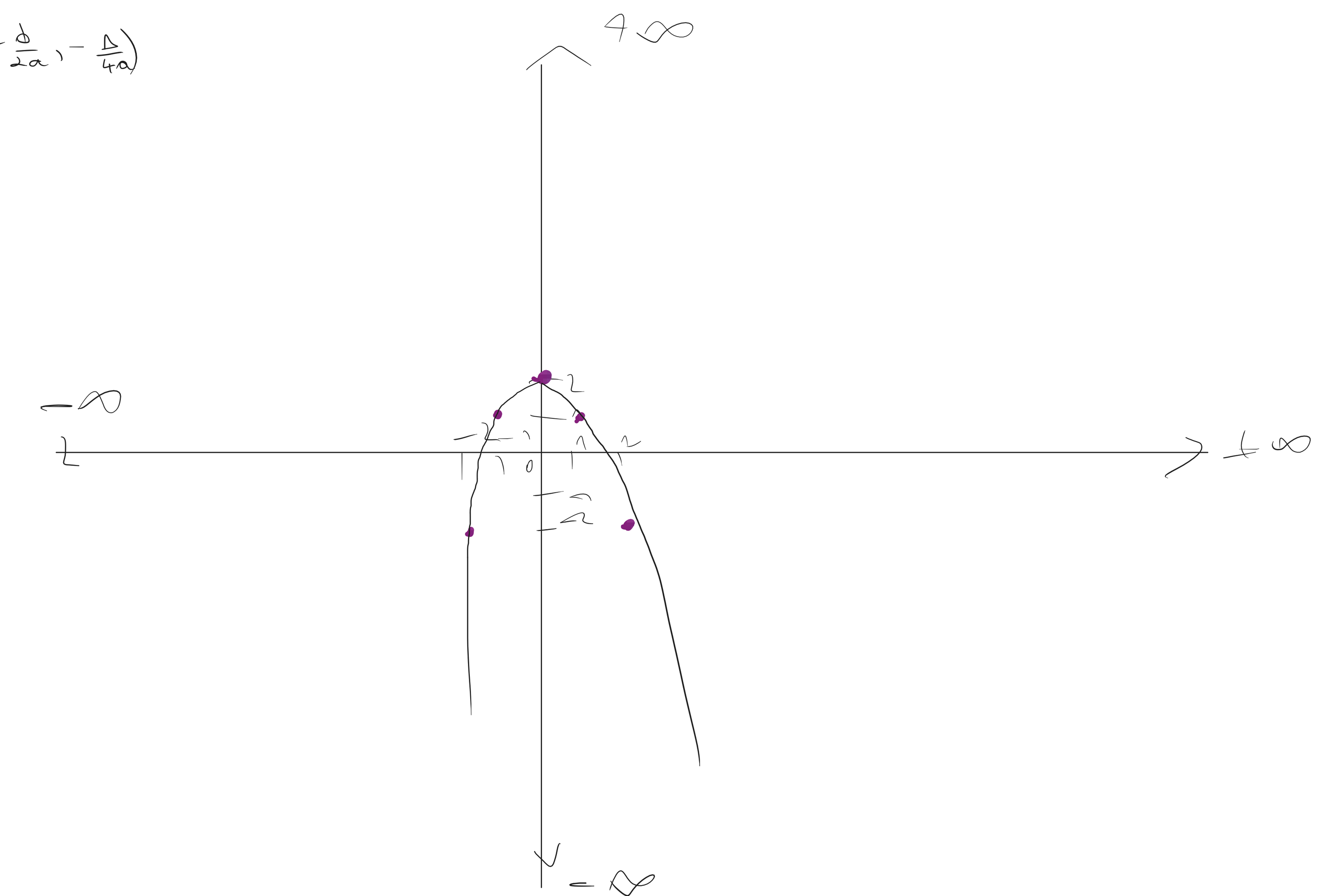
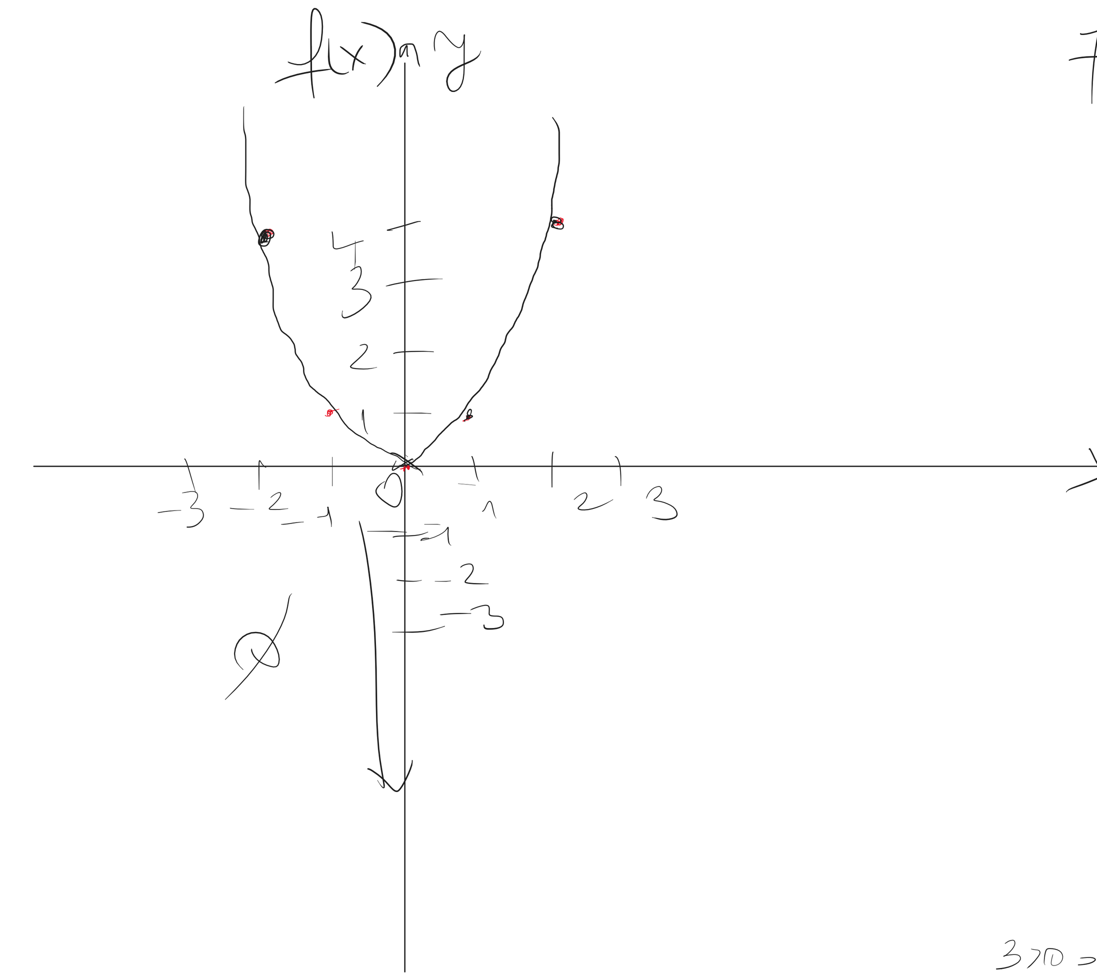
$f_2(x) = -x^2+2$, pct de min $= -\infty$
pct de maxim $= \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

$f_2(0) = 2$
$f_2(1) = -1+2=1$
$f_2(2) = -4+2=-2$
$f_2(-1) = -1+2=1$
$f_2(-2) = -4+2=-2$





$f_1(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$
$f_2(x) = -x^2,\ x \in \mathbb{R}$

$f_1(0) = 0$
$f_1(1) = 1$
$f_1(2) = 4$
$f_1(-1) = (-1)^2 = 1$
$f_1(-2) = (-2)^2 = 4$

$f_1(x) = x^2$, $f(x) = ax^2+bx+c$
pct de minim: $A\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

$\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$ $f_1(x) = x^2 = x^2+0\cdot x+0$.
$A = \left(-\frac{0}{2}, -\frac{0}{4}\right) = (0,0)$

$3>0 \Rightarrow \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$
$-\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{6} = \frac{1}{3}$, $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4-4\cdot 9}{12} = -\frac{-32}{12} = \frac{32}{12} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$
α Sol: {(1/3), (1/3), (-1/3)} $f(\alpha)$

$f(\alpha) = 3\alpha^2 - 2\alpha + 3$ — ec de gr 2

form g.: $ax^2+bx+c=0$.
Caz I: dc $a>0$: pct de max $+\infty$
pct de minim $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$
val lui x

Caz II: dc $a<0$
- pct de max: $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$
- pct de min: $-\infty$

Considerăm sistemul omogen $\begin{cases} x-y=0 \\ x+z=0 \\ -y-z=0 \end{cases}$ a cărui matrice este A. Demonstrați că acea soluție (x_0, y_0, z_0) a acestui sistem, cu toate componentele numere reale, pt. care suma $(x_0-1)^2+(y_0-1)^2+(z_0-1)^2$ ia cea mai mică valoare posibilă.

Pp sistem comp nedeterminat
Fie $x=\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$,
$\Rightarrow \begin{cases} \alpha-y=0 \Rightarrow \alpha=y \Rightarrow y=\alpha. \\ \alpha+z=0 \Rightarrow \alpha=-z \Rightarrow z=-\alpha \\ -y-z=0 \end{cases}$
$-\alpha-(-\alpha) = -\alpha+\alpha = 0$.
$\begin{cases} x=\alpha \\ y=\alpha, \alpha\in\mathbb{R} \\ z=\alpha \end{cases}$

$\begin{cases} x-y+0z=0 \\ x+0\cdot y+z=0 \\ 0\cdot x-y-z=0 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\to f(x)$
$(x_0-1)^2+(y_0-1)^2+(z_0-1)^2$ — minim
$=(\alpha-1)^2+(\alpha-1)^2+(-\alpha-1)^2=$
$=2(\alpha-1)^2+((-1)(\alpha+1))^2 = 2(\alpha-1)^2+(-1)^2\cdot(\alpha+1)^2 = 2(\alpha-1)^2+(\alpha+1)^2$
$=2(\alpha^2-2\alpha+1)+\alpha^2+2\alpha+1 = 2\alpha^2-4\alpha+2+\alpha^2+2\alpha+1$
$=$

d) Demonstrați că mulțimea $G=\{A, A^2, A^3, A^4\}$ este grup în raport cu op. de înmulțire a matricelor.
G este grup dacă: $\forall x,y,z\in G, (x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z)$
$\forall x,y,z\in G, \exists e\in G$ a.î. $x\circ e = e\circ x = x$
$\forall x,y,z\in G, \exists x'\in G$ a.î. $x'\circ x = x\circ x' = e$

1) asoc.
$(x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z) = (A^x\cdot A^y)\cdot A^z = A^x\cdot(A^y\cdot A^z)$
$\begin{cases} X=A^x, x\in\{1,4\} \\ \text{analog} \end{cases}$
$\Rightarrow A^{x+y}\cdot A^z = A^x\cdot A^{y+z}$
$\Leftrightarrow A^{x+y+z} = A^{x+y+z} \Rightarrow$ asoc (I)

2) el. neutru în rap cu $\cdot$ matricelor $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \notin G$.
$x\cdot e = e\cdot x = x,\ \forall x\in G, e\in G$
$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^5 = A^1 \Rightarrow T=4$
$\Rightarrow A\cdot A^4 = A^5 = A^1$
$\begin{cases} A^{4k} = A^4 \\ A^{4k+1} = A^1 \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow A^4\in G$ — el. neutru
Din I, II, III $\Rightarrow$ grup

3) $A\cdot A' = A^4$, $A'\in G$
1. $A^1\cdot A^x = A^4 \Rightarrow x=3$, $A^3\in G$.
2. $A^2\cdot A^x = A^4 \Rightarrow x=2$, $A^2\in G$
3. $A^3\cdot A^x = A^4 \Rightarrow x=1$, $A^1\in G$
4. $A^4\cdot A^x = A^4 \Rightarrow x=4$, $A^4\in G$
$\Rightarrow \exists A', \forall A\in G$ (III)

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Dacă $X(a) = I_2 + aA$, $a\in\mathbb{R}$, să se determine numărul real t, știind că $X(2^t) = X(1)\cdot X\left(\frac{1}{2}\right)\cdot X\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot X\left(\frac{1}{1024}\right)$. **(9 pct.)**

$X(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+1 & 2a \\ -a & -a+1 \end{pmatrix}$
$X(b) = \begin{pmatrix} 2b+1 & 2b \\ -b & -b+1 \end{pmatrix}$
$X(a)\cdot X(b) = \begin{pmatrix} 2(a+b+ab)+1 & 2(a+b+ab) \\ -(a+b+ab) & -(a+b+ab)+1 \end{pmatrix}$
$= X(a+b+ab)$
$a+b+ab = a(1+b)+b+1-1$
$= a(1+b)+(1+b)-1$
$= (1+b)(1+a)-1$

$X(a)\cdot X(b) = X((1+a)(1+b)-1)$
$\Rightarrow X(a)\cdot X(b)\cdot X(c) = (X(a)\cdot X(b))\cdot X(c)$
$= X((1+a)(1+b)-1)\cdot X(c)$
$= X((1+[(1+a)(1+b)-1])(1+c)-1)$
$= X((1+a)(1+b)(1+c)-1)$

$\mathcal{I}$: $A^n - (\operatorname{tr} A)\cdot A^{n-1} + (\det A)\cdot I_n = O_n$
$\operatorname{tr} A = 1$, $\det A = 0 \Rightarrow A^2 - A = O_n \Rightarrow A^2 = A$.

$\overbrace{X(2^t) = X(1)\cdot X(1/2)\cdot\ldots\cdot X(1/1024)}^{M}$
$M = X(\underbrace{(1+1)(1+1/2)\cdot\ldots\cdot(1+1/1024)}_{P}-1)$
$M = X(P-1) = X(1024)$
$X(2^t) = X(1024) \Rightarrow \boxed{t=10}$

$P = 2\cdot\left(\frac{1+2}{2}\right)\left(\frac{1+3}{3}\right)\left(\frac{1+4}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1+1024}{1024}\right)$
$P = 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{1025}{1024}$
$= 1025$

Fie polinomul $f = X^3 - 3X^2 + 2X$. Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f, atunci $E = x_1^2+x_2^2+x_3^2$ este egală cu: **(5 pct.)**

$S_1 = -\frac{b}{a} = 3 = x_1+x_2+x_3$
$S_2 = \frac{c}{a} = 2 = x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3$
$S_3 = -\frac{d}{a} = x_1x_2x_3$

$(x_1+x_2)^2 = x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$
$(x_1-x_2)^2 = x_1^2-2x_1x_2+x_2^2$
$(x_1+x_2+x_3)^2 = \underbrace{x_1^2+x_2^2+x_3^2}_{E} + 2(\underbrace{x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3}_{S_2})$
S_1^2
$E = S_1^2 - 2S_2$
$= 5$

I. Algebră. Așezăm succesiv toate numerele naturale impare într-un triunghi, astfel:

1 ← $0\cdot 1+1$
$1\cdot 2+1$ → 3 5
$2\cdot 3+1$ → 7 9 11
$3\cdot 4+1$ → 13 15 17 19
....

(Așezarea numerelor continuă în mod analog. În această așezare, linia a treia a triunghiului este deci cea care conține numerele 7, 9 și 11.)

(a) Cu ce număr începe a 15-a linie a triunghiului?
(b) Pe ce linie a triunghiului se află numărul 501?
(c) Arătați că, pentru orice $n\geq 1$, suma tuturor numerelor de pe linia n a triunghiului este cub perfect.

a) linia 1: 1 el.
linia 2: 2 el
linia n: n elemente
Tot de linii 1 → 14
nr: $1+\ldots+14 = \frac{14\cdot 15}{2} = 105$
$2\cdot 105+1 = 211$

b) 501 – pe ce linie | cu ce încep
17: $16\cdot 17+1 = 273$
18: $17\cdot 18+1=$
22: $21\cdot 22+1 = 463$
23: $22\cdot 23+1 = 507$
$\Rightarrow 501 \in 22$.

c) n: $\underbrace{n(n-1)+1}_{el\,1} + \underbrace{n(n-1)+3}_{el\,2} + \ldots + \underbrace{n(n-1)+(n\cdot 2-1)}_{el\,n}$
$n\cdot[n(n-1)] + 1+3+\ldots+(2n-1)$
$n^3-n^2+n^2 = n^3$ – cub | $2(1+2+\ldots+n)-n$
$2\frac{n(n+1)}{2}-n = n^2+n-n$
$= n^2$

d) nu se dublează pe aceeași linie
primul el: $n(n-1)+1 = n^2-n+1$
ultimul el: $n(n-1)+2n-1 = n^2+n-1$
$\frac{\text{ultimul el}}{\text{primul}} < 2$ $\frac{n^2+n-1}{n^2-n+1} ? 2$
$n^2+n-1 \ ?\ 2n^2-2n+2$
$0 \ ?\ n^2-3n+3$
$n=1$
$\nexists$ el $\in l_k$ care să $\ldots$
$0<1$
$0\leq 1$
$0\leq 3$
$0\leq 7$