## Formule de calcul

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$

## Funcţia de gradul II

**Definiţie**:$f:R \to R, f(x)=ax^2+bx+c, a \neq 0$ ,a,b,c$\in R$ se numeşte funcţia de gradul II

**Maximul sau minimul funcţiei de gradul II**

Dacă a<0 atunci $f_{max} = \frac{-\Delta}{4a}$, *realizat* pentru $x = \frac{-b}{2a}$

Dacă a >0 atunci $f_{min} = \frac{-\Delta}{4a}$, *realizat* pentru $x = \frac{-b}{2a}$ ;Vârful parabolei $V(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$

**Ecuaţia de gradul II**:$ax^2+bx+c=0$ ;$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, $\Delta = b^2 - 4ac$

## Numere complexe

**1. Numere complexe sub formă algebrică**

$z=a+bi$, $a,b\in R$, $i^2=-1$, a=Re z , b=Im z

C- mulţimea numerelor complexe;C={a+bi/a,b$\in R$}

Conjugatul unui număr complex: $\overline{z} = a - bi$

**Proprietăţi:**

1. $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
3. $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$
4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
5. $z\in R \Leftrightarrow z = \overline{z}$
6. $z\in R^* i \Leftrightarrow z = -\overline{z}$

Modulul unui număr complex: $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

**Proprietăţi:**

1. $|z| \geq 0, \forall z \in C$ 2. $|z| = |\overline{z}|$ 3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

4. $|z^n| = |z|^n$ 5. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ 6. $|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

## Combinatorică

$n!=1\cdot 2\cdots n, n\in N (0!=1)$ , $P_n = n!, n\in N^*$

$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, $0\leq k \leq n; k,n\in N, n\geq 1$ $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $0\leq k\leq n; k,n \in N$

**Proprietăţi**:1. $C_n^k = C_n^{n-k}$, $0\leq k\leq n; k,n\in N$ 2. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, $1\leq k$ <n;k,n$\in N$

**Binomul lui Newton:**$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \cdots + C_n^n b^n$

**Termenul general**:$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k, k=0,1,\cdots,n$

**Proprietăţi:**

$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$ (numărul tuturor submulţimilor unei mulţimi cu n elemente este $2^n$).

$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = 2^{n-1}$

**Proprietăţi ale operaţiilor cu matrice**.:

1)A+B=B+A , $\forall A,B \in M_{m,n}(C)$ (comutativitate)

2)(A+B)+C = A+(B+C) , $\forall A,B,C \in M_{m,n}(C)$ (asociativitate)

3)A+$O_{m,n}$ = $O_{m,n}$+A = A , $\forall A \in M_{m,n}(C)$

4)$\forall A \in M_{m,n}(C), \exists (-A) \in M_{m,n}(C)$ a.î. A+(-A) = (-A)+A=$O_{m,n}$ , $\forall A\in M_{m,n}(C)$

5)(AB)C = A(BC) , $A\in M_{m,n}(C), B\in M_{n,p}(C), C\in M_{p,q}(C)$ (asociativitate)

6)a)A(B+C) = AB+AC , $A\in M_{m,n}(C), B,C\in M_{n,p}(C)$ (distributivitatea înmulţirii faţă de adunare)

b)(B+C)A = BA+CA, $B,C\in M_{m,n}(C), A\in M_{n,p}(C)$

7) $AI_n = I_nA = A, \forall A\in M_n(C)$

8)a(bA) = (ab)A, $\forall a,b\in C, A\in M_{m,n}(C)$

9)(a+b)A=aA+bA, $\forall a,b \in C, A\in M_{m,n}(C)$

10)a(A+B)=aA+aB, $\forall a\in C, A,B\in M_{m,n}(C)$

11)aA =$O_{m,n} \Leftrightarrow a=0$ sau A=$O_{m,n}$

12)${}^t({}^tA) = A, {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ ,${}^t(aA) = a\,{}^tA, {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

**Puterile unei matrice:Fie** $A\in M_n(C)$

Definim $A^0 = I_n, A^1 = A, A^2 = A\cdot A, A^3 = A^2\cdot A, \cdots, A^n = A^{n-1}\cdot A, n\in N^*$

**Proprietăţi:**

1. Determinantul unei matrice este egal cu determinantul matricei transpuse;
2. Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) dintr-o matrice sunt nule, atunci determinantul matricei este nul;
3. Dacă într-o matrice schimbăm două linii(sau coloane) între ele obţinem o matrice care are determinantul egal cu opusul determinantului matricei iniţiale.
4. Dacă o matrice are două linii (sau coloane) identice atunci determinantul său este nul;
5. Dacă toate elementele unei linii(sau coloane) ale unei matrice sunt înmulţite cu un element a, obţinem o matrice al cărei determinant este egal cu a înmulţit cu determinantul matricei iniţiale.
6. Dacă elementele a două linii(sau coloane) ale unei matrice sunt proporţionale atunci determinantul matricei este nul;
7. Dacă o linie (sau coloană) a unei matrice pătratice este o combinaţie liniară de celelate linii(sau coloane) atunci determinantul matricei este nul.
8. Dacă la o linie (sau coloană) a matricei A adunăm elementele altei linii (sau coloane) înmulţite cu acelaşi element se obţine o matrice al cărei determinant este egal cu determinantul matricei iniţiale;

9) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+m & e+n & f+p \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ g & h & i \end{vmatrix}$

10)$\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B$, $\forall$ A,B$\in M_n(C)$

## Matrice inversabile

**Inversa unei matrice :**A$\in M_n(C)$ se numeşte inversabilă dacă există o matrice notată $A^{-1}\in M_n(C)$ a.i. $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I_n$

**Teoremă**:A$\in M_n(C)$ *inversabilă* $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$,$A^*$ adjuncta matricei A. $A^*$ se obţine din ${}^tA$ înlocuind fiecare element cu complementul său algebric.

Dacă A,B$\in M_n(C)$ sunt inversabile,atunci au loc relaţiile: a)$(A^{-1})^{-1} = A$

b)$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

**Rangul unei matrice**

Fie A $\in M_{m,n}(C)$, $r\in N, 1\leq r\leq \min(m,n)$

**Definiţie**: Se numeşte minor de ordinul r al matricei A,determinantul format cu elementele matricei A situate la intersecţia celor r linii şi r coloane.

## Sisteme de ecuaţii liniare

Forma generală a unui sistem de m ecuaţii cu n necunoscute:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$a_{ij}$ -coeficienţii necunoscutelor, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ - necunoscute, $b_1, b_2, \cdots, b_m$ -termenii liberi

A=$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}......a_{1n} \\ a_{21}a_{22}......a_{2n} \\ .................. \\ a_{m1}a_{m2}.....a_{mn} \end{pmatrix}$ -matricea sistemului, $\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}......a_{1n}b_1 \\ a_{21}a_{22}......a_{2n}b_2 \\ .................. \\ a_{m1}a_{m2}.....a_{mn}b_m \end{pmatrix}$ -matricea extinsă

B=$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_m \end{pmatrix}$ matricea coloană a termenilor liberi,X=$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ .matricea necunoscutelor.

**AX=B -forma matriceală a sistemului**

**Definiţie:**

- Un sistem se numeşte incompatibil dacă nu are soluţie;
- Un sistem se numeşte compatibil dacă are cel puţin o soluţie;
- Un sistem se numeşte compatibil determinat dacă are o singură soluţie;
- Un sistem se numeşte compatibil nedeterminat dacă are mai mult de o soluţie.

**Rezolvarea sistemelor prin metoda lui Cramer:**

Un sistem de ecuaţii liniare este de tip Cramer dacă numărul de ecuaţii este egal cu numărul de necunoscute şi determinantul matricei sistemului este nenul.

**Teorema lui Cramer**: Dacă det A notat $\Delta \neq 0$ , atunci sistemul AX=B are o soluţie unică $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ ,unde $\Delta_i$ se obţine înlocuind coloana i cu coloana termenilor liberi.

**Teorema lui Kronecker- Capelli**: Un sistem de ecuaţii liniare este compatibil $\Leftrightarrow$ rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse.

**Teorema lui Rouche**: Un sistem de ecuaţii liniare este compatibil $\Leftrightarrow$ toţi minorii caracteristici sunt nuli.

## Grupuri

**Definiţie:**Fie $*: M\times M \to M$ lege de compozitie pe M.O submultime nevidă H a lui M ,se numeşte parte stabilă a lui M în raport cu legea "$*$"dacă $\forall x,y\in H \Rightarrow x*y\in H$ .

**Proprietăţile legilor de compoziţie**

Fie $*: M\times M\to M$ lege de compoziţie pe M.

**Legea "$*$ " se numeşte asociativă** dacă $(x*y)*z = x*(y*z), \forall x,y,z\in M$

**Legea "$*$ " se numeşte comutativă** dacă $x*y = y*x, \forall x,y\in M$

**Legea "$*$ " admite element neutru** dacă exista $e\in M$ a.i $x*e = e*x = x, \forall x\in M$

**Definiţie**:Cuplul (M,$*$) formează un monoid dacă are proprietăţile:

1)$(x*y)*z = x*(y*z), \forall x,y,z\in M$

2) există $e\in M$ a.i $x*e = e*x = x, \forall x\in M$

Dacă în plus $x*y = y*x, \forall x,y\in M$ atunci monoidul se numeşte comutativ.

**Notaţie**:U(M)={x$\in M / x$ este simetrizabil}

**Definiţie**:Cuplul (G,$*$) formează un grup dacă are proprietăţile:

1)$(x*y)*z = x*(y*z), \forall x,y,z\in G$

2) există $e\in M$ a.i $x*e = e*x = x, \forall x\in G$

3) $\forall x\in G, \exists x' \in G$ a.i. $x*x' = x'*x = e$

Dacă în plus $x*y = y*x, \forall x,y\in G$ atunci grupul se numeşte abelian sau comutativ.

**Definiţie**:Un grup G se numeşte finit dacă mulţimea G este finită şi grup infinit ,în caz contrar.

Se numeşte ordinul grupului G ,cardinalul mulţimii G(numărul de elemente din G).

**Ordinul unui element**

**Defintie**:Fie (G,$\bullet$) un grup şi x$\in G$ .Cel mai mic număr natural nenul n cu proprietatea $x^n = e$ se numeşte ordinul elementului x în grupul G.(ordx = n)

**Subgrup**

**Definiţie:Fie** (G,$*$) un grup.O submulţime nevidă H a lui G se numeşte subgrup al grupului (G,$*$) dacă îndeplineşte condiţiile:

1) $\forall x,y\in H\Rightarrow x*y\in H$ .

2) $\forall x\in H \Rightarrow x' \in H$

## Inele şi corpuri

**Definiţie:**Un triplet (A,$*$,$\circ$), unde A este o multime nevidă iar „$*$" şi „$\circ$" sunt două legi de compozitie pe A,este inel dacă:

1) (A,$*$)este grup abelian
2) (A,$\circ$)este monoid
3)Legea „$\circ$"este distributivă fata de legea „$*$":

$x\circ(y*z) = (x\circ y)*(x\circ z), (y*z)\circ x = (y\circ x)*(z\circ x) \forall x,y,z\in A$

**Inelul (A,$*$,$\circ$), este fără divizori ai lui 0**,dacă $\forall x.y \neq e_* \Rightarrow x\circ y\neq e_*$ ($e_*$ element neutru de la legea „$*$")

Un inel (A,$*$,$\circ$), se numeşte comutativ dacă satisface şi axioma: $x\circ y = y\circ x, \forall x,y\in A$

Un inel (A,$*$,$\circ$), comutativ,cu cel putin 2 elemente şi fără divizori ai lui 0, se numeşte,**domeniu de integritate** .

**Definiţie** :Un inel (K,$*$,$\circ$) cu $e_* \neq e_\circ$ se numeşte corp dacă $\forall x\in K, x\neq e_*, \exists x'\in K$ a.i. $x\circ x' = x'\circ x = e_\circ$ ($e_*, e_\circ$ fiind elementele neutre )

Un corp (K,$*$,$\circ$), se numeşte comutativ dacă satisface şi axioma: $x\circ y = y\circ x, \forall x,y\in K$

**Obs.**:Corpurile nu au divizori ai lui zero.

**Morfisme şi izomorfisme de inele şi corpuri.**

**Definiţie** :Fie (A,$*$,$\circ$),($A'$$\oplus$,$\otimes$) două inele.O funcţie f:A$\to A'$ se numeşte morfism de inele dacă :

1)$f(x*y) = f(x)\oplus f(y), \forall x,y\in A$

1)$f(x\circ y) = f(x)\otimes f(y), \forall x,y\in A$

3)$f(e_\circ) = e_\otimes$ ($e_\circ, e_\otimes$ fiind elementele neutre corespunzătoare legilor $\circ,\otimes$)

Dacă în plus f este bijectivă atunci f se numeşte izomorfism de inele.

**Definiţie**:Fiind date corpurile K,$K'$ ,orice morfism(izomorfism) de inele de la K la $K'$ ,se numeşte morfism(izomorfism)de corpuri.

**Relaţiile lui Viete**: Fie K un corp comutativ,f un polinom din K[X], $f = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, a_n\neq 0$.Dacă $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sunt n rădăcini ale lui f în K atunci $f = a_n(X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_n)$ şi

$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -a_{n-1}\cdot a_n^{-1}$

$x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = a_{n-2}a_n^{-1}$

.........................................................

$x_1x_2\cdots x_n = (-1)^n a_0 a_n^{-1}$

**1. Monoid**

Fie (M,*), MxM$\to$M, $(x,y)\to x*y$, M-nevidã.

***Axiomele monoidului***:

**M1**. $(x*y)*z = x*(y*z)$ $\forall x,y,z\in$ M (asociativitatea);

**M2.** $\exists$ $e\in$ M astfel încât $x*e = e*x = x$, $\forall x\in$ M (*e* element neutru);

dacã **M3.** $x*y = y*x$, $\forall x,y\in$ M monidul este comutativ.

Ex: 1. (**N**,+), (**N**,·) sunt monoizi comutativi;

2. (*F*(E),o) monoid necomutativ (*F*(E) este mulţimea funcţiilor *f*:E$\to$E, E – nevidã, o – compunerea funcţiilor).

## 2. Grup

Fie (G,*), GxG$\to$G, $(x,y)\to x*y$, G-nevidã.

***Axiomele grupului:***

**G1.** $(x*y)*z = x*(y*z)$, $\forall x,y,z\in$ G(asociativitatea);

**G2.** $\exists$ $e\in$ G astfel încât $x*e = e*x = x$, $\forall x\in$ G (*e* element neutru);

**G3.** $\forall$ $x\in$ G $\exists$ $x'\in$ G astfel încât $x'*x = x*x' = e$ (*x'* simetricul lui *x*);

dacã **G4.** $x*y = y*x$, $\forall x,y\in$ G grupul este comutativ (sau abelian).

**3. Inel**

Fie (A,+,$\bullet$), AxA$\to$A, $(x,y)\to x+y$ şi AxA$\to$A, $(x,y)\to x\bullet y$, A nevidã;

Definiţia 3.1. (A,+,$\bullet$) ***este inel dacã:***

**G.** (A,+) este grup abelian;

**M.** (A,$\bullet$) este monoid şi

**D.** $\bullet$ este distributivã faţã de +:

$x\bullet(y+z) = x\bullet y + y\bullet z$

$(y+z)\bullet x = y\bullet x + y\bullet z$, $\forall x,y,z\in$ A

dacã **C.** $x\bullet y = y\bullet x$ $\forall x,y\in$ A, inelul este comutativ.

## 4. Corp

Fie (K,+,$\bullet$), KxK$\to$K, $(x,y)\to x+y$ şi KxK$\to k$, $(x,y)\to x\bullet y$, K – nevidã.

Definiţia 4.1. ***(K,+,•) este corp dacã (K,+,•) este inel, 0≠1 şi*** $\forall x\in$ K, $x\neq 0 \Rightarrow \exists$ $x^{-1}\in$ K, ***astfel încât*** $x\bullet x^{-1} = x^{-1}\bullet x = 1$.

Dacã $x\bullet y = y\bullet x$, $\forall x,y\in$ K, corpul este comutativ.