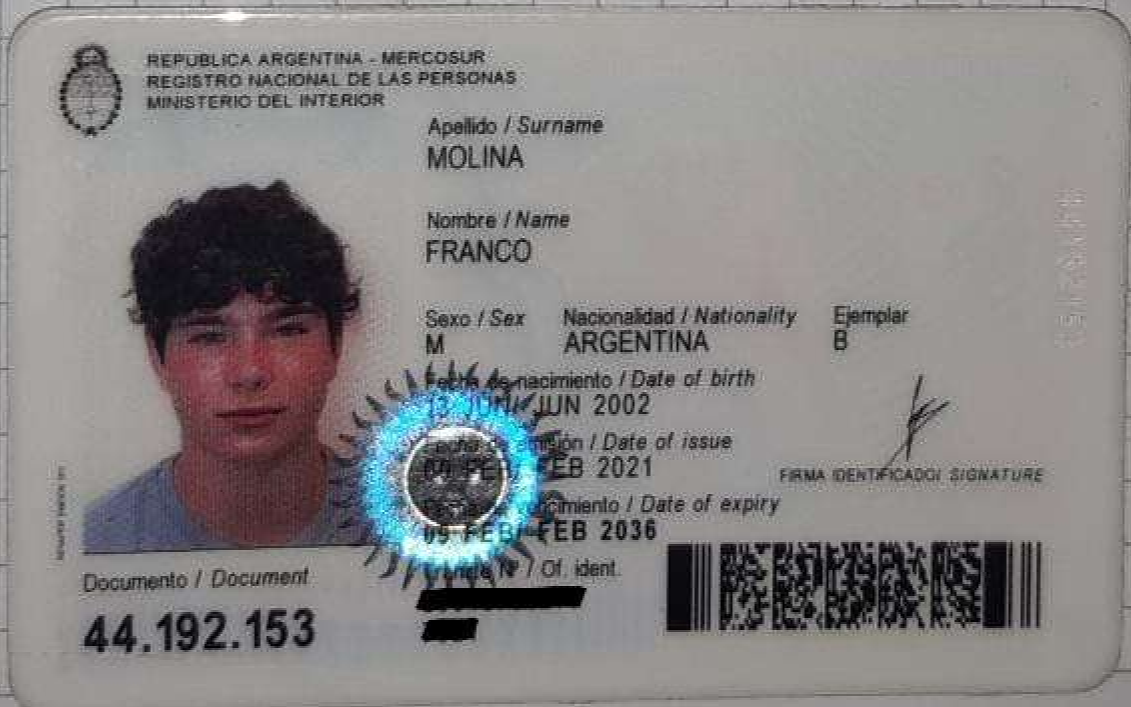
Por la presente declaro que la resolucion de este examen es obra de mi exclusiva autoría y respetando las pautas y criterios fijados en los enunciados. Asimismo, declaro conocer el regimen de infraccion de los estudiantes cuyo texto ordenado se encuentra en el apéndice de la Res. Rec 1554/2018

Molina
Franco



REPUBLICA ARGENTINA - MERCOSUR
REGISTRO NACIONAL DE LAS PERSONAS
MINISTERIO DEL INTERIOR

Apellido / Surname
MOLINA

Nombre / Name
FRANCO

Sexo / Sex: M
Nacionalidad / Nationality: ARGENTINA
Ejemplar: B

Fecha de nacimiento / Date of birth
13 JUN/ JUN 2002

Fecha de emisión / Date of issue
FEB 2021

Fecha de vencimiento / Date of expiry
09 FEB/ FEB 2036

Trámite N° / Of. ident.
[redacted]

FIRMA IDENTIFICADO/ SIGNATURE

Documento / Document
44.192.153

Molina Franco
44192153

1) a) Calcular la dimension del subesp. vect. de $k^5$

$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{K}^5 \mid x_1 = 3x_2 \text{ y } x_3 = x_4 = x_5\}$

b) Probar que no existe trasf. lineal $T\ k^5 \to k^2$ tq $Nu(T) = W$

a) la dim. de w es la cantidad de vect. que tiene una base para eso la pasaremos a parametrica y buscamos una base.

$x_1 = 3x_2$ y $x_3 = x_4 = x_5$

$t \cdot (3,1,0,0,0) + s \cdot (0,0,1,1,1)$

$B = \{(3,1,0,0,0), (0,0,1,1,1)\}$ es una base ya que

$W = \langle (3,1,0,0), (0,0,1,1,1) \rangle$ y es LI

$$\begin{matrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{F_1/3} \begin{matrix} 1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

MRF

Con esto concluimos que $\boxed{\dim(W) = 2}$

b) Por teorema sabemos que, def $T: W \to E$
$T: k^5 \to k^2$

$\dim(k^5) = \dim(Nu(T)) + \dim(Img(T))$

$\boxed{\dim k^5 \leq 5}$

$\dim(k^5) - \dim(Nu(T)) = \dim(Img(T))$

$5 - 2 \leq \dim(Img(T))$ $\longrightarrow$ sabemos que $\dim(Im\ T) \leq 2$

$3 \leq 2$

Llegamos a un absurdo por lo que la transformacion no existe.

Molina Franco
44192153

2) a) Calcular para que valor de C el 1 es auto valor de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 8 & 8 & C \end{pmatrix}$$

b) para el valor hallado en ⓐ describir parametricamente el autoesp asociado al autovalor 1

a) calculo los autovect

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 8 & 8 & C \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 4 & 5-\lambda & 3 \\ 8 & 8 & C-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

• Queremo calcular para $\lambda = 1$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 8 & 8 & C-1 \end{pmatrix} = 0$$

• Calculo el determinate

$$\underset{A}{\begin{matrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 8 & 8 & C-1 \end{matrix}} \xrightarrow{F_3 - F_2 \cdot 2} \begin{matrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & C-7 \end{matrix} \xrightarrow[*]{F_1 \leftrightarrow F_2} \underset{B}{\begin{matrix} 4 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & C-7 \end{matrix}}$$

• Como es triangular sup su det es mult. de la diagonal

$$\det(B) = 4 \cdot 2\,(C-7)$$
$$= (8C - 56)$$

$$* \quad \det(A) = -8C + 56$$

$$-8C + 56 = 0$$

$$\boxed{C = 7}$$

Rta: para que 1 sea autovalor, C tiene que ser 7

$X_A[1] = 0$
Cuando $C = 7$

Molina Franco 44192153

b) tenemo q describir el autoesp. de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 8 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad y \quad \lambda = 1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 0 \\ 8 & 8 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_2 \cdot 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - F_1 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2/4} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1/2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3/2 & 0 \\ 1 & 0 & -3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} x = 3/2\, z \\ x = 3/4\, z \end{array}$$

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 3/4\, z \wedge y = 3/2\, z\}$$

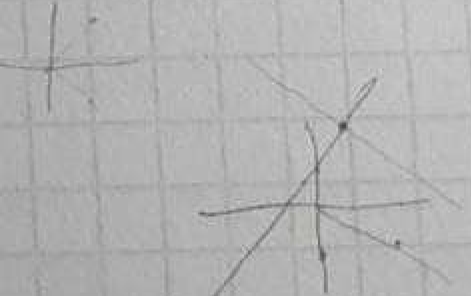
$$(3/4\, t, -3/2\, t, t)$$

$$= t \cdot (3/4, -3/2, 1)$$

$$V_1 = \{t \cdot (3/4, -3/2, 1), t \in \mathbb{R}\}$$

Molina Franco
44192153

3) encontrar ~~la~~ una recta en $\mathbb{R}^2$ que sea perpendicula a la recta $y = 3x + 2$ y que pase por $(1,5)$



$$y = 3x + 2$$

$$\to \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - y = -2\}$$

$$\langle (x,y), (3,-1) \rangle = -2$$

por teorema es perpendicular a $(3,-1) \cdot t$

Rta: Entonces la recta con direccion $(3,-1)$ y pasa por $(1,5)$ es

$$R = \{t \cdot (3,-1) + (1,5) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Molina Franco
44192153

4) dar una base ortonormal del esp. de $\mathbb{R}^3$ generado por $\{(1,1,1),(1,2,3)\} = V$

- Para ortonormalizar esta base utilizare Gram-Schmidt
- Sea $V = (V_1, V_2)$ vamos a ortonormalizarla

$W_1 = (1,1,1)$

$W_2 = V_2 - \frac{\langle V_2, W_1 \rangle}{\|W_1\|^2} W_1$

$= (1,2,3) - \frac{6}{3}(1,1,1)$

$= (1,2,3) - (2,2,2)$

$W_2 = (-1,0,1)$

Extras:

Verificando

$0 = \langle (1,1,1), (-1,0,1) \rangle$
$0 = -1+0+1$
$0 = 0$

$W = \{(1,1,1),(-1,0,1)\}$

W es la base ortogonal

ahora busco normalizarla

$\left\{ \frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|}, \frac{(-1,0,1)}{\|(-1,0,1)\|} \right\}$

$\|1,1,1\| = \sqrt{3}$

$\|-1,0,1\| = \sqrt{2}$

$W = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$ es la base ortonormalizada

Molina Franco 44192153

5) Sea V una esp. vect.

a) ~~pro~~ dar la def de subespacio

b) Sean v y w dos vect de V. probar que el conjunto formado por todas las combinaciones lineales de v y w es un subesp. vect de V (el generado por v y w)

a) Sea V un espacio vectorial, definiremos a W como un subespacio vectorial perteneciente a V ($W \subset V$) si sus vectores pertenecen a V y ademas es cerrado por la suma y multiplicacion por un escalar.

Mas claro:

Es un subconjunto no vacio cerrado por la suma y la multiplicacion por escalares ($\lambda w + w \in W$ y $W \neq \emptyset$)

b) • Sea $\lambda_1 V + \lambda_2 W$ y $u_1 V + u_2 W$ dos combinaciones lineales de v, w, entonces

• $(\lambda_1 V + \lambda_2 W) + (u_1 V + u_2 W) = \lambda_1 V_1 + u_1 V_1 + \lambda_2 W + u_2 W$

(cerrado suma)

$$\underbrace{= (\lambda_1 + u_1) V_1 + (\lambda_2 + u_2) W,}$$

es una conv. lineal de v y w por lo que pertenece a V

(multi escalar)

• Si $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 W$ es una conv lineal

$\lambda \cdot (\lambda_1 V + \lambda_2 W) = \lambda(\lambda_1 V) + \lambda(\lambda_2 W)$

$$\underbrace{= (\lambda\lambda_1) V + (\lambda\lambda_2) W,}$$

es conv lineal de v y w por lo que pertenece a V

Al ser cerradas por la suma y multi por escalar, todas las combinaciones lineales son un subconjunto de V.

Molina Franco 44192153

6) a) Dar la definicion de epimorfismo

b) Sea $T: V \to W$ probar que es un epimorfismo si y solo si ~~el~~ ~~con~~ la imagen de generadores de V genera W.

a) Epimorfismo (suyectividad): sea $T: V \to W$, T es un epimorfismo si todo $w$ del conjunto de llegada es imagen de un $v$ del conjunto de salida.

b) es epimorfismo $\Longleftrightarrow$ la imagen de gen de V, genera W

- $\Longrightarrow$

Sea $w$ en W imagen de $v$ en V

$\{v_1 \cdots v_n\}$ generadores de V

$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = v$

$T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = T(v)$

$\lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_n T(v_n) = w$

Entonces para todo $w$ existe una comb. lineal de los $T(v_i)$

$\downarrow$

$\{T(v_1) \cdots T(v_n)\}$ generan la imagen. Como T es epimorfismo $Im(T) = W$

- $\Longleftarrow$

Sea $\{v_1, \cdots v_n\}$ generadores de V y $\{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ genera. de W

para $w$ en W

$\lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_n T(v_n) = w$

$T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = w$

$T(v) = w$ (para algun $v$)

Todo $w$ es imagen de algun $v$ (epimorfismo)