Tomás Ponce Gessi | Final Álgebra Lineal - ~~Tema~~ | FECHA 21/12/2021

(8 puntos) **Ejercicio 1:** Dado los vectores $(1,1,1)$, $(1,1,0)$, $(0,1,1)$ aplique el procedimiento de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$

Resolución:

Busquemos primero 3 vectores ortogonales entre sí utilizando Gram-Schmidt:

Sea $v_1 = (1,1,1)$ $v_2 = (1,1,0)$ y $v_3 = (0,1,1)$

$w_1 = v_1 = (1,1,1)$

Luego, por Gram-Schmidt $w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1$

Luego $\langle v_2, w_1\rangle = \langle (1,1,0),(1,1,1)\rangle = 2$

$\langle w_1, w_1\rangle = \langle (1,1,1),(1,1,1)\rangle = 3$

Luego $w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = (1,1,0) - \frac{2}{3}(1,1,1) = \left(1-\frac{2}{3}, 1-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

Ya tenemos w_1 y w_2 ortogonales. Calculemos w_3 usando nuevamente Gram-Schmidt.

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1$$

Tenemos que:

$\langle v_3, w_2\rangle = \left\langle (0,1,1), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right\rangle = -\frac{1}{3}$

$\langle w_2, w_2\rangle = \left\langle \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right\rangle = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$\langle v_3, w_1\rangle = \langle (0,1,1),(1,1,1)\rangle = 2$

Luego, con estos calculos y los anteriores tenemos que:

$$w_3 = (0,1,1) - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = (0,1,1) - \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)}{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}(1,1,1) =$$

$$= (0,1,1) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}(1,1,1) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}(1,1,1) =$$

$$= \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{3}{6}, \frac{3}{6}, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

Luego $w_1 = (1,1,1)$, $w_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $w_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

Son 3 vectores ortogonales entre sí. Por lo tanto dividimos a cada vector por su norma para obtener 3 vectores ortonormales.

$$w_1' = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{1+1+1}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$w_2' = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{6}{9}}}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{3}{3\sqrt{6}}, \frac{3}{\sqrt{6}\,3}, -\frac{6}{3\sqrt{6}}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$w_3' = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0}} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

NOTA

Luego $w_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $w_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ $w_3' = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

Son 3 vectores ortonormales. A su vez sea

$S = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \right\}$

Este conjunto es L.I y $|S| = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

Por lo tanto, S es una base ortonormal (puesto que está formada por vectores ortonormales) de $\mathbb{R}^3$

Fin de la resolución. Tery

Tomás Ponce Gessi Final Álgebra Lineal - Tema

Ejercicio 3: Considere los siguientes subespacios de $\mathbb{R}_5[x]$.

$V = \{ ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \mid a - b = 0 \wedge 2a - 3b + 6d - 3e = 0 \}$
$W = \{ ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \mid -a + 2b = 0 \wedge 2d - e = 0 \}$

(10 Puntos) a) Dar una base de $V \cap W$.
(5 Puntos) b) Sea U un subespacio de $\mathbb{R}_5[x]$ tal que $\dim U = 4$. Decidir si existe un polinomio no nulo perteneciente a la intersección de los 3 subespacios, osea $V \cap W \cap U$

Resolución:

Tenemos que $V \cap W = \{ ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \mid a - b = 0 \wedge 2a - 3b + 6d - 3e = 0 \wedge -a + 2b = 0 \wedge 2d - e = 0 \}$
Es decir, se deben cumplir las propiedades de ambos espacios para pertenecer a la intersección.

Planteamos un sistema homogeneo con las ecuaciones descriptas anteriormente:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 6 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow[F_3 + F_1]{F_2 - 2F_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1 - F_2]{F_3 + 4F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{24} F_3]{(-1) F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_4 - 2F_3]{\substack{F_1 + 6F_3 \\ F_2 + 6F_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, por el metodo de Gauss el sistema

$\begin{cases} a - b = 0 \\ 2a - 3b + 6d - 3e = 0 \\ -a + 2b = 0 \\ 2d - e = 0 \end{cases}$ tiene las mismas soluciones que el sistema $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ d - \frac{1}{2} e = 0 \end{cases}$

Luego $V \cap W = \{ ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \mid a = 0 \wedge b = 0 \wedge d - \frac{1}{2} e = 0 \}$

Y, en particular $V \cap W = \{ cx^2 + e\frac{1}{2}x + e \mid c, e \in \mathbb{R} \} =$
$= \{ cx^2 + e(\frac{1}{2}x + 1) \mid c, e \in \mathbb{R} \}$

Luego $V \cap W$ es generado por el conjunto $\{ x^2, \frac{1}{2}x + 1 \}$. El cual es facil ver que es L. I., luego dicho conjunto es una base de $V \cap W$.

b) Por lo anterior tenemos que $\dim V \cap W = 2$ y $\dim U = 4$. Luego, por el Teorema de la dimension tenemos que:

$\dim(V \cap W + U) = \operatorname{Dim} V \cap W + \operatorname{Dim} U - \operatorname{Dim}((V \cap W) \cap U)$

$\Rightarrow \operatorname{Dim}(V \cap W + U) = 2 + 4 - \operatorname{Dim}((V \cap W) \cap U) = 6 - \operatorname{Dim}((V \cap W) \cap U)$

NOTA

Luego, como $V \cap W + U$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_5[x]$ entonces necesariamente $\dim(V \cap W + U) \leq 5$. Luego, para que la igualdad sea posible debe ser que

$$6 - \dim((V \cap W) \cap U) \leq 5 \iff \dim((V \cap W) \cap U) \geq 1$$

Es decir, NECESARIAMENTE la dimensión del espacio $(V \cap W) \cap U$ debe ser por lo menos 1. Por lo tanto existe un polinomio no nulo en la intersección de los espacios $V \cap W$ y U.

Fin de la resolución.

Tomás Ponce Gessi | Final Álgebra Lineal – Leu

FECHA 27/12/2021

Ejercicio 3: Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & c \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ donde $c \in \mathbb{R}$.

(3 puntos) a) Calcular el polinomio característico de A.
(10 puntos) b) Dar una base del autoespacio correspondiente al autovalor 2.
(5 puntos) c) Decidir para qué valor de c existe una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A. Justificar tu respuesta.

Resolución:

a) Por definición:

$$\chi_A(x) \doteq \det(x\,Id - A) = \det\left(\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 2 & c \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} x-7 & -2 & -c \\ 0 & x-2 & -3 \\ 0 & 0 & x-7 \end{bmatrix}\right)$$

Como $\begin{bmatrix} x-7 & -2 & -c \\ 0 & x-2 & -3 \\ 0 & 0 & x-7 \end{bmatrix}$ es una matriz triangular superior, por propiedades del determinante tenemos que:

$$\det\left(\begin{bmatrix} x-7 & -2 & -c \\ 0 & x-2 & -3 \\ 0 & 0 & x-7 \end{bmatrix}\right) = (x-7)(x-2)(x-7) = (x-7)^2(x-2)$$

Luego, el polinomio característico de A es

$$\chi_A(x) = \det(x\,Id - A) = (x-7)^2(x-2)$$

b) Por lo anterior, el polinomio característico tiene 2 raíces distintas $\lambda = 7$ y $\lambda = 2$. Luego estás son autovalores de A.

Calculamos el autoespacio correspondiente al autovalor 2.

Por definición $V_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 : (2 \cdot Id - A)X = 0\}$

Es decir $\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 2 & c \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & -2 & -c \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Resolvemos el sistema homogeneo, utilizando el método de Gauss.

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & -c \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 + 3F_3} \begin{bmatrix} 7 & -2 & -c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y - cz = 0 \\ 0 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Luego $V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0 \wedge z = 0\}$

En particular si $x - 2y = 0 \Rightarrow x = 2y$

Luego podemos describir paramétricamente a V_2:

$$V_2 = \{(2y, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} = \{y(2,1,0) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

NOTA

Luego V_2 es generado por el conjunto $\{(2,1,0)\}$, y ese es trivialmente L.I, luego dicho conjunto es una base de V_2.

c) La matriz A tiene a lo sumo 3 autovalores distintos, luego, al calcular su polinomio característico y determinar sus raíces se concluirá que A tiene únicamente 2 autovalores distintos. Para formar una base de $\mathbb{R}^3$ utilizando autovectores de A se necesita un conjunto L.I de autovectores con autovalores distintos que genere a $\mathbb{R}^3$. Esto no es posible puesto que A solo tiene 2 autovalores distintos y para que un conjunto S formado por autovectores de A sea L.I y genere a $\mathbb{R}^3$ se necesitan 3 autovectores L.I con autovalores distintos (esto es para que sean L.I, parte del resultado obtenido en la teoría de diagonalización de transformaciones lineales)

Luego, para formar una base con autovalores de A nos hace falta obtener un autovalor de A distinto de 1 y 2, para así obtener 3 autovalores distintos.

Los autovalores son las raíces del polinomio característico, el cual es

$$\det(xId - A) = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -c \\ 0 & x-2 & -3 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}$$

Luego, por propiedades del determinante, dicho determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal, es decir: $(x-1)^2(x-2)$.

Notar que este no depende de C. Luego, sin importar el valor que tomemos de C siempre vamos a obtener 2 autovalores distintos y no 3. Por lo tanto no es posible formar una base de $\mathbb{R}^3$ con autovectores de A, independientemente del valor de C.

Fin de la resolución

Tomás Ponce Gessi | Final Álgebra Lineal - [firma] | FECHA 21/12/2021

(14 Puntos) Ejercicio 4: Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar su respuesta.

a) Existe un operador lineal $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que su núcleo está generado por el vector $(1,1,1)$ y su imagen está generada por los vectores $(1,1,0)$ y $(0,1,1)$. Si es verdadera, dar un ejemplo de tal transformación T y expresar su matriz con respecto a la base canónica.

b) Existe un operador lineal $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que su núcleo está generado por los vectores $(1,1,1)$ y $(1,0,1)$ y su imagen está generada por los vectores $(1,1,0)$ y $(0,1,1)$. Si es verdadera, dar un ejemplo de tal transformación T y expresar su matriz con respecto a la base canónica.

Resolución:

a) Sea $B = \{(1,1,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ ta que los vectores son L.I y generan a $\mathbb{R}^3$. Luego sea $C = \{(0,0,0),(1,1,0),(0,1,1)\}$.

El Teorema 4.1.3 nos asegura dado que B es una base del espacio de salida de T y C un subconjunto del espacio de llegada de T que existe una transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$T(1,1,1) = (0,0,0)$
$T(0,1,0) = (1,1,0)$
$T(1,0,0) = (0,1,1)$

Luego, dado un vector $V = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tenemos que
$V = (x,y,z) = z(1,1,1) + (y-z)(0,1,0) + (x-z)(1,0,0)$
Es decir, expresamos V como una combinación lineal de la base B. Luego.

$T(V) = T(z(1,1,1) + (y-z)(0,1,0) + (x-z)(1,0,0)) = zT(1,1,1) + (y-z)T(0,1,0) + (x-z)T(1,0,0) =$
$= z(0,0,0) + (y-z)(1,1,0) + (x-z)(0,1,1) = (y-z, y-z, 0) + (0, x-z, x-z) =$
$= y(1,1,0) + z(-1,-1,0) + x(0,1,1) + z(0,-1,-1) =$
$= x(0,1,1) + y(1,1,0) + z(-1,-2,-1)$

Todos estos cálculos es por las propiedades de transformaciones lineales.

Luego, es fácil notar que el vector $(-1,-2,-1)$ es combinación lineal de los vectores $(0,1,1)$ y $(1,1,0)$. Luego los vectores $(0,1,1)$ y $(1,1,0)$ generan el mismo espacio que el conjunto $\{(0,1,1),(1,1,0),(-1,-2,-1)\}$.

Es decir, la imagen de T es generada por los vectores $\{(0,1,1),(1,1,0)\}$. A su vez, estos vectores son L.I por lo tanto esa es una base de la $Im(T)$. Luego la dimensión $Im(T)$ es 2.

Por el Teorema de la dimensión tenemos que $\text{Dim}\,\mathbb{R}^3 = \text{Dim}\,Nu(T) + \text{Dim}\,Im(T) \Rightarrow$ $3 = \text{Dim}\,Nu(T) + 2 \Rightarrow \text{Dim}\,Nu(T) = 1$.

Luego como la dimensión del núcleo es 1 y $T(1,1,1) = (0,0,0)$ tenemos que necesariamente el $Nu(T)$ es generado por el vector $(1,1,1)$.

NOTA

Luego, un ejemplo de T es el obtenido anteriormente.

$T(v) = T(x,y,z) = x(0,1,1) + y(1,1,0) + z(-1,-2,-1) = (y-z, x+y-2z, x-z)$

Luego la matriz de T con respecto a la base canonica $C = \{e_1, e_2, e_3\} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es:

$$[T]_C = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [T(e_1)]_C & [T(e_2)]_C & [T(e_3)]_C \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

b) No existe tal operador lineal que cumpla esas propiedades, esto se debe a lo siguiente:

Asumamos que dicho operador lineal T existe. Luego su nucleo es generado por $\{(1,1,1),(1,0,1)\}$ y dicho conjunto es L.I, por lo tanto es una base y la $\dim Nu(T) = 2$.

Luego, la imagen de T es generada por $\{(1,1,0),(0,1,1)\}$, al igual que lo anterior dicho conjunto es L.I y por lo tanto es una base de la imagen de T y la $\dim Im(T) = 2$.

Luego como $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, por el Teorema de la dimensión tenemos que

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim Nu(T) + \dim Im(T) \Rightarrow 3 = 2+2 = 4.$$

Esto es absurdo, el absurdo vino de suponer que dicho operador lineal existe, luego dicho operador no existe.

Fin de la resolución.

NOTA

Tomás Ponce Gessi Final Álgebra Lineal FECHA 27/12/2021

(20 puntos) Ejercicio 5: Sea V espacio vectorial y S un subconjunto linealmente independiente. Probar que si $w \notin \langle S \rangle$ entonces $S \cup \{w\}$ es linealmente independiente.

Resolución: Sea V espacio vectorial y $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ subconjunto linealmente independiente. Sean escalares $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ y w tal que $w \notin \langle S \rangle$

Debemos probar que:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda w = 0$$

Supongamos que $\lambda \neq 0$. Luego

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right) v_1 + \dots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda}\right) v_n + w = 0$$

$$\Rightarrow w = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda}\right) v_1 + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda}\right) v_n$$

Luego w es combinación lineal de los vectores de S. Por lo tanto $w \in \langle S \rangle$. Esto es absurdo por nuestras hipótesis. Luego $\lambda = 0$, por lo tanto

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

Luego, como S ya es linealmente independiente la ecuación anterior es cierta, por lo tanto $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_n = 0$. Luego $S \cup \{w\}$ es linealmente independiente.

Fin de la resolución.

NOTA

FECHA 27/12/2021

Tomás Ponce Gessi   Final Álgebra Lineal -

(20 Puntos) Ejercicio 6: Dar la definición de núcleo de una transformación lineal y demostrar que es un subespacio vectorial

Resolución

El Nu(T) (el núcleo de la transformación lineal T) se define como el conjunto de vectores tales al aplicarle la transformación lineal se obtiene el vector nulo.

Matemáticamente, sea $T: V \to W$ una transformación lineal, entonces:

$$Nu(T) = \{ v \in V : T(v) = 0 \}$$

Demostramos que el Nu(T) es un subespacio.

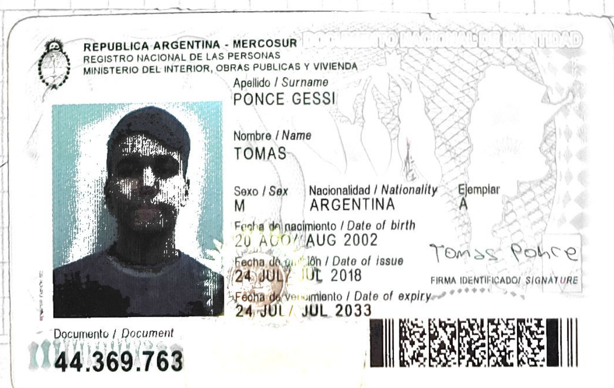
- El $Nu(T) \neq \emptyset$ puesto que $T(0) = 0$ para toda transformación lineal, luego el vector nulo siempre pertenece al núcleo de T.
- Si $v, w \in Nu(T)$ entonces $T(v) = T(w) = 0$. Luego $T(v+w) = T(v) + T(w) = 0 + 0 = 0$. Por lo tanto $v+w \in Nu(T)$
- Si $v \in Nu(T)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces $T(v) = 0$. Luego $T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda 0 = 0$. Por lo tanto $\lambda v \in Nu(T)$.

Como las 3 propiedades anteriores se cumplen, por definición el Núcleo de una Transformación Lineal es un Subespacio Vectorial.

Fin de la resolución.

Por la presente declaro que la resolución de este examen es obra de mi exclusiva autoría y respetando las pautas y criterios fijados en los enunciados. Asimismo declaro conocer el régimen de infracción de los estudiantes cuyo texto ordenado se encuentra en el apéndice de la Res. Rec. 1554/2018.

Tomás Ponce Gessi
44369763


REPUBLICA ARGENTINA - MERCOSUR
REGISTRO NACIONAL DE LAS PERSONAS
MINISTERIO DEL INTERIOR, OBRAS PUBLICAS Y VIVIENDA
DOCUMENTO NACIONAL DE IDENTIDAD
Apellido / Surname
PONCE GESSI
Nombre / Name
TOMAS
Sexo / Sex
M
Nacionalidad / Nationality
ARGENTINA
Ejemplar
A
Fecha de nacimiento / Date of birth
20 AGO / AUG 2002
Fecha de emisión / Date of issue
24 JUL / JUL 2018
Fecha de vencimiento / Date of expiry
24 JUL / JUL 2033
Tomas Ponce
FIRMA IDENTIFICADO/ SIGNATURE
Documento / Document
44.369.763

NOTA