Molina Franco Final AyED

44192153

20/12/21

1)

$$f.xs = \langle Max\ as, bs, cs : xs = as +\!\!+ bs +\!\!+ cs \wedge as = cs : \# as \rangle$$

a) f calcula el largo maximo posible de un prefijo de xs, que cumpla con ser igual al sufijo.

b) $f.[1,2,3,4,1,2]$

- las diferentes formas de partir nuestro xs y que el prefijo sea igual al sufijo (para calcular el rango) son:
  - $[\,] +\!\!+ [1,2,3,4,1,2] +\!\!+ [\,]$
  - $[1,2] +\!\!+ [3,4] +\!\!+ [1,2]$
- ahora calculo el largo de los posibles prefijos
  - $\#[\,] = 0$
  - $\#[1,2] = 2$
- Con esto llegamos a que el maximo es 2

$$\boxed{f.[1,2,3,4,1,2] = 2}$$

c) Derivar una funcion recursiva $(x : as = [x] +\!\!+ as)$

- para empezar a derivar, calculo el caso base:

CB: $f.[\,] = \langle Max\ as, bs, cs : [\,] = as +\!\!+ bs +\!\!+ cs \wedge as = cs : \# as \rangle$

{logica del ++}

$= \langle Max\ as, bs, cs : as = [\,] \wedge bs = [\,] \wedge cs = [\,] : \# as \rangle$

{rango unitario}

$= \#[\,]$

{caso base #}

$= 0$

c) Continuo, ahora dejo planteada la hipotesis y con esta, trabajo en el caso inductivo

- HI: $f.xs = \langle \text{Max } as, bs, cs : xs = as ++ bs ++ cs \wedge as = cs : \# as \rangle$
- Caso Inductivo

$f.(x:xs) = \langle \text{Max } as, bs, cs : (x:xs) = as ++ bs ++ cs \wedge as = cs : \# as \rangle$

{def de ++}

$= \langle \text{Max } as, bs, cs : [x] ++ [xs] = as ++ bs ++ cs \wedge as = cs : \# as \rangle$

{al ser (x:xs) no vacio, puedo plantear lo mismo de as, planteando as = a:as = [a]++[as] y haciendo logica llegamos a lo siguiente}

$= \langle \text{Max } a{:}as, bs, cs : (x = a) \wedge xs = as ++ bs ++ cs \wedge a{:}as = cs : \# a{:}as \rangle$

{ahora remplazamos con la nueva def.}

$= \langle \text{Max } as, bs, cs : xs = as ++ bs ++ cs \wedge (x : as = cs) : \# x : as \rangle$

{ayuda dada y def de #

$= \langle \text{Max } as, bs, cs : xs = as ++ bs ++ cs \wedge [x] ++ as = cs : \# as + 1 \rangle$

{Funcion contante en el termino}

$= \langle \text{Max } as, bs, cs : xs = as ++ bs ++ cs \wedge [x] ++ as = cs : \# as \rangle + 1$

- Necesito generalizar para poder continuar por lo que plante la sig espesificación.

$fgen.xs.h = \langle \text{Max } as, bs, cs : xs = as ++ bs ++ cs \wedge [h] ++ as = cs : \# as \rangle$

- Comienzo derivando el caso base

CB: $fgen.[\,].h = \langle \text{Max } as, bs, cs : [\,] = as ++ bs ++ cs \wedge [h] ++ as = cs : \# as \rangle$

{logica del ++}

$= \langle \text{Max } as, bs, cs : as = [\,] \wedge bs = [\,] \wedge cs = [\,] \wedge [h] ++ [\,] = [\,] : \# as \rangle$

{logica $[h] ++ [\,] = [\,] \Rightarrow$ False, absorvente de la conjunción}

$= \langle \text{Max } as, bs, cs : \text{False} : \# as \rangle$

{rango vacio}

$= 0$

Molina Franco Final AyED

44192153

20/12/21

· Continuo 1) c)

· Plante de nuevo nuestra hipotesis

$HI = fgen.xs.h = \langle Max\ as, bs, cs : xs = as +\!\!+ bs +\!\!+ cs \land [h] +\!\!+ as = cs : \#as \rangle$

· Ahora vamos a derivar el caso inductivo

$CI = fgen.(x:xs).h = \langle Max\ as, bs, cs : (x:xs) = as +\!\!+ bs +\!\!+ cs \land [h] +\!\!+ as = cs : \#as \rangle$

{al igual que antes planteamos la necesidad de que as no sea vacio por lo que as=(a:as) y utilizamos la misma logica y def. de ++}

$= \langle Max\ a{:}as, bs, cs : (x = a) \land xs = as +\!\!+ bs +\!\!+ cs \land [h{:}a] +\!\!+ as = cs : \#as + 1 \rangle$

{def de (x=a), leibnis y eliminacion de variable}

$= \langle Max\ as, bs, cs : xs = as +\!\!+ bs +\!\!+ cs \land [h{:}x] +\!\!+ as = cs : \#as + 1 \rangle$

{func. constante en el termino y HI}

$= fgen.xs.(h{:}x) + 1$

Resultado

```
fgen :: [Int] → [Int] → Int
fgen.[].h = 0
fgen.(x:xs).h = fgen.xs.(h:x) + 1
```

(f era un caso particular de fgen con h en [])

Molina Franco Final AyED | 44192153 | 20/12/21 | 4

2) Considerar

Const $M : Int$
Var A : array $[0, M)$ of Int , $n : Int$

$\{M \geq 0\}$
S
$\{n = \langle N i : 0 \leq i \leq M : \langle \Sigma j : i \leq j < M : A.j \rangle < i \rangle\}$

a) $A = [3, -1, 1, -1]$

$n = \langle N i : 0 \leq i \leq 4 : \langle \Sigma j : i \leq j < 4 : A.j \rangle < i \rangle$

{enumero todos los elementos → rango unitario}

$\langle N i : i \in [0,1,2,3,4] : \langle \Sigma j : i \leq j < 4 : A j \rangle < i \rangle$

{calculo el termino de cada i}

- $\langle \Sigma j : 0 \leq j < 4 : A j \rangle < 0 \rightarrow 2 < 0 = False$
- $\langle \Sigma j : 1 \leq j < 4 : A j \rangle < 1 \rightarrow -1 < 1 = True$
- $\langle \Sigma j : 2 \leq j < 4 : A j \rangle < 2 \rightarrow 0 < 2 = True$
- $\langle \Sigma j : 3 \leq j < 4 : A j \rangle < 3 \rightarrow -1 < 3 = True$
- $\langle \Sigma j : 4 \leq j < 4 : A j \rangle < 4 \rightarrow 0 < 4 = True$
  - finalmente contando los True llegamos a la conclucion de que

$\boxed{n = 4}$

b) Este programa debe calcular la cantidad de sufijos los cuáles sumados los valores de sus elementos, la suma da menor que la posicion de su primer elemento.

c) • reescribo la terna de la que derivaremo el programa

$\{M \geq 0\}$
S
$\{n = \langle N i : 0 \leq i \leq M : \langle \Sigma j : i \leq j < M : A.j \rangle < i \rangle\}$

• Al tener cuantificadores en Q sabemos que tendremos un ciclo por lo que propongo la sig. estructura de programa, agregando tambien una inicialización.

$\{P\}$
S_0
$\{I\}$
do $(B) \rightarrow$
  $\{I \wedge B \wedge t = T\}$
  S_1
  $\{I \wedge t < T\}$
od
$\{Q\}$

• Con esto podremos laburar, derivando ternas con lo que consigamos.

• Por recomendacion utilizo el metodo de intercambio de constante por variable con 0 y ademas esto nos indica que nuestra variable decrecera hasta ser 0 por lo que planteo la guarda y la cota

$\{I : n = \langle N i : m \leq i \leq M : \langle \Sigma j : i \leq j < M : A.j \rangle < i \rangle \wedge 0 \leq m \leq M\}$

$B = (m \neq 0)$

$t = m$

• Con todo esto, podemos empezar a derivar el cuerpo del ciclo con la sig. terna
• Ademas proponemo una asignación a la variables y sabemos que m tendra que ir decreciendo.

$\{n = \langle N i : m \leq i \leq M : \langle \Sigma j : i \leq j < M : A.j \rangle < i \rangle \wedge 0 \leq m \leq M \wedge (m \neq 0) \wedge m = T\}$

$n, m := E, (m-1)$

$\{n = \langle N i : m \leq i \leq M : \langle \Sigma j : i \leq j < M : A_j \rangle < i \rangle \wedge 0 \leq m \leq M \wedge m < T\}$

Molina Franco Final AyED 44192153 20/12/21 6

c) Continuo

- Ahora tomo la primera condicion como hipotesis y laburo en la wp de la asignación.

$\equiv wp\ \{n = \langle N i : m \leq i \leq M : \langle \Sigma j : i \leq j < M : A_j \rangle < i \rangle \wedge 0 \leq m \leq M \wedge m < T\}.(n, m = E, (m-1))$

$\{$ calculo la wp $\}$

$\equiv (E = \langle N i : m-1 \leq i \leq M : \langle \Sigma j : i \leq j < M : A_j \rangle < i \rangle) \wedge 0 \leq (m-1) \leq M \wedge (m-1) < T$

$\{$ logica, por HI $(0 \leq m \leq M) \wedge (m \neq 0) \Rightarrow 0 < m \leq M$ y def de $T \rightarrow m-1 < m \rightarrow True \}$

$\equiv (E = \langle N i : i = m-1 \vee m \leq i \leq M : \langle \Sigma j : i \leq j < M : A_j \rangle < i \rangle) \wedge True \wedge True$

$\{$ particion de rango y rango unitario y neutro de $\wedge \}$

$\equiv (E = \langle N i : m \leq i \leq M : \langle \Sigma j : i \leq j < M : A_j \rangle < i \rangle + (\langle \Sigma j : m-1 \leq j < M : A_j \rangle < m-1) \rightarrow 1$
$\square (\langle \Sigma j : m-1 \leq j < M : A_j \rangle \geq m-1) \rightarrow 0)$

$\{$ HI, def de $n \}$

$\equiv (E = n + ((\langle \Sigma j : m-1 \leq j < M : A_j \rangle < m-1) \rightarrow 1 \ \square\ (\langle \Sigma j : m-1 \leq j < M : A_j \rangle \geq m-1) \rightarrow 0)$

- para continuar necesito fortalecer la invariante, para esto necesito laburar un poco más con la expresion que lo voy a hacer asi que la saco y laburo mas comodo

$\langle \Sigma j : m-1 \leq j < M : A_j \rangle$

$\{$ logica $\}$

$\langle \Sigma j : j = m-1 \vee m \leq j < M : A_j \rangle$

$\{$ particion de rango y rango unitario

$\underbrace{\langle \Sigma j : m \leq j < M : A_j \rangle}_{} + A.m-1$

- Con esto fortaleceremos la invariante planteando I' a base de I de la sig manera

$I' \equiv I \wedge k = \langle \Sigma j : m \leq j < M : A_j \rangle$

Molina Franco Final AyED

44192153
20/12/21

- Para continuar planteo la wp con la que volveremos a derivar el cuerpo del ciclo

$$wp\,\{n = \langle N i : m \leq i \leq M : \langle \Sigma j : i \leq j < M : A_j \rangle < i \rangle \wedge 0 \leq m \leq M \wedge m < T \wedge k = \langle \Sigma j : m \leq j \leq M : A_j \rangle\}\left(\begin{matrix} n, m, k = \\ E, m-1, F \end{matrix}\right)$$

{ calculo la wp }

$$\equiv \underbrace{E = \langle N i : m-1 \leq i \leq M : \langle \Sigma_j : i \leq j < M : A_j \rangle < i \rangle \wedge 0 \leq m-1 \leq M \wedge m-1 < T}_{} \wedge F = \langle \Sigma_j : m-1 \leq j < M : A_j \rangle$$

{ laburo primero con E y luego con F para mayor comodidad }
{ avanzo lo ya laburado }

$$\equiv E = \underline{n} + (((\langle \Sigma j : m-1 \leq j < M : A_j \rangle < m-1) \to 1 \;\square\; (\langle \Sigma j : m-1 \leq j < M : A_j \rangle \geq m-1) \to 0)$$

{ distributividad y además avanzo lo laburado aparte y remplazo con definición de k }

$$E = (k + A.(m-1) < m-1) \to 1 + n \;\square\; (k + A.(m-1) \geq m-1) \to n$$

- Con esto llegamos a la def de E donde sabremos que tenemos que incluir este condicional con la asignación multiple dentro.

- Continuo con la derivación de F

$$F = \langle \Sigma_j : m-1 \leq j < M : A_j \rangle$$

{ logica y partición de rangos }

$$F = \langle \Sigma_j : m = j : A_j \rangle + \langle \Sigma_j : m < j < M : A_j \rangle$$

{ rango unitario y HI }

$$F = A.m + k$$

- Con todo ya planteado, derivado y demostrado; habiendo demostrado la cota, la invariante y el cuerpo del ciclo, solo nos queda calcular la inicialización con la sig. forma (sabiendo que nuestra m disminuye y debe comenzar en su maximo.

$\{P\}$
$n, m, k = E', M, F'$
$\{I\}$

2) b) • Para continuar planteo la wp de la asignacion, tomando como hipotesis P,

$wp.\{n = \langle N i : m \leq i \leq M : \langle \Sigma j : i \leq j < M : A_j\rangle < i\rangle \wedge 0 \leq m \leq M \wedge k = \langle \Sigma j \langle m < j < M : A_j\rangle\}(n, m, k := E', M, F')$

$\{$ calculo la wp $\}$

$E' = \langle N i : \underline{M \leq i \leq M} : \langle \Sigma j : i \leq j < M : A_j\rangle < i\rangle \wedge \underline{0 \leq M} \wedge F' = \langle \Sigma j : \underline{M < j < M} : A_j\rangle$

$\{$ logica y rango unitario y HI $\}$

$E' = (\langle \Sigma j : False : A_j\rangle < M \to 1 \ (\langle \Sigma j : False : A_j\rangle \geq M) \to 0 \wedge True \wedge F' = \langle \Sigma j : False : A_j\rangle$

$\{$ rango vacio y HI + $M \geq 0$

$E' = 1 \wedge F' = 0$

• Teniendo todo ya derivado, planteo el **programa completo** →

```
Const M : Int
Var A : array [0,M) of Int, n : Int, k : Int

{P: M ≥ 0}
n, m, k := 1, 0, 0
{I': n = ⟨N i : m ≤ i ≤ M : ⟨Σj : i ≤ j < M : Aj⟩ < i⟩ ∧ 0 ≤ m ≤ M ∧ k = ⟨Σj : m < j < M : Aj⟩}
do (m ≠ 0) →
    {I' ∧ B ∧ m = T}
    If (k + A.(m-1) < m-1) →
          n, m, k = (1+n), (m-1), (Am + k)
    □ (k + A.(m-1) ≥ (m-1)) →
          n, m, k = (n), (m-1), (Am + k)
    fi
    {I' ∧ m < T}
od
{Q: n = ⟨N i : 0 ≤ i < M : ⟨Σj : i ≤ j < M : A.j⟩ < i⟩}
```

Molina Franco Final AyED

44192153
20/12/21

9

3) pre y post condicion, declarar variables.

Cont $N : Int$, $k : Int$
Var $A : array\ [0,N)\ of\ Int$, $r = Bool$

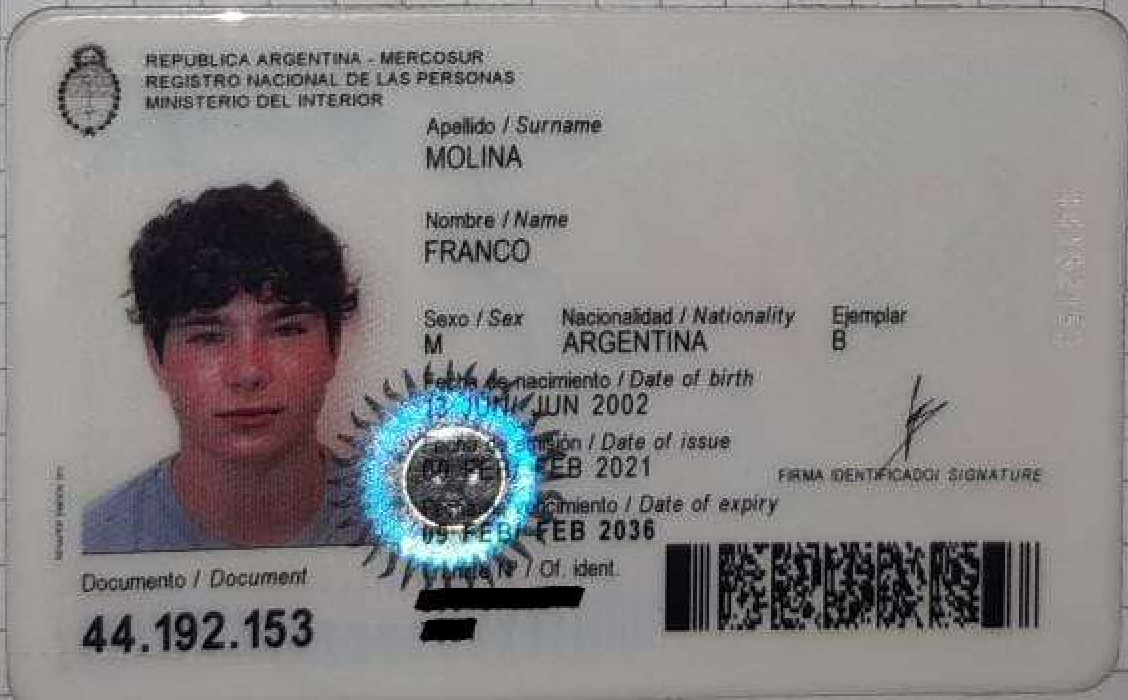
$\{2 \leq N\}$

S

$\{r = \langle \exists a,b : 0 \leq a < b \leq N \wedge b = a+1 : ((A.a \max A.b) - (A.a \min A.b)) < k \}$

Por la presente declaro que la resolucion de este examen es obra de mi exclusiva autoría y respetando las pautas y criterios fijados en los enunciados. Asimismo, declaro conocer el regimen de infraccion de los estudiantes cuyo texto ordenado se encuentra en el apéndice de la Res. Rec 1554/2018

Molina
Franco


REPUBLICA ARGENTINA - MERCOSUR
REGISTRO NACIONAL DE LAS PERSONAS
MINISTERIO DEL INTERIOR

Apellido / Surname
MOLINA

Nombre / Name
FRANCO

Sexo / Sex: M
Nacionalidad / Nationality: ARGENTINA
Ejemplar: B

Fecha de nacimiento / Date of birth
13 JUN/ JUN 2002

Fecha de emisión / Date of issue
FEB 2021

Fecha de vencimiento / Date of expiry
09 FEB/ FEB 2036

Trámite N° / Of. ident.
[redacted]

FIRMA IDENTIFICADO/ SIGNATURE

Documento / Document
44.192.153