Práctico 3
Matemática Discreta I – Año 2021/1
FAMAF

Ejercicios resueltos

(1) Hallar el cociente y el resto de la división de:

a) 135 por 23, *Rta:* $135 = 23 \times 5 + 20$ $q = 5, r = 20$

b) -135 por 23, *Rta:* $-135 = 23 \times (-6) + 3$ $q = -6, r = 3$

c) 135 por -23, *Rta:* $-135 = 23 \times (-6) + 3$ $q = -6, r = 3$

d) -135 por -23, *Rta:* $135 = 23 \times 5 + 20$ $q = 5, r = 20$

e) 127 por 99, *Rta:* $127 = 99 \times 1 + 28$, $q = 1, r = 28$

f) -98 por -73. *Rta:* $98 = 73 \times 1 + 25$, $q = 1, r = 25$

(2) *a)* Si $a = b \cdot q + r$, con $b \leq r < 2b$, hallar el cociente y el resto de la división de a por b.
Rta: $a = b \cdot (q + 1) + r - b$, con $0 \leq r - b < b$ por lo tanto el cociente es $q + 1$ y el resto $r - b$.

b) Repetir el ejercicio anterior, suponiendo ahora que $-b \leq r < 0$.
Rta: $a = b \cdot (q - 1) + r + b$, con $0 \leq r + b < b$ por lo tanto el cociente es $q - 1$ y el resto $r + b$.

(3) Dado $m \in \mathbb{N}$ hallar los restos posibles de m^2 y m^3 en la division por $3, 4, 5, 7, 8, 11$.

Rta: El resto del cuadrado (cubo) de m es el resto del cuadrado (cubo) del resto de m. Por lo tanto hay que calcular los restos de r^2 con $0 \leq r \leq m$. Así tenemos para $m = 3, r \in \{0, 1\}$; $m = 4, r \in \{0, 1\}$; $m = 5, r \in \{0, 1, 4\}$; $m = 7, r \in \{0, 1, 4, 2\}$; $m = 8, r \in \{0, 1, 4\}$; $m = 11, r \in \{0, 1, 4, 9, 5, 3\}$.

(4) Expresar en base 10 los siguientes enteros:

a) $(1503)_6$ *Rta:* $1 \times 6^3 + 5 \times 6^2 + 0 \times 6^1 + 3 \times 6^0 = 1 \times 216 + 5 \times 36 + 3 = 399$

b) $(1111)_2$ *Rta:* $2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$

c) $(1111)_{12}$ *Rta:* En este ejercicio (y en otro más abajo) usaremos que

$$1 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad \text{(serie geométrica).}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 12^3 + 12^2 + 12^1 + 1 &= \frac{12^4 - 1}{11} = \frac{144^2 - 1}{11} = \frac{143 \times 145}{11} \\ &= \frac{143}{11} \times 145 = 13 \times 145. \end{aligned}$$

d) $(123)_4$ *Rta:* $1 \times 16 + 2 \times 4 + 3 = 27$.

e) $(12121)_3$ *Rta:* $3^4 + 2 \times 3^3 + 3^2 + 2 \times 3^1 + 3 = 81 + 54 + 9 + 6 + 3 = 153$.

f) $(1111)_5$ *Rta:* $=(5^4 - 1)/4 = 624/4 = 156$.

(5) Convertir

a) $(133)_4$ a base 8,
Rta: Debemos primero calcular cuanto vale $(133)_4$ en base 10 (la base usual) y luego pasarlo a base 8. Ahora bien, $(133)_4 = 4^2 + 3 \times 4 + 3 = 31$ y $31 = 3 \times 8 + 7$, por lo tanto $(133)_4 = (37)_8$.

b) $(B38)_{16}$ a base 8,
Rta: Aquí usaremos que $16 = 2 \times 8$. Entonces, $(B38)_{16} = 12 \times (16)^2 + 3 \times 16 + 8 = 6(8)^3 + 6 \times 8 + 8 = 6 \times 8^3 + 7 \times 8 = (6010)_8$.

c) $(3506)_7$ a base 2,
Rta: $(3506)_7 = 3 \times 7^3 + 5 \times 7^2 + 6 = 1280$. Ahora debemos escribir 1280 en base 2

$$\begin{aligned}
1280 &= 2 \times 640 + 0 \\
640 &= 2 \times 320 + 0 \\
320 &= 2 \times 160 + 0 \\
160 &= 2 \times 80 + 0 \\
80 &= 2 \times 40 + 0 \\
40 &= 2 \times 20 + 0 \\
20 &= 2 \times 10 + 0 \\
10 &= 2 \times 5 + 0 \\
5 &= 2 \times 2 + 1 \\
2 &= 2 \times 1 + 0 \\
1 &= 2 \times 0 + 1.
\end{aligned}$$

Luego $(3506)_7 = (10100000000)_2$.
Hay una forma de hacer este ejercicio más corta: observar que $1280 = 2^7 \times 10 = 2^8 \times 5 = 2^8 \times (2^2 + 1) = 2^{10} + 2^8$.

d) $(1541)_6$ a base 4.
Rta: $6^3 + 5 \times 6^2 + 4 \times 6 + 1 = 54 \times 4 + 45 \times 4 + 6 \times 4 = 105 \times 4 = 420$. Luego,

$$\begin{aligned}
420 &= 4 \times 105 + 0 \\
105 &= 4 \times 26 + 1 \\
26 &= 4 \times 6 + 2 \\
6 &= 4 \times 1 + 2 \\
1 &= 4 \times 0 + 1.
\end{aligned}$$

Entonces, $(1541)_6 = (12210)_4$.

(6) Calcular:

a) $(2234)_5 + (2310)_5$
Rta: La suma entre números escritos en la misma base se hace de la misma forma que la suma usual, teniendo en cuenta que en base 5 tenemos, $2 + 3 = 10$, $3 + 3 = 11$, etc.

$$\begin{array}{r} (2234)_5 \\ +(2310)_5 \\ \hline (10044)_5 \end{array}$$

b) $(10101101)_2 + (10011)_2$ *Rta:* $(11000000)_2$.

(7) Expresar en base 5: $(1503)_6 + (1111)_2$.

Rta: Primero pasamos ambos números a base 10:

- $(1503)_6$: $1 \times 6^3 + 5 \times 6^2 + 0 \times 6^1 + 3 \times 6^0 = 1 \times 216 + 5 \times 36 + 3 = 399$.
- $(1111)_2$: $2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$.

Ahora los sumamos $399 + 15 = 414$. Finalmente, escribimos 414 en base 5.

$$\begin{aligned} 414 &= 5 \times 82 + 4 \\ 82 &= 5 \times 16 + 2 \\ 16 &= 5 \times 3 + 1 \\ 3 &= 5 \times 0 + 3. \end{aligned}$$

Luego $(1503)_6 + (1111)_2 = (3124)_5$

(8) Sean a, b, $c \in \mathbb{Z}$. Demostrar las siguientes afirmaciones:

a) Si $ab = 1$, entonces $a = b = 1$ ó $a = b = -1$.
Rta: a y b no pueden ser nulos y si tienen distinto signo su producto es negativo, podemos suponer que son ambos positivos o negativos. Si $a > 1$ entonces $1 = ab > b > 0$ es absurdo. Igualmente si $a < -1$ entonces $1 = ab > -b > 0$. Luego $a = \pm 1$ y entonces $b = \pm 1$.

b) Si $a, b \neq 0$, $a|b$ y $b|a$, entonces $a = b$ ó $a = -b$.
Rta: Tenemos $b|a \Rightarrow a = bq$ y $a|b \Rightarrow b = ap$ luego $a = apq$ y $a \neq 0 \Rightarrow pq = 1$. El inciso a) dice que $p = q = 1$ o $p = q = -1$ de donde se sigue el resultado buscado.

c) Si $a|1$, entonces $a = 1$ ó $a = -1$.
Rta: Este es un corolario del inciso *b)* tomando $b = 1$ ya que $1|a$, $\forall a \in \mathbb{Z}$.

d) Si $a \neq 0$, $a|b$ y $a|c$, entonces $a|(b + c)$ y $a|(b - c)$.
Rta: Como $b = aq$ y $c = ap$, $b \pm c = a(q \pm p)$.

e) Si $a \neq 0$, $a|b$ y $a|(b + c)$, entonces $a|c$.
Rta: Se puede usar el inciso anterior con $b = 0$.

f) Si $a \neq 0$ y $a|b$, entonces $a|b \cdot c$.
Rta: Si $b = aq$ entonces $b.c = aqc \Rightarrow a|b.c$.

(9) Dados b, c enteros, probar las siguientes propiedades:

a) 0 es par y 1 es impar.
Rta: $0 = 2 \times 0$ y $1 = 2 \times 0 + 1$.

b) Si b es par y $b \mid c$, entonces c es par. (Por lo tanto, si b es par, también lo es $-b$).
Rta: $b = 2q, c = bp \Rightarrow c = 2qp \Rightarrow c$ es par. $(b| - b)$.

c) Si b y c son pares, entonces $b + c$ también lo es.
Rta: $2|b, 2|c \Rightarrow 2|b + c$.

d) Si un número par divide a 2, entonces ese número es 2 ó -2.
Rta: Dicho número a no puede ser 0 y por el ejercicio 7 b) $2|a$ y $a|2$ entonces $a = \pm 2$.

e) La suma de un número par y uno impar es impar.
Rta: $a = 2q, b = 2p + 1 \Rightarrow a + b = 2(q + p) + 1$.

f) $b + c$ es par si y sólo si b y c son ambos pares o ambos impares.
Rta: $b = 2q, c = 2p \Rightarrow b + c = 2(q + p); b = 2q + 1, c = 2p + 1 \Rightarrow b + c = 2q + 1 + 2p + 1 = 2(q + p + 1)$.

(10) Sea $n \in \mathbb{Z}$. Probar que n es par si y sólo si n^2 es par.

Rta: $n = 2q \Rightarrow n^2 = 2(2q^2)$. $n = 2q + 1 \Rightarrow n^2 = 4q^2 + 4q + 1 = 2(2q^2 + 2q) + 1$.

(11) Probar que $n(n + 1)$ es par para todo n entero.

Rta: Si $n = 2q, n(n + 1) = 2q(2q + 1)$ es par. Si $n = 2q + 1, n(n + 1) = (2q + 1)(2q + 1 + 1) = 2(q + 1)(2q + 1)$.

(12) Sean a, b, $c \in \mathbb{Z}$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Justificar las respuestas.

a) $a \mid b \cdot c \Rightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$.
Rta: Falso, contraejemplo: $6|12 = 4 \times 3$ pero 6 no divide a 4 ni divide a 3.

b) $a \mid (b + c) \Rightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$.
Rta: Falso, contraejemplo: $6|5 = 1$ per 6 no divide a 5 ni a 1.

c) $a \mid c$ y $b \mid c \Rightarrow a \cdot b \mid c$.
Rta: Falso, contraejemplo: $6|12$ y $4|12$ pero 24 no divide a 12.

d) $a \mid c$ y $b \mid c \Rightarrow (a + b) \mid c$.
Rta: Falso, contraejemplo: $2|6$ y $3|6$ pero 5=2+3 no divide a 6.

e) a, b, $c > 0$ y $a = b \cdot c$, entonces $a \geq b$ y $a \geq c$.
Rta: Verdadero, $b \geq 1 \Rightarrow a = bc \geq c$ y $c \geq 1 \Rightarrow bc \geq b$.

(13) Probar que cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$:

a) $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es múltiplo de 11.

Rta: $3^{2n+2} + 2^{6n+1} = 9^n \cdot 9 + 64^n \cdot 2$. Como el resto de dividir 64 por 11 es 9, tenemos que $9^n \cdot 9 + 64^n \cdot 2$ es divisible por 11 si $9^n \cdot 9 + 9^n \cdot 2$ lo es y este último es $9^n(9+2)$ que claramente es divisible por 11.
Rta Alternativa: podemos probar por inducción. Si $n = 0$ es claro. Supongamos $11|3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ (HI). Debemos probar que

$$11|3^{2(n+1)+2} + 2^{6(n+1)+1} = 11|3^{2n+4} + 2^{6n+7}.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} 3^{2n+4} + 2^{6n+7} &= 3^2 3^{2n+2} + 2^6 2^{6n+1} \\ &= 9 \cdot 3^{2n+2} + 64 \cdot 2^{6n+1} \\ &= 9(3^{2n+2} + 2^{6n+1}) + 55 \cdot 2^{6n+1}. \end{aligned}$$

Es claro que el primer término es divisible por 11 por HI. El segundo término es $55 \cdot 2^{6n+1}$ que es divisible por 11, pues 55 lo es. Concluyendo $9(3^{2n+2}+2^{6n+1})+55\cdot 2^{6n+1}$ es divisible por 11 y por lo tanto $11|3^{2n+4}+2^{6n+7}$ lo es.

b) $3^{2n+2} - 8n - 9$ es divisible por 64.
Rta: Lo haremos por inducción. El caso base es $n = 1$ y en ese caso debemos ver que $64|3^{2\cdot 1+2} - 8 \cdot 1 - 9 = 3^4 - 8 - 9 = 81 - 17 = 64$, lo cual esta bien.
Supongamos que $64|3^{2n+2} - 8n - 9$ (HI), entonces debemos probar que $64|3^{2(n+1)+2} - 8(n+1) - 9 = 9 \cdot 3^{2n+2} - 8n - 17$.
Ahora bien

$$\begin{aligned} 9 \cdot 3^{2n+2} - 8n - 17 &= 9 \cdot (3^{2n+2} - 8n - 9 + 8n + 9) - 8n - 17 \\ &= 9 \cdot (3^{2n+2} - 8n - 9) + 9 \cdot (8n+9) - 8n - 17 \\ &= 9 \cdot (3^{2n+2} - 8n - 9) + 72n + 81 - 8n - 17 \\ &= 9 \cdot (3^{2n+2} - 8n - 9) + 64(n+1). \end{aligned}$$

El primer término es múltiplo de 64 por HI y el segundo es $64(n+1)$ que claramente es múltiplo de 64.

(14) Decir si es verdadero o falso justificando:

a) $3^n + 1$ es múltiplo de n, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Rta: Falso, contraejemplo $n = 3$.

b) $3n^2 + 1$ es múltiplo de 2, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Rta: Falso, contraejemplo $n = 2$.

c) $(n+1) \cdot (5n+2)$ es múltiplo de 2, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Rta: Verdadero, si n es par, $5n+2$ es par y por lo tanto $(n+1) \cdot (5n+2)$ es múltiplo de 2. Si n es impar $n+1$ es par y $2|(n+1) \cdot (5n+2)$.

(15) Probar que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n^2 + 2$ no es divisible por 4.

Rta: Si n es impar n^2+2 es impar y por lo tanto no es divisible por 4. Si n es par n^2 es divisible por 4. Supongamos que $4|n^2+2$, como $4|n^2$, tenemos que $4|n^2+2-n^2=2$, absurdo, que vino de suponer que $4|n^2+2$.

(16) Probar que todo entero impar que no es múltiplo de 3, es de la forma $6m\pm 1$, con m entero.

Rta: Como n no es divisible por 3, debe ser $n = 3q \pm 1$. Si q fuese impar entonces n sería par, por lo tanto $q = 2m$ y tenemos el resultado.

(17) *a)* Probar que el producto de tres enteros consecutivos es divisible por 6.
Rta: Como los pares e impares se alternan dados dos consecutivos uno de ellos debe ser par. Similarmente cada tres consecutivos habrá uno que es divisible por 3 (ya que al dividirlos por 3 sus restos son tres números distintos entre 0 y 2, o sea que uno de los restos debe ser 0). Entonces $n(n+1)(n+2)$ tiene que ser divisible por 2 y por 3 y como estos son coprimos debe ser divisible por 6.

b) Probar que el producto de cuatro enteros consecutivos es divisible por 24.
Rta: Como en el ejercicio anterior, ahora tenemos que uno de los números es divisible por 4 y otro de los restantes es divisible por 2. Entonces el producto es divisible por 8 y también hay uno que es múltiplo de 3 por lo cual el producto es divisible por $24 = 3 \times 8$.
Rta Alternativa: el producto de cuatro enteros consecutivos es de la forma $n(n-1)(n-2)(n-3)$. Ahora bien,

$$\binom{n}{4} = \frac{n!}{(n-4)!4!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}.$$

Por un teorema de la teórica sabemos que $\binom{n}{4}$ es un número entero, por lo tanto

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

es entero, lo cual quiere decir que $4!|n(n-1)(n-2)(n-3)$ (y $4! = 24$).

c) Probar que el producto de m enteros consecutivos es divisible por $m!$.
Rta: el producto de m enteros consecutivos es de la forma $n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-m+1)$. Ahora bien,

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-m+1)}{m!}.$$

Por un teorema de la teórica sabemos que $\binom{n}{m}$ es un número entero, por lo tanto

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-m+1)}{m!}$$

es entero, lo cual quiere decir que

$$m!|n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-m+1).$$

(18) Probar que si a y b son enteros entonces $a^2 + b^2$ es divisible por 7 si y sólo si a y b son divisibles por 7. ¿Es lo mismo cierto para 3? ¿Para 5?

Rta: Los restos posibles de dividir por 7 son 0,1,2,3,4,5,6. Los restos de sus cuadrados son 0,1,4,2. La única suma de dos de ellos que da un múltiplo de 7 es $0 + 0 = 0$. Luego $a^2 + b^2$ sólo puede ser divisible por 7 si a y b lo son. En el caso de 3 tenemos tenemos que los restos de cuadrados posibles son 0 y 1 y para que la suma de 0 solo puede ser $0 + 0$ como en el caso anterior. Para el caso 5 tenemos $1^2 + 2^2$ es divisible por 5 pero 1 y 2 no lo son.

(19) Encontrar

a) $(7469, 2464)$.
Rta:

$$\begin{aligned} 7469 &= 2464 \cdot 3 + 77 \\ 2464 &= 77 \cdot 32 + 0. \end{aligned}$$

Luego, $(2469, 2464) = 77$.

b) $(2689, 4001)$.
Rta:

$$\begin{aligned} 4001 &= 2689 \cdot 1 + 1312 \\ 2689 &= 1312 \cdot 2 + 65 \\ 1312 &= 65 \cdot 20 + 12 \\ 65 &= 12 \cdot 5 + 5 \\ 12 &= 5 \cdot 2 + 2 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(2689, 4001) = 1$.

c) $(2447, -3997)$.
Rta: Es lo mismo calcular $(2447, 3997)$

$$\begin{aligned} 3997 &= 2447 \cdot 1 + 1550 \\ 2447 &= 1550 \cdot 1 + 897 \\ 1550 &= 897 \cdot 1 + 653 \\ 897 &= 653 \cdot 1 + 244 \\ 653 &= 244 \cdot 2 + 165 \\ 244 &= 165 \cdot 1 + 79 \\ 165 &= 79 \cdot 2 + 2 \\ 79 &= 2 \cdot 39 + 1 \\ 2 &= 1 \cdot 2 + 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(2447, -3997) = 1$.

d) $(-1109, -4999)$.

Rta: Es lo mismo calcular $(1109, 3997)$

$$\begin{aligned}
3997 &= 1109 \cdot 3 + 670 \\
1109 &= 670 \cdot 1 + 439 \\
670 &= 439 \cdot 1 + 231 \\
439 &= 231 \cdot 1 + 208 \\
208 &= 23 \cdot 9 + 1 \\
23 &= 1 \cdot 23 + 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(-1109, -4999) = 1$.

(20) Calcular el máximo común divisor y expresarlo como combinación lineal de los números dados, para cada uno de los siguientes pares de números:

a) 14 y 35, *Rta:* $35 = 2 \cdot 14 + 7; 14 = 2 \cdot 7; (14, 35) = -2 \cdot 14 + 35$.

b) 11 y 15, *Rta:* $15 = 11 + 4; 11 = 2 \cdot 4 + 3; 4 = 3 + 1; 1 = 4 - 3 =$
$= 15 - 11 - (11 - 2 \cdot (15 - 11)) = 3 \cdot 15 - 4 \cdot 11$.

c) 12 y 52, *Rta:* $(12, 52) = 4 = 52 - 4 \cdot 12$.

d) 12 y -52, *Rta:* $(12, -52) = 4 = -4 \cdot 12 + (-52)$.

e) 12 y 532, *Rta:* $(12, 532) = 4 = -44 \cdot 12 + 532$.

f) 725 y 441,
Rta:

$$\begin{aligned}
725 &= 441 \cdot 1 + 284 & &\Rightarrow & 284 &= 725 - 441 \\
441 &= 284 \cdot 1 + 157 & &\Rightarrow & 157 &= 441 - 284 \\
284 &= 157 \cdot 1 + 127 & &\Rightarrow & 127 &= 284 - 157 \\
157 &= 127 \cdot 1 + 30 & &\Rightarrow & 30 &= 157 - 127 \\
127 &= 30 \cdot 4 + 7 & &\Rightarrow & 7 &= 127 - 30 \cdot 4 \\
30 &= 7 \cdot 4 + 2 & &\Rightarrow & 2 &= 30 - 7 \cdot 4 \\
7 &= 2 \cdot 3 + 1 & &\Rightarrow & 1 &= 7 - 2 \cdot 3 \\
2 &= 1 \cdot 2 + 0. & & & &
\end{aligned}$$

Luego $(725, 441) = 1$ y

$$\begin{aligned}
1 &= 7 - 2 \cdot 3 \\
&= 7 - (30 - 7 \cdot 4) \cdot 3 = 7 \cdot 13 - 30 \cdot 3 \\
&= (127 - 30 \cdot 4) \cdot 13 - 30 \cdot 3 = 127 \cdot 13 - 55 \cdot 30 \\
&= 127 \cdot 13 - 55 \cdot (157 - 127) = 68 \cdot 127 - 55 \cdot 157 \\
&= 68 \cdot (284 - 157) - 55 \cdot 157 = 68 \cdot 284 - 123 \cdot 157 \\
&= 68 \cdot 284 - 123 \cdot (441 - 284) = 191 \cdot 284 - 123 \cdot 441 \\
&= 191 \cdot (725 - 441) - 123 \cdot 441 = 191 \cdot 725 - 314 \cdot 441.
\end{aligned}$$

Es decir, $1 = 191 \cdot 725 - 314 \cdot 441$.

g) 606 y 108.
Rta:

$$\begin{array}{rcl} 606 = 108 \cdot 5 + 66 & \Rightarrow & 66 = 606 - 108 \cdot 5 \\ 108 = 66 \cdot 1 + 42 & \Rightarrow & 42 = 108 - 66 \\ 66 = 42 \cdot 1 + 24 & \Rightarrow & 24 = 66 - 42 \\ 42 = 24 \cdot 1 + 18 & \Rightarrow & 18 = 42 - 24 \\ 24 = 18 \cdot 1 + 6 & \Rightarrow & 6 = 24 - 18 \\ 18 = 6 \cdot 3 + 0 & & \end{array}$$

Luego $(606, 108) = 6$ y

$$\begin{aligned} 6 &= 24 - 18 \\ &= 24 - (42 - 24) = 2 \cdot 24 - 42 \\ &= 2 \cdot (66 - 42) - 42 = 2 \cdot 66 - 3 \cdot 42 \\ &= 2 \cdot 66 - 3 \cdot (108 - 66) = 5 \cdot 66 - 3 \cdot 108 \\ &= 5 \cdot (606 - 108 \cdot 5) - 3 \cdot 108 = 5 \cdot 606 - 28 \cdot 108. \end{aligned}$$

Es decir, $6 = 5 \cdot 606 - 28 \cdot 108$.

(21) Probar que no existen enteros x e y que satisfagan $x + y = 100$ y $(x, y) = 3$.
Rta: Si $(x, y) = 3$ entonces $3|x, 3|y$ y por lo tanto $3|x + y = 100$, absurdo.

(22) *a)* Sean a y b coprimos. Probar que si $a \mid b \cdot c$ entonces $a \mid c$.
Rta: Como a y b son coprimos existen r y s tales que $1 = ra + sb$ por lo tanto $c = rac + sbc$ y como a divide ambos sumandos, $a|c$.

b) Sean a y b coprimos. Probar que si $a \mid c$ y $b \mid c$, entonces $a \cdot b \mid c$.
Rta: Como a y b son coprimos existen r y s tales que $1 = ra + sb$. Además $ap = c = bq$, entonces $c = rac + sbc = rabq + sbap = (rq + sp)ab$. Por lo tanto $ab|c$.

(23) Encontrar todos los enteros positivos a y b tales que $(a, b) = 10$ y $[a, b] = 100$.
Rta: Es claro que $(a/10, b/10) = 1$ y $[a/10, b/10] = 10$. Como $[a/10, b/10] = \dfrac{(a/10)(b/10)}{(a/10, b/10)} = (a/10)(b/10)$, tenemos que $(a/10)(b/10) = 10$, por lo tanto $\{a/10, b/10\} \in \{\{1, 10\}, \{2.5\}\}$. Es decir, $a = 10, b = 100$ ó $a = 20, b = 50$ ó al revés.

(24) *a)* Probar que si d es divisor común de a y b, entonces $\dfrac{(a, b)}{d} = \left(\dfrac{a}{d}, \dfrac{b}{d}\right)$.
Rta: $d|a, d|b \Rightarrow d|(a, b) \Rightarrow (a, b) = dq$. Como $a = (a, b)r; b = (a, b)s$ con $(r, s) = 1$, se tiene $a/d = qr; b/d = qs$ con $(r, s) = 1$. Por lo tanto $(a/d, b/d) = q = (a, b)/d$.

b) Probar que si $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos, entonces $\dfrac{a}{(a, b)}$ y $\dfrac{b}{(a, b)}$ son coprimos.

Rta: usar el inciso anterior con $d = (a, b)$.

(25) Probar que 3 y 5 son números primos.

Rta: 3 no es divisible por 2 y 5 no es divisible por 2 ni por 3.

(26) Dar todos los números primos positivos menores que 100.

Rta: 2,3,5,7, están en la lista. Por el criterio de la raíz debemos ver cuales números del 8 al 100 no son divisibles por 2, 3, 5 ni 7. Estos son: 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

(27) Determinar con el criterio de la raíz cuáles de los siguientes números son primos: 113, 123, 131, 151, 199, 503.

Rta: $\sqrt{113} < 11$ y 113 no es divisible por 2, 3, 5 y 7, por lo tanto es primo. $123 = 3 \cdot 41$ luego no es primo. 131 es primo, pues $\sqrt{131} < 12$ y 131 no es divisible por 2, 3, 7 y 11. 151 es primo, pues $\sqrt{151} < 13$ y 151 no es divisible por 2, 3, 7 y 11. 199 es primo, pues $\sqrt{199} < 14$ y 199 no es divisible por 2, 3, 7, 11 y 13. 503 es primo, pues $\sqrt{503} \sim 22.42... < 23$ y 503 no es divisible por 2, 3, 7, 11, 13, 17 y 19.

(28) Probar que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces los números $2n + 1$ y $n(n + 1)$ son coprimos.

Rta: Supongamos que existe p primo tal que $p|2n + 1$ y $p|n(n + 1)$.

Como $p|n(n + 1)$, entonces $p|n$ o $p|n + 1$.

Caso 1: $p|n$. Como $p|n$ y $p|2n + 1 \Rightarrow p|(2n + 1) - 2n = 1$, absurdo.

Caso 2: $p|n + 1$. Como $p|n + 1$ y $p|2n + 1 \Rightarrow p|2(n + 1) - (2n + 1) = 1$, absurdo.

Es decir, en cualquier caso llegamos a un absurdo. El absurdo vino de suponer que existe p primo tal que $p|2n+1$ y $p|n(n+1)$. Por lo tanto, no hay ningún primo que divida a $2n + 1$ y $n(n + 1)$ y eso claramente implica que no hay ningún número positivo distinto de 1 que divida a $2n + 1$ y $n(n + 1)$ y, en consecuencia, $2n + 1$ y $n(n + 1)$ son coprimos.

(29) Si $a \cdot b$ es un cuadrado y a y b son coprimos, probar que a y b son cuadrados.

Rta: Si un primo p divide a a entonces divide a ab y por ser este un cuadrado $p^2|ab$, por ser coprimos p no divide a b y entonces p^2 debe dividir a a. El resultado se sigue por el principio de buen orden tomando el ab más chico que contradice la proposición y considerando $ab/p^2, a/p^2, b$.

(30) *a)* Probar que $\sqrt{5}$ no es un número racional.

Rta: Supongamos que $\sqrt{5}$ es racional, es decir $\sqrt{5} = \dfrac{n}{m}$, luego $5 = \sqrt{5}^2 = \dfrac{n^2}{m^2}$ y haciendo pasaje de término obtenemos $5m^2 = n^2$. Sea $m = 5^r m_1$ y $n = 5^s n_1$ donde m_1, n_1 no tienen el primo 5 en su descomposición en factores primos (es decir $(5, m_1) = (5, n_1) = 1$). Luego $5m^2 = 5 \cdot 5^{2r} m_1^2 = 5^{2r+1} m_1$ y $n^2 = 5^{2s} n_1^2$, y por lo tanto $5^{2r+1} m_1 = 5^{2s} n_1^2$. Por la unicidad de la escritura en la descomposición prima, tenemos que $5^{2r+1} = 5^{2s}$ y por lo tanto $2r + 1 = 2s$, lo cual es absurdo. El absurdo vino de suponer que $\sqrt{5}$ es un número racional.

b) Probar que $\sqrt{15}$ no es un número racional.
Rta: Como en el ejercicio anterior debemos ver que $15m^2 = n^2$ nos lleva a un absurdo. Ahora bien si $m = 5^r m_1$ y $n = 5^s n_1$ con 5 coprimo con m_1 y n_1, tenemos que $5^{2r+1} 3m_1 = 5^{2s} n_1^2 \Rightarrow 2r + 1 = 2s$, absurdo.

c) Probar que $\sqrt{8}$ no es un número racional.
Rta: En este caso suponemos que $\sqrt{8} = n/m$, luego $8m^2 = n^2$. Si $m = 2^r m_1$ y $n = 2^s n_1$ con $(2, m_1) = (2, n_1) = 1$, tenemos que $2^3 \cdot 2^{2r} m_1^2 = 2^{2s} n_1^2$, por lo tanto $2^{2r+3} m_1^2 = 2^{2s} n_1^2$. Luego $2r + 3 = 2s$ lo cual es absurdo pues un impar no puede ser igual a un par.

d) Probar que $\sqrt[3]{4}$ no es un número racional.
Rta: Si fuera racional tendríamos $\sqrt[3]{4} = n/m$ y por lo tanto (elevando al cubo) $4 = n^3/m^3$, o equivalentemente, $2^2 m^3 = n^3$. Si $m = 2^r m_1$ y $n = 2^s n_1$ con $(2, m_1) = (2, n_1) = 1$, tenemos $2^2 m^3 = 2^2 \cdot 2^{3r} m_1^3 = 2^{3r+2} m_1^3$ y $n^3 = 2^{3s} n_1^3$. Por lo tanto $3r + 2 = 3s$ lo cual es absurdo, pues $3r + 2$ no es múltiplo de 3 y $3s$ sí lo es.

(31) *a)* Probar que $\sqrt[4]{54}$ no es racional.
Rta: supongamos que $\sqrt[4]{54}$ es racional, entonces $\sqrt[4]{54} = \frac{m}{n}$. Por lo tanto,

$$54 = \sqrt[4]{54}^4 = \left(\frac{m}{n}\right)^4 = \frac{m^4}{n^4}.$$

Luego,

$$54n^4 = m^4.$$

Ahora bien $54 = 2 \cdot 3^3$ y sea $m = 2^s m_0$ con 2 y m_0 coprimos y $n = 2^r n_0$ con 2 y n_0 coprimos. En particular, m_0, n_0 no tienen el primo 2 en su descomposición. Por lo tanto,

$$54n^4 = m^4 \;\Leftrightarrow\; 2 \cdot 3^3 \cdot 2^{4r} n_0^4 = 2^{4s} m_0^4 \;\Leftrightarrow\; 2^{4r+1} \cdot 3^3 n_0^4 = 2^{4s} m_0^4.$$

Como m_0^4, n_0^4 no tienen el primo 2 en su descomposición, debe ser $2^{4r+1} = 2^{4s}$ y por lo tanto $4r + 1 = 4s$, lo cual es absurdo pues $4|4s$ y $4 \not| 4r + 1$. El absurdo vino de suponer que $\sqrt[4]{54}$ es racional.

b) Probar no existen m, n tal que $21n^5 = m^5$.
Rta: Supongamos que existen m, n tal que $21n^5 = m^5$. $21 = 3 \cdot 7$ y sea $m = 3^s m_0$ con 3 y m_0 coprimos y $n = 3^r n_0$ con 3 y n_0 coprimos. En particular, m_0, n_0 no tienen el primo 3 en su descomposición. Por lo tanto,

$$21n^5 = m^5 \;\Leftrightarrow\; 3 \cdot 7 \cdot 3^{5r} n_0^5 = 3^{5s} m_0^5 \;\Leftrightarrow\; 3^{5r+1} \cdot 7n_0^5 = 3^{5s} m_0^5.$$

Como m_0^5, n_0^5 no tienen el primo 3, por la unicidad de la descomposición en factores primos, debe ser $3^{5r+1} = 3^{5s}$ y por lo tanto $5r + 1 = 5s$, lo cual es absurdo pues $5|5s$ y $5 \not| 5r+1$. El absurdo vino de suponer que existen m, n tal que $21n^5 = m^5$.

(32) Probar que si p_k es el k-ésimo primo positivo entonces

$$p_{k+1} \leq p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_k + 1$$

Rta: el miembro de la derecha no es divisible por ninguno de los primeros k primos luego o es el $k+1$-ésimo primo, o es divisible por un primo mayor que este. Por lo tanto debe ser un número mayor o igual que el $k+1$-ésimo primo.

(33) Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de números usando la descomposición en números primos.

a) $a = 12$ y $b = 15$. *Rta:* $a = 2^2 \cdot 3$, $b = 3 \cdot 5$, $(a, b) = 3$, $[a, b] = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.

b) $a = 11$ y $b = 13$. *Rta:* $(a, b) = 1$, $[a, b] = 11 \cdot 13 = 143$.

c) $a = 140$ y $b = 150$. *Rta:* $a = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$, $b = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$, $(a, b) = 2 \cdot 5 = 10$, $[a, b] = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 2100$

d) $a = 3^2 \cdot 5^2$ y $b = 2^2 \cdot 11$. *Rta:* $(a, b) = 1$, $[a, b] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11$

e) $a = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y $b = 2 \cdot 5 \cdot 7$. *Rta:* $(a, b) = 2 \cdot 5$, $[a, b] = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.