Matemática Discreta I - 2021/1

Tarea 7

Ejercicios

1. Probar que $\sqrt[4]{125}$ no es un número racional.
2. Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de 2772 y 33000, usando la descomposición en números primos.

Solución

1. Primero notemos que $\sqrt[4]{125} > 1 > 0$, pues $125 > 1$ y $\sqrt[4]{*}$ es una función estrictamente creciente. Por lo tanto, debemos probar que $\sqrt[4]{125}$ no es un cociente de dos números naturales. Razonemos por el absurdo, es decir, supongamos que $\sqrt[4]{125} = \frac{m}{n}$, con $m, n \in \mathbb{N}$. Luego,

$$\sqrt[4]{125} = \frac{m}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt[4]{125}\right)^4 = \left(\frac{m}{n}\right)^4 \quad \Leftrightarrow \quad 125 = \frac{m^4}{n^4} \quad \Leftrightarrow \quad 5^3 n^4 = m^4.$$

Veamos entonces que no es posible que $5^3 n^4 = m^4$ (†). Ahora bien, es claro que $5 \mid 5^3 n^4$, esto es $5 \mid m^4$, y como 5 es un número primo, se debe cumplir que $5 \mid m$. De donde, $m \geq 5 > 1$ y podemos escribir:

(*) $$m = 5^k p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r},$$

donde $k \geq 1$ (acabamos de ver que el 5 aparece en la factorización prima de m), $p_1, \ldots, p_r$ son primos distintos entre sí y distintos de 5, y cada exponente $e_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, r$.

De otro lado, sin perdida de generalidad, asumamos que $n > 1$ (si $n = 1$ se llegaría al mismo tipo de absurdo), y escribamos su factorización prima como:

(**) $$n = 5^h p_1^{f_1} p_2^{f_2} \cdots p_r^{f_r},$$

con $h \geq 0$ (es cero si el 5 no aparece en la factorización prima de n), y cada exponente $f_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, r$.

Luego, reemplazando (*) y (**) en (†), obtenemos:

$$\begin{aligned} 5^3 n^4 = m^4 \quad &\Leftrightarrow \quad 5^3 5^{4h} p_1^{4f_1} p_2^{4f_2} \cdots p_r^{4f_r} = 5^{4k} p_1^{4e_1} p_2^{4e_2} \cdots p_r^{4e_r} \\ &\Leftrightarrow \quad 5^{4h+3} p_1^{4f_1} p_2^{4f_2} \cdots p_r^{4f_r} = 5^{4k} p_1^{4e_1} p_2^{4e_2} \cdots p_r^{4e_r} \end{aligned}$$

Esta última igualdad nos afirma que hay dos factorizaciones primas de un mismo número entero mayor que 1, entonces por la unicidad del Teorema Fundamental de la Aritmética, los exponentes de cada primo deben ser iguales; en particular, el exponente de 5 a la izquierda de la igualdad debe ser igual al exponente de 5 a la derecha de la igualdad, es decir

$$4h + 3 = 4k \quad \Rightarrow \quad 3 = 4(k - h) \quad \Rightarrow \quad 4 \mid 3 \text{ (si } k \neq h) \quad \text{Absurdo!}$$

(si $k = h$ entonces $3 = 0$, también es Absurdo). El absurdo vino de suponer que $\sqrt[4]{125}$ es racional. Por lo tanto, $\sqrt[4]{125}$ no es racional.

Observación

Otras formas de justificar que $4h + 3 = 4k$ no puede ocurrir son: (i) El número $4h + 3$ es impar y el número $4k$ es par, pero sabemos que un número no puede ser ambas cosas. (ii) Tenemos que $4 \mid 4k$, pero $4 \nmid 4h+3$, ya que el número $a := 4h+3$ tiene resto 3 al dividirlo por 4.

2. **Primer paso**: Hagamos la descomposición prima de cada número.

$$2772 = 2 \cdot 1386 = 2 \cdot 2 \cdot 693 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 231 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 77 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11.$$

$$33000 = 33 \cdot 10^3 = 3 \cdot 11 \cdot (2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 11.$$

Segundo paso: Reescribimos las factorizaciones primas anteriores de tal forma que en ambas aparezcan los mismos primos.

$$2772 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^1 \cdot 11^1.$$

$$33000 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^3 \cdot 7^0 \cdot 11^1.$$

Tercer paso: Por último, aplicamos la Proposición 3.4.10. del Apunte.

$$(2772, 33000) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11.$$

$$[2772, 33000] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11.$$