Ejercicio 1

Molina Franco
44192153

a) Hallar la función h tal que

$$h'(x) = \frac{1}{x(x-1)^2} \quad y \quad h(1/2) = 2$$

· Por teorema $\longrightarrow \int h'(x)\,dx = h(x)$

$$= \int \frac{1}{x\cdot(x-1)^2}\,dx = \int \frac{A}{x} + \frac{k_1}{(x-1)^2}$$

$$= \int \frac{A}{x} + \frac{k_1}{(x-1)^2} + \frac{k_2}{x-1}$$

$$= 1 = A\cdot(x-1)^2 + k_1\cdot x + k_2\cdot x\cdot(x-1)$$

$$1 = Ax^2 - 2xA + A + k_1x + k_2x^2 - k_2x$$

$$1 = x^2\cdot(A + k_2) + x\cdot(-2A + k_1 - k_2) + A$$

$\boxed{1 = A}$

$0 = -2A - k_2 + k_1 \longrightarrow 0 = -2 - k_2 + k_1 \longrightarrow 0 = -2 + 1 + k_1 \quad \boxed{k_1 = 1}$

$0 = A + k_2 \longrightarrow 0 = 1 + k_2 \longrightarrow \boxed{k_2 = -1}$

· Planteo la integral ya sabiendo A, k_1 y k_2

$$\int \frac{1}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} \; \frac{-1}{x-1} = \int \frac{1}{x} + \int \frac{1}{(x-1)^2} - \int \frac{1}{x-1}$$

aux

$\int (x-1)^{-2}$

$= \frac{(x-1)^{-1}}{-1} = \frac{-1}{x-1}$

$\int \frac{1}{x-1}$ $\quad U = x-1$, $dU = 1\,dx$

$\ln(|x-1|)$

$$h(x) \boxed{= \ln(|x|) - \frac{1}{x-1} - \ln(|x-1|) + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}}$$

$$h(1/2) = \ln(1/2) + 2 - \ln(1/2) + C = 2$$

$$C = 2 - 2$$

$$\boxed{C = 0}$$

$$\boxed{h(x) = \ln(|x|) - \frac{1}{x-1} - \ln(|x-1|)}$$

Ejercicio 1

Molina Franco
44192153

b) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+x^3}}\,dx$

- por teorema planteo limite

$\lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{\sqrt{x+x^2}}\,dx$

- Por teorema de relación de limite e integral

$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty}(a_n)\right)$

- Por este teorema planteo prueba de la razón

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{((x+1)+(x+1)^3)^{1/2}}}{\frac{1}{(x+x^2)^{1/2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+x^2)^{1/2}}{((x+1)+(x+1)^3)^{1/2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x+x^2}{(x+1)+(x+1)^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+x^2}{x+1+x^3+3x^2+3x+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\cdot\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)}{x^3\cdot\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+1\right)} = \frac{0}{2} = \boxed{0}$$

- Cuando se acerca a ∞ estos numeros se van a 0

- Al darnos $L = 0 \Rightarrow L < 1$ lo que nos dice que converge.

Rta: la integral impropia converge