FECHA

1) a) Calcular la dimensión del subespacio de $\mathbb{K}^5$:

$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{K}^5 \mid x_1 = 3x_2 \text{ y } x_3 = x_4 = x_5\}$

b) Probar que no existe T lineal $T: \mathbb{K}^5 \to \mathbb{K}^2$ t.q.

$Nu T = W$

---

a) si $v \in W$, entonces v tiene la pinta:

$(3t, t, s, s, s) = t(3,1,0,0,0) + s(0,0,1,1,1), \quad s,t \in \mathbb{K}$

$\therefore W = \langle \underbrace{\{(3,1,0,0,0), (0,0,1,1,1)\}}_{} \rangle$

Conjunto LI, por lo tanto base de W

Tenemos entonces que:

$\dim W = 2$ ∎

b) Sabemos que si $T: \mathbb{K}^5 \to \mathbb{K}^2$, entonces:

$\dim \mathbb{K}^5 = \dim Nu T + \dim Im T$

$5 = \dim Nu T + \dim Im T$

Asumamos $Nu T = W$, entonces:

$5 = 2 + \dim Im T \iff \dim Im T = 3$

Esto es absurdo, ya que $\dim Im T \leq 2$, dado que el conjunto de llegada es $\mathbb{R}^2$, de dimensión 2.

Por lo tanto no existe T tal que $N_\circ T = W$ ∎

Fin de la resolución

Guillermo de Ipola

43524608

FECHA

2)

a) Para qué valor de c, 1 es autovalor de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 8 & 8 & c \end{pmatrix}$$

b) Describir paramétricamente a V_1.

---

a) Planteo el polinomio característico evaluado en 1:

$$\chi_A[1] = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 8 & 8 & c \end{pmatrix} - Id\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 8 & 8 & c-1 \end{pmatrix}$$

$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad r \neq s \in \mathbb{N}$

$B = \left(\xrightarrow{F_r + \lambda F_s}\right) A \Rightarrow \det B = \det A$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & c-1-6 \end{pmatrix}$$

$$= 4 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & c-7 \end{pmatrix} = 4 \cdot \left(2(c-7) - 0\right) = 4 \cdot 2 \cdot (c-7)$$

$\chi_A[1] = 0$ cuando $c = 7$ ∎

b) Planteo el sistema homogeneo $(A - Id)v = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 8 & 8 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F3-2F2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2-2F1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F2/4]{F1/2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3/2 \\ 1 & 0 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tengo entonces que $v = (x, y, z) \in V_1 \Rightarrow x = \frac{3}{4}z,\ y = -\frac{3}{2}z$

Entonces (x, y, z) tiene la pinta: $\left(\frac{3}{4}s, -\frac{3}{2}s, s\right)$, $s \in \mathbb{R}$

$$V_1 = \left\{ s\left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}, 1\right), s \in \mathbb{R} \right\} \blacksquare$$

Fin de la resolución.

Guillermo de Ipola

43524608

3) Encontrar una recta en $\mathbb{R}^2$ perpendicular a $y = 3x+2$ y que pase por $(1,5)$.

La recta $y = 3x+2$ se puede expresar como:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \ 3x - y = -2\}$$

ó

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \langle (x,y),(3,-1) \rangle = -2\}$$

• Por lo que esta recta es perpendicular al vector $(3,-1)$

Entonces la recta con dirección $(3,-1)$ que pasa por $(1,5)$ es:

$$L = \{t(3,-1) + (1,5) \backslash \ t \in \mathbb{R}\} \ \blacksquare$$

Fin de la resolución

Guillermo de Ipola

43524608

FECHA

4) Dar una base ortonormal del subespacio generado por $(1,1,1)$ y $(1,2,3)$

Uso Gram-Schmidt para conseguir una base ortogonal.

$u_1 = (1,1,1)$

$$u_2 = (1,2,3) - \frac{(1,1,1)\cdot(1,2,3)}{(1,1,1)\cdot(1,1,1)}(1,1,1)$$

$$= (1,2,3) - \frac{6}{3}(1,1,1) = (-1,0,1)$$

Base ortogonal: $\{(1,1,1), (-1,0,1)\}$

Ahora busco una base ortonormal:

$$w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Base ortonormal $= \left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$ ■

Fin de la resolución

Guillermo de Ipola

93524608

FECHA

5) Sea V espacio
a) Definir subespacio
b) Sean $v, w \in V$. Probar que $\langle\{v,w\}\rangle$ es subespacio.

a) W se dice subespacio de V si:

- $W \neq \emptyset$

- Sean w y w' vectores cualesquiera en W, se cumple que:

$w + w' \in W$ (Cerrado por la suma)

- Sean w en W y λ un escalar cualquiera, se cumple:

$\lambda w \in W$. (Cerrado por la multiplicación por escalares)

b)
- Tenemos que $0 \cdot v + 0 \cdot w = 0 \in \langle\{v,w\}\rangle$, por lo tanto W es no vacío.

- Veamos que $\langle\{v,w\}\rangle$ es cerrado por la suma y multiplicación.
Sean $\lambda_1, \lambda_2, u_1, u_2$ escalares tales que:

- $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 w \in \langle\{v,w\}\rangle$
- $u_1 v + u_2 w \in \langle\{v,w\}\rangle$

$(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 w) + (u_1 v + u_2 w) = (\lambda_1 + u_1) v + (\lambda_1 + u_1) w \in \langle\{v,w\}\rangle$
$\therefore$ es cerrado por la suma

Sea λ un escalar,

$\lambda(\lambda_1 V + \lambda_2 W) = \lambda\lambda_1 V + \lambda\lambda_2 W \in \langle\{v, w\}\rangle$ (cerrado por la mult.)

Por lo tanto el conjunto de combinaciones lineales de $v, w \in V$ es un subespacio de V. ∎

Fin de la resolución.

Guillermo de Ipola
43524608