Matemática Discreta I - 2021/1

Tarea 3

Ejercicios

1. Para participar en un torneo de tenis de dobles mixtos (parejas de un hombre y una mujer), es necesario presentar un equipo de 3 parejas, debiéndose elegir los jugadores entre los integrantes de un grupo constituido por 6 hombres y 3 mujeres. ¿De cuántas maneras puede seleccionarse el equipo?
2. ¿De cuántas formas pueden ordenarse las letras de la palabra
   PRIMERAMENTE?

Solución

1. Lo primero que debemos notar es que nos piden que armemos 3 parejas, sin que importe el orden de las parejas, es decir, no hay 1° pareja, 2° pareja, 3° pareja; y obviamente no importa el orden dentro de cada pareja (esto último pensando en un partido real de tenis de dobles mixtos).

Lo segundo, y **fundamental**, es que ineludiblemente todas las mujeres deben formar parte del equipo, ya que requerimos de 3 mujeres para formar las 3 parejas (cada pareja esta conformada por un hombre y una mujer), y disponemos de 3 mujeres (el grupo esta conformado por 6 hombres y 3 mujeres). De donde, el problema lo podemos replantear como: **¿De cuántas maneras le podemos asignar un compañero (hombre) de juego a cada mujer?**

Para resolver esto, representamos al problema en un esquema de la siguiente manera: Por comodidad, y sin perdida de generalidad, digamos que las mujeres son Adriana (A), Paula (P), y Natalia (N), y entonces asignarle un compañero a cada una equivale a completar las siguientes casillas

$$\underline{\text{A}}\ \textvisiblespace \qquad \underline{\text{P}}\ \textvisiblespace \qquad \underline{\text{N}}\ \textvisiblespace$$

Ahora bien, para la primera casilla tenemos 6 posibilidades (disponemos de 6 hombres),para la segunda tenemos $6-1=5$ posibilidades (pues ya hemos asignado a un hombre), y para la última tenemos $6-2=4$ posibilidades (ya hemos asignado a dos hombres). Así, por el Principio de la multiplicación, las maneras de seleccionar al equipo es:

$$6\cdot 5\cdot 4 = 120.$$

En resumen, cada equipo quedará determinado por una selección ordenada de 3 hombres (obviamente distintos) entre 6, esto es:

$$\frac{6!}{(6-3)!}=\frac{6!}{3!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}{\cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}=6\cdot 5\cdot 4=120.$$

2. La palabra PRIMERAMENTE es una palabra de longitud 12, donde la E se repite 3 veces, la M y la R se repiten 2 veces, y luego están la P, la I, la A, la N y la T una sola vez cada una.

Ahora bien, si consideramos todas las letras distintas, obtenemos que hay $12!$ permutaciones de la palabra. Pero, permutando las E's, las M's y las R's sin mover las otras letras, obtenemos la misma permutación de la palabra PRIMERAMENTE. Por lo tanto, al número total de permutaciones lo debemos dividir por el número total de permutaciones de cada letra que se repita. Como hay $3!$ permutaciones de las E's, y $2!$ permutaciones de las M's y de las R's, se sigue que el número total de permutaciones de las letras de PRIMERAMENTE es:

$$\frac{12!}{3!2!2!}.$$

Observación

Si admitiéramos el uso del número combinatorio (no es el objetivo de esta tarea), el Ejercicio 1 se podría resolver de la siguiente manera:

Primero calculamos de cuantas maneras podemos armar cada pareja, esto es

- Para la primera pareja disponemos de 6 hombres y 3 mujeres, luego hay
$$\binom{6}{1}\cdot\binom{3}{1}=6\cdot 3=18 \quad \text{formas.}$$
- Ahora, para la segunda pareja disponemos de 5 hombres y 2 mujeres, así hay
$$\binom{5}{1}\cdot\binom{2}{1}=5\cdot 2=10 \quad \text{formas.}$$
- Y para la tercera, contamos a disposición con 4 hombres y 1 mujer, de donde hay
$$\binom{4}{1}\cdot\binom{1}{1}=4\cdot 1=4 \quad \text{formas.}$$

Por el principio de multiplicación, hay $18\cdot 10\cdot 4=720$ maneras de seleccionar al equipo. Pero, como mencionamos antes, no nos importa el orden de las parejas, por lo cual debemos dividir por el número total de permutaciones entre las parejas, esto es $3!$, y así la respuesta buscada es:

$$\frac{720}{3!}=\frac{720}{6}=120.$$