Recuperatorio
Análisis Matemático II (Lic. en Computación) - 6/7/2020

JUSTIFICAR todas las respuestas.

1. Calcule las siguientes integrales e indique el método utilizado.

   a) $\int \sqrt{x}\, ln(x)\, dx$ b) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5}\, dx$

2. Determine si la siguiente integral converge y en tal caso calcularla.

   $\int_3^\infty \frac{\ln 2x}{x^5} dx$

3. Determine si la siguiente sucesión converge o no y calcule el límite si es posible.

   $a_n = e^{\frac{(-1)^n}{n}}$

4. Determinar el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la siguiente serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\,(x+1)^n}{2^{n+1}}.$$

5. Encontrar la representación en serie de Taylor, centrada en $a=\pi$ de $f(x)=\sin(x-\pi)$. ¿Para qué valores de x converge la serie?

6. Dar la ecuación vectorial y la ecuación normal del plano que contiene a los puntos $(3,2,1)$, $(1,-1,-1)$ y $(0,1,2)$. ¿Está el punto $(0,0,0)$ en el plano anterior?

7. Para la función

$$f\,(x,y,z) = \frac{x^2 z^3}{y-z},$$

   calcular todas las derivadas parciales de primer orden (o sea, f_x, f_y, f_z) y alguna derivada parcial de orden dos.

8. Obtener las ecuaciones de la recta normal al plano tangente y del plano tangente al gráfico de la siguiente función en el punto dado:

$$f\,(x,y) = \cos(xy), \qquad \text{en } (\pi, 1/2)\,.$$

Ejercicio 1 a)

$$\int \underbrace{\sqrt{x}}_{f'}\ \underbrace{\ln(x)}_{g}\, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \ln(x) - \int \frac{2}{3} x^{3/2} \frac{1}{x}\, dx = \circledast$$

$$f' = \sqrt{x} \qquad f = \frac{2}{3} x^{3/2}$$

$$g' = \frac{1}{x} \qquad g = \ln(x)$$

$$\circledast = \frac{2}{3} x^{3/2} \ln(x) - \frac{2}{3} \int x^{1/2}\, dx =$$

$$= \frac{2}{3} x^{3/2} \ln(x) - \frac{2}{3}\,\frac{2}{3} x^{3/2} + cte.$$

$$= \frac{2}{3} x^{3/2} \ln(x) - \frac{4}{9} x^{3/2} + cte$$

Ejercicio 1 b)

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5}\, dx$$

Determinante Baskara

$$\sqrt{b^2-4ac} = \sqrt{9-4.5} = \sqrt{-11} \rightarrow i$$

no tengo raíces reales

$$u = x^2+3x+5$$

$$du = (2x+3)\, dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{2x+3}{x^2+3x+5}\, dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + cte.$$

$$= \ln|x^2+3x+5| + cte.$$

Ejercicio 2. Determine si la siguiente integral converge y en tal caso calcularla.

$$\int_3^\infty \frac{\ln 2x}{x^5} dx$$

Solución.

Calculamos primero la integral indefinida $\int \frac{\ln 2x}{x^5} dx$. Para calcular esta integral, usamos la fórmula de integración por partes

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x)\, dx - \int f'(x)\, g(x)\, dx.$$

En nuestro caso, elegimos $f(x) = \ln 2x$ y $g'(x) = \frac{1}{x^5}$. Entonces

$$f'(x) = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}, \quad g(x) = -\frac{1}{4x^4}, \quad \text{y por lo tanto}$$

$$\int \frac{\ln 2x}{x^5} dx = -\frac{1}{4x^4} \ln 2x - \int \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{4x^4}\right) dx =$$
$$-\frac{1}{4x^4} \ln 2x + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x^5} dx = -\frac{1}{4x^4} \ln 2x + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4x^4}\right) =$$
$$-\frac{1}{4x^4} \ln 2x - \frac{1}{16x^4} = -\frac{1}{16x^4}\left(4 \ln 2x + 1\right).$$

Ahora, usamos la definición de integral impropia, y calculamos

$$\int_3^\infty \frac{\ln 2x}{x^5} dx = \lim_{M\to\infty} \int_3^M \frac{\ln 2x}{x^5} dx = \lim_{M\to\infty} -\frac{1}{16x^4}\left(4\ln 2x + 1\right)\Big|_3^M =$$
$$-\frac{1}{16} \lim_{M\to\infty}\left[\frac{1}{M^4}\left(4\ln 2M + 1\right) - \frac{1}{81}\left(4\ln 6 + 1\right)\right].$$

Como

$$\lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{M^4}\left(4\ln 2M + 1\right)\right) = 0,$$

nos queda

$$\int_3^\infty \frac{\ln 2x}{x^5} dx = \frac{1}{16}\frac{1}{81}\left(4\ln 6 + 1\right).$$

Ejercicio 3. Determine si la siguiente sucesión converge o no y calcule el límite si es posible.

$$a_n = e^{\frac{(-1)^n}{n}}$$

Solución.

Notamos primero que la sucesión $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^\infty$ es convergente y su límite es 0. Entonces, usando un teorema del teórico, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{(-1)^n}{n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}} = e^0 = 1.$$

Recuperatorio: eje. 4

La serie es $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+1)^n}{2^{n+1}}$

Aplicamos la prueba de la razón

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)(x+1)^{n+1}}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^{n+1}}{n(x+1)^n}\right|$$

$$= \left|\frac{n+1}{n} \cdot \frac{(x+1)\cancel{(x+1)^n}}{\cancel{(x+1)^n}} \cdot \frac{\cancel{2^{n+1}}}{2\cdot \cancel{2^{n+1}}}\right| = \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{(x+1)}{2}\right|$$

cuando $n \to \infty$ $\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)\left|\frac{x+1}{2}\right| \to \left|\frac{x+1}{2}\right|$

por lo que converge si $\left|\frac{x+1}{2}\right| < 1 \to |x+1| < 2$

y diverge si $\left|\frac{x+1}{2}\right| > 1 \longrightarrow |x+1| > 2$

El radio de convergencia es $\boxed{R = 2}$

y converge ~~si~~ en $\boxed{-3 < x < 1}$

Veamos que pasa en los extremos:

En $\underline{x=-3}$ la serie es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-2)^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^n$$

Que diverge según la prueba de la divergencia
$((-1)^n \cdot n$ no converge en $0)$

En $\underline{x=1}$ la serie es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} n$$ la cual diverge

según la prueba de la divergencia.

Recuperotorio: eje 5

$f(x) = \sin(x-\pi)$ en $a=\pi$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

o

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a^2) + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

$f(x) = \sin(x-\pi)$; en $\pi \to \sin(0) = 0$

$f'(x) = \cos(x-\pi)$; en $\pi \to \cos(0) = 1$

$f''(x) = -\sin(x-\pi)$; en $\pi \to -\sin(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos(x-\pi)$; en $\pi \to -\cos(0) = -1$

entonces: $f(x) = 0 + 1 \cdot \frac{(x-\pi)}{1!} + 0 - 1 \cdot \frac{(x-\pi)^3}{3!} + \dots$

o lo que es lo mismo:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Para ver la convergencia podemos aplicar el criterio del cociente.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-\pi)^{2(n+1)+1}}{(x-\pi)^{2n+1}} \cdot \frac{(2n+1)!}{(2(n+1)+1)!} \right| =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{(x-\pi)^{2n+1}} \cdot (x-\pi)^2}{\cancel{(x-\pi)^{2n+1}}} \cdot \frac{\cancel{(2n+1)!}}{\cancel{(2n+1)!}\, 2 \cdot (n+1)(2n+3)} \right| =$$

$$(x-\pi)^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2 \cdot (n+1)(2n+3)} = 0$$

por lo que converge

Análisis Matemático II

Lic. en Ciencias de la Computación - 2020 - Recuperatorio

Ejercicio 6

Tomamos como punto $\mathbf{P_0}$= (3,2,1)

Ahora calculemos los vectores que generan el plano:
$(1,-1,-1)$-$\mathbf{P_0}$= $(1,-1,-1)$-$(3,2,1)$=$(-2,-3,-2)$
$(0,1,2)$-$\mathbf{P_0}$= $(0,1,2)$-$(3,2,1)$=$(-3,-1,1)$

Así, la ecuación vectorial es:
$\mathbf{S}$=$(3,2,1)$+$(-2,-3,-2)$t+$(-3,-1,-1)$r

Calculemos ahora el vector normal al plano. Tenemos que hacer el producto vectorial entre los vectores generadores:
$(-2,-3,-2)$X$(-3,-1,-1) = (-5,8,-7)$

Así la ecuación normal queda: $\langle (x,y,z) - \mathbf{P_0}, \mathbf{N} \rangle = \mathbf{0}$
$\langle (x,y,z) - (3,2,1), (-5,8,-7) \rangle = 0$

¿Pertenece (0,0,0) al plano?
Basta con ver con si ese punto cumple con la ecuación normal. Al evaluar (0,0,0) en la ecuación de arriba vemos que no se cumple: $\langle (0,0,0) - (3,2,1), (-5,8,-7) \rangle = 0$, entonces $6 = 0$, por lo cual (0,0,0) no pertenece al plano.

Ejercicio 7

$f(x) = \frac{x^2 z^3}{(y-z)}$

f_x=$\frac{2xz^3}{y-z}$

f_y=$-\frac{x^2 z^3}{(y-z)^2}$

f_z=$\frac{3x^2z^2(y-z)-(-x^2z^3)}{(y-z)^2}$=$\frac{3z^2x^2y-2x^2z^3}{(y-z)^2}$

f_{xx}=$\frac{2z^3}{y-z}$

f_{yy}=$\frac{2xz^2}{(y+z)^3}$

Ejercicio 8.

$$f(x,y) = \cos(xy) \quad \text{en } (\pi, 1/2)$$

Ec. plano tangente:

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$(x_0,y_0,z_0) = (x_0,y_0,f(x_0,y_0)) = \left(\pi, \tfrac{1}{2}, f\left(\pi,\tfrac{1}{2}\right)\right) = \left(\pi, \tfrac{1}{2}, 0\right)$$

$$f_x = -\operatorname{sen}(xy)\,y \qquad f_x(x_0,y_0) = -\frac{1}{2}$$

$$f_y = -\operatorname{sen}(xy)\,x \qquad f_y(x_0,y_0) = -\pi$$

$\Rightarrow$ Ecs es: $\boxed{z - 0 = -\frac{1}{2}(x-\pi) - \pi\left(y-\frac{1}{2}\right)}$

Ec. recta normal al plano:

$$\vec{X} = \vec{X_0} + t\,\vec{n} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{X} = (x_0,y_0,z_0) + t\,(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0), -1) \qquad t \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{(x,y,z) = \left(\pi,\tfrac{1}{2},0\right) + t\left(-\tfrac{1}{2},-\pi,-1\right) \quad t \in \mathbb{R}}$