Matemática Discreta I - 2021/1

Tarea 2

Ejercicio

Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_2 = 2, \\ a_n = (n-2)a_{n-1} + 2(n-1)a_{n-2}, \text{ para } n \geq 3. \end{cases}$$

1. Calcule a_3 y a_4 usando recursión.
2. Pruebe por inducción que $a_n = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución

1. Por definición $a_1 = 1,\ a_2 = 2$, luego:

$$a_3 = (3-2)a_{3-1} + 2(3-1)a_{3-2} = a_2 + 4a_1 = 2 + 4 \cdot 1 = 6.$$

Ahora, $a_2 = 2,\ a_3 = 6$, luego:

$$a_4 = (4-2)a_{4-1} + 2(4-1)a_{4-2} = 2a_3 + 6a_2 = 2 \cdot 6 + 6 \cdot 2 = 12 + 12 = 24.$$

2. Se demostrará la fórmula por inducción completa sobre n.

Caso base. Por la definición de la sucesión tenemos que: $a_1 = 1,\ a_2 = 2$. Por otro lado, según la *definición recursiva del factorial*, se cumple que

$$1! = 1, \qquad 2! = 2 \cdot 1 = 2.$$

Es decir, el resultado vale para $n = 1$ y $n = 2$.

Paso inductivo. Debemos probar que si para algún $k \geq 2$ vale

(HI) $$a_h = h! \text{ para } 1 \leq h \leq k,$$

eso implica que

(*) $$a_{k+1} = (k+1)!.$$

Comenzamos por el lado izquierdo de (*):

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= (k+1-2)a_{k+1-1} + 2(k+1-1)a_{k+1-2} && \text{(por definición de } a_n\text{)} \\
&= (k-1)a_k + (2k)a_{k-1} && \\
&= (k-1)k! + 2k(k-1)! && \text{(por HI)} \\
&= (k-1)k! + 2 \cdot k! && \text{(por definición de n!)} \\
&= (k-1+2)k! && \text{(factor común)} \\
&= (k+1)k! = (k+1)! && \text{(por definición de n!)}
\end{aligned}
$$

Esto prueba (*). Por lo tanto, por el principio de inducción completa, podemos concluir que $a_n = n!$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observación

En el paso inductivo, la forma de determinar el $k \geq 2$ es considerar para cuales k, el $k+1$ satisface la condición dada en la fórmula recursiva de $\{a_n\}$; en este caso, $k+1 \geq \mathbf{3} \Rightarrow k \geq 2$. Además, en la Hipótesis Inductiva, el menor valor que puede tomar el h lo determina el primer caso base, o sea, el a_1.