Matemática Discreta I - 2021/1

Tarea 6

Ejercicios

1. Probar por inducción que para $n \geq 0$ se satisface $3|2^{3n+2} + 5^{n+3}$.
2. (a) Encontrar usando el algoritmo de Euclides $d = \text{mcd}(68, 50)$.
   (b) Expresar d como combinación lineal entera entre 68 y 50.

Solución

1. Se demostrará la fórmula por inducción sobre n.

Caso base. $n = 0$. En este caso,

$$2^{3\cdot 0+2} + 5^{0+3} = 2^2 + 5^3 = 4 + 125 = 129 = 3 \cdot 43,$$

es decir, $3|2^{3\cdot 0+2} + 5^{0+3}$; y el resultado vale para $n = 0$.

Paso inductivo. Debemos probar que si para algún $k \in \mathbb{N}_0$ vale

(HI) $$3|2^{3k+2} + 5^{k+3} \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : \; 2^{3k+2} + 5^{k+3} = 3q$$

(se puede probar que q debe ser un número natural), entonces

(*) $$3|2^{3(k+1)+2} + 5^{(k+1)+3} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} : \; 2^{3(k+1)+2} + 5^{(k+1)+3} = 3m,$$

Comenzamos por el lado izquierdo de (*):

$$\begin{aligned}
2^{3(k+1)+2} + 5^{(k+1)+3} &= 2^{3+(3k+2)} + 5^{1+(k+3)} && \text{(aritmética)}\\
&= 2^3 \cdot 2^{3k+2} + 5 \cdot 5^{k+3} && \text{(propiedades de } x^n\text{)}\\
&= (3+5) \cdot 2^{3k+2} + 5 \cdot 5^{k+3} && (2^3 = 8 = 3+5)\\
&= 3 \cdot 2^{3k+2} + 5 \cdot 2^{3k+2} + 5 \cdot 5^{k+3} && \text{(aritmética)}\\
&= 3 \cdot 2^{3k+2} + 5 \cdot (2^{3k+2} + 5^{k+3}) && \text{(factor común)}\\
&= 3 \cdot 2^{3k+2} + 5(3q) && \text{(HI)}\\
&= 3 \cdot (2^{3k+2} + 5q) && \text{(factor común)}
\end{aligned}$$

Ahora bien, como $k \geq 0$, se cumple que $3k + 2 \geq 2 > 0$, y por lo tanto $2^{3k+2} \in \mathbb{N}$. Así, podemos tomar $m = 2^{3k+2} + 5q \in \mathbb{Z}$ (como podemos considerar $q \in \mathbb{N}$, entonces $m \in \mathbb{N}$), y esto prueba (*).

De todo lo anterior, por el principio de inducción, podemos concluir que el enunciado vale para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

2. (a) Por el *Algoritmo de la División* y el *Algoritmo de Euclides*, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
68 &= 50 \cdot 1 + 18 && \Rightarrow && (68, 50) = (50, 18).\\
50 &= 18 \cdot 2 + 14 && \Rightarrow && (50, 18) = (18, 14).\\
18 &= 14 \cdot 1 + 4 && \Rightarrow && (18, 14) = (14, 4).\\
14 &= 4 \cdot 3 + 2 && \Rightarrow && (14, 4) = (4, 2).\\
4 &= 2 \cdot 2 + 0 && \Rightarrow && (4, 2) = (2, 0).
\end{aligned}
$$

De donde, $d = (68, 50) = (2, 0) = 2.$

2. (b) De las ecuaciones que obtuvimos anteriormente, despejamos los restos, así:

(1) $$18 = 68 - 50 = 68 + (-1) \cdot 50$$

(2) $$14 = 50 - 18 \cdot 2 = 50 + (-2) \cdot 18$$

(3) $$4 = 18 - 14 = 18 + (-1) \cdot 14$$

(4) $$2 = 14 - 4 \cdot 3 = 14 + (-3) \cdot 4$$

Ahora, vamos reemplazando las ecuaciones hacia atrás:

$$
\begin{aligned}
2 &= 14 + (-3) \cdot 4 && \text{(por (4))}\\
&= 14 + (-3) \cdot (18 + (-1) \cdot 14) && \text{(por (3))}\\
&= 14 + (-3) \cdot 18 + 3 \cdot 14 = 4 \cdot 14 + (-3) \cdot 18 && \text{(aritmética)}\\
&= 4 \cdot (50 + (-2) \cdot 18) + (-3) \cdot 18 && \text{(por (2))}\\
&= 4 \cdot 50 + (-8) \cdot 18 + (-3) \cdot 18 = 4 \cdot 50 + (-11) \cdot 18 && \text{(aritmética)}\\
&= 4 \cdot 50 + (-11) \cdot (68 + (-1) \cdot 50) && \text{(por (1))}\\
&= 4 \cdot 50 + (-11) \cdot 68 + 11 \cdot 50 = 15 \cdot 50 + (-11) \cdot 68 && \text{(aritmética)}
\end{aligned}
$$

En resumen, $d = 2 = 15 \cdot 50 + (-11) \cdot 68.$