Práctico 1: Expresiones Cuantificadas

Algoritmos y Estructuras de Datos I
2^{do} cuatrimestre 2021

Programar involucra pasar de la descripción (en castellano) a una descripción más formal. Por eso hay varios ejercicios de interpretación de tareas sencillas en ambos sentidos. Luego pasamos a las reglas más importantes del cálculo de predicados que usaremos para derivar programas o verificar su corrección.

1. Considerá la siguiente lista $casosCba = [133, 147, 137, 144, 162, 150, 205]$ de nuevos casos de Covid en la provincia de Córdoba para la semana del 3/8/2020 al 9/8/2020.

a. ¿Todos los días hubo más de 140 casos?

b. ¿Hubo algún día que hubo menos de 144 casos?

c. ¿Cada día tuvo más casos que el día anterior?

d. ¿Hay dos días que hubo menos de 135 casos?

e. Considerando que Santa Fe tuvo el siguiente registro $casosSfe = [63, 101, 101, 141, 134, 137, 87]$. ¿Es el máximo para Santa Fe menor a todos los registros de Córdoba?

Reflexión: Este ejercico invita a mostrar que las cuantificaciones son útiles para responder preguntas concretas. Podés descargar un archivo con los datos de Córdoba y explorarlos con Haskell. También está disponible en replit para poder usarlo desde el celular.

2. Para cada una de las siguientes fórmulas, describí su significado utilizando el lenguaje natural. Marcá todas las ocurrencias de variables, indicando si son libres o ligadas.

a. $\langle \forall i : 0 \leq i < \#xs : xs\,!\,i > 140 \rangle$

b. $\langle \exists i : 0 \leq i < \#xs : xs\,!\,i = x \rangle$

c. $\langle \forall i : 0 \leq i < \#xs : \langle \exists j : 0 \leq j < \#ys : xs\,!\,i = ys\,!\,j \rangle \rangle$

d. $\langle \forall i : 0 \leq i < \#xs - 1 : xs\,!\,i \leq xs\,!\,(i+1) \rangle$

Recordá que las desigualdades de la forma $a \leq b < c$ son abuso de notación para $(a \leq b) \wedge (b < c)$.

Reflexión: Las variables libres indican los argumentos sobre los que habla la fórmula; así por ejemplo, la primer fórmula está diciendo si algo es cierto para la lista xs. Una forma de comprobar si la interpretación que propusiste es correcta es *testeando* con ejemplos concretos. Mirá tus respuestas al ejercicio anterior y verificá si tus interpretaciones son correctas.

3. Evalúa las fórmulas anteriores con $xs = [141, 134, 137, 87]$ y $xs = [133, 147, 137, 144]$. Para los incisos b. y c., considerá $x = 134$ e $ys = [137, 141, 87]$, respectivamente.

Ejemplo: Fórmula 2.a. aplicada a $xs = [133, 140, 141]$:

$$
\begin{array}{ll}
 & \langle \forall i : 0 \leq i < \#xs : xs\,!\,i > 0 \rangle \\
\equiv & \{ \text{ calculo rango sabiendo que } \#xs = 3 \ \} \\
 & \langle \forall i : i \in \{0,1,2\} : xs\,!\,i > 0 \rangle \\
\equiv & \{ \text{ aplico el término a cada elemento del rango } i \in \{0,1,2\} \ \} \\
 & (xs\,!\,0 > 0) \wedge (xs\,!\,1 > 0) \wedge (xs\,!\,2 > 0) \\
\equiv & \{ \text{ evalúo las indexaciones con } xs = [133, 140, 141] \ \} \\
 & (133 > 140) \wedge (140 > 140) \wedge (141 > 140) \\
\equiv & \{ \text{ evalúo las desigualdades } \} \\
 & False \wedge False \wedge True \\
\equiv & \{ \text{ resuelvo las conjunciones } \} \\
 & False
\end{array}
$$

4. Para cada una de las siguientes fórmulas, describí su significado utilizando el lenguaje natural. Marcá todas las ocurrencias de variables, indicando si son libres o ligadas.

a. $\langle \prod i \ : 1 \leq i \leq n : \ i \rangle$ **b.** $\langle \sum i \ : 0 \leq i < \#xs : \ xs \,!\, i \rangle / \#xs$

c. $\langle \text{Max } i \ : 0 \leq i < \#xs : \ xs \,!\, i \rangle < \langle \text{Min } i \ : 0 \leq i < \#ys : \ ys \,!\, i \rangle$

d. $\langle \exists i, j \ : (2 \leq i < n) \wedge (2 \leq j < n) : \ i * j = n \rangle$

5. Para cada uno de los ítems del ejercicio anterior, evaluá respectivamente con los siguientes valores: **a**. $n = 5$. **b**. $xs = [6, 9, 3, 9, 8]$. **c**. $xs = [-3, 9, 8], ys = [6, 7, 8]$. **d**. $n = 5$.

6. Decidí el tipo de cada variable y de cada una de las expresiones en lenguaje natural. Luego escribí una expresión formal para cada una de ellas.

a. m es la cantidad de más contagios diarios en el registro *casos*.

b. La posición de la lista xs donde está su mayor elemento. (Para discutir en clase)

c. La suma de los elementos de xs entre i e $i + 7$.

d. Los casos del día d son mayores al promedio móvil (promedio de los siete días anteriores a d).

e. La suma de los elementos en posición par de xs.

f. n es potencia de 2.

Reflexión: ¿Cuáles de esas expresiones son oraciones? Asegurate que las únicas variables libres de las expresiones formales sean las que aparecen explícitamente como tales en la expresión en castellano (por ejemplo, para la última no vale poner $n = 2^k$).

7. Calculá los rangos de las siguientes cuantificaciones como conjuntos de posibles valores. Tomar $n = 10$, $xs = [-3, 9, 8, 9]$, $m = 3$. Usá tuplas cuando haya más de una variable cuantificada.

a. $\langle \prod i \ : 1 \leq i \leq n \ \wedge \ i \bmod 3 = 1 : \ i \rangle$ **b.** $\langle \sum i, j \ : 0 \leq i < \#xs \ \wedge \ 0 \leq j < m : \ xs \,!\, i * j \rangle$

c. $\langle \forall i, j \ : 0 \leq i < j < \#xs : \ xs \,!\, i \neq xs \,!\, j \rangle$ **d.** $\langle \text{Max } as, bs \ : xs = as +\!\!+ bs : \ sum.as \rangle$

e. $\langle \sum i \ : 1 \leq i + 1 < \#xs + 1 : \ (x \triangleright xs) \,!\, (i + 1) \rangle$

Ejemplo: En el segundo ítem tenemos que i y j son independientes entre sí. Por lo tanto tenemos que ver todas las combinaciones posibles con $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ y $j \in \{0, 1, 2\}$. En el tercer ítem hay una dependencia de j respecto de i; por lo tanto primero podés calcular los valores posibles de i y luego, para cada posible valor de i, los posibles valores de j.

8. Simplificá y aplicá, según corresponda, **rango vacío, rango unitario o término constante**.

a. $\langle \exists i \ : i = 3 \wedge par.i : \ 2 * i = 6 \rangle$ **b.** $\langle \sum i \ : 5 \leq i \wedge i \leq 5 : \ -2 * i \rangle$

c. $\langle \prod i \ : 0 < i < 1 : \ 34 \rangle$ **d.** $\langle \text{Min } i \ : i \leq 0 : \ n * (i + 2) - n * i \rangle$

e. $\langle \text{Max } as \ : a \triangleright as = [\,] : \ \#as \rangle$

Reflexión: No hay trampas acá: simplificá tanto como puedas usando aritmética.

9. Aplicá **partición de rango** si es que se puede, y si no se puede, explicá porqué.

a. $\langle \sum i \ : i = 0 \ \vee \ 4 > i \geq 1 : \ n * (i + 1) \rangle$ **b.** $\langle \forall i \ : 3 \leq |i| \leq 4 \ \vee \ 0 < i < 4 : \ \neg f.i \rangle$

c. $\langle \sum i \ : |i| \leq 1 \ \vee \ 0 \leq 2 * i < 7 : \ i * n \rangle$

d. $\langle \prod i \ : 0 \leq i < n \ \wedge \ (i \bmod 3 = 0 \ \vee \ i \bmod 3 = 1) : \ 2 * i \rangle$

Reflexión: Recordá que no siempre es necesario ver el rango para decidir si se puede usar partición de rango. Como siempre, simplificá lo más que puedas aritméticamente.

10. Evalúa las expresiones del ejercicio 9 en $n = 3$, $f.x \doteq |x| < 4$, $xs = [-1, 1, 0, 3]$.

11. Descubrí y explicá el error en la siguiente prueba:

$$
\begin{array}{l}
\quad \langle \sum i \ : 0 \leq i < \#xs : \ xs \,!\, i \rangle \\
= \{ \text{ lógica } \} \\
\quad \langle \sum i \ : i = 0 \ \vee \ 1 \leq i < \#xs : \ xs \,!\, i \rangle \\
= \{ \text{ partición de rango disjunto } \} \\
\quad \langle \sum i \ : i = 0 : \ xs \,!\, i \rangle + \langle \sum i \ : 1 \leq i < \#xs : \ xs \,!\, i \rangle \\
= \{ \text{ rango unitario } \} \\
\quad xs \,!\, 0 + \langle \sum i \ : 1 \leq i < \#xs : \ xs \,!\, i \rangle
\end{array}
$$

12. Aplicá **distributividad**, si es que se puede.

a. $\langle \sum i \ : i = 0 \ \vee \ 1 \leq i < 4 : \ n * (i + 1) \rangle$ **b.** $\langle \prod i \ : 3 \leq |i| \leq 4 \ \vee \ 0 < i < 4 : \ n + i \rangle$

c. $\langle \forall i \ : i = 0 \ \vee \ 4 > i \geq 1 : \ \neg f.i \ \vee \ \neg f.n \rangle$ **d.** $\langle \text{Max} \ i \ : 0 \leq i < \#xs : \ k + xs \,!\, i \rangle$

13. Evalúa las expresiones del ejercicio 12, considerando $n = 3$, $f.x \doteq (x = 0)$, $k = -1$, y $xs = [1, 0, 3]$.

14. Decidí si se puede aplicar o no el **cambio de variable** indicado. Justificá tu decisión y escribí la expresión aplicandolo si dijiste que se podía.

a. $\langle \sum i \ : |i| < 5 : \ i \text{ div } 2 \rangle$ con $f.j \doteq 2 * j$. **b.** $\langle \sum i \ : par.i \wedge |i| < 5 : \ i \text{ div } 2 \rangle$ con $f.j \doteq 2 * j$.

c. $\langle \prod i \ : 1 \leq i < \#(x \triangleright xs) : \ (x \triangleright xs) \,!\, i \rangle$ con $f.j \doteq j + 1$.

d. $\langle \text{Max} \ as \ : as \neq [\,] : \ \#as \rangle$ con $f.(x, xs) \doteq x \triangleright xs$.

Reflexión: Es importante que escribas la inversa y te convenzas que es efectivamente inversa en el rango apropiado.

15. Simplificá el rango y aplicá alguna de las **reglas para la cuantificación de conteo**:

a. $\langle N \, a, as \ : a \triangleright as = xs \wedge xs = [\,] : \ \#as = 1 \rangle$ **b.** $\langle N \, i \ : i - n = 1 : \ par.i \rangle$

c. $\langle N \, i \ : i = 0 \vee 1 \leq i < \#xs + 1 : \ par.((x \triangleright xs) \,!\, i) \rangle$

16. Evaluá las siguientes expresiones aplicando una reducción por paso:

a. $[3, -1, 4] \,!\, 2$ **b.** $[3, -1, 4] \downarrow 2$ **c.** $[3, -1, 4] \uparrow 2$ **d.** $[-1, 4] +\!\!+ [3, -2, -2]$

17. Considerá las siguientes funciones:

$$
\begin{array}{rcl}
f.0 & \doteq & 1 \\
f.(n+1) & \doteq & f.n + 2 * n + 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
g.[\,] & \doteq & 0 \\
g.(x \triangleright xs) & \doteq & x * (1 + g.xs)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
p.n.[\,] & \doteq & 0 \\
p.n.(x \triangleright xs) & \doteq & (x + sum.xs)/n
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
h.n.[\,] & \doteq & n \geq 0 \\
h.n.(x \triangleright xs) & \doteq & n \geq 0 \ \wedge \ h.(n + x).xs
\end{array}
$$

a. Escribí el tipo de cada función.

b. ¿Cuáles de ellas son funciones recursivas? Para las que lo son, en qué argumento es la recursión?

c. Evaluá las expresiones $f.4$, $g.[-1, 4, 2]$ y $h.0.[3, -2, -2]$, aplicando una reducción por paso.

d. Reescribí la definición de f usando análisis por casos en vez de pattern-matching.

e. ¿Es $[x] +\!\!+ xs$ un patrón válido para un argumento de tipo lista?

f. Definí g' de manera que $g'.xs = g.xs$ y que el valor de $g'.[0, 4, 2]$ se encuentre en no más de 4 pasos.