①

Por la presente declaro que la resolución de este examen es obra de mi exclusiva autoría y respetados las pautas y criterios fijados en los enunciados. Asimismo declaro conocer el régimen de infracción de los estudiantes cuyo texto ordenado se encuentra en el apéndice de la Res. Rec. 1554/2018.

1) Sea W el subespacio de $\mathbb{K}^4$ generado por el conjunto de vectores:

$$S=\{(1,1,-1,1),(2,1,0,-1),(-1,1,-3,5),(0,-1,2,-3)\}$$

a) Dar una base de W formada por los vectores de S.

b) Extender a una base de $\mathbb{K}^4$ la base que haya dado en el ítem anterior.

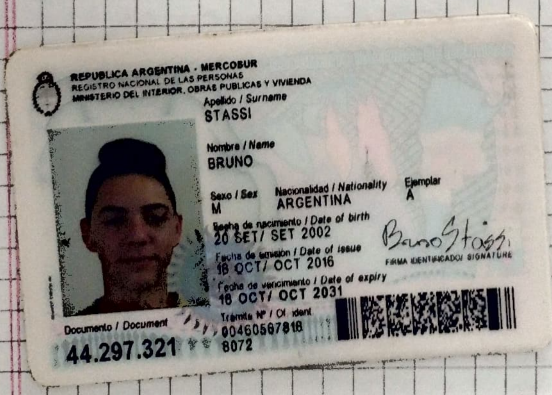
Por proposición que dice que si $\{v_1,\dots,v_n\}$ son vectores en $\mathbb{R}^m$ y $A=\begin{pmatrix}-v_1-\\ \vdots \\ -v_n-\end{pmatrix}$ una matriz, si R es la mrf equivalente a A sin permutar filas y las filas nulas son $i_1,i_2,\dots,i_k$ entonces $\{v_{i_1},\dots,v_{i_k}\}$ son LI. Por lo tanto:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\2&1&0&-1\\-1&1&-3&5\\0&-1&2&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{f_2-2f_1\\ f_3+f_1}}\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&-1&2&-3\\0&2&-4&6\\0&-1&2&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{f_3+2f_2\\ f_4-f_2}}\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&-1&2&-3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{f_1+f_2\\ (-1)f_2}}\begin{pmatrix}1&0&1&-2\\0&1&-2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ que es mrf, luego por la proposición:

$B=\{(1,1,-1,1),(2,1,0,-1)\}$ es LI, luego como $(-1,1,-3,5)$ y $(0,-1,2,-3)$ eran combinaciones lineales del conjunto B entonces $\langle B\rangle=W$, por lo tanto B es base de W.

Finalizado a) y b) en la siguiente página.



Bruno Stassi

1b) $B=\{(1,1,-1,1),(2,1,0,-1)\}$ es base, usando el mismo teorema que en a), agregamos los 4 vectores canónicos y reduzcamos sin anular los vectores de B.

$$M=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\2&1&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{f_6-f_1}\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\2&1&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-1&-1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[f_6-f_5]{f_6+f_3,\ f_6+f_4}\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\2&1&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_5+f_1}\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\2&1&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{f_5+f_2}\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\2&1&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\3&2&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[f_5-2f_4]{f_5-3f_3}\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\2&1&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Por lo tanto $\{(1,1,-1,1),(2,1,0,-1),(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}=C$ es LI, ahora como es LI y $|C|=4$, entonces como $\dim(\mathbb{K}^4)=4$ y $C\subseteq\mathbb{K}^4$ entonces C genera a $\mathbb{K}^4$ $\therefore$ C es base de $\mathbb{K}^4$.

Finalizado b).

Bruno Stassi

3

2) Considere el siguiente conjunto de matrices 2×2.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

a) Calcular las matrices de cambio de base $[Id]_{BC}$ y $[Id]_{CB}$ donde C es la base de $\mathbb{K}^{2\times 2}$ formada por las matrices:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Dar las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ en la base B.

Por definición si $B = \{A_1, \dots, A_n\}$ es una base ordenada y $B' = \{B_1, \dots, B_n\}$ es otra base ordenada con A_i y B_i matrices entonces: $[Id]_{BB'} = \left([A_1]_{B'} \cdots [A_n]_{B'} \right)$, en este caso:

$$[Id]_{BC} = \left(\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_C \cdots \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_C \right)$$

Como C es la base canónica de $\mathbb{K}^{2\times 2}$ entonces si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]_C = (a, b, c, d)$, en este caso: $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_C = (0,0,0,1)$, $\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right]_C = (1,2,3,0)$

$\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right]_C = (1,1,3,0)$, $\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_C = (0,1,1,0)$, por lo tanto:

$$[Id]_{BC} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ahora por teórico si $[Id]_{BC}$ es la matriz de cambio de base de B a C entonces $[Id]_{CB} = [Id]_{BC}^{-1}$

Por lo tanto para calcular $[Id]_{CB}$, usemos el siguiente teorema:

Si A es una matriz $n\times n$ invertible entonces las operaciones por filas que le aplico a A para llegar a la Id, se las aplico a la Id entonces obtengo A^{-1}, por lo tanto sea la matriz ampliada:

$$\left([Id]_{BC} \mid Id\right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} f_2 - 2f_1 \\ f_3 - 3f_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$f_2 - f_3 \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 + f_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

siguiente página Bruno Stassi Pratlassi

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} f_4 \rightleftarrows f_3 \\ f_3 \rightleftarrows f_2 \\ f_2 \rightleftarrows f_1 \\ f_3(-1) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo tanto $[Id]_{BC}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = [Id]_{CB}$

finalizado a)

b) Dar las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ en la base B.

Por teorema, $[Id]_{CB}[A]_C = [A]_B$ por lo tanto como

$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right]_C = (1,2,3,4)$ entonces:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right]_B$$ entonces.

$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right]_B = (4,1,0,0)$

finalizado b.

Bruno Stassi

5

3) Sea $T: \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^2$ transformación lineal tq:

$Nu(T) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{K}^4 \mid x - 5y = 0 \wedge z - 3w = 0\}$

a) Calcular la dimensión del $Nu(T)$ y de la $Im(T)$.

b) Decidir si T es un epimorfismo o no. Justificar.

Por definición de $Nu(T)$ del ejercicio:

$\forall (x,y,z,w) \in Nu(T)$, $x - 5y = 0 \wedge z - 3w = 0 \Rightarrow x = 5y \wedge z = 3w \therefore$

$\forall (x,y,z,w) \in Nu(T)$, $(x,y,z,w) = (5y, y, 3w, w) =$

$y(5,1,0,0) + w(0,0,3,1)$, por lo tanto:

$Nu(T) = \langle (5,1,0,0), (0,0,3,1) \rangle$ luego $(5,1,0,0)$ y $(0,0,3,1)$ son

LI ya que uno no es multiplo del otro

, por lo tanto $\{(5,1,0,0), (0,0,3,1)\} = B$ es base de

$Nu(T)$, por definición de dimension, como $|B| = 2 \Rightarrow dim(Nu(T)) = 2$

Por teorema de la dimensión, si $T: V \to W$ es una tranf lineal,

entonces $dim(V) = dim(Nu(T)) + dim(Im(T))$, por lo tanto:

$dim(\mathbb{K}^4) = dim(Nu(T)) + dim(Im(T)) \Rightarrow 4 = 2 + dim(Im(T)) \therefore$

$dim(Im(T)) = 2$.

finalizado a)

b) Por teorema, $T: V \to W$ TL es epimorfismo si:

1. T de un conjunto generador de V, es generador de W
2. $Im(T) = W$
3. $dim(Im(T)) = dim(W)$

Como en este caso $dim(Im(T)) = 2 = dim(\mathbb{K}^2)$ entonces

T es epimorfismo. finalizado b.

Bruno Stass. BrStass.

4) Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz cuadrada con coeficientes reales tq $A^2 + Id = 0$. Probar las siguientes afirmaciones:

a) A es invertible

b) n es par

c) A no tiene autovalores reales.

Dem. Tenemos que $A^2 + Id = 0 \Rightarrow A^2 = -Id \therefore \det(A^2) = \det(-Id)$ por propiedad del determinante $\det(A^2) = \det(A)^2$ y $\det(-Id) = (-1)^n \det(Id)$, por lo tanto:

$\det(A^2) = \det(-Id) \Leftrightarrow \det(A)^2 = (-1)^n \det(Id) = (-1)^n \Rightarrow$ $\det(A)^2 = (-1)^n$ como $A \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow \det(A) \in \mathbb{R}$, luego $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 \Rightarrow (-1)^n \geq 0 \Rightarrow \therefore (-1)^n = 1 \Leftrightarrow n$ es par (dem b), por lo tanto $\det(A)^2 = 1 \Rightarrow \det(A) = 1 \vee -1$ como por teorema $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es invertible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ entonces nuestra A es invertible (demostrado a), ~~como $A^2 = Id$ entonces A^2 tiene 1 en su diagonal, osea $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ luego~~.

No pude hacer c) finalizado 4.

Bruno Stassi

⑦

5) Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Probar que si A tiene una fila nula o dos filas iguales, entonces $\det(A)=0$

Dem: Veamos que si A tiene una fila nula $\Rightarrow \det(A)=0$.

Si A tiene una fila nula, supongamos F_r, apliquemosle a A la operación $2F_r$, y volvemos a obtener A, por propiedades del determinante $\det(A)=2\det(A) \Leftrightarrow \det(A)=0$.

Ahora si A tiene 2 filas iguales $\Rightarrow \det(A)=0$.

Si A tiene 2 filas iguales, supongamos F_n y F_s con $n\neq s$, permutemos las filas F_n y F_s y volvemos a obtener A, nuevamente por propiedad del determinante, $\det(A)=-\det(A) \Leftrightarrow \det(A)=0$ //

Finalizado 5)

Bruno Stassi BruStassi

6) Enunciar y demostrar el resultado que da información sobre la independencia lineal de los autovectores de una tranf lineal asociados a diferentes autovalores

Teorema: Sea $T: V \to V$ con V Espacio vectorial, si $\{v_1, \dots, v_n\}$ son autovectores asociados a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ respectivos autovalores, y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son todos distintos entre sí $\Rightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ es LI.

Dem. Por inducción en n:

Caso base $n=1$: Es trivial pq un autovector es distinto de 0, entonces un solo autovector es LI.

Paso Inductivo: Supongamos que se cumple para $n-1$, para todo $n>1$. Luego veamos si se cumple para el caso n.

Supongamos que nuestro conjunto de autovectores es: $\{v_1, \dots, v_n\}$ luego sea $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$ (*) para algunos $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$.

Ahora a (*) multipliquemosla por λ_1 (autovalor asociado a v_1) entonces $c_1 \lambda_1 v_1 + \dots + c_n \lambda_1 v_n = 0$ (**), por otro lado a (*) apliquemosle T, entonces $c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \dots + c_n \lambda_n v_n = 0$ (***) (esto pq λ_i es autovalor de v_i $\forall i$ entre 1 y n), luego hagamos (**) - (***) entonces: $c_2(\lambda_1 - \lambda_2) v_2 + \dots + c_n(\lambda_1 - \lambda_n) v_n = 0$ ahora como $\{v_2, \dots, v_n\}$ es un conjunto LI por hipotesis inductiva $\Rightarrow v_i \neq 0$ $\forall i$ entre 2 y n, luego $c_i(\lambda_1 - \lambda_i) = 0$ $\forall i$ entre 2 y n por definición de conjunto LI; como $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son todos distintos entre sí $\lambda_1 - \lambda_i \neq 0$ $\forall i$ entre 2 y n, luego $c_i = 0$ $\forall i$ entre 2 y n, por lo tanto en (*) remplazando los $c_i = 0$ nos queda $c_1 v_1 = 0$ como v_1 es un autovector tq $T(v_1) = \lambda_1 v_1$ entonces $v_1 \neq 0$ $\therefore c_1 = 0$, finalmente $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, por lo tanto $\{v_1, \dots, v_n\}$ es LI, como se cumple para n cualesquiera natural entonces se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$ //

finalizado 6.

Bruno Stassi [illegible]