Matemática Discreta I - 2021/1

Tarea 4

Ejercicios

1. ¿De cuántas formas distintas se pueden escoger 5 cartas de una baraja de 52 cartas?
   (a) Si no hay restricciones.
   (b) Si debe haber tres picas y dos corazones.
   (c) Si debe haber al menos una carta de cada palo.

2. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar la siguiente igualdad:

$$n = \frac{n! + (n+2)! - n(n+2)(n-1)!}{n! + (n-1)! + (n+1)!}.$$

Solución

1. Una baraja de 52 cartas está dividida en *cuatro palos*: Picas ($\spadesuit$), Corazones ($\heartsuit$), Diamantes ($\diamondsuit$), y Tréboles ($\clubsuit$). Además, cada palo está formado por 13 cartas, de las cuales 9 cartas son numerales y 4 literales. Se ordenan de menor a mayor "rango" de la siguiente forma: $A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K$.

   (a) Como no nos imponen ninguna condición especial (no hay restricciones), entonces solo debemos determinar cuántos subconjuntos hay con 5 elementos (las 5 cartas que debemos escoger) de un conjunto de 52 objetos (el número total de cartas de la baraja), es decir, debemos hacer una ***selección sin orden de 5 cartas entre 52 cartas***, esto es:

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{(52-5)!5!} = \frac{52!}{47!5!} = \frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48\cdot \cancel{47!}}{\cancel{47!}5!}$$
$$= \frac{52\cdot 51\cdot \cancel{50}^{10}\cdot 49\cdot \cancel{48}^{2}}{\cancel{5}\cdot \cancel{4\cdot 3\cdot 2}} = 52\cdot 51\cdot 49\cdot 20.$$

   (b) En este caso, debemos elegir 3 cartas entre 13 (para las picas), y la cantidad de elecciones posibles es $\binom{13}{3}$. Por otro lado, para el palo de corazones, hay $\binom{13}{2}$ formas de elegir 2 cartas entre 13. Luego, por el principio de multiplicación, el resultado es:

$$\binom{13}{3}\cdot\binom{13}{2} = \frac{13!}{10!3!}\cdot\frac{13!}{11!2!} = \frac{13\cdot 12\cdot 11}{\cancel{6}}\cdot\frac{13\cdot \cancel{12}^{\cancel{6}}}{\cancel{2}} = 13^2\cdot 12\cdot 11.$$

   (c) Como debe haber al menos una carta de cada palo, y hay 4 palos, entonces en cada elección de 5 cartas **ineludiblemente tiene que haber dos del mismo**

palo. Ahora bien, si fijamos el palo que se repite, hay

$$\binom{13}{2}\cdot\binom{13}{1}\cdot\binom{13}{1}\cdot\binom{13}{1}$$

formas de elegir las 5 cartas. Como hay 4 palos, tenemos un total de:

$$4\cdot\binom{13}{2}\cdot\binom{13}{1}\cdot\binom{13}{1}\cdot\binom{13}{1} = 4\cdot 13\cdot 6\cdot 13\cdot 13\cdot 13 = 24\cdot 13^4.$$

2. Sea $n \in \mathbb{N}$. Por definición recursiva del factorial, tenemos que $n! = n(n-1)!$. Luego,

$$(n+1)! = (n+1)n(n-1)!, \qquad (n+2)! = (n+2)(n+1)n!. \qquad (\star)$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
&\frac{n! + (n+2)! - n(n+2)(n-1)!}{n! + (n-1)! + (n+1)!} \\
&= \frac{n! + (n+2)(n+1)n! - (n+2)n!}{n(n-1)! + (n-1)! + (n+1)n(n-1)!} && \text{por } (\star) \\
&= \frac{n!(1 + (n+2)(n+1) - (n+2))}{(n-1)!(n+1+(n+1)n)} && \text{factor común} \\
&= \frac{n!(1 + n^2 + 3n + 2 - n - 2)}{(n-1)!(n+1+n^2+n)} && \text{aritmética} \\
&= \frac{n!\cancel{(n^2+2n+1)}}{(n-1)!\cancel{(n^2+2n+1)}} && \text{aritmética} \\
&= \frac{n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n. && \text{def } n!
\end{aligned}$$