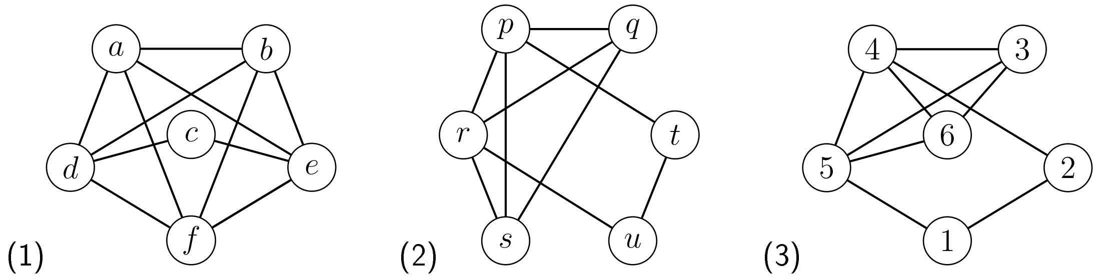
Matemática Discreta I - 2021/1

Tarea 10

Ejercicio 1.

Dados los siguientes grafos:



(a) (40 pts) Determinar cuales de los siguientes pares de grafos son isomorfos. En el caso de ser isomorfos, especifique un isomorfismo; en caso contrario, justificar por que no son isomorfos.

(i) (1) y (2).

(ii) (2) y (3).

(b) (20 pts) Dé un ciclo hamiltoniano en el grafo (1).

Ejercicio 2.

(40 pts) Determinar si el grafo $G = (V, E)$ tiene caminatas o circuitos eulerianos, y en caso de que la respuesta sea positiva, encontrar una caminata o circuito euleriano.

$$V = \{p, a, b, c, d, e, f, v, w, x, y, z\},$$
$$E = \{\{p, a\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, v\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{e, f\}, \{v, w\}, \{w, x\}, \{w, y\}, \{w, z\}, \{x, y\}\}.$$

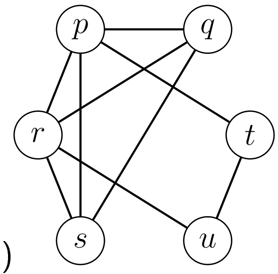
Solución

(1)(a) Todos los grafos tienen 6 vértices, luego el criterio de diferente cantidad de vértices para distinguir grafos no se aplica.

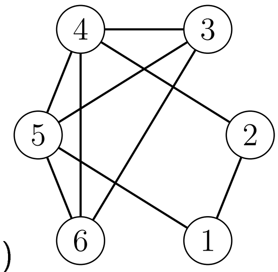
- En el grafo (1) la lista de valencias es: 2, 4, 4, 4, 4, 4.
- En el grafo (2) la lista de valencias es: 2, 2, 3, 3, 4, 4.
- En el grafo (3) la lista de valencias es: 2, 2, 3, 3, 4, 4.

(i) Como (1) y (2) tiene listad valencias diferentes, los grafos no son isomorfos.

(ii) Veamos que (2) y (3) son isomorfos. Observar que si hacemos un nuevo dibujo de (3) re-ubicando los vértices obtenemos:



(2)



(3)

Luego la función biyectiva

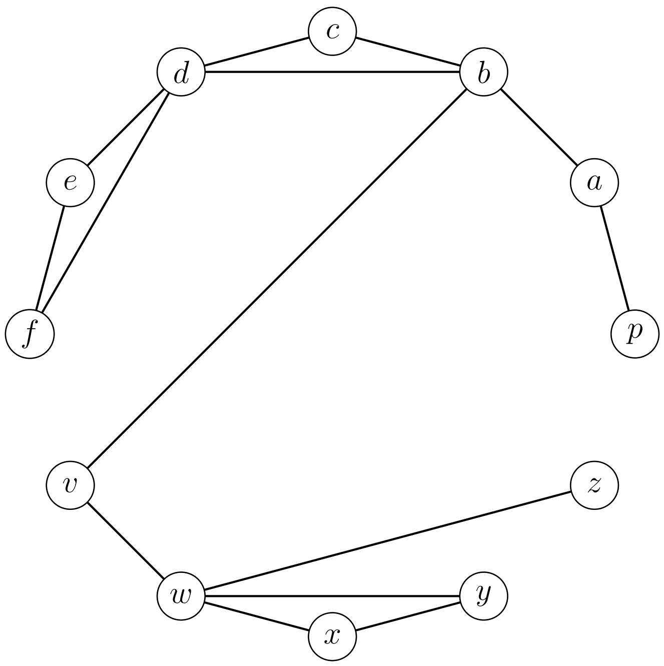
$$\alpha(p) = 4,\ \alpha(q) = 3,\ \alpha(r) = 5,\ \alpha(s) = 6,\ \alpha(t) = 2,\ \alpha(u) = 1,$$

es un isomorfismo de grafos

(1)(b) Los ciclos hamiltonianos se deben hacer, cuando es posible, "a ojo". Uno posible es

$$d, a, b, f, e, c, d.$$

(2) Se podría hacer haciendo la lista de adyacencia del grafo y aplicando en forma simbólica el algoritmo explicado en clase. Sin embargo, en estos caso de pocos vértices es mejor dibujar el grafo y aplicar el algoritmo en el dibujo. Dibujaremos los vértices en forma consecutiva en un círculo y luego dibujaremos las aristas. El grafo que queda no es muy armónico pero sirve para nuestros propósitos.



Vemos que hay dos vértices de valencia 1 (p y z) y todos los demás tiene valencia par. Por lo tanto, hay una caminata euleriana de p a z. Hagamos una caminata maximal desde p sin repetir aristas:

$$p, a, b, c, d, f, e, d, b, v, w, y, x, w, z.$$

En este caso obtuvimos directamente una caminata euleriana.