Análisis Matemático II - Lic. en Computación

Capítulo 1: Integrales

- En AMI se introdujo el concepto de derivada de una función. Dada f se define la función f' como $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Algunas de las propiedades de la derivada son:

1) Si $f(x) = c$ (constante) $\Rightarrow$ $f'(x) = 0$.
   Por otra parte, si f es derivable en $I = (a,b)$ y $f'(x) = 0$ $\forall x \in I \Rightarrow f(x) = c$.
2) $(af)'(x) = a f'(x)$ $\forall a \in \mathbb{R}$.
3) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
4) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
5) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ (Regla de la cadena)

- Ahora nos interesa estudiar el concepto "inverso" a la derivación, esto es:

$$\boxed{\text{Dada una función } f \text{, encontrar } F \text{ tal que } F'(x) = f(x)}$$

- Sabemos dada F encontrar F' (derivación).
- Problema a resolver, dada $f = F'$ encontrar F (integración).

Definición: Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f: I \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que $F: I \to \mathbb{R}$ es una antiderivada o primitiva de f en I si

$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I.$

Observación: las primitivas NO son únicas. Por ejemplo, si $f(x) = x$ entonces $F_1(x) = \frac{x^2}{2}$ y $F_2(x) = \frac{x^2}{2} + 3$ son primitivas de f ya que $F_1'(x) = x = f(x)$ y $F_2'(x) = x = f(x)$.

El siguiente teorema nos dice que las primitivas de una función f difieren en una constante.

Teorema: Si F es una primitiva de f en I, entonces toda primitiva de f en I es de la forma $F(x) + C$ para alguna cte. $C \in \mathbb{R}$.

Dem: Sea G una primitiva de f en I, o sea $G'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$.

Queremos ver que $G(x) = F(x) + C$.

Sea $H(x) = G(x) - F(x)$. Utilizando las propiedades de la derivación se cumple que para todo $x \in I$

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Por lo tanto $H(x) = c \quad \forall x \in I$, o sea $G(x) = F(x) + C \quad \forall x \in I$ ∎

Definición: Dado $I \subset \mathbb{R}$ y $f: I \to \mathbb{R}$, se llama <u>integral indefinida</u> de f al <u>conjunto de</u> todas las <u>primitivas</u> de f y se denota

$$\int f(x)\,dx .$$

Observaciones:

1) El símbolo $\int$ se llama integral y dx se llama diferencial (de x).
Además, denotamos por diferencial de una función F a $d(F(x)) = F'(x)\,dx$.

2) En la definición de integral indef. podríamos usar otra letra. Por ejemplo,
$\int f(y)\,dy$, $\int f(t)\,dt$, etc.

Ejemplos

- $\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C$, con $C \in \mathbb{R}$ ya que $(\operatorname{sen}(x) + C)' = \cos(x)$.

- $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$, con $C \in \mathbb{R}$ ya que $\left(\frac{x^2}{2} + C\right)' = 2\frac{x}{2} = x$.

En general, si $n \in \mathbb{R}$ y $n \neq -1$ tenemos que $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$, con lo cual
$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ con } C \in \mathbb{R}.$$

- $\int tx\,\underline{dx} = t\frac{x^2}{2} + C$, pero $\int tx\,\underline{dt} = x\frac{t^2}{2} + C$

El diferencial nos indica cuál es la variable de integración.

Algunas propiedades de la integral indefinida

1) $\int 0\, dx = c$

2) $\int a . f(x)\, dx = a . \int f(x)\, dx, \ \forall a \in \mathbb{R}$

3) $\int (f \pm g)(x)\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

Ejemplo

$$\int (e^x + 4x^2 + 3)\, dx = \int e^x\, dx + 4\int x^2\, dx + \int 3\, dx = e^x + \frac{4}{3}x^3 + 3x + c, \ c \in \mathbb{R}.$$

El siguiente teorema es el "equivalente" a la propiedad (5) de derivación.

Teorema (Método de Sustitución). Sean $f : (d, e) \to \mathbb{R}$ y $g : (a, b) \to (d, e)$ derivable en su dominio. Entonces, si F es una primitiva de f en (d, e), $H(x) = (F \circ g)(x)$ es primitiva de $h(x) = f(g(x)) . g'(x)$ en (a, b). O sea,

$$\int f(g(x)) . g'(x)\, dx = F(g(x)) + c \quad , \text{ con } c \in \mathbb{R} \text{ y } \forall x \in (a, b).$$

Dem: Basta verificar que $H'(x) = h(x)$ $\forall x \in (a, b)$. Por la regla de la cadena tenemos que

$$H'(x) \underset{\text{definición}}{=} F(g(x))' \underset{\text{Regla de la cadena}}{=} F'(g(x)) . g'(x) \underset{F \text{ es primitiva de } f}{=} f(g(x)) . g'(x) = h(x) \quad \forall x \in (a, b) \ \blacksquare$$

Observación: el teorema anterior nos provee un método para calcular primitivas para funciones de la forma $f(g(x)) \cdot g'(x)$. En efecto, hagamos la siguiente sustitución: $u = g(x)$ y $du = d(g(x)) = g'(x)\,dx$.

Luego,

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{u}) \cdot \underbrace{g'(x)\,dx}_{du} = \int f(u)\,du \underset{\substack{\downarrow \\ F \text{ primitiva} \\ \text{de } f}}{=} F(u) + C = F(g(x)) + C$$

Ejemplos

- $\int \operatorname{sen}(x^2)\,2x\,dx$. Sea $u = x^2$, $du = 2x\,dx$. Entonces

$$\int \operatorname{sen}(x^2)\,2x\,dx = \int \operatorname{sen}(u)\,du = -\cos(u) + C = -\cos(x^2) + C.$$

- $$\int e^{3x}\,dx \underset{\substack{u=3x \\ du=3dx}}{=} \int e^{u}\,\tfrac{1}{3}\,du = \tfrac{1}{3}\int e^{u}\,du = \tfrac{1}{3}e^{u} + C = \tfrac{1}{3}e^{3x} + C.$$

El siguiente teorema es el "equivalente" a la propiedad (4) de derivación.

Teorema (Método de integración por partes). Si f' y g' son continuas, entonces

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx \qquad (\star)$$

Dem: Por la regla de derivación del producto de funciones (Prop. 4) tenemos que $(f \cdot g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$, o equivalentemente

$$f(x) \cdot g'(x) = (f \cdot g)'(x) - f'(x)\,g(x).$$

Integrando a ambos lados obtenemos

pues $f \cdot g$ es primitiva de $(f \cdot g)'$

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = \int (f \cdot g)'(x)\,dx - \int f'(x) \cdot g(x)\,dx \overset{\uparrow}{=} f(x) \cdot g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx \quad ■$$

Observación: la ecuación (★) se llama fórmula de integración por partes. Resulta más fácil recordarla utilizando la siguiente notación.

Si $u = f(x)$ y $v = g(x)$

entonces $du = f'(x)\,dx$ y $dv = g'(x)\,dx$,

luego (★) se reescribe como $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

Ejemplos

- $\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^x\,dx}_{dv}$. Si $u = x$, $dv = e^x dx$, entonces $du = 1.dx$, $v = e^x$, con lo cual

$$\int x e^x\,dx = x e^x - \int e^x\,1.dx = x e^x - e^x + C$$

- $\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\operatorname{sen}(x)\,dx}_{dv} = x.(-\cos(x)) - \int(-\cos(x))\,dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx = x\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + C.$

$du = dx \quad v = -\cos(x)$

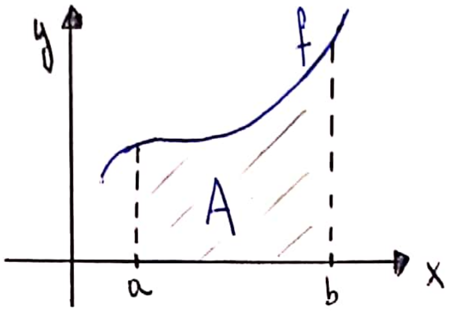
- $\int \ln(x)\,dx = \int \underbrace{\ln(x)}_{u}.\underbrace{1\,dx}_{dv} = \ln(x).x - \int x.\frac{1}{x}\,dx = \ln(x).x - \int 1\,dx = x\ln(x) - x + C.$

$du = \frac{1}{x}dx \quad v = x$

Integral definida

Área bajo una curva: sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función cont. y tq $f(x)\geq 0 \ \forall x\in[a,b]$

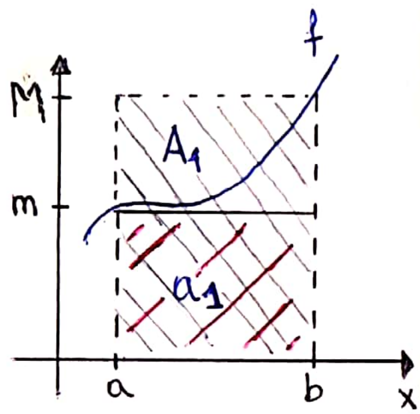
¿Cuál es el valor del área A comprendida entre la curva $y=f(x)$, el eje x y las rectas $x=a$ y $x=b$?



- 1ra Aproximación. Sean m = mínimo de f en $[a,b]$
  M = máximo de f en $[a,b]$

Entonces

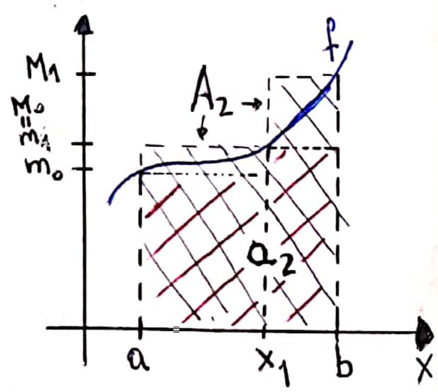
$$a_1 = m\cdot(b-a) \leq A \leq M\cdot(b-a) = A_1$$



- 2da Aproximación. Particionamos el intervalo $[a,b]$ como

$$[a,b] = [a,x_1]\cup[x_1,b] = [x_0,x_1]\cup[x_1,x_2].$$

Si m_k = mín. de f en $[x_k, x_{k+1}]$
M_k = máx de f en $[x_k, x_{k+1}]$, $k=0,1$.



Entonces

$$a_1 \leq a_2 = m_0(x_1-x_0)+m_1(x_2-x_1) \leq A \leq M_0(x_1-x_0)+M_1(x_2-x_1) = A_2 \leq A_1$$

- De manera gral., tomamos $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ una partición de $[a,b]$.

Si denotamos $\Delta_k = x_{k+1}-x_k$ y Δ al mayor de todos los Δ_k

m_k = mín. de f en $[x_k, x_{k+1}]$
M_k = máx de f en $[x_k, x_{k+1}]$, $k=0,\ldots,n-1$

entonces es claro que

$$\text{suma inferior} \longleftarrow \sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta_k \leq A \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta_k \longrightarrow \text{suma superior}$$

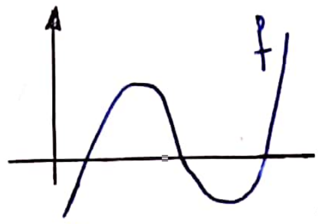
Definición: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua y tq $f(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$, se define el área encerrada por la curva $y=f(x)$, el eje x y las rectas $x=a$ y $x=b$ por
$$A=\lim_{\Delta\to 0}\left(\sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta_k\right).$$
Llamaremos a este **número** integral definida de f en $[a,b]$ y lo denotaremos por $\int_a^b f(x)\,dx$.

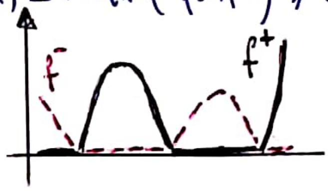
Observaciones

1) Se puede probar que tomar el límite de las sumas superiores coincide con tomar el límite de las sumas inferiores, i.e.
$$A=\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\Delta\to 0}\left(\sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta_k\right).$$

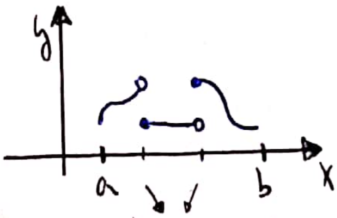
2) Para el caso $a=b$, se define $\int_a^a f(x)\,dx=0$. Además de la definición se puede probar que $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$.

3) La integral definida se puede extender a funciones que tomen valores positivos y negativos, escribiendo $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$ con $f^+(x)\doteq \max(f(x),0)\geq 0$, $f^-(x)\doteq \max(-f(x),0)\geq 0$ y haciendo $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f^+(x)\,dx-\int_a^b f^-(x)\,dx$





4) También se puede extender la definición a funciones continuas en $[a,b]$ salvo un número finito de ptos. y siempre que f esté acotada en $[a,b]$.



Algunas propiedades de la integral definida

Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funciones acotadas y continuas, salvo a lo sumo un número finito de ptos. Las siguientes son válidas:

1) Si $f\geq 0$ en $[a,b]$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

2) $\int_a^b c\, f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, $\forall c\in\mathbb{R}$.

3) $\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

4) Si $d\in[a,b]$, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$

5) Si $f\leq g$ en $[a,b]$, $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Relación entre integral definida e integral indefinida / primitiva.

Teorema (Teorema Fundamental del Cálculo)

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ cont. y $F(x) \doteq \int_a^x f(t)\,dt$, $\forall x\in[a,b]$. Entonces,

(i) F es derivable y $F'(x)=f(x)$ $\forall x\in(a,b)$. O sea, F es primitiva de f.

(ii) Si G es una primitiva de f en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(t)\,dt = G(b)-G(a) \doteq G(x)\Big|_a^b$

(La parte (ii) se conoce como Regla de Barrow)

Dem:

(i) (Sólo la idea) Queremos ver que $F'(x) = f(x)$.

Sean $h>0$ y $m_h = \text{mín } f$ en $[x, x+h]$ $\therefore$ $m_h \leq f(x) \leq M_h$ $\forall x [x, x+h]$

$M_h = \text{máx } f$ en $[x, x+h]$

Tenemos que

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt .$$

Entonces $m_h \cdot h \leq F(x+h) - F(x) \leq M_h \cdot h$, o equiv. $m_h \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq M_h$.

Luego, como f es cont. $m_h \xrightarrow[h \to 0]{} f(x)$ y $M_h \xrightarrow[h \to 0]{} f(x)$ $\therefore$ $f(x) \leq F'(x) \leq f(x)$.

(ii) Por la parte (i) sabemos que F es primitiva de f. Luego, si G es otra primitiva de f $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tq $G(x) = F(x) + c$, $\forall x \in [a,b]$. Entonces tenemos que

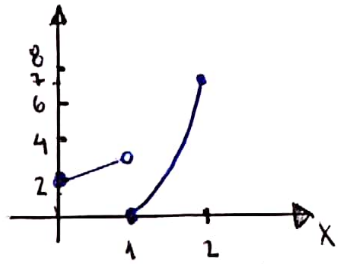
$$G(b) - G(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt - \underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{=0} = \int_a^b f(t)\,dt .$$

Observación: Si f es acotada y con un número finito de discontinuidades en $[a,b]$, también podemos aplicar (ii) del Teorema en cada subintervalo donde f es continua gracias al siguiente teorema.

Teorema: Sean $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$, con f continua y g tq $g(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$ salvo un $c \in [a,b]$. Entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx .$$

Ejemplo: Apliquemos la Regla de Barrow a $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^3 - 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$



$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 (x+2)\,dx + \int_1^2 (x^3-1)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^4}{4} - x\right)\Big|_1^2 = \frac{5}{2} - 0 + 2 + \frac{3}{4} = \frac{21}{4}.$$

Teorema (Mét. de Sust.): Sean $f: [c,d] \to \mathbb{R}$ y $g: [a,b] \to [c,d]$ tq f y g' son continuas en sus respectivos dominios. Entonces, si $u = g(x)$ vale que

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

En particular, si F es primitiva de f tenemos que $\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a))$.

Ejemplo: Calcular $\int_0^2 2x \operatorname{sen}(x^2)\,dx$.

Sea $u = x^2$, entonces $du = 2x\,dx$, $u(0) = 0^2 = 0$ y $u(2) = 2^2 = 4$. Luego,

$$\int_0^2 2x \operatorname{sen}(x^2)\,dx = \int_0^4 \operatorname{sen}(u)\,du = -\cos(u)\Big|_0^4 = -\cos(4) + \cos(0).$$

Teorema (Int. por Partes). Sean f y g derivables en (a,b) y tq f' y g' tienen a lo sumo un número finito de dis cont. en $[a,b]$ y son acotadas. Entonces

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{u}\, \underbrace{g'(x)\,dx}_{dv} = \underbrace{f(x)}_{u}\underbrace{g(x)}_{v}\Big|_a^b - \int_a^b \underbrace{g(x)}_{v}\, \underbrace{f'(x)\,dx}_{du}$$

Ejemplo: $\int_1^e \ln(x)\,dx = \int_1^e \ln(x)\,1\,dx = \ln(x) \cdot x\Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x}\,dx = e - 0 - x\Big|_1^e$

$$= e - (e-1) = 1.$$

Área entre gráficos de funciones

- Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es no negativa, acotada y con un nro. finito de discontinuidades, hemos definido el área A entre el gráfico de f, el eje x y la rectas vert. $x=a$ y $x=b$ como

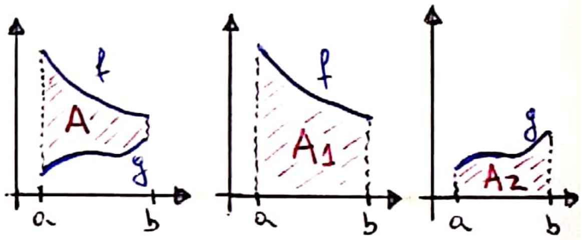
$$A=\int_a^b f(x)\,dx$$

- Si $f(x)\geq g(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$ es razonable definir el área entre los gráficos de f y g, (y las rectas $x=a$ y $x=b$) como

$$A=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx \quad , \text{ ya que } f(x)-g(x)\geq 0 \ \forall x\in[a,b].$$

Además por las propiedades de int. definida

$$A=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx=A_1-A_2$$



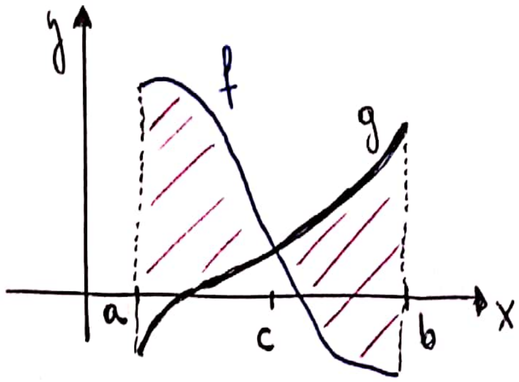
De manera general:

Teorema: Sea f y g funciones acotadas, con un nro. finito de discont. y tales que $f(x)\geq g(x)$ $\forall x\in[a,b]$. Entonces, el área entre los gráficos de f y g y las rectas $x=a$ y $x=b$ es

$$A=\int_a^b \underbrace{(f(x)-g(x))}_{\geq 0}\,dx$$

Notar que $f(x)\geq g(x)$ nos dice que $f(x)-g(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$.

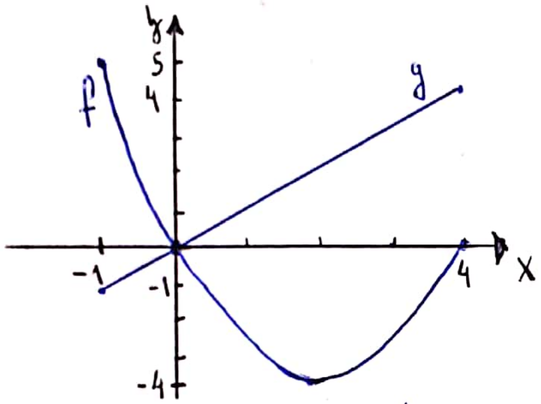
Observación: en el caso en que los gráficos se crucen, calculamos el área por partes.



$$A=\int_a^c (f(x)-g(x))\,dx+\int_c^b (g(x)-f(x))\,dx$$

Ejemplo: Calcular el área entre los gráficos de $f(x) = x^2 - 4x$ y $g(x) = x$ en el intervalo $[-1, 4]$.

Primero grafiquemos f y g en $[-1, 4]$.



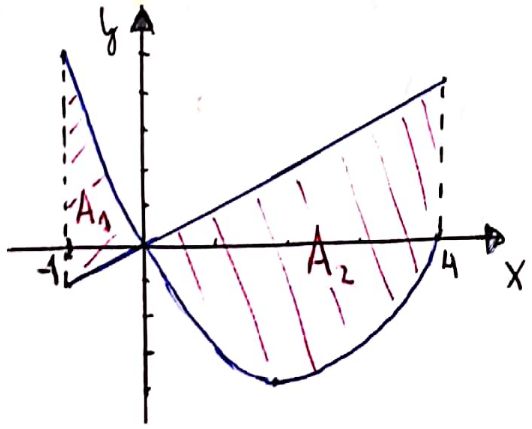
Tenemos que $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [-1, 0]$ y que $g(x) \geq f(x)$ $\forall x \in [0, 4]$

Entonces debemos calcular el área A por partes.

$$A = \int_{-1}^{0} ((x^2 - 4x) - x)\, dx + \int_{0}^{4} (x - (x^2 - 4x))\, dx \qquad (A = A_1 + A_2)$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^2 - 5x)\, dx + \int_{0}^{4} (5x - x^2)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{-1}^{0} + \left(5\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{0}^{4}$$

$$= -\left(\frac{-1}{3} - \frac{5}{2} \right) + \left(40 - \frac{64}{3} \right) =$$



Integración de funciones racionales usando fracciones simples.

• Queremos integrar funciones que son cocientes de polinomios (func. racionales), o sea, $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$.

Hay algunas que ya sabemos integrar, por ejemplo

$$\int \frac{1}{x-2}\,dx = \ln(|x-2|) + C \ , \quad \int \frac{1}{(x+3)^3}\,dx = \frac{(x+3)^{-2}}{-2} + C = \frac{-1}{2(x+3)^2} + C \ ,$$

pero otras más complicadas no sabemos, por ejemplo $\int \frac{x^2+3x}{x^3-1}\,dx$.

• De ahora en más vamos a suponer que la func. racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ satisface:

① $gr(p) < gr(q)$

Ya que si no fuera cierto hacemos la división de $p(x)$ por $q(x)$ y por lo tanto

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \underbrace{Q(x)}_{\text{polinomio fácil de integrar}} + \frac{r(x)}{q(x)} \ ,$$

donde $r(x)$ es el resto que satisface $gr(r) < gr(q)$

$\Rightarrow$ saber integrar $\frac{p(x)}{q(x)}$ se traduce en saber integrar $\frac{r(x)}{q(x)}$ con $gr(r) < gr(q)$.

② El coeficiente que acompaña a la potencia de mayor grado de q es 1.

Ya que si no fuera cierto hacemos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{p(x)}{a_n \underbrace{\left(x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} + \dots + \frac{a_0}{a_n}\right)}_{\tilde{q}(x)}} = \frac{p(x)/a_n}{\tilde{q}(x)} = \frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)}$$

con $\tilde{q}$ tq $\tilde{a}_n = 1$ (es decir es mónico).

Utilizaremos el siguiente teorema para factorizar al polinomio $q(x)$.

Teorema: Todo polinomio mónico se puede escribir como producto de pol. de grado 1 y/o pol. de grado 2 sin raíces reales.

O sea, si $q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$, ent. $q(x) = (x-r_1)\dots(x-r_k)\underbrace{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)\dots(x^2+\alpha_\ell x+\beta_\ell)}_{\text{sin raíces reales}}$

Ejemplos: $x^3+2x^2-3x = x(x^2+2x-3) = x(x-1)(x-3)$;

$x^2-2x-1 = (x-1)^2$; $\qquad 3x^3+6x = 3x(x^2+1)$

- Para calcular $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$, suponemos $gr(p) < gr(q)$ y q mónico (si no hacemos lo que dijimos antes). Vamos a separar en casos según cómo se factoriza q.

Caso 1: q es producto de polinomios de grado 1 y todos distintos. O sea,

$$q(x) = (x-r_1)\cdots(x-r_k), \text{ con } r_j \neq r_i \text{ si } j \neq i.$$

En este caso buscamos constantes $A_1, \dots, A_k$ (una cte. por cada pol. de $gr=1$) tales que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-r_1} + \dots + \frac{A_k}{x-r_k}$$, luego cada término $\frac{A_i}{(x-r_i)}$ es muy fácil de integrar ✓

Ejemplo: calcular $\int \frac{7x-1}{x^2-x-6}dx$

Tenemos que $q(x) = x^2-x-6 = (x-3)\cdot(x+2)$. Entonces debemos hallar A_1 y A_2 tq

$$\frac{7x-1}{(x-3)\cdot(x+2)} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x+2} = \frac{A_1(x+2)+A_2(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{(A_1+A_2)\cdot x + (2A_1-3A_2)}{(x-3)(x+2)}$$

Igualando los coeficientes de los numeradores tenemos que

$$7 = A_1 + A_2 \longrightarrow A_1 = 7 - A_2$$

$$-1 = 2A_1 - 3A_2 \longrightarrow -1 = 14 - 2A_2 - 3A_2 \rightarrow -15 = -5A_2 \Rightarrow A_2 = 3 \text{ y } A_1 = 4$$

Luego $\int \frac{7x-1}{x^2-x-6}dx = \int \frac{4}{x-3}dx + \int \frac{3}{x+2}dx = 4\ln(|x-3|) + 3\ln(|x+2|) + C$.

Caso 2: q es producto de pol. de grado 1 todos iguales. O sea $q(x) = (x-r)^k$

En este caso buscamos constantes $A_1, \dots, A_k$ (tantos como grado de q) tales que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{(x-r)} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-r)^k}$$, luego cada término $\frac{A_i}{(x-r)^i}$ es fácil de integrar ✓

Ejemplo: Calcular $\int \frac{1-2x}{(x+2)^3}\,dx$.

Escribimos que $q(x) = (x+2)^3$, entonces buscamos $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}$ tq

$$\frac{1-2x}{(x+2)^3} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3}{(x+2)^3} = \frac{A_1(x+2)^2 + A_2(x+2) + A_3}{(x+2)^3} = \frac{A_1(x^2+4x+4) + A_2(x+2) + A_3}{(x+2)^3}$$

Luego, igualando los coeficientes de los numeradores tenemos que

$$0 = A_1 \checkmark$$
$$-2 = 4A_1 + A_2 \longrightarrow A_2 = -2 \checkmark$$
$$1 = 4A_1 + 2A_2 + A_3 \longrightarrow A_3 = 5 \checkmark$$

Entonces,

$$\int \frac{1-2x}{(x+2)^3}\,dx = \int \frac{-2}{(x+2)^2}\,dx + \int \frac{5}{(x+2)^3}\,dx = -2\,\frac{(x+2)^{-2+1}}{(-2+1)} + 5\,\frac{(x+2)^{-3+1}}{(-3+1)} + C = \frac{2}{x+2} - \frac{5}{2(x+2)^2} + C.$$

Caso 3: q es producto de pols. de grado 1 algunos de los cuales se repiten, o sea

$$q(x) = (x-r_1)\cdots(x-r_{i-1})(x-r_i)^{k_i}\cdots(x-r_n)^{k_n}.$$

En este caso aplicamos los procedimientos de los casos 1 y 2.

Ejemplo: Si $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3-x+1}{x(x-2)(x-1)^3}$, entonces buscamos $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathbb{R}$ tq

$$\frac{x^3-x+1}{x(x-2)(x-1)^3} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x-1} + \frac{A_4}{(x-1)^2} + \frac{A_5}{(x-1)^3}.$$

Caso 4: q es producto de factores $(x-r_i)^{k_i}$ y/o de polinomios de grado 2 **sin** raíces reales y no se repiten. O sea,

$$q(x) = (x-r_1)^{k_1} \ldots (x-r_n)^{k_n} \cdot (x^2+\alpha_1 x+\beta_1) \ldots (x^2+\alpha_m x+\beta_m)$$

En este caso $\frac{p}{q}$ se escribe como una suma donde por cada "factor lineal" aparecen tantos términos como indican los casos 1 y 2, y para cada "factor cuadrático" aparecen términos de la forma $\dfrac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta}$, con B y C constantes a encontrar.

Ejemplo: Si $\dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{x-1}{(x-2)x^2(x^2+4)}$, entonces debemos hallar constantes A_1, A_2, A_3, B y C tq

$$\frac{x-1}{(x-2)x^2(x^2+4)} = \frac{A_1}{(x-2)} + \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x^2} + \underbrace{\frac{Bx+C}{x^2+4}}_{\text{Integral ¿?}}$$

Fácil de integrar ✓

Observación: para integrar términos de la forma $\dfrac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta}$, debemos hallar constantes K_1 y K_2 tq

$$\frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta} = K_1 \underbrace{\frac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\beta}}_{\text{Fácil de integrar usando la sust. } u=x^2+\alpha x+\beta} + K_2 \underbrace{\frac{1}{x^2+\alpha x+\beta}}_{(\star)} .$$

Igualando los coef. de los numeradores se obtiene $K_1 = B/2$
$K_2 = C - K_1\alpha$

$(\star)$ Se debe completar cuadrado y se usa sustitución para llegar a algo de la forma $\dfrac{1}{y^2+a^2}$ y luego usar que $\displaystyle\int \frac{1}{y^2+a^2}\,dy = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}(y/a) + c$

Ejemplo: Calcular $\int \frac{x-1}{x^2-4x+5}\,dx$ (estamos suponiendo $B=1$ y $C=-1$)

Debemos hallar K_1 y K_2 tq

$$\frac{x-1}{x^2-4x+5} = \frac{K_1(2x-4)}{x^2-4x+5} + \frac{K_2}{x^2-4x+5} \Rightarrow$$

Igualando los coeficientes de los numeradores

- $1 = 2K_1 \longrightarrow K_1 = \frac{1}{2}$
- $-1 = -4K_1 + K_2 \longrightarrow K_2 = 1$

Luego, debemos resolver

- $\frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln(|u|)+C = \frac{1}{2}\ln(|x^2-4x+5|)+C$

Sust. $u = x^2-4x+5$
$du = (2x-4)\,dx$

- $1\int \frac{1}{x^2-4x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+1}\,dx = \int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \text{arctg}(y)+C = \text{arctg}(x-2)+C$

Sustitución
$y = x-2$
$dy = dx$

Finalmente, $\int \frac{x-1}{x^2-4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\ln(|x^2-4x+5|) + \text{arctg}(x-2) + C$.

Caso 5: q es producto de terminos lineales y cuadráticos algunos de los cuales (incluyendo los cuadráticos) se repiten.

Este caso no lo veremos.

Integrales Impropias

Hemos definido $\int_a^b f(x)\,dx$ para el caso en que $\underline{a, b \in \mathbb{R}}$ y f es $\underline{\text{acotada}}$ y continua salvo a lo sumo en un nro. finito de ptos. Ahora extenderemos la definición para el caso en que a o $b \notin \mathbb{R}$ o en que f no sea acotada en $[a, b]$.

Integrales Impropias de tipo I: funciones continuas y al menos uno de los límites de integración no es finito.

Definición: Sea $a \in \mathbb{R}$.

- Si f es continua en $[a, \infty)$, definimos $\int_a^{\infty} f(x)\,dx \doteq \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\,dx$, si este límite existe y es finito. En tal caso decimos que $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ converge; si no decimos que $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ diverge.
- Si f es continua en $(-\infty, a]$, definimos $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \doteq \lim_{t \to -\infty} \int_t^a f(x)\,dx$; y decimos que converge o diverge según corresponda.
- Si f es continua en $\mathbb{R}$, definimos $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \doteq \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx$, siempre que estas últimas $\underline{\text{dos}}$ integrales converjan. y en tal caso decimos que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ converge. Si alguna no converge, decimos que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ diverge.

Observación: se puede ver que la definición de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ no depende del valor de a.

Ejemplos:

- $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_0^t e^{-x}\,dx = \lim_{t \to \infty} -e^{-x}\Big|_0^t = \lim_{t \to \infty} (-e^{-t} + e^{0}) = 1 < \infty$, por lo tanto la integral impropia converge.

② $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^{-1}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \ln(|x|)\Big]_t^{-1} = \lim_{t\to-\infty}\left(\ln(1)-\ln(|t|)\right) = -\infty$,

por lo tanto la integral impropia diverge (el límite no es un nro. finito).

③ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}\,dx$. Elegimos $a=0$ (por comodidad ya que la función es par)

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t\frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \operatorname{arctg}(x)\Big|_0^t = \lim_{t\to\infty}\left(\operatorname{arctg}(t)-\operatorname{arctg}(0)\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0\frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \operatorname{arctg}(x)\Big|_t^0 = \lim_{t\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}(0)-\operatorname{arctg}(t)\right) = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$ (es convergente).

Ejercicio: ver que $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx$, converge si $p>1$ y diverge si $p\leq 1$.

Integrales Impropias de tipo II: límites de integración finitos ($a,b\in\mathbb{R}$) pero funciones que tienen una asíntota vertical en un punto $c\in[a,b]$.

Definición:

- Sea f continua en $[a,b)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x)=\pm\infty$. Definimos $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \doteq \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$ si este límite existe y es finito.
- Sea f continua en $(a,b]$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$. Definimos $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx$ si el límite existe y es finito.
- Sea $c\in(a,b)$. Si f es continua en $[a,c)\cup(c,b]$ y las integrales $\int_a^c f$ y $\int_c^b f$ existen y son finitas definimos $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \doteq \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.
- Cuando las integrales que hemos definido existe y son $<\infty$, decimos que convergen, si no decimos que divergen

Ejemplos: decidir si las siguientes integrales impropias son convergentes o diver.

① $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$. Tenemos que $f(x)=\frac{1}{x}$ es cont. en $(0,1]$ y $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$. Aplicando la definición tenemos que

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \ln(|x|)\Big|_t^1 = \lim_{t\to 0^+}\left(\ln(1)-\ln(t)\right) = \infty,$$ y

por lo tanto la integral diverge.

② $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$, con $0<p<1$ (por ejemplo si $p=\frac{1}{2}$, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$) (Recien vimos que para $p=1$ diverge)

Aplicamos la definición

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_t^1 = \frac{1}{1-p}\lim_{t\to 0^+} x^{\overbrace{1-p}^{>0}}\Big|_t^1 = \frac{1}{1-p}\lim_{t\to 0^+}\left(1-t^{1-p}\right)$$
$$= \frac{1}{1-p} < \infty$$

Por lo tanto la integral impropia converge

Ejercicio: ver que $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$, es divergente para $p>1$.

Criterio de Comparación para integrales impropias.

En algunos casos encontrar la primitiva de una función puede ser muy difícil y por lo tanto se complica decidir si una integral impropia converge o diverge utilizando directamente la definición. A continuación veremos un criterio que nos servirá para determinar si una integral impropia es convergente o divergente (sin hacer el cálculo directo, sino que lo haremos con una función más fácil de integrar).

Teorema (Crit. Comp. para Int. Imp. Tipo I). Sea f y g funct. continuas y $a \in \mathbb{R}$.

- Si $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in [a, \infty)$. Entonces $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converg. $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ converg.

  o equivalentemente si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^\infty g(x)\,dx$ diverge.

De manera análoga

- Si $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in (-\infty, a]$. Entonces $\int_{-\infty}^a g(x)\,dx$ conv. $\Rightarrow \int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ conv.

  o equiv. si $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ div. $\Rightarrow \int_{-\infty}^a g(x)\,dx$ div.

Teorema (Crit. Comp. para Int. Imp. Tipo II)

Sean f, g func. cont en $[a,b)$ y tq $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b)$ y $\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$

Entonces, si $\int_a^b g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ converge, o equiv $\int_a^b f(x)\,dx$ div. $\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx$ diverge

- Vale un resultado análogo para $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$.

<u>Observación</u>: en todos los casos si $f(x) \geq 0$, la hipótesis se reduce a $f(x) \leq g(x)$.

<u>Ejemplo</u>: Decidir si la integral $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ converge o diverge.

Notemos que no podemos calcular directamente la integral ya que la primitiva de e^{-x^2} <u>NO</u> es una función elemental. Utilicemos el teorema anterior.

Primero notemos que

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \underbrace{\int_0^1 e^{-x^2}dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{\infty} e^{-x^2}dx}_{I_2}$$

- Tenemos que I_1 converge ya que $f(x)=e^{-x^2}$ es cont. en $[0,1]$ (Notar que es una integral definida ✓)

- Para ver que I_2 converge utilicemos el teorema anterior

Como nos interesa $1 \leq x \Rightarrow x \leq x^2$ $\quad e^{-x^2} \leq e^{-x}$ para $x \in [1,\infty)$

Sean $f(x)=e^{-x^2}$ y $g(x)=e^{-x}$, tenemos que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [1,\infty)$.

Además $\displaystyle\int_1^{\infty} g(x)\,dx = \int_1^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty} -e^{-x}\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty}(-e^{-t}+e^{-1}) = e^{-1} < \infty$

es decir, ~~que~~ la integral $\int_1^{\infty} g(x)\,dx$ es convergente. Entonces por el teorema anterior I_2 es convergente.

Luego, como I_1 e I_2 son convergentes, $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ es convergente.