

1) Calcular la dimensión del subespacio de  $k^5$ :

$$W = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in k^5 \mid x_1 = 3x_2 \text{ y } x_3 = x_4 = x_5 \}$$

b) Probar que no existe  $T$  lineal  $T: k^5 \rightarrow k^2$  t.q.

$$\text{Nul } T = W$$

a) si  $v \in W$ , entonces  $v$  tiene la forma:

$$(3t, t, s, s, s) = t(3, 1, 0, 0, 0) + s(0, 0, 1, 1, 1), \quad s, t \in k$$

$$\therefore W = \langle \{ (3, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 1) \} \rangle$$

Conjunto LI, por lo tanto base de  $W$   
Tenemos entonces que:

$$\dim W = 2$$

b) Supongamos que si  $T: k^5 \rightarrow k^2$ , entonces:

$$\dim k^5 = \dim \text{Nul } T + \dim \text{Im } T$$


$$5 = \dim \text{Nul } T + \dim \text{Im } T$$

asumamos  $\text{Nul } T = W$ , entonces:

$$5 = 2 + \dim \text{Im } T \Leftrightarrow \dim \text{Im } T = 3$$

Esto es absurdo, ya que  $\dim \text{Im } T \leq 2$ , dado que el conjunto

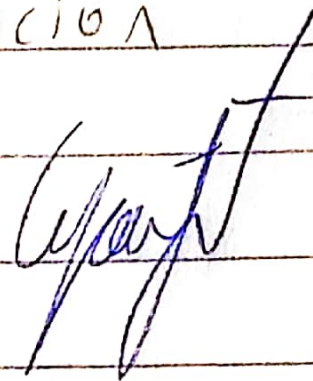
de llegada es  $\mathbb{R}^2$ , de dimensión 2.

Por lo tanto no existe  $T$  tal que  $N \cap T = W$  

Fin de la resolución

Guillermo L. Ipolito

43524608





2)

a) Para qué valor de  $c$ , 1 es autovalor de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 8 & 8 & c \end{pmatrix}$$

b) Describir paramétricamente a  $V_1$ .

a) Plantear el polinomio característico evaluado en 1:

$$\chi_A[1] = \det \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 8 & 8 & c \end{pmatrix} - I \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 8 & 8 & c-1 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & c-1-6 \end{pmatrix}$$

$$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad r \neq s \in \mathbb{N}$$

$$B = \begin{pmatrix} F_r + \lambda F_s \end{pmatrix} A \Rightarrow \det B = \det A$$

$$= 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & c-7 \end{pmatrix} = 4 \cdot (2(c-7) - 0) = 4 \cdot 2 \cdot (c-7)$$

$$\chi_A[1] = 0 \text{ cuando } c=7 \quad \blacksquare$$

b) Plantear el sistema homogéneo  $(A - I)v = 0$

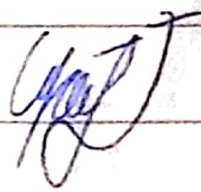
$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 2 & 3 & & 0 & 2 & 3 & & 0 & 2 & 3 & & 0 & 1 & 3/2 \\ 4 & 4 & 3 & \xrightarrow{F_3 - 2F_2} & 4 & 4 & 3 & \xrightarrow{F_2 - 2F_1} & 4 & 0 & -3 & \xrightarrow{F_1/2} & 1 & 0 & -3/4 \\ 8 & 8 & 6 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \xrightarrow{F_2/4} & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Tengo entonces que  $v = (x, y, z) \in V_1 \Rightarrow x = \frac{3}{4}z, y = -\frac{3}{2}z$

Entonces  $(x, y, z)$  tiene la pinta:  $(\frac{3}{4}s, -\frac{3}{2}s, s)$ ,  $s \in \mathbb{R}$

$$V_1 = \left\{ s \left( \frac{3}{4}, -\frac{3}{2}, 1 \right), s \in \mathbb{R} \right\} \quad \square$$

FIN de la resolución.

Guillermo de Ipolm   
43524608



3) Encontrar una recta en  $\mathbb{R}^2$  perpendicular a  $y = 3x + 2$  y que pase por  $(1, 5)$ .

La recta  $y = 3x + 2$  se puede expresar como:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - y = -2\}$$

o

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle (x, y), (3, -1) \rangle = -2\}$$

• Por lo que esta recta es perpendicular al vector  $(3, -1)$ .

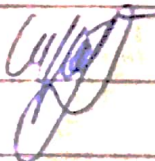
Entonces la recta con dirección  $(3, -1)$  que pasa por  $(1, 5)$  es:

$$L = \{t(3, -1) + (1, 5) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

FIN de la resolución

Guillermo L. Ipolito

43524608



4) Dar una base ortonormal del subespacio generado por  $(1, 1, 1)$  y  $(1, 2, 3)$

Uso Gram-Schmidt para conseguir una base ortogonal.

$$u_1 = (1, 1, 1)$$

$$u_2 = (1, 2, 3) - \frac{(1, 1, 1) \cdot (1, 2, 3)}{(1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1)} (1, 1, 1)$$

$$= (1, 2, 3) - \frac{6}{3} (1, 1, 1) = (-1, 0, 1)$$

Base ortogonal:  $\{(1, 1, 1), (-1, 0, 1)\}$

Ahora busco una base ortonormal:

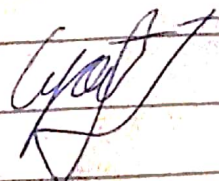
$$w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{(-1, 0, 1)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\text{Base ortonormal} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}$$

Fin de la resolución

Guillermo de Ipolm  
43524608





5) Sea  $V$  espacio

a) Definir subespacio

b) Sea  $v, w \in V$ . Probar que  $\langle \{v, w\} \rangle$  es subespacio.

a)  $W$  se dice subespacio de  $V$  si:

- $W \neq \emptyset$

- Sean  $w, w'$  vectores cualesquiera en  $W$ , se cumple que:

$$w + w' \in W \quad (\text{Cerrado por la suma})$$

- Sean  $w \in W$  y  $\lambda$  un escalar cualquiera, se cumple:

$$\lambda w \in W \quad (\text{Cerrado por la multiplicación por escalares})$$

b)

- Tenemos que  $0 \cdot v + 0 \cdot w = 0 \in \langle \{v, w\} \rangle$ , por lo tanto  $W \neq \emptyset$ .

- Veremos que  $\langle \{v, w\} \rangle$  es cerrado por la suma y multiplicación.

Sean  $\lambda_1, \lambda_2, u_1, u_2$  escalares: tales que:

- $\lambda_1 v + \lambda_2 w \in \langle \{v, w\} \rangle$

- $u_1 v + u_2 w \in \langle \{v, w\} \rangle$

$$(\lambda_1 v + \lambda_2 w) + (u_1 v + u_2 w) = (\lambda_1 + u_1)v + (\lambda_2 + u_2)w \in \langle \{v, w\} \rangle$$

$\therefore$  es cerrado por la suma



Sea  $\lambda$  un escalar,

$$\lambda(\lambda_1 V + \lambda_2 W) = \lambda\lambda_1 V + \lambda\lambda_2 W \in \langle \{V, W\} \rangle \text{ (cerrado por la mult.)}$$

Por lo tanto el conjunto de combinaciones lineales de  $V, W \in V$  es un subespacio de  $V$ .  $\square$

FIN de la resolución.

Guillermo de Ipolm  
43524608

