

ANÁLISIS NUMÉRICO I — Examen Final

20 de Diciembre de 2021

Nombre	Carrera	Condición

Tener en cuenta que:

- La resolución de los ejercicios deberá ser clara, detallada y con cada uno de los pasos del desarrollo debidamente justificados.
- Antes de subir el archivo, verificar que estén todas las hojas escaneadas, ordenadas y que sean legibles.

PARTE PRÁCTICA

1. Se desea encontrar la raíz de $f(x) = 1 - \log(x)$. Si se usa el método de Newton, demostrar que para cualquier punto inicial $x_0 \in (0, e)$ vale:

- a) $0 < x_n \leq x_{n+1}$ y $x_n \leq e$ para todo $n \geq 1$,
b) $\{x_n\}$ converge a e .

2. a) Determinar el polinomio interpolante de grado menor o igual a 3 en la forma de Newton, que interpola los siguientes datos:

$$(1, 0), \quad (2, -1), \quad (3, 0), \quad (4, 1).$$

- b) Asumir que se obtiene un dato adicional $(5, 0)$. Recalcular el polinomio interpolante en la forma de Newton. (Nota: se evaluará la forma en que se haga este ítem, no solamente el resultado).

3. Determinar el paso h para aproximar la integral

$$\int_0^8 x \sin(x) dx$$

con un error menor o igual a 10^{-4} utilizando la regla de Simpson compuesta.

4. Aproximar la función $f(x) = \cosh(x)$, $x \in [-1, 1]$ por un polinomio de la forma $p(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x)$ donde $\phi_0(x) = 1$, $\phi_1(x) = x$ y $\phi_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$.

PARTE TEÓRICA

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz no singular y $b \in \mathbb{R}^n$. Enunciar y demostrar con claridad y precisión el resultado que asegura la convergencia de los métodos iterativos, en general, para resolver el sistema $Ax = b$.

2. Dar con claridad la definición de precisión de una regla de cuadratura.

3. En el siguiente ejercicio deberá escoger una respuesta y justificar adecuadamente su elección.

Interpolarse un conjunto de datos (x_i, y_i) con un polinomio es:

- a) Encontrar una recta $y = ax + b$ tal que $ax_i + b = y_i$ para todo i .
b) Encontrar un polinomio p tal que $p(x_i) = y_i$ para todo i .
c) Encontrar un polinomio p que minimice la suma de $|y_i - p(x_i)|^2$ para todo i .
d) Encontrar una combinación lineal de funciones que aproxime a los datos.
e) Ninguna de las otras respuestas es correcta.

EJERCICIO PARA ALUMNOS LIBRES

1. Determinar el grado de precisión de la siguiente regla de integración:

$$\int_5^7 f(x) dx \approx \frac{3}{2}f(5) + \frac{1}{2}f(6).$$