

ANÁLISIS NUMÉRICO I — Examen Final

3 de Diciembre de 2021

Nombre	Carrera	Condición

Tener en cuenta que:

- La resolución de los ejercicios deberá ser clara, detallada y con cada uno de los pasos del desarrollo debidamente justificados.
- Antes de subir el archivo, verificar que estén todas las hojas escaneadas, ordenadas y que sean legibles.

PARTE PRÁCTICA

1. Se desea encontrar la raíz positiva de $f(x) = x^4 - \alpha$, con $\alpha > 0$. Si se usa el método de Newton, demostrar que para cualquier punto inicial $x_0 > 0$ valen las siguientes afirmaciones:

- a) $x_n \geq x_{n+1}$ y $x_n \geq \sqrt[4]{\alpha}$ para todo $n \geq 1$.
- b) $\{x_n\}$ converge a $\sqrt[4]{\alpha}$.

Ayuda: para el inciso a), calcular el mínimo de la función de iteración.

2. Determinar el grado de precisión de la aproximación

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \frac{1}{4} \left[3f\left(-\frac{2}{3}\right) + 2f(0) + 3f\left(\frac{2}{3}\right) \right].$$

3. La siguiente tabla proviene de un aparato de medición que sólo brinda hasta las centésimas:

x	2	2,5	3	3,5	4
y	0,12	0,11	0,09	0,09	0,08

Una teoría física subyacente postula que los datos provienen de una función de la forma $y = \frac{1}{A \ln(x) + B}$ con A y B constantes.

- a) Utilizando cuadrados mínimos, estimar el valor que se obtendría si se hiciera una medición en 2.8.
- b) ¿Cuál es el error cuadrático proveniente de ajustar la tabla con dicho método?

PARTE TEÓRICA

- Dada una sucesión convergente de números reales, dar la definición de convergencia lineal y explicar que significa que la tasa de convergencia sea próxima a 1.
- Enunciar y demostrar el teorema de convergencia del método de bisección.
- En el siguiente ejercicio deberá escoger una respuesta y justificar adecuadamente su elección.

Si el conjunto de datos (x_i, y_i) para aproximar una función luce como una función potencial, es decir, $y = bx^a$, entonces:

- a) Se aplica logaritmo a los y_i y se utiliza como función de ajuste a $f(x) = Ax + B$.
- b) Se utiliza un polinomio de grado suficientemente alto para hacer un ajuste razonable.
- c) Se aplica logaritmo tanto a los x_i como a los y_i y se utiliza como función de ajuste a $f(x) = Ax + B$.
- d) Se utiliza $f(x) = bx^a$ para ajustar por cuadrados mínimos.
- e) Ninguna de las anteriores respuestas es correcta.

EJERCICIO PARA ALUMNOS LIBRES

1. a) Determinar un polinomio q de grado 5 tal que p interpola los datos

$$\{(-1, -3), (0, 1), (1, 2), (2, 5), (3, 11), (4, 22)\}.$$

- b) ¿Es q único?