ANÁLISIS NUMÉRICO I — Examen Final

9 de Febrero de 2022

Nombre	Carrera	Condición

PARTE PRÁCTICA

1. Demuestre que al usar el método de Newton, para aproximar $1/S$, dado $S > 0$ se obtiene la fórmula iterativa $x_{k+1} = x_k(2 - Sx_k)$. Realizar 3 iteraciones del método de Newton si $x_0 = 0{,}05$ para aproximar $1/17$.

2. Encontrar un ajuste por cuadrados mínimos de la forma $y = ax^3$ para los siguientes datos:

x	-1	0	1	2
y	-2	-1	4	7

3. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando la respuesta. Se pondrá énfasis en la forma de resolución de los ejercicios.

   a) Una función spline cúbico en el intervalo $[0, 2]$ es una función con infinitas derivadas en todo punto del intervalo.

   b) Si $f(x) = x^{10} + \pi x^2 - 1$, entonces $f[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] = \pi$.

   c) Asumamos que $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ interpola la función $f(x) = \cos(\pi x/2)$ en los puntos $x = 0, 1, 2$. Entonces $a_3 = 1$.

4. Se desea desarrollar un método de cuadratura para integrales, de la forma

$$\int_0^{2h} f(x)dx \approx h\left(c_1 f(h) + c_2 f(2h)\right)$$

que sea exacta para todas las funciones de la forma

$$f(x) = ax^{-\frac{1}{2}} + bx^{\frac{1}{2}}$$

donde a y b son números reales arbitrarios. ¿Cómo deberían elegirse c_1 y c_2?

PARTE TEÓRICA En los tres ejercicios a continuación deberá escoger una respuesta y justificar adecuadamente su elección.

1. Describir en qué consiste el sistema de representación de punto flotante.

2. Enunciar y demostrar correctamente el resultado de existencia y unicidad de un punto fijo.

3. Enunciar con precisión el teorema del error en el polinomio interpolante.

EJERCICIO PARA ALUMNOS LIBRES

1. Considerar la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

   a) Deducir la iteración de Jacobi para resolver el sistema lineal $Ax = b$ para algún vector $b \in \mathbb{R}^3$.

   b) ¿Es esta iteración convergente? Justificar la respuesta.