

ANÁLISIS NUMÉRICO I — Práctico N°5 - 2022
Integración Numérica

1. Usando interpolación polinomial deducir la regla de Simpson calculando

$$I(p_2) = \int_a^b p_2(x) dx,$$

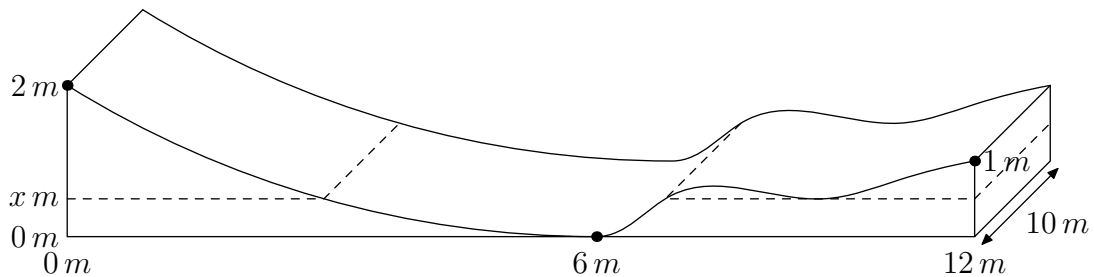
donde p_2 es el polinomio que interpola f en los puntos $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$.

2. La función f se define en el intervalo $[0, 1]$ como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Calcular los resultados de aplicar las siguientes reglas para hallar $\int_0^1 f(x) dx$:

- La regla del trapecio sobre el intervalo $[0, 1]$.
 - La regla del trapecio, primero sobre el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ y luego sobre el intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$.
 - La regla de Simpson sobre el intervalo $[0, 1]$.
 - ¿Qué se puede concluir de los resultados obtenidos en los tres items anteriores?
3. Se desea emparejar el siguiente terreno de $12 \text{ metros} \times 10 \text{ metros}$:



- Usando la regla de Simpson, dar una estimación de los metros cúbicos de tierra que posee el terreno.
 - Estimar la altura x que tendrá el terreno si lo emparejamos sin remover nada de tierra.
4. a) Construir una regla de la forma

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx A_0 f(-0.5) + A_1 f(0) + A_2 f(0.5)$$

que sea exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que 2.

- b) Determinar el grado de precisión de la fórmula para

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{4}{3} f(-0.5) - \frac{2}{3} f(0) + \frac{4}{3} f(0.5).$$

5. Determinar el número de subintervalos n de modo que la regla del trapecio compuesta aproxime el valor de $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ con un error menor que $\frac{1}{2} 10^{-6}$, suponiendo que e^{-x^2} se puede calcular de manera precisa.
Repetir este ejercicio para la regla de Simpson compuesta.

6. Un automóvil recorre una pista de carreras en 24 segundos. Su velocidad se determina cada 6 segundos mediante una pistola de radar y está dada, en metros/segundos [m/s], desde el principio del recorrido, por los datos de la siguiente tabla:

| | | | | | |
|-----------|----|----|----|----|----|
| Tiempo | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 |
| Velocidad | 38 | 41 | 46 | 48 | 45 |

¿Cuál es la longitud aproximada de la pista?

Ayuda: usar la regla del trapecio y recordar que $v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$, donde $v(t)$ y $x(t)$ son la velocidad y posición al tiempo t .

7. Calcular $\int_{-1}^1 f(x)dx$ mediante una regla de cuadratura de la forma

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3),$$

que sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 5. Aplicar la regla a la función $f(x) = \cos(x)$ y comparar con el valor real de la integral.

Aclaración: Se puede utilizar calculadora para comparar los resultados. Recordar utilizar radianes.

8. Calcular $\int_{-1}^1 f(x)x^2dx$ mediante una regla de cuadratura de la forma

$$\int_{-1}^1 f(x)x^2dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2),$$

que sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 3.

Ayuda: Utilizar el ejercicio 11 del práctico 4.