Algoritmo de Monte-Carlo

Tentativa e erro na pratica

O que é?

Método de Monte-Carlo

- Família de métodos que aprendem $v^\star(s)$ ou $q^\star(s, a)$ baseado em amostras obtidas por experiencias com o ambiente

$$\begin{tikzcd} \pi \arrow[rr, bend left, "\text{Obtém o valor do episódio}"] & & V \arrow[ll, bend left, "\text{Atualiza a politica}"] \end{tikzcd}$$

O que é?

Método de Monte-Carlo

- O agente usa π para um completar um episódio completo, gerando:

$$S_0, A_0, R_1, S_1, A_1, R_2, \ldots, S_{T-1}, A_{T-1}, R_T$$

O que podemos calcular com esse histórico?

O que é?

Método de Monte-Carlo

- A estimativa de valores se dá obtendo amostragens do ambiente, gerando n retornos G que serão ponderados

$$v_\pi(s) = \mathbb{E}_\pi[G_t \mid S_t = s]$$

$$G_t = \sum_{k=0}^{T-t-1} \gamma^k R_{t+k+1}$$

$$V_\pi(s) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} G_{s_k}$$

O que é?

Método de Monte-Carlo

- A estimativa de valores se dá obtendo amostragens do ambiente, gerando n retornos G que serão ponderados

$$q_\pi(s, a) = \mathbb{E}_\pi[G_t \mid S_t = s, A_t = a]$$

$$G_t = \sum_{k=0}^{T-t-1} \gamma^k R_{t+k+1}$$

$$Q_\pi(s, a) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} G_{s,a_k}$$

O que é?

Por que?

- Essa média é calculada pois de acordo com a lei dos números grandes, quanto mais amostras de G tiver, mais próximo do real valor de $v_\pi(s)$ se chega

$$P(\text{lim}_{n \to \inf} \bar{G}_s = v_\pi(s)) = 1$$

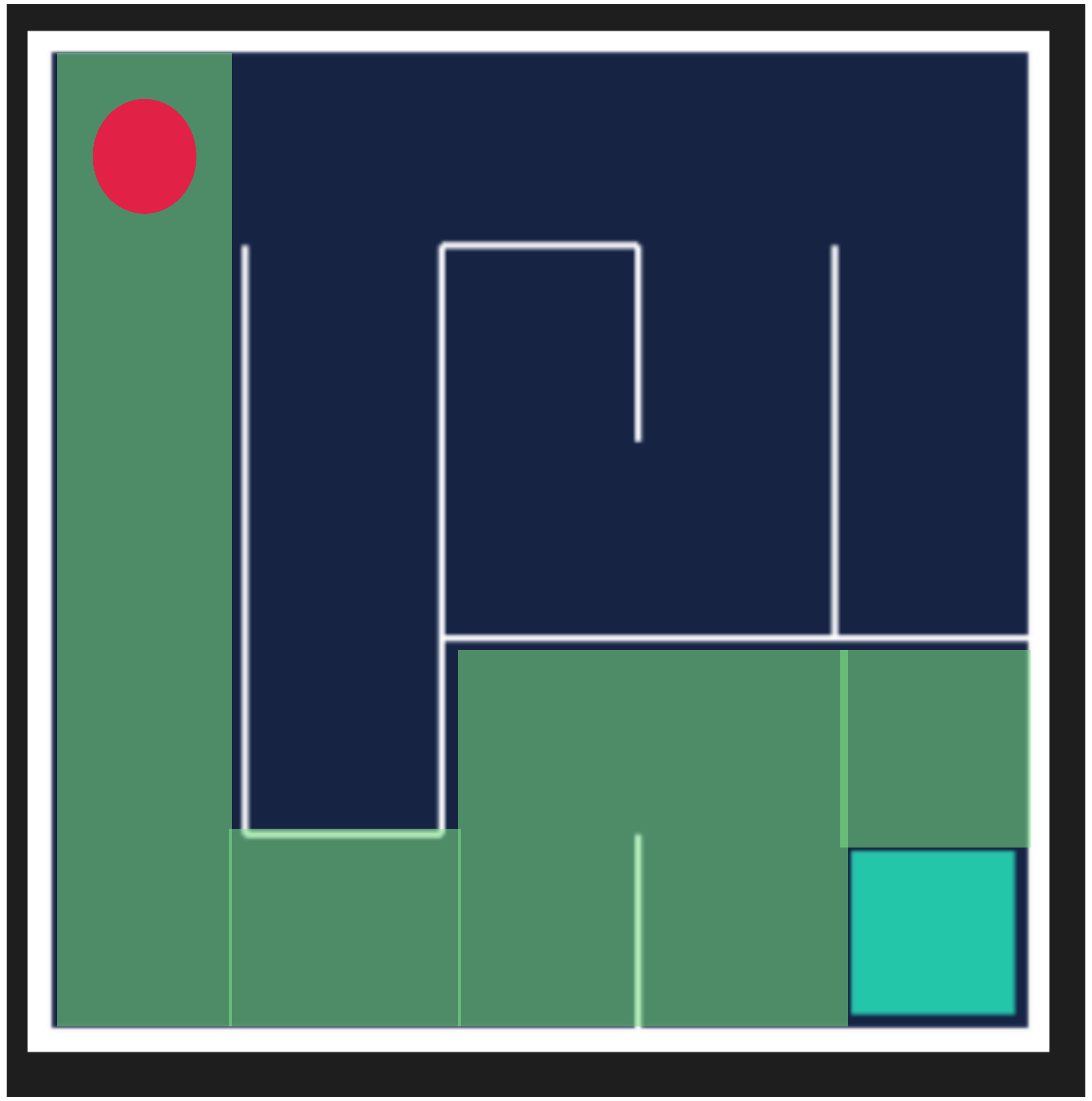
Por que usamos Métodos de Monte-Carlo?

Por que?

- A estimativa do valor de um estado não depende dos outros
- O custo de estimar um valor de um estado é independente do numero total de estados
- Não necessita do modelo completo do ambiente!

Por que usamos Métodos de Monte-Carlo?

- É possível focar no espaço de solução apenas



Como um MMC resolve um problema de RL

- Inicia-se com um episódio usando uma politica arbitraria π gerando uma trajetória inicial:

$$S_0, A_0, R_1, S_1, A_1, R_2, \ldots, S_{T-1}, A_{T-1}, R_T$$

- Desta trajetória, calcula-se retornos para cada momento t

$$G_t = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 R_{t+3} + \ldots + \gamma^{T-t-1} R_T$$
$$G_{t+1} = R_{t+2} + \gamma R_{t+3} + \gamma^2 R_{t+4} + \ldots + \gamma^{T-t-1} R_T$$
$$\ldots$$

- Estima-se $V(s)$ e atualiza-se π

Como um MMC resolve um problema de RL

- Para atualizar π, se necessita saber os valores de $v(s)$, mas não é possível obte-los

$$\pi'(s) = \text{argmax}_a \sum_{s',r} \boxed{p(s', r \mid s, a)}[r + \gamma v_\pi(s')]$$

- Porém se há valores $q(s, a)$

$$q_\pi(s, a) = \sum_{s',r} p(s', r \mid s, a)[r + \gamma v_\pi(s')]$$

Como um MMC resolve um problema de RL

- De agora em diante, o MMC atualiza a politica π em função do maior valor $q(s, a)$

$$\pi'(s) = \text{argmax}_a q_\pi(s, a)$$

- Em vez de um tabela com valores $V(s)$, o algoritmo constrói tabelas com valores $Q(s, a)$

Como um MMC resolve um problema de RL

- Diagrama de iteração de um algoritmo MMC

$$\begin{tikzcd} \pi \arrow[rr, bend left, "\text{Avalia a politica}"] & & Q \arrow[ll, bend left, "\text{Atualiza a politica}"] \end{tikzcd}$$

$$\pi_0 \rightarrow Q_{\pi_0} \rightarrow \pi_1 \rightarrow Q_{\pi_1} \rightarrow \ldots \rightarrow Q_{\pi_\star} \rightarrow \pi_\star$$

Exploração de um algoritmo de MMC

Exploração e explotação

- As estimativas de $Q(s, a)$ melhorarão ao longo das iterações, porém Q pode não ser ótimo
- Por exemplo: uma ação a' pode ser ótima mas, como se tem uma má estimativa $Q(s, a')$, a' nunca será escolhido
- Precisamos assegurar que todas as ações sejam tentadas pelo menos uma vez

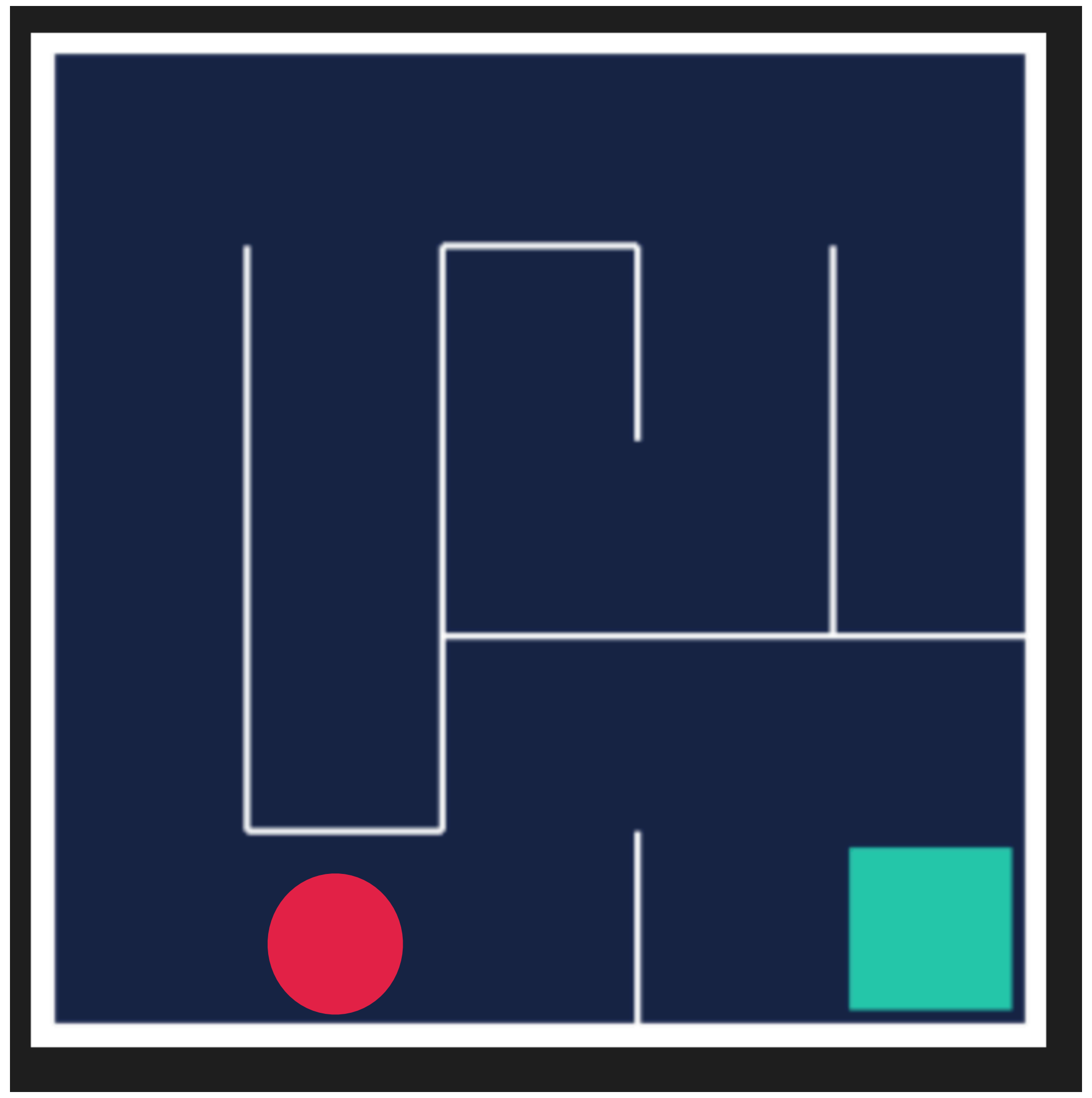
Exploração de um algoritmo de MMC

Exploração e explotação

- Como assegurar a exploração?

Exploração de estados iniciais

$$S_0 \sim S, \quad A_0 \sim A(S_0)$$



Politicas Estocásticas

$$\pi(a \mid s) > 0, \quad \forall a \in A(s)$$

Exploração de um algoritmo de MMC

Tipos de politicas estocasticas

- Dois tipos de politica estocástica

On-Policy

Obtém amostras usando a mesma politica π que será otimizada

Off-Policy

Utiliza uma politica exploratória π_b diferente da politica π que será otimizada

Aprendizado *On-Policy*

Politica ϵ-gulosa

- Politica ϵ-gulosa:

Escolhe-se uma ação aleatória com probabilidade ϵ.

Escolhe-se a ação com maior $Q(s,a)$ com probabilidade $1-\epsilon$.

$$\pi(a|s) = \begin{cases} 1-\epsilon+\epsilon_r & a = a^\star \\ \epsilon_r & a \neq a^\star \end{cases}$$

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{|A|}$$

Aprendizado *On-Policy*

Politica ϵ-gulosa

- Politica ϵ-gulosa, Exemplo:

Escolhe-se uma ação aleatória com probabilidade ϵ.

Escolhe-se a ação com maior $Q(s, a)$ com probabilidade $1 - \epsilon$.

$$|A| = 4 \quad \epsilon = 0.2$$

$$\pi(a \mid s) = \begin{cases} 1 - 0.2 + 0.005 = 0.85 & a = a^\star \\ 0.05 & a \neq a^\star \end{cases} \quad \epsilon_r = \frac{0.2}{|4|} = 0.05$$

Aprendizado *On-Policy*

Algoritmo

Algorithm 1 On-policy Monte Carlo Control

Input: ϵ random action probability, γ discount factor
$\pi \leftarrow$ e-greedy policy w.r.t $Q(s, a)$
Initialize $Q(s, a)$ arbitrarily, with $Q(terminal, \cdot) = 0$
$G(s, a) \leftarrow [\,]$
for episode $\in 1..N$ **do**
    Generate episode following $\pi : S_0, A_0, R_1, ..., S_{T-1}, A_{T-1}, R_T$
    $G \leftarrow 0$
    for $t \in T-1..0$ **do**
        $G \leftarrow R_{t+1} + \gamma G$
        Append G to $G(S_t, A_t)$
        $Q(s, a) \leftarrow average(G(S_t, A_t))$
    end for
end for
Output: Near optimal policy π and action values $Q(s, a)$

Aprendizado *On-Policy*

Abra o Notebook MC_OnPolicy.ipynb

Aprendizado *On-Policy* com $\boldsymbol{\alpha}$ constante

Algoritmo

Algorithm 1 On-policy Monte Carlo Control

Input: ϵ random action probability, γ discount factor
$\pi \leftarrow$ e-greedy policy w.r.t $Q(s,a)$
Initialize $Q(s,a)$ arbitrarily, with $Q(terminal, \cdot) = 0$
$G(s,a) \leftarrow [\,]$
for episode $\in 1..N$ **do**
  Generate episode following $\pi : S_0, A_0, R_1, ..., S_{T-1}, A_{T-1}, R_T$
  $G \leftarrow 0$
  for $t \in T-1..0$ **do**
    $G \leftarrow R_{t+1} + \gamma G$
    Append G to $G(S_t, A_t)$
    $Q(s,a) \leftarrow \cancel{average(G(S_t, A_t))}\ Q(s,a) + \alpha[G - Q(s,a)]$
  end for
end for
Output: Near optimal policy π and action values $Q(s,a)$

Aprendizado *On-Policy* com α *constante*

Abra o Notebook MC_OnPolicyAC.ipynb

Aprendizado *Off-Policy*

Definição

- Em vez de se manter somente atualizando π por todo o tempo, usa-se ocasionalmente uma politica sub-ótima π_b para explorar estados não visitados

$$\pi_b(a \mid s)$$

$$\Big\downarrow \text{ Gera trajetória } T_{\pi_b}$$

$$T_{\pi_b} \leftarrow S_0, A_0, R_1, S_1, A_1, R_2, \ldots, S_{T-1}, A_{T-1}, R_T$$

Aprendizado *Off-Policy*

Definição

- Em vez de se manter somente atualizando π por todo o tempo, usa-se ocasionalmente uma politica sub-ótima π_b para explorar estados não visitados

$$\pi(a \mid s)$$

Usa T_{π_b} para atualizar

$$\pi(s) \leftarrow \text{argmax}_a Q(s, a)$$

Aprendizado *Off-Policy*

Definição

- A politica π_b deve ser capaz de explorar todos os estados que π pode tomar:

$$\text{se } \pi(a\,|\,s) > 0, \text{ então } \pi_b(a\,|\,s) > 0$$

π: politica alvo

π_b: politica exploratória

Aprendizado *Off-Policy*

Correção

- A média G dos retornos ira aproximar os retornos sob a politica π_b, mas é necessário aproximar os valores de π, então o coeficiente W é introduzido a fim de corrigir o calculo dos retornos:

$$\mathbb{E}_b[G_t \mid S_t = s, A_t = a] = q_b(s, a)$$

$$\Big\downarrow \text{ Fator de correção } W$$

$$\mathbb{E}[W_t G_t \mid S_t = s] = v_\pi(s)$$

Aprendizado *Off-Policy*

Correção

- W é calculado através de uma técnica estatística chamada de *importance sampling*

$$W_t = \prod_{k=t}^{T-1} \frac{\pi(A_k | S_k)}{\pi_b(A_k | S_k)}$$

Probabilidade de tomar a ação a seguindo π

Probabilidade de tomar a ação a seguindo π_b

Aprendizado *Off-Policy*

Atualização de valores-q

- Para realizar a atualização dos valores $Q(s, a)$, originalmente se calcula a media dos ganhos G

$$[G_1, G_2, G_3, \ldots, G_N] \qquad Q(s, a) \leftarrow \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} G_k$$

Aprendizado *Off-Policy*

Atualização de valores-q

- Uma forma mais eficiente de se atualizar é atualizar a média de acordo com o deslocamento dos ganhos

$$Q(s,a) \leftarrow Q(s,a) + \frac{W}{C(s,a)}[G - Q(s,a)]$$

$$C(s,a) = \sum_{k=1}^{N} W_k$$

Aprendizado *Off-Policy*

Algoritmo

Algorithm 2 Off-policy Monte Carlo Control

Input: γ discount factor
$\pi \leftarrow$ greedy policy w.r.t $Q(s, a)$
$b \leftarrow$ arbitrary policy with coverage of π
$C(s, a) \leftarrow 0$
Initialize $Q(s, a)$ arbitrarily
for episode $\in 1..N$ **do**
    Generate episode following $b : S_0, A_0, R_1, ..., S_{T-1}, A_{T-1}, R_T$
    $G \leftarrow 0$
    $W \leftarrow 1$
    for $t \in T - 1..0$ **do**
        $G \leftarrow R_{t+1} + \gamma G$
        $C(S_t, A_t) \leftarrow C(S_t, A_t) + W$
        $Q(S_t, A_t) \leftarrow Q(S_t, A_t) + \frac{W}{C(S_t, A_t)} [G - Q(S_t, A_t)]$
        if **then**$A_t \neq \pi(S_t)$
            Break the loop, move to next episode.
        end if
        $W \leftarrow W \frac{1}{b(A_t|S_t)}$
    end for
end for
Output: Optimal π and action values $Q(s, a)$

Aprendizado *Off-Policy*

Abra o Notebook MC_OffPolicy.ipynb