电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量

OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望

无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

电阻网络与随机游走

罗思远[1]

[1]luosiyuan@stu.pku.edu.cn
APIO2025

May 17, 2025

目录

1 基本概念
- 马尔可夫链
- 数字特征
  - 首步分析法
  - 系数矩阵的秩
- 调和函数
- 电阻网络
  - 有效电阻
  - 电流的能量

2 OI 中的应用
- 直接应用
- 计算有效电阻
- 游走时间的期望

3 无穷无向图的常返性
- 直接判断
- 区域逃逸概率
- 判据
  - Thompson 原理和 Dirichlet 原理
  - Nash-Williams Criterion
  - 例子

前置知识

电阻网络与随机游走
罗思远
基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 本次分享可能涉及到少数高等数学知识，包括极限、上下极限、无穷求和
- 尽管少数定理的证明不得不使用这些知识，但大部分结论本身都具有简洁的组合意义
- 大部分内容与 OI 关系不大，可以放心摸鱼

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

马尔可夫链

给定状态空间 S 和转移矩阵 $P=(p_{ij})_{S\times S}$，其中

$$p_{ij}\geq 0,\forall i,j\in S;\ \sum_{j\in S}p_{ij}=1,\forall i\in S$$

若一列随机变量 $X_0,X_1,\dots\in S$ 使得 $\forall n\geq 0,\forall i_0,\dots,i_{n-1},i,j\in S$ 都有

$$P(X_{n+1}=j\mid X_0=i_0,X_1=i_1,\dots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i)=p_{ij}$$

则称 $\{X_n\}$ 是 S 上的一个马尔可夫链 (Markov Chain) 或马氏链。

- 图上的随机游走都是马尔科夫链

初始分布

分布

对于状态空间 S，S 上的一个**分布** μ 满足 $\forall i \in S, \mu_i \geq 0$; $\sum_i \mu_i = 1$

- Markov Chain 的定义中没有对 X_0 的分布进行要求
- 任给分布 μ，都可以以 $P(X_0 = i) = \mu_i$ 为初始分布构造马氏链 $\{X_n\}$
- 在此条件下，转移矩阵的次幂可以用来表示走了几步：

$$P(X_n = i) = (\mu P^n)_i,\ P(X_n = j|X_0 = i) = (P^n)_{ij}$$

不变分布

电阻网络与随机游走
罗思远
基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

不变分布

对于马氏链 $\{X_n\}$，若存在分布 π 使得 $\pi P = \pi$，则称 π 是 **不变分布**

- 若初分布是不变分布，则无论走几步，所在位置的分布仍然保持不变分布

可约性

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

不可约

对于马氏链 $\{X_n\}$，若对于任意 $i,j \in S$ 都存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $(P^m)_{ij} > 0$，则称马氏链是**不可约** (irreducible) 的

- 其实就是状态转移图强连通性

周期性

非周期

对于马氏链 $\{X_n\}$，若对于任意 $i \in S$ 都存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall n \geq m, (P^n)_{ii} > 0$，则称马氏链是**非周期** (aperiodic) 的

定理

对于不可约马氏链，存在唯一的**周期** d，使得存在 S 的分划 $D_0, D_1, \ldots, D_{d-1}$（认为 $D_{nd+r} = D_r$），满足

- $\forall r \geq 0, i \in D_r, s \geq 0$，$P(X_s \in D_{r+s} \mid X_0 = i) = 1$
- $\forall r \geq 0, i, j \in D_r$，存在 $m \geq 0$，$\forall n \geq m$，$(P^{nd})_{ij} > 0$

- 第一条保证了 d 确实是周期
- 第二条保证了 d 是最小正周期：缩起来就变成非周期了

强遍历定理

强遍历定理

对于不可约非周期有限马氏链，一定存在不变分布 π，且对任意分布 μ，

$$\lim_{n\to\infty} \mu P^n = \pi$$

其中极限在 L^1 收敛意义下取得。

- 虽然和我们今天的主题没什么关系，但其很重要也很有趣，故列于此

可逆性

可逆分布

给定马氏链 $\{X_n\}$，若存在分布 π 满足

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}, \ \forall i, j \in S$$

则称马氏链关于 π 可逆 (reversible)，π 是其的一个可逆分布

定理

可逆分布是不变分布。

- 证明：验证 $\pi P = \pi$ 即可，略

无向图上的随机游走

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 马氏链可逆，**等价于**其可以看作一个带权无向图上的随机游走，其中 x 走向 y 的概率正比于 (x, y) 这条边的边权
- 具体地，令 $V(x, y) = \pi_x p_{xy}$ 即可
- 反之，任何（有限）带权无向图上的随机游走都是可逆马氏链：令 $\pi_x \sim \sum_y V(x, y)$ 即可

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

常返性

给定马氏链 $\{X_n\}$，记 E_iV_j 为从初分布 $\mu_k = [i = k]$ 出发时的

$$E\left[\sum_{n\geq 0}[X_n = j]\right]$$

若 $E_iV_i = +\infty$，则说 i **常返** (recurrent)，否则称 i **暂态** (transient)

若 $\forall i \in S$，i 常返，则称马氏链常返

定理

若 i 常返且 i 可达 j，则 j 常返。特别地，若马氏链不可约，则所有点要么全部常返要么全部不常返。

常返性

电阻网络与随机游走
罗思远
基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

定理

有限不可约马氏链常返。

为什么要研究常返性?

- 常返的马氏链具有更好的遍历性质（例如，从 x 出发的随机游走可以分为独立同分布的 $x \to x$ 的小圈），系统以某种方式趋于“平衡”
- 判断无限图常返与否一般并不 trivial

今天的目标：建立**可逆**马尔科夫链和电阻网络的关系，并用其判断一些简单无限图的常返性

首达时

OI 题中会用到随机游走的什么相关数值?

首达时

对于马氏链 $\{X_n\}$，记 $\tau_i = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = i\}$ 为 i 的首达时 (Hitting Time)

- 首达时可能是 $+\infty$

首达时的期望

给定 i,j，记初分布为 $\mu_t = [t = i]$ 时，j 的首达时的期望为 $E_i\tau_j$，也即从 i 出发第一次走到 j 的时间的期望

- 首达时的期望可能是 $+\infty$

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

逃逸概率

对于马氏链 $\{X_n\}$，记 $p_e(a;b)$ 为 a 出发到 b 的逃逸概率 (Escape Probability)，定义为从 a 出发，在第一次回到 a 之前到达 b 的概率

- OI 中是如何计算这些数值的?

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

逃逸概率

逃逸概率

对于马氏链 $\{X_n\}$，记 $p_e(a;b)$ 为 a 出发到 b 的逃逸概率 (Escape Probability)，定义为从 a 出发，在第一次回到 a 之前到达 b 的概率

- OI 中是如何计算这些数值的?
- "首步分析法"，列方程高斯消元

电阻网络与随机游走
罗思远
基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

计算 $E_i\tau_j$

固定 j，记 $x_i = E_i\tau_j$。对 $i \neq j$，由全期望公式有

$$x_i = \sum_{k\in S} P(X_1 = k \mid X_0 = i) \cdot E[\tau_j \mid X_1 = k] = 1 + \sum_{k\in S} p_{ik}x_k$$

同时 $x_j = 0$。由此高斯消元解方程即可。

- 问题：为什么方程有唯一解？

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

计算 $p_e(a;b)$

固定 a,b，记 x_i 为从 i 出发，在第一次到达 a 前到达 b 的概率。对 $i \neq a,b$，由全概率公式有

$$x_i = \sum_{k \in S} p_{ik} x_k$$

同时 $x_a = 0, x_b = 1$。由此高斯消元解方程即可。

- 问题：为什么方程有唯一解？

系数矩阵的秩

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量

OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望

无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 上述两个问题中，不看“边界条件”，方程组系数矩阵其实是一样的：$I-P$

定理

若马氏链有限且不可约，则 $\text{rank}(I-P)=n-1$

- 证明：只需证明 $(I-P)x=0$ 的解空间维数为 1，也即满足 $Px=x$ 的向量 x 相互成比例
- 注意到向量 $x=[1,1,\ldots,1]$ 满足 $Px=x$，只需证 $Px=x \implies x$ 的每一维相同

系数矩阵的秩

电阻网络与随机游走
罗思远
基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 上述两个问题中，不看“边界条件”，方程组系数矩阵其实是一样的：$I-P$

定理

若马氏链有限且不可约，则 $\operatorname{rank}(I-P)=n-1$

- 证明：只需证明 $(I-P)x=0$ 的解空间维数为 1，也即满足 $Px=x$ 的向量 x 相互成比例
- 注意到向量 $x=[1,1,\ldots,1]$ 满足 $Px=x$，只需证 $Px=x \implies x$ 的每一维相同
- 若不然，设 $Px=x$，取 x 中最大的那一维 x_i，有

$$x_i=\sum_j p_{ij}x_j$$

- 由于 P 是转移矩阵，所以必须有 $p_{ij}>0 \implies x_j=x_i$
- 由不可约性得证

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
- 马尔可夫链
- 数字特征
  - 首步分析法
  - 系数矩阵的秩
- 调和函数
- 电阻网络
  - 有效电阻
  - 电流的能量

OI 中的应用
- 直接应用
- 计算有效电阻
- 游走时间的期望

无穷无向图的常返性
- 直接判断
- 区域逃逸概率
- 判据
  - Thompson 原理和 Dirichlet 原理
  - Nash-Williams Criterion
  - 例子

- OI 中的实际问题中，还给定了若干个“边界条件”

定理

若马氏链有限且不可约，则在 $I-P$ 基础上给定至少一个边界条件（把若干行替换成单位矩阵对应行）的系数矩阵满秩

系数矩阵的秩

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量

OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望

无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- OI 中的实际问题中，还给定了若干个“边界条件”

定理

若马氏链有限且不可约，则在 $I-P$ 基础上给定至少一个边界条件（把若干行替换成单位矩阵对应行）的系数矩阵满秩

- 证明：同上，设替换后的系数矩阵为 A，只需证明 $Ax=0 \implies x=0$
- 注意到给定边界条件的那些位置必须有 $x_i=0$
- 若不然，取 x 中最大的那一维 x_i，若大于 0，可用前述证法；若等于 0，取最小那一维（小于 0）同样用前述证法

系数矩阵的秩

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 由于一般情况下，终点的出边不会影响问题的结果，所以可以认为终点可达所有点
- 显然，不妨认为所有点可达终点
- 因此，上述结论对于大部分 OI 中的图（不一定强连通）其实都成立

问题的抽象

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 本节中，我们重点关注“齐次”的情况，也即在转移方程中除了边界条件不含常数的情况

调和函数

设马氏链 $\{X_n\}$ 的转移图为 $G=(V,E)$，若函数 $x:V\to\mathbb{R}$ 满足

$$x_i=\sum_{k\in V}p_{ik}x_k,\ \forall i\in B\subseteq V$$

则称 x 是 B 上的调和函数。

- 固定 a,b，从 x 出发先到 b 再到 a 的概率就是调和函数

调和函数

电阻网络与随机游走
罗思远
基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

调和函数的性质

- B 有限，给定非空边界条件 δB，B 中所有点都可达至少一个边界上的点且不存在 B 中的点可达不可达边界上的点，则 B 上的调和函数唯一
- 调和函数的线性组合也是调和函数
- 调和函数不存在严格的局部极值
- 调和函数的值有界，界为边界条件的值

电阻网络

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

电阻网络

电阻网络 (Electrical Network) 是一个无自环连通有限无向图 $G=(V,E)$，每条边 e 都有一个电阻 $R(e)>0$ 或者电导 $C(e)=1/R(e)$

电势

在电阻网络 $G=(V,E)$ 上，电势 (potential) 是 $V\to\mathbb{R}$ 的函数 φ；一条（有向）边 $x\to y$ 上的电势差为 $\varphi(x,y)=\varphi(x)-\varphi(y)$

电流

电流

在电阻网络 $G=(V,E)$ 上，从 S 到 T 的一个电流 (Flow) 是一个（带方向的）E 到 $\mathbb{R}$ 的函数 J，满足

- $J(x,y)=-J(y,x)$
- $\forall x\in V-\{S,T\}$, $\sum_y J(x,y)=0$
- $\sum_y J(S,y)\geq 0$

合法电流存在性

在电阻网络 $G=(V,E)$ 上，任取源汇 $S\neq T$，存在唯一 $S\to T$ 电流 I 和电势 Φ，满足

- $\Phi(S)=1,\Phi(T)=0$
- $\forall(x,y)\in E$, $\Phi(x,y)=I(x,y)R(x,y)$

电势是调和函数

- 证明：对于非 S, T 的点 x，将电流合法性条件改写：

$$0 = \sum_y I(x,y) = \sum_y \Phi(x,y)C(x,y)$$
$$= \sum_y (\Phi(x) - \Phi(y))C(x,y)$$

这说明

$$\Phi(x) = \frac{\sum_y C(x,y)\Phi(y)}{\sum_y C(x,y)}$$

- 因此 Φ 是以 C 为边权的随机游走转移矩阵导出的调和函数，故存在且唯一；因此 I 也存在且唯一
- 下设 $C_x = \sum_y C(x,y)$

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

有效电阻

在电阻网络 $G=(V,E)$ 上，S 和 T 之间的**有效电阻** (Effective Resistance) $R_{\text{eff}}(S,T)$ 定义为在 S,T 的电势分别为 1,0 的条件下，$S\to T$ 的总流量的倒数

- 显然，$R_{\text{eff}}(S,T)=R_{\text{eff}}(T,S)$

有效电阻

电阻网络与随机游走
罗思远
基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 考虑有限可逆马氏链上的逃逸概率 $p_e(a;b)$，其对应一个带权无向图上的随机游走；令边权为电导，则其转移方程也对应一个电阻网络（其中 $C(x,y)=\pi_x p_{xy}, C_x=\pi_x$）上的电势！
- 因此 $\forall x \in V-\{a,b\}$，都有从 x 出发，先到 b 再到 a 的概率为 $\Phi(b)=1, \Phi(a)=0$ 条件下的 $\Phi(x)$
- 因此

$$
\begin{aligned}
p_e(a;b) &= \sum_x p_{ax}\Phi(x) = \sum_x p_{ax}(\Phi(x)-\Phi(a)) \\
&= \sum_x C(a,x)(\Phi(x)-\Phi(a))/C_a = \sum_x I(x,a)/C_a \\
&= \frac{1}{R_{\text{eff}}(a,b)C_a}
\end{aligned}
$$

有效电阻

电阻网络与随机游走
罗思远
基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

有效电阻和 p_e 的关系

$$p_e(a;b) = \frac{1}{R_{\text{eff}}(a,b)C_a}$$

- 后面会用到这个式子。

有效电阻

电阻网络与随机游走
罗思远
基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

有效电阻和 p_e 的关系

$$p_e(a;b) = \frac{1}{R_{\text{eff}}(a,b)C_a}$$

- 后面会用到这个式子。
- 另一种理解方式:

$$R_{\text{eff}}(a,b) = \frac{1}{p_e(a;b)C_a}$$

- p_e 的倒数就是在到 b 之前经过 a 的期望次数；如果在无向无权图上，$1/C_a$ 就是每次经过往某条边走的概率。因此 $R_{\text{eff}}(a,b)$ 其实是 a 的某条出边在到 b 之前经过的期望次数

电流的能量

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

电流的能量

对于电流 I，定义其能量（其实是功率）

$$\mathscr{D}(I) = \frac{1}{2}\sum_{x,y} I(x,y)^2 R(x,y)$$

电流最小化能量

设在 S, T 的电势分别为 1,0 时，有 $S \to T$ 电流 I。则在所有 $S \to T$ 的流量和 I 相同的电流中，I 最小化 $\mathscr{D}(I)$。

电流最小化能量

电阻网络与随机游走
罗思远
基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 证明：任意 $S \to T$ 电流 J 都可以写成 $I + H$，其中 H 为无源无汇流。我们有

$$
\begin{aligned}
2\mathscr{D}(I) &= \sum_{x,y} J(x,y)^2 R(x,y) \\
&= \sum_{x,y} I(x,y)^2 R(x,y) + \sum_{x,y} H(x,y)^2 R(x,y) \\
&\quad + 2\sum_{x,y} I(x,y)H(x,y)R(x,y)
\end{aligned}
$$

- 我们证明，$\forall H$，

$$
\sum_{x,y} I(x,y)H(x,y)R(x,y) = 0
$$

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

电流最小化能量

- $\forall H$,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x,y} I(x,y)H(x,y)R(x,y)\\
&= \sum_{x,y} H(x,y)(\Phi(x)-\Phi(y))\\
&= \sum_{x}\Phi(x)\sum_{y}H(x,y)-\sum_{x}\Phi(x)\sum_{y}H(y,x)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

- 得证!

最小化能量的单位流

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

推论

设所有 $S \to T$ 的单位流（流量为 1）中，最小化 $\mathscr{D}(I)$ 的流为 I，则 $R_{\text{eff}}(S,T) = \mathscr{D}(I)$。

- 换句话说，对整个网络，同样成立 $\mathscr{D}(I) = I^2R$。

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

有用吗？

- 很遗憾，我们大部分时间将会花在两个常返性判据（Thompson 原理和 Nash-Williams Criterion）上，但这些结论在 OI 中确实没有用。
- 但是“马尔可夫链”以及“有效电阻”等等概念在 OI 中有少量应用
- 甚者，“电阻网络”也能出成概念题！

例题： CF457E

Flow Optimality

给你一个无向图，有源点 S、汇点 T，且已经给你一个不一定合法的 $S \to T$ 流 $flow$。已知 (u,v) 的边权为 $cost(u,v)$，定义这个流的权值为

$$\sum_{u,v} cost(u,v) \cdot flow(u,v)^2$$

问：这是否可能是所有流量相同的流中，权值最小的流的子集？（i.e. 加一些（可以是重边的）边就是最优解）

- 若不可能，输出最小的 i，使得前 i 条边可能是，而第 $i+1$ 条边加入后就不可能是
- 若可能，且能确定在原图上的最优流，则输出原图上的最优流的权值除以流量
- 若可能，且不能确定最优权值，则输出 Unknown

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 先看如果已知权值最小的流能得出什么信息
- 权值的表达式与电流能量的表达式一致，所以可以直接套用之前的结论：权值最小的流是根据唯一存在的电势计算出的流，满足电势差等于电阻乘电流
- 因此，已知电阻和电流，也就能导出电势——判断是否能导出合法的电势即可
- 问题：怎么导出电势？怎么判断合法？

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

例题：CF457E

PEKING UNIVERSITY

- 先看如果已知权值最小的流能得出什么信息
- 权值的表达式与电流能量的表达式一致，所以可以直接套用之前的结论：权值最小的流是根据唯一存在的电势计算出的流，满足电势差等于电阻乘电流
- 因此，已知电阻和电流，也就能导出电势——判断是否能导出合法的电势即可
- 问题：怎么导出电势？怎么判断合法？

电势计算方法

先任取一棵生成树，根据 $h(u) - h(v) = I(u, v) \cdot R(u, v)$ 算出 h，然后判断 h 是否满足对非树边也满足

例题：CF457E

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

电势合法性

假设给出的图连通，则只要所有 h 满足 $h(1) \geq h(x) \geq h(n), \forall 1 \leq x \leq n$，则合法

- 证明：在此基础上，需要添加一些边，满足流量限制（除了 $1,n$ 的所有点都要收支平衡）
- 若 x 入大于出，则加边 $x \to n$，流量为出减去入，电阻为 x,n 电势差除以流量
- 若 x 出大于入，同理加边 $1 \to x$
- 容易发现这样就能满足所有条件

例题：CF457E

- 最终做法：先判断是否不可能，如果不可能二分找出答案 i，判断方法就是判断电势合法性；如果图不连通，需要 $1, n$ 连通，且 $1, n$ 以外的连通块的最大电势减去最小电势不超过 $h(n) - h(1)$
- 如果可能，且 $1, n$ 连通，前面已经证明 $\mathscr{D} = I^2R$ 对整个电路也成立，所以 $\mathscr{D}/I = IR = U$，因此答案就是 $h(1) - h(n)$
- 如果可能，且 $1, n$ 不连通，则输出 Unknown

电阻网络与随机游走
罗思远
基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

计算有效电阻

PEKING UNIVERSITY

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

问题

给定带权无向图 $G=(V,E)$，$n=|V|$，在 $O(n^3)$ 时间复杂度内计算所有点对之间的有效电阻。

- 由逃逸概率和有效电阻的关系，只需要求出固定 s,t 的初值分别为 $1,0$ 时的调和函数取值即可
- 记调和函数导出的系数矩阵为 L，其第 i 行为 l_i；$\epsilon_{i,j}=[i=j]$
- 我们知道 $\operatorname{rank} L=n-1, \operatorname{rank}(L-l_i+\epsilon_i-l_j+\epsilon_j)=n$，而有效电阻的计算可以归结为在 L 的基础上每次替换两行两列进行矩阵求逆
- 这应该是可以做到 $O(n^3)$ 的，不过我们有更容易理解的方法

计算有效电阻

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 考虑利用“对整个网络，$U = IR$ 仍然成立”的结论
- 固定流入流出电流均为 1，只需求出 $h(s) - h(t)$
- 对除了 s, t 外的点 x，方程仍然为 $h(x) = \frac{\sum_y C(x,y)h(y)}{C_x}$
- 对于 s，方程变为

$$1 = \sum_y (h(s) - h(y))C(s, y)$$

$$C_s h(s) = 1 + \sum_y C(s, y)h(y)$$

- t 同理，但是 1 变成了 -1

计算有效电阻

电阻网络与随机游走
罗思远
基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 此时对于所有 s, t，方程组的系数矩阵均为 L，这里的 L 等于度数矩阵减去邻接矩阵，也即图的拉普拉斯矩阵
- L 的秩为 $n-1$，这也符合电势整体加上一个常数不改变电流的常识
- 问题：L 不可逆，无法使用通常的求逆方法优化多次解方程，怎么办？

计算有效电阻

PEKING UNIVERSITY

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 此时对于所有 s, t，方程组的系数矩阵均为 L，这里的 L 等于度数矩阵减去邻接矩阵，也即图的拉普拉斯矩阵
- L 的秩为 $n-1$，这也符合电势整体加上一个常数不改变电流的常识
- 问题：L 不可逆，无法使用通常的求逆方法优化多次解方程，怎么办？
- 解决方法：固定 n 的电势为 0，这样就可以删去第 n 行第 n 列，再求逆了

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量

OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望

无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

有效电阻的计算方法

将 L 删去第 n 行第 n 列得到矩阵 K，则

- $R_{\text{eff}}(s,n) = K_{ss}^{-1}$
- 当 $s,t \neq n$ 时 $R_{\text{eff}}(s,t) = K_{ss}^{-1} + K_{tt}^{-1} - 2K_{st}^{-1}$

- 证明：对于 $t = n$ 的情况，成立 $Kh = \epsilon_s$，故 $h = K^{-1}\epsilon_s$，故 $h(s) - h(n) = h(s) = K_{ss}^{-1}$
- 对于 $s,t \neq n$ 的情况，成立 $Kh = \epsilon_s - \epsilon_t$，故 $h = K^{-1}(\epsilon_s - \epsilon_t)$
- 因此 $h(s) = K_{ss}^{-1} - K_{st}^{-1}$，$h(t) = K_{st}^{-1} - K_{tt}^{-1}$（注意 K, K^{-1} 均为对称矩阵）
- 因此 $h(s) - h(t) = K_{ss}^{-1} + K_{st}^{-1} - 2K_{st}^{-1}$

不变分布和返回时间

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 在 OI 中，我们常常遇到需要求在某种条件下，从 i 出发的随机游走到 j 的时间的期望
- 特别地，当 $i = j$ 时，记从 i 出发，第一次回到 i 的时间为 $E_i\sigma_i$

定理

若不可约马氏链 $\{X_n\}$ 存在不变分布 π，则 $E_i\sigma_i = 1/\pi_i$

- 由于定理的证明需要一些与今天的主线无关的技术，故略去
- 但我们可以“感性理解”这个等式

不变分布和返回时间：感性理解

- 当 $n \to \infty$ 时，马氏链走 n 步的位置分布趋向于不变分布
- 那么某 n 步中在 i 停留的期望时长也就大概是 $n \cdot \pi_i$
- 特别地，考察 “从 i 回到 i” 这 σ_i 步，这 σ_i 步中在 i 停留的期望时长也应该是 $\sigma_i \cdot \pi_i$
- 但这一圈内停留时长显然是 1，因此即得 $E_i\sigma_i = 1/\pi_i$

- 当 $n \to \infty$ 时，马氏链走 n 步的位置分布趋向于不变分布
- 那么某 n 步中在 i 停留的期望时长也就大概是 $n \cdot \pi_i$
- 特别地，考察“从 i 回到 i”这 σ_i 步，这 σ_i 步中在 i 停留的期望时长也应该是 $\sigma_i \cdot \pi_i$
- 但这一圈内停留时长显然是 1，因此即得 $E_i\sigma_i = 1/\pi_i$
- 这个理解最不严谨的地方在于“一圈”足不足够“平均”，但下面的定理告诉我们确实是足够的：

定理

若不可约马氏链 $\{X_n\}$ 存在不变分布 π，则

$$E_s \sum_{i=0}^{\sigma_s - 1} [X_s = t] = \frac{\pi_t}{\pi_s}$$

不变分布和返回时间：应用

PEKING UNIVERSITY

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

推论

设 G 为有限带权连通无向图，则

$$E_i\sigma_i = \frac{\sum_x C_x}{C_i}$$

特别地，当 G 不带权时，

$$E_i\sigma_i = \frac{2m}{deg_i}$$

- 证明：注意到 $\pi_i \sim C_i$ 即可
- 这告诉我们，无向图上的随机游走，走一圈的期望时长只和度数有关！

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念

马尔可夫链

数字特征

首步分析法

系数矩阵的秩

调和函数

电阻网络

有效电阻

电流的能量

OI 中的应用

直接应用

计算有效电阻

游走时间的期望

无穷无向图的常返性

直接判断

区域逃逸概率

判据

Thompson 原理和 Dirichlet 原理

Nash-Williams Criterion

例子

定理

在带权连通无向图上，

$$R_{\text{eff}}(s,t)\cdot\sum_x C_x = E_s\tau_t + E_t\tau_s$$

其中 $E_s\tau_t + E_t\tau_s$ 也成为 s,t 之间的 commute time。

- 证明：前面已经证明，$R_{\text{eff}}(s,t)\cdot C_s$ 就是 $1/p_e(s;t)$，也即 $s\to t$ 的随机游走经过 s 的期望次数，对于 $t\to s$ 经过 t 的期望次数同理
- 下证 $R_{\text{eff}}(s,t)\cdot C_x$，其中 $x\neq s,t$，就是 $s\to t, t\to s$ 的随机游走经过 x 的期望次数之和

PEKING UNIVERSITY

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

有效电阻和 Commute Time

- 记 V_x^{st} 表示 $s \to t$ 的随机游走期望经过 x 的次数（不算 t）
- 则 V 在非 s,t 的点上满足“反调和”性质，在 s,t 分别处有额外的 ± 1 的贡献：

$$V_x^{st} = [x = s] - [x = t] + \sum_y \frac{C_{xy}}{C_y} V_y^{st}$$

有效电阻和 Commute Time

- 记 V_x^{st} 表示 $s \to t$ 的随机游走期望经过 x 的次数（不算 t）
- 则 V 在非 s, t 的点上满足"反调和"性质，在 s, t 分别处有额外的 ± 1 的贡献：

$$V_x^{st} = [x = s] - [x = t] + \sum_y \frac{C_{xy}}{C_y} V_y^{st}$$

$$\frac{V_x^{st}}{C_x} = [x = s] - [x = t] + \sum_y \frac{C_{xy}}{C_x} \frac{V_y^{st}}{C_y}$$

电阻网络与随机游走
罗思远
基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

有效电阻和 Commute Time

- 记 V_x^{st} 表示 $s \to t$ 的随机游走期望经过 x 的次数（不算 t）
- 则 V 在非 s, t 的点上满足“反调和”性质，在 s, t 分别处有额外的 ± 1 的贡献：

$$V_x^{st} = [x = s] - [x = t] + \sum_y \frac{C_{xy}}{C_y} V_y^{st}$$

$$\frac{V_x^{st}}{C_x} = [x = s] - [x = t] + \sum_y \frac{C_{xy}}{C_x} \frac{V_y^{st}}{C_y}$$

- 这说明 V_x^{st}/C_x 就是 $s \to t$ 流流量为 1 的流时的 $h(x)$！
- 同理，V_x^{ts}/C_x 就是 $t \to s$ 流流量为 1 的流时的 $h(x)$，而两者之和就等于 $R_{\text{eff}}(s, t)$
- 得证！

Commute Time 的应用

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 考虑 $n+1$ 个点的链，求 0 走到 n 的期望时间

Commute Time 的应用

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 考虑 $n+1$ 个点的链，求 0 走到 n 的期望时间
- 由对称性，$E_0\tau_n = E_n\tau_0$
- 由前述定理，$E_0\tau_n + E_n\tau_0 = n \cdot 2n$
- 因此 $E_0\tau_n = E_n\tau_0 = n^2$

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- $E_s\tau_t$ 和 $E_t\tau_s$ 的差距能有多大?

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

Commute Time 的应用

- $E_s\tau_t$ 和 $E_t\tau_s$ 的差距能有多大?
- 考虑在上一个图的基础上在 n 周围再加 $n-1$ 个点构成 n 个点的团，其它点不变
- 则 $E_0\tau_n = n^2$ 不变
- 但 $E_0\tau_n + E_n\tau_0 = n \cdot (2n + n(n-1)) = n^3 + n^2$
- 因此 $E_n\tau_0 = n^3$!

无穷无向图的常返性

电阻网络与随机游走
罗思远
基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 注：本节中，假设所有无向图均为局部有限的（每个点的度数有限）
- 我们知道，有限不可约马氏链一定常返；无穷的马氏链常返性怎么判断？
- 一种思路是，直接使用定义计算 E_iV_i，看结果是否为 $+\infty$，但当图不是特别简单时，通常难以计算、估计大小

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

例子：$\mathbb{Z}^d$ 的常返性

PEKING UNIVERSITY

- 我们先看第一种思路，试图用它判断：从原点出发，在整点网格上随机游走，每次随机选一维走一步，这个随机游走是否常返

$\mathbb{Z}^d$ 的常返性

$\mathbb{Z}$，$\mathbb{Z}^2$ 常返，而其它不常返。

例子：$\mathbb{Z}$ 的常返性

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 我们先看 $\mathbb{Z}$ 的常返性，也即：每次加一或减一，回到原点的次数是否期望是正无穷
- 走 $2n$ 步回到原点的概率是

$$\frac{1}{4^n}\cdot\binom{2n}{n}=\Theta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

- 由期望线性性对 n 求和，该级数发散，故求和为正无穷，因此常返

例子：$\mathbb{Z}^2$ 的常返性

PEKING UNIVERSITY

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 再看 $\mathbb{Z}^2$ 的常返性，也即：每次上下左右随机走一步，回到原点的次数是否期望是正无穷
- 走 $2n$ 步回到原点的概率是

$$\frac{1}{16^n}\cdot\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{n}\binom{n}{i}\binom{n}{i}$$

$$=\frac{1}{16^n}\cdot\binom{2n}{n}^2=\Theta\left(\frac{1}{n}\right)$$

- 其中用到了 Stirling 公式

$$n!=(1+o(1))\sqrt{2\pi n}(n/e)^n$$

- 由期望线性性对 n 求和，该级数发散，故求和为正无穷，因此常返

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 再看 $\mathbb{Z}^d$ 的常返性，也即：每次 $2d$ 个方向随机走一步，回到原点的次数是否期望是正无穷
- 走 $2n$ 步回到原点的概率是

$$\sum_{i_1+\cdots+i_d=n} \frac{(2n)!}{\prod_j (2i_j)!} \frac{1}{(2d)^{2n}} \prod_j \binom{2i_j}{i_j}$$

- 为了使用 Stirling 公式，我们希望所有 i_j 都不要太小，最好都是 $\Theta(n)$（因为这样符合 $o(1)$ 的定义）
- 这提示我们把求和分为“存在很小的 i_d”和“i_d 较为平均”两部分

例子：$\mathbb{Z}^d$ $(d \geq 3)$ 的常返性

- 情况 1：存在 $i_j \leq n/(2d)$
- i_j 的期望是 n/d，因此这说明和期望相比偏移了 $n/(2d)$
- Chernoff Bound 告诉我们，对于某一维，这样的事情发生的概率 $\leq e^{-\Omega(n)}$
- 对维进行 Union Bound，再求和，仍然收敛

Chernoff Bound

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ i.i.d. $\sim \mathrm{Bern}(p)$. 则对于任何 $\varepsilon > 0$，满足：

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \begin{cases} \geq p + \varepsilon \\ \leq p - \epsilon \end{cases}\right) \leq e^{-2n\varepsilon^2}$$

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 情况 2：所有 $i_j \geq n/(2d)$
- 此时可以放心大胆使用 Stirling 公式，最后分母上会多出来 d 个 $\Theta(\sqrt{n})$ 相乘
- 由于

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{d/2}} < +\infty$$

所以原式求和也收敛

例子：带权 $\mathbb{Z}^d$ $(d \geq 3)$ 的常返性

电阻网络与随机游走
罗思远
基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- $\mathbb{Z}^d$ 这个模型还是太简单了
- 如果我们让每条边不等价，换句话说，把“无权无向图”换成“带权无向图”，常返性会改变吗？
- 当然，边权差距过大会导致图整体性质改变，所以不妨假设所有边的边权均属于 $[1/C, C]$ 其中 $C > 1$ 为一个全局的常数
- 此时可以发现，之前的（依赖组合数、阶乘的性质的）推导不容易直接推广，每条路径可以有指数级的概率差距……

例子：λ-biased 规则树上的随机游走

电阻网络与随机游走
罗思远
基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 考虑一棵 k 叉树，随机游走从树根开始
- 每次有 $\frac{\lambda}{\lambda+k}$ 的概率走向父亲，有 $\frac{1}{\lambda+k}$ 的概率走向某个儿子（该马氏链是否可逆?）
- 该随机游走是否常返?

例子： λ-biased 规则树上的随机游走

电阻网络与随机游走
罗思远
基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 考虑一棵 k 叉树，随机游走从树根开始
- 每次有 $\frac{\lambda}{\lambda+k}$ 的概率走向父亲，有 $\frac{1}{\lambda+k}$ 的概率走向某个儿子（该马氏链是否可逆?）
- 该随机游走是否常返?
- 其实在常返性上，这个问题等价于一条链上的问题（同一深度的结点相互等价）
- 在点 x 是，有 $p = \frac{\lambda}{\lambda+k}$ 的概率走向 $x-1$，有 $1-p$ 的概率走向 $x+1$
- 我们要证明 $E_0V_0 = +\infty$

电阻网络与随机游走
罗思远
基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

例子： λ-biased 规则树上的随机游走

- 考虑一棵 k 叉树，随机游走从树根开始
- 每次有 $\frac{\lambda}{\lambda+k}$ 的概率走向父亲，有 $\frac{1}{\lambda+k}$ 的概率走向某个儿子（该马氏链是否可逆?）
- 该随机游走是否常返?
- 其实在常返性上，这个问题等价于一条链上的问题（同一深度的结点相互等价）
- 在点 x 是，有 $p=\frac{\lambda}{\lambda+k}$ 的概率走向 $x-1$，有 $1-p$ 的概率走向 $x+1$
- 我们要证明 $E_0 V_0 = +\infty$
- 由几何分布的结论，这其实等价于证明 $P_1(\tau_0 < +\infty) = 1$
- 如何处理 $P_1(\tau_0 < \infty)$?

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 使用首步分析法！
- 记 $p_x = P_x(\tau_0 < \infty)$，我们有 $p_0 = 1$，且

$$\forall x > 0,\ p_x = p \cdot p_{x-1} + (1-p) \cdot p_{x+1}$$

例子：λ-biased 规则树上的随机游走

电阻网络与随机游走
罗思远
基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 使用首步分析法！
- 记 $p_x = P_x(\tau_0 < \infty)$，我们有 $p_0 = 1$，且

$$\forall x > 0,\ p_x = p \cdot p_{x-1} + (1-p) \cdot p_{x+1}$$

- 这说明

$$\frac{p}{1-p}(p_x - p_{x-1}) = p_{x+1} - p_x$$

- 当 $p \geq 1/2$ 时，$p_{x+1} - p_x$ 随着 x 的增长会指数（底数大于 1）倍地（绝对值）增加，而 $\forall x, p_x \geq 0$
- 这说明 p_1 只能是 1（否则足够大的 x 的 p 就会小于 0），因此常返！

例子：λ-biased 规则树上的随机游走

电阻网络与随机游走
罗思远
基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 当 $p < 1/2$ 时，$p_{x+1} - p_x$ 随着 x 的增长会指数（底数小于 1）倍地（绝对值）减小，因此如果 $p_1 = 1 - \epsilon$，其中 $\epsilon > 0$ 足够小，就可以保证 $\forall x, p_x \geq 0$
- 问题：ϵ 有无穷种取值满足条件，哪一种导出真的 p 呢？

例子： λ-biased 规则树上的随机游走

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 当 $p < 1/2$ 时，$p_{x+1} - p_x$ 随着 x 的增长会指数（底数小于 1）倍地（绝对值）减小，因此如果 $p_1 = 1 - \epsilon$，其中 $\epsilon > 0$ 足够小，就可以保证 $\forall x, p_x \geq 0$
- 问题：ϵ 有无穷种取值满足条件，哪一种导出真的 p 呢?

最小解原理（名字是我瞎取的）

设 $p_x = P_x(\tau_a < +\infty)$，若首步分析法得到的方程组有多个满足 $\forall x, p_x \geq 0$ 的解，则这些解存在高维偏序下唯一的“最小解”，且真实的 p 就是该最小解

电阻网络与随机游走
罗思远
基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 证明：假设还有一正解 q，则对于 $x \neq a$，

$$q_x = \sum_y p_{xy} q_y = p_{xa} + \sum_{y \neq a} p_{xy} q_y \geq p_{xa} = P_x(\tau_a \leq 1)$$

同理

$$\begin{aligned} q_x &= \sum_y p_{xy} q_y = p_{xa} + \sum_{y \neq a} p_{xy} q_y \\ &= p_{xa} + \sum_{y \neq a} p_{xy} p_{ya} + \sum_{y,z \neq a} p_{xy} p_{yz} q_z \\ &\geq p_{xa} + \sum_{y \neq a} p_{xy} p_{ya} = P_x(\tau_a \leq 2) \end{aligned}$$

同理 $\forall n \geq 1, q_x \geq p_x(\tau_a \leq n)$，令 $n \to \infty$ 即得

例子：λ-biased 规则树上的随机游走

- 当 $p < 1/2$ 时，如果 $p_1 = 1 - \epsilon$，其中 $\epsilon > 0$ 足够小，就可以保证 $\forall x, p_x \geq 0$
- 由最小解原理，p_1 的真实值是 ϵ 取最大得到的，此时 $p_1 < 1$，且 $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$
- 因此此时马氏链不常返

More on “最小解原理”

- 上述最小解原理对更多类似的方程都适用

首达时期望

对状态集 D，设 $x_i = E_i\tau_D$，则 x_i 是满足方程

$$\begin{cases} x_i = 1 + \sum_j p_{ij}x_j, & i \notin D \\ x_i = 0, & i \in D \end{cases}$$

的最小非负解。

访问次数期望

固定 j，对状态集 D，设 $x_i = G_{ij}^{(D)}$ 为从 i 开始在走出 D 前期望访问 j 的次数，则 x_i 是满足方程

$$\begin{cases} x_i = [i = j] + \sum_j p_{ij}x_j, & i \in D \\ x_i = 0, & i \notin D \end{cases}$$

的最小非负解。

例子：λ-biased 规则树上的随机游走

PEKING UNIVERSITY

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 如果对该例子进行微扰，上述方法就不奏效了
- 例如给每条边的边权乘一个 $[1/C, C]$ 内的随机数；删去若干条树边……

区域逃逸概率

PEKING UNIVERSITY

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 另一种思路是，不常返，说明回到起点的概率不是 1（因为如果回到起点，则每个起点开始、起点结尾的圈独立分布，回到的次数服从几何分布）
- 说明，令 b 为“无穷远点”，则 $p_e(a;b) > 0$
- 换句话说，$p_e(a;\Omega) > 0$，其中 Ω “趋于”全集，其中定义

区域逃逸概率

对于无向图上的随机游走，有起点 a 以及包含 a 的点集 Ω，$p_e(a;\Omega)$ 定义为从 a 出发，在回到 a 之前逃离了 Ω 的概率

PEKING UNIVERSITY

电阻网络与随机游走
罗思远
基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

区域逃逸概率和常返性

在连通无限带权无向图 $G = (V, E)$ 上考虑起点为 s 的随机游走。若有一列 $s \in \Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \dots$ 满足 $\cup_n \Omega_n = V$，且存在 $c > 0$ 使得 $\forall n, p_e(s; \Omega_n) \geq c$，则 G 暂态

- 证明：只需证 s 出发的随机游走有限步返回 s 的概率小于等于 $1 - c$，再用几何分布的性质即知总访问次数期望不是无穷
- 由于图局部有限，所以从 s 出发有限步返回 s 的路径只有可数条，只需证明这些路径概率之和小于等于 $1 - c$
- 令 S_n 表示这些路径中长度不超过 n 的那些对应的概率之和，则 S_n 中只包含有限条路径、涉及到有限个点，这些点一定被一个 Ω_m 包含，故求和 $\leq 1 - p_e(s, \Omega_m) \leq 1 - c$
- 因此总和 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 也 $\leq 1 - c$

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

区域逃逸概率

区域逃逸概率和流的能量

条件同上，有

$$p_e(s;\Omega) = \frac{1}{C_s \min_I \mathscr{D}(I)}$$

其中 I 为 $s \to \delta\Omega$（外边界）的单位流。

- 证明：把 $\delta\Omega$ 上的点缩成同一个点 t，则每个原图上的流可以和新图上的 $s \to t$ 流一一对应且能量不变。同时，$p_e(s;\Omega) = p_e(s;t)$。代入之前结论即得。

Thompson 原理

PEKING UNIVERSITY

Thompson 原理

若存在 s 出发的有源无汇单位流的能量有限，则马氏链暂态。

- 证明：总体上其实就是前两个结论的直接推论
- 任取一列 $s \in \Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \dots$，在 Ω_n 把流截断，此时只会是 $\mathscr{D}$ 减小、p_e 增加
- 这个条件是充要的吗？

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

Dirichlet 原理

若马氏链暂态，则存在 s 出发的有源无汇单位流的能量有限。

- 证明：这个方向相对麻烦一些。我们需要显式取出一个流，但如果不知道这个图长什么样，怎么导出一个合法流？

Dirichlet 原理

Dirichlet 原理

若马氏链暂态，则存在 s 出发的有源无汇单位流的能量有限。

- 证明：这个方向相对麻烦一些。我们需要显式取出一个流，但如果不知道这个图长什么样，怎么导出一个合法流？
- 回忆：如果已知电势，结合电导（i.e. 马氏链转移概率）自动就导出了最优电流
- 电势等于逃逸概率，能否用马氏链的逃逸概率构造流？
- 但是我们只会处理有限图上的逃逸概率，所以只能用一列有限集上的逃逸概率去逼近整个图上不再返回的概率……

Dirichlet 原理

电阻网络与随机游走
罗思远
基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 任取一列 $s \in \Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \dots$ 其中 Ω_n 均有限且并为全集
- 记 $h_n(x)$ 为从 x 出发，在逃离 Ω_n 前回到 s 的概率；$h(x)$ 为从 x 出发到 s 的概率
- 由首步分析法，h_n 在 $\Omega_n - \{s\}$ 上调和；h 在 $V - \{s\}$ 上调和，因此两者可以分别导出 $a \to \delta\Omega_n$ 的合法单位流，以及 a 出发的无汇单位流
- 我们希望证明 h 导出的单位流能量有限，但我们之前关于“流的能量”的引理都是有限区域上的
- 因此只能试图建立 h_n 的流和 h 的流之间的关系⋯⋯

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

引理

固定 x，则 $h_n(x)$（非严格，下同）单调递增，且 $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x)$

- 证明：类似前述“区域逃逸概率和常返性”的证明，把 h 展开为路径概率求和式即可

引理

$p_e(s;\Omega_n)$ 单调递减，且 $\lim_{n\to\infty} p_e(s;\Omega_n) = p^* > 0$，其中 p^* 为从 s 出发再也不返回 s 的概率

- 证明：同上

电阻网络与随机游走
罗思远
基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

Dirichlet 原理

- $h_n(x)$ 导出的流为 $I_n(x,y) = (h_n(x) - h_n(y))C(x,y)$，其流量为

$$\sum_x I_n(s,x) = \sum_x (1 - h_n(x))C(s,x) = C_s p_e(s;\Omega_n)$$

- 因此导出的单位流为

$$I_n(x,y) = \frac{(h_n(x) - h_n(y))C(x,y)}{C_s p_e(s;\Omega_n)}$$

- 同理，$h(x)$ 导出的单位流为

$$I(x,y) = \frac{(h(x) - h(y))C(x,y)}{C_s p^*}$$

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 因此 $\lim_{n\to\infty} I_n(x,y) = I(x,y)$——这就是我们们的目的
- 因此

$$\begin{aligned}\sum_{x,y} I(x,y)^2 R(x,y) &= \sum_{x,y} R(x,y) \lim_{n\to\infty} I_n(x,y)^2 \\ &\le \liminf_{n\to\infty} \sum_{x,y} R(x,y) I_n(x,y)^2\end{aligned}$$

Fatou 引理

设 $a_{i,n} \ge 0$， $\lim_{n\to\infty} a_{i,n} = a_i$， 则

$$\sum_i a_i \le \liminf_{n\to\infty} \sum_i a_{i,n}$$

PEKING UNIVERSITY

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- Fatou 引理的证明：

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\sum_{i} a_{i,n} &\geq \liminf_{n\to\infty}\sum_{i\leq k} a_{i,n}\\ &\geq \sum_{i\leq k}\liminf_{n\to\infty} a_{i,n}\\ &= \sum_{i\leq k} a_i\end{aligned}$$

令 $k\to\infty$ 即得证。

Dirichlet 原理

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
- 马尔可夫链
- 数字特征
  - 首步分析法
  - 系数矩阵的秩
- 调和函数
- 电阻网络
  - 有效电阻
  - 电流的能量

OI 中的应用
- 直接应用
- 计算有效电阻
- 游走时间的期望

无穷无向图的常返性
- 直接判断
- 区域逃逸概率
- 判据
  - Thompson 原理和 Dirichlet 原理
  - Nash-Williams Criterion
  - 例子

- 而

$$\liminf_{n\to\infty}\sum_{x,y} R(x,y)I_n(x,y)^2 = \liminf_{n\to\infty}\mathscr{D}(I_n)$$

- 由前述引理，

$$\begin{aligned}\mathscr{D}(I_n) &= \frac{1}{C_s p_e(s;\Omega_n)}\\ &\le \frac{1}{C_s p^*}\end{aligned}$$

- 因此

$$\liminf_{n\to\infty}\mathscr{D}(I_n) \le \frac{1}{C_s p^*}$$

得证！

Nash-Williams Criterion

PEKING UNIVERSITY

- 我们已经说明，不可约可逆马氏链暂态**当且仅当**存在起点出发的能量有限的单位流
- 因此要证明马氏链暂态，只需构造一个流说明能量有限即可
- 但要证明马氏链常返，需要说明每个单位流的能量都无穷大，这怎么办？

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

Nash-Williams Criterion

- 我们已经说明，不可约可逆马氏链暂态**当且仅当**存在起点出发的能量有限的单位流
- 因此要证明马氏链暂态，只需构造一个流说明能量有限即可
- 但要证明马氏链常返，需要说明每个单位流的能量都无穷大，这怎么办?
- 考虑一个起点 s 和无穷远之间的割（i.e. 包括若干条割边）
- 单位流至少在这个割上流 1 的流量，因此在割上的能量有下界
- 如果找到足够多这样的割，每个割的能量下界之和为无穷，就说明每个单位流的能量都无穷大
- 假设割边集有电阻 $R_1, R_2, \ldots$、电流 $I_1, I_2, \ldots$，我们知道 $I_1 + I_2 + \cdots = 1$，要最小化 $\sum_n I_n^2 R_n$

Nash-Williams Criterion

PEKING UNIVERSITY

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- Cauchy 不等式：

$$\left(\sum_n I_n^2 R_n\right) \cdot \sum_n C_n \geq 1$$

- 说明

$$\sum_n I_n^2 R_n \geq \frac{1}{\sum_n C_n}$$

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- Cauchy 不等式：

$$\left(\sum_n I_n^2 R_n\right) \cdot \sum_n C_n \geq 1$$

- 说明

$$\sum_n I_n^2 R_n \geq \frac{1}{\sum_n C_n}$$

Nash-Williams Criterion

设 $C_1, C_2, \ldots$ 都是 s 和无穷远点间的割边集，互不相交，且

$$\sum_n \frac{1}{\sum_{(x,y)\in C_n} C(x,y)} = +\infty$$

则马氏链常返。

小结

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- Thompson 原理和 Nash-Williams Criterion 分别是常用的判断可逆马氏链暂态和常返的方法
- 利用它们，可以立刻得到很多普适性较强的推论

推论

PEKING UNIVERSITY

推论 1

对于无向带权图上的随机游走，如果把边权增减，满足每条边的权值变化的倍数都属于 $[1/C, C]$ $(C > 1)$，则不改变常返性。

- 证明：每个流的能量变化的倍数都在 $[1/C^2, C^2]$。

推论 2

有限无向图常返。

- 证明：此时不存在有源无汇流，更不存在能量有限的有源无汇流。

推论

PEKING UNIVERSITY

推论 3

对于无向图，常返图的子图（删去一些边）常返；暂态图的超图暂态。

- 证明：子图上每个流在原图上都合法，所以子图存在有限能量流，原图也存在。
- 这个结论很有用：说明 $\mathbb{Z}^2$ 的任何子图（随便抠掉一些边）都是常返的；$\mathbb{Z}^3$ 是暂态的立刻推出 $\mathbb{Z}^d$ $(d \geq 3)$ 是暂态的

例子：$\mathbb{Z}^d$ 的常返性

PEKING UNIVERSITY

- 根据推论 3，只需证 $\mathbb{Z}^2$ 常返、$\mathbb{Z}^3$ 暂态
- $\mathbb{Z}^2$ 常返：找一列割，由于边权全是 1，只需每个割的大小分之一收敛
- 按照切比雪夫距离一圈一圈割，第 i 圈大小为 $\Theta(i)$，而 $\sum 1/\Theta(i)$ 发散，证毕

例子：$\mathbb{Z}^d$ 的常返性

PEKING UNIVERSITY

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量

OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望

无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- $\mathbb{Z}^3$ 暂态：构造一个原点出发的流使得能量（也即每条边上的流量平方和）有限
- 为了最小化总能量，应该尽量让流量“平均”
- 最简单的方法是按照曼哈顿距离分层，每流一步就往外流一层
- 如何使相邻两层间的流量尽量平均?

例子：$\mathbb{Z}^d$ 的常返性

PEKING UNIVERSITY

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- $\mathbb{Z}^3$ 暂态：构造一个原点出发的流使得能量（也即每条边上的流量平方和）有限
- 为了最小化总能量，应该尽量让流量“平均”
- 最简单的方法是按照曼哈顿距离分层，每流一步就往外流一层
- 如何使相邻两层间的流量尽量平均?
- 这样构造：从 $(1,1,1)$ 开始，只考虑第一象限，令 S_k 为第 k 层（$x+y+z=k$ 的点组成的集合）
- 对于点 (i,j,k)，分别往 x,y,z 方向流比例为 i,j,k 的流量

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 归纳易得第 n 层的流量在 S_n 上均匀分布：每个点接受 $1/|S_n|$ 的流量
- (i,j,k) 产生的能量为

$$\frac{i^2+j^2+k^2}{(i+j+k)^2}\cdot\frac{1}{|S_{i+j+k}|^2}\leq\frac{1}{|S_{i+j+k}|^2}$$

- 因此总能量

$$\leq\sum_n\frac{|S_n|}{|S_n|^2}=\sum_n\frac{1}{\Theta(n^2)}$$

有限

Polya 的坛子

电阻网络与随机游走
罗思远
基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 上述论证过程还得到了一个有趣的副产品：

Polya 的坛子

有一个坛子，起初装有红黄蓝球各一个。每次随机选一个球，并放回两个这个颜色的球。则进行 k 步后，所有可能产生的结果（i.e. 坛子里红黄蓝球各有几个）服从均匀分布。

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 我们知道，问题本质上就是链上问题：在 x 有 p 的概率走到 $x-1$，$1-p$ 的概率走到 $x+1$
- 这等价于 $(x, x+1)$ 的边权为 $\left(\frac{1-p}{p}\right)^x$ 的无向图上随机游走
- 当 $1-p<p$ 也即 $p>\frac{1}{2}$ 时，直接构造 $0 \to 1 \to 2 \to \ldots$ 的单位流，能量就有限，故暂态
- 当 $1-p \leq p$ 也即 $p \leq \frac{1}{2}$ 时，取不相交割集 $\{\{(i, i+1)\} \mid i \geq 0\}$，$1/C$ 之和就发散，故常返

* 例子：随机图的常返性

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 有的复杂图，直接使用常返的定义完全无从下手，但考虑流的能量就能找到突破口
- 考虑一张 $V = \mathbb{Z}$ 的随机无向无权图，其中 (i,j) 这条边存在的概率为 $\frac{1}{|i-j|^4}$，且每条边存在与否相互独立
- 该图是否常返?

* 例子：随机图的常返性

PEKING UNIVERSITY

- 有的复杂图，直接使用常返的定义完全无从下手，但考虑流的能量就能找到突破口
- 考虑一张 $V=\mathbb{Z}$ 的随机无向无权图，其中 (i,j) 这条边存在的概率为 $\frac{1}{|i-j|^4}$，且每条边存在与否相互独立
- 该图是否常返？
- 直觉告诉我们常返的可能性比较大：因为这个图基本上还是只有跨度很小的边，与 $\mathbb{Z}$ 相差应该不是很大
- 判断常返的方法：直接计算返回概率，或是用 Nash-Williams Criterion$\cdots\cdots$

* 例子：随机图的常返性

电阻网络与随机游走
罗思远
基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 直接计算返回概率看着就不可行，转而考虑取一列割集
- $\mathbb{Z}$ 上最简单的割集是什么？
- 显然是割出一个区间 $[-i, j]$，其中 $-i \leq 0 \leq j$

* 例子：随机图的常返性

- 直接计算返回概率看着就不可行，转而考虑取一列割集
- $\mathbb{Z}$ 上最简单的割集是什么？
- 显然是割出一个区间 $[-i,j]$，其中 $-i \le 0 \le j$
- 这个割集合理吗？能否加强割集条件，简化为更容易处理的形式，同时割集还不太少？

* 例子：随机图的常返性

电阻网络与随机游走
罗思远
基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 核心 idea：只考虑形如 $\{(-i-1,i),(j,j+1)\}$ 的割集
- 这要求没有跨过区间端点的边
- 放宽为完全没有跨过这条边的边——只需证在正半轴、负半轴都一定（以概率 1）存在无数条不被跨过的边
- 一条边不被跨过的概率是

$$p=\prod_{i\geq 2}\left(1-\frac{1}{i^4}\right)^i>0$$

- 因此期望确实有无穷条边不被跨过，但这不等价于一定有无穷条边不被跨过……

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 使用**二阶矩方法** (Second Moment Method)：通过计算方差来控制随机变量的下界
- 对于两条边 $(i, i+1), (i+k, i+k+1)$，它们同时不被跨过的概率是

$$\prod_{i\geq 2}\left(1-\frac{1}{i^4}\right)^{\min(2i, i+k)}$$

- 记 X_i 为 $(i, i+1)$ 是否不被跨过，则

$$Cov(X_i, X_{i+k}) = E[X_i X_{i+k}] - E[X_i]E[X_{i+k}]$$
$$= p^2 \cdot \left(\prod_{i\geq k+1}\left(1+\frac{1}{i^4-1}\right)^{i-k} - 1\right)$$

PEKING UNIVERSITY

电阻网络与随机游走
罗思远
基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 随着 k 的增大，$Cov(X_i, X_{i+k}) \to 0$——这说明两条边的相关性可以任意小，几乎可以看作独立
- 对任意给定的正整数 n、$\epsilon > 0$，可以找到 n 个 $0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_n$，使得 $\forall 1 \leq u < v \leq n, Cov(X_{i_u}, X_{i_v}) \leq \epsilon$
- 此时，$Var(\sum_{1 \leq j \leq n} X_{i_j}) \leq pn + n^2\epsilon$

* 例子：随机图的常返性

电阻网络与随机游走
罗思远
基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 随着 k 的增大，$Cov(X_i, X_{i+k}) \to 0$——这说明两条边的相关性可以任意小，几乎可以看作独立
- 对任意给定的正整数 n、$\epsilon > 0$，可以找到 n 个 $0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_n$，使得 $\forall 1 \le u < v \le n, Cov(X_{i_u}, X_{i_v}) \le \epsilon$
- 此时，$Var(\sum_{1\le j\le n} X_{i_j}) \le pn + n^2\epsilon$
- 使用 Chebyshev 不等式：
- 记 A_n 为“零点右侧存在 n 条不被跨过的边”，取 $\epsilon = p/n$，得

$$P(\neg A_{pn/2}) \le P\left(\sum_{1\le j\le n} X_{i_j} < pn/2\right) \le \frac{2pn}{(pn/2)^2} = \Theta(1/n)$$

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
- 马尔可夫链
- 数字特征
  - 首步分析法
  - 系数矩阵的秩
- 调和函数
- 电阻网络
  - 有效电阻
  - 电流的能量

OI 中的应用
- 直接应用
- 计算有效电阻
- 游走时间的期望

无穷无向图的常返性
- 直接判断
- 区域逃逸概率
- 判据
  - Thompson 原理和 Dirichlet 原理
  - Nash-Williams Criterion
  - 例子

- 同时，$P(\neg A_n) \le P(\neg A_{n+1})$
- 结合以上两者可知 $\forall n \ge 1, P(\neg A_n) = 0, P(A_n) = 1$
- 因此 $P(\lim_{n\to\infty} A_n) = 1$，也即一定在零点右侧存在无穷条不被跨过的边；左侧同理

总结

PEKING UNIVERSITY

- 今天的分享主要包含以下内容：
- 马尔可夫链和电阻网络的基本性质，以及它们之间的联系
- 最重要的联系就是：**无向图的边权等于电导，逃逸概率等于电压**
- 上述概念在 OI 中的可能应用
- 电阻和电流用于判定无向图常返性，分别给出了常返和暂态的判据

感谢聆听！

PEKING UNIVERSITY

电阻网络与随机游走

罗思远

基本概念
马尔可夫链
数字特征
首步分析法
系数矩阵的秩
调和函数
电阻网络
有效电阻
电流的能量
OI 中的应用
直接应用
计算有效电阻
游走时间的期望
无穷无向图的常返性
直接判断
区域逃逸概率
判据
Thompson 原理和 Dirichlet 原理
Nash-Williams Criterion
例子

- 受笔者水平所限，疏漏、错误在所难免，恳请听众批评指正
- 参考资料：
- 应用随机过程，陈大岳、章复熹，2023 年 9 月版
- 俞畅同学的数算 pre
- Random Walks and the Effective Resistance of Networks, Prasad Tetali
- ELECTRICAL NETWORKS AND REVERSIBLE MARKOV CHAINS, STEVEN P. LALLEY
- 感谢常瑞年同学在我学 OI 的时候把 CF457E 搬进了模拟赛