博弈理论入门

刘恒熙

宁波市镇海中学

2025 年 5 月 16 日

1 基础

2 数

3 一些无穷小量

4 总结

博弈是什么？

本次讲课涉及的博弈均满足以下条件：

- 有两位玩家，通常称为左方和右方。
- 存在有限多种**局势**，其中有一个**初始局势**。
- 有明确定义的**规则**安排每一步**走法**，使一个玩家从一个某一**局势**转移到他的**选择**。
- 左方和右方在整个游戏中交替行动。
- 两个玩家都知道一切情况，即有**完全信息**。
- 没有**随机行动**。
- 按照**正常游戏**规定，不能行动的玩家**输**。
- 规则保证从一个局势出发，不能经过若干次行动回到原来的局势，即游戏总是会由于某位玩家不能行动结束。

用 DAG / 树表示博弈

用 DAG 表示博弈：用节点表示**局势**，用标 L 的有向边表示左方选择，用标 R 的有向边表示右方选择。

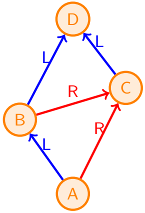

Figure 1: 用 DAG 表示一个博弈

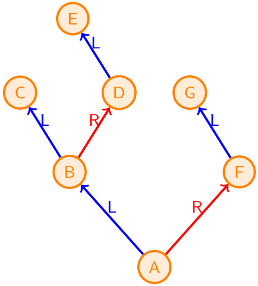

Figure 2: 用树表示一个博弈

用树表示博弈：把从不同的转移路径到达的同一个局势看作不同的局势。

例如，右图中的 C,E,G 均对应左图中的同一个局势 D，右图中的 D,F 均对应左图中的同一个局势 C。

“局势” 并不包含下一步由谁进行 右图中局势 B 的左方选择不应该被看作没用的，因为它可能会在把博弈相加后起作用。

博弈的结局

给定博弈对应的 DAG，可以根据以下规则，在 DAG 上进行 DP，计算左方先走时的胜者和右方先走时的胜者。

- 对于一个局势，左方先走时能获胜，当且仅当存在一个左方选择，使得在该局势中，若右方先走，则左方获胜。
- 对于一个局势，右方先走时能获胜，当且仅当存在一个右方选择，使得在该局势中，若左方先走，则右方获胜。

博弈的结局

给定博弈对应的 DAG，可以根据以下规则，在 DAG 上进行 DP，计算左方先走时的胜者和右方先走时的胜者。

- 对于一个局势，左方先走时能获胜，当且仅当存在一个左方选择，使得在该局势中，若右方先走，则左方获胜。
- 对于一个局势，右方先走时能获胜，当且仅当存在一个右方选择，使得在该局势中，若左方先走，则右方获胜。

根据左方先走时的胜者和右方先走时的胜者，可以将博弈的结局分为四类：

		左方先走	
		左方获胜	右方获胜
右方先走	左方获胜	左方获胜	后手获胜
	右方获胜	先手获胜	右方获胜

Table 1: 博弈的结局

博弈的相加

用以下记号表示局势 G 的左方选择有 $A, B, C, \cdots$，右方选择有 $D, E, F, \cdots$：

$$G = \{A, B, C, \cdots \mid D, E, F, \cdots\}$$

把 G 的左方选择记作 G^L，右方选择记作 G^R，有 $G = \{G^L \mid G^R\}$。

博弈的相加

用以下记号表示局势 G 的左方选择有 $A, B, C, \cdots$，右方选择有 $D, E, F, \cdots$：

$$G = \{A, B, C, \cdots \mid D, E, F, \cdots\}$$

把 G 的左方选择记作 G^L，右方选择记作 G^R，有 $G = \{G^L \mid G^R\}$。

两个博弈的和，就是同时进行两个博弈，玩家每一步需要在两个博弈**之一**行动一次。

更形式化地，定义两个博弈 G, H 的和

$$G + H = \{G^L + H, G + H^L \mid G^R + H, G + H^R\}$$

其中，$G^L + H$ 表示将 G^L 中的每一个局势分别和 H 相加得到的若干个局势。

G, H 称作 $G + H$ 的**分支**。

博弈的相加

用以下记号表示局势 G 的左方选择有 $A, B, C, \cdots$，右方选择有 $D, E, F, \cdots$：

$$G = \{A, B, C, \cdots \mid D, E, F, \cdots\}$$

把 G 的左方选择记作 G^L，右方选择记作 G^R，有 $G = \{G^L \mid G^R\}$。

两个博弈的和，就是同时进行两个博弈，玩家每一步需要在两个博弈之一行动一次。

更形式化地，定义两个博弈 G, H 的和

$$G + H = \{G^L + H, G + H^L \mid G^R + H, G + H^R\}$$

其中，$G^L + H$ 表示将 G^L 中的每一个局势分别和 H 相加得到的若干个局势。

G, H 称作 $G + H$ **的分支**。

例如，若 $G = \{A \mid B, C\}, H = \{D, E \mid F\}$，则
$G + H = \{A + H, G + D, G + E \mid B + H, C + H, G + F\}$。

根据博弈相加的意义，博弈的加法显然满足结合律和交换律。

如果把两个分别含有 $\Theta(n)$ 个局势的博弈相加，局势数量可以达到 $\Theta(n^2)$；
而如果有 m 个相加，局势数量可以达到 $\Theta(n^m)$。

因此我们需要寻找快速计算（满足一定条件的）博弈的和的方法。

寻找等价关系

两个分别含有 $\Theta(n)$ 个局势的博弈相加，局势数量确实是 $\Theta(n^2)$ 的，但是通常我们只关心一个博弈的性质，例如某一方先走时的胜者。所以，可以尝试用更简洁的“等价”博弈来代替原来的博弈。

如何定义两个博弈“等价”？

寻找等价关系

两个分别含有 $\Theta(n)$ 个局势的博弈相加，局势数量确实是 $\Theta(n^2)$ 的，但是通常我们只关心一个博弈的性质，例如某一方先走时的胜者。所以，可以尝试用更简洁的“等价”博弈来代替原来的博弈。

如何定义两个博弈“等价”？

两个实数 x, y 相等，当且仅当 $x + (-y) = 0$（或者写作 $x - y = 0$）。

类似地，可以定义两个博弈相等。在定义相等之前，需要先定义博弈的负，以及一个博弈是否“$= 0$”。

寻找等价关系

两个分别含有 $\Theta(n)$ 个局势的博弈相加，局势数量确实是 $\Theta(n^2)$ 的，但是通常我们只关心一个博弈的性质，例如某一方先走时的胜者。所以，可以尝试用更简洁的“等价”博弈来代替原来的博弈。

如何定义两个博弈“等价”？

两个实数 x, y 相等，当且仅当 $x + (-y) = 0$（或者写作 $x - y = 0$）。

类似地，可以定义两个博弈相等。在定义相等之前，需要先定义博弈的负，以及一个博弈是否“$= 0$”。

原来的“$=$”表示两个博弈的所有局势可以一一对应，或者说两个博弈对应的树相同。

在完成定义和验证定义的合理性之前，先将博弈“等价”记作“$\equiv$”，而博弈完全相同仍然记作“$=$”。

博弈的负

定义一个博弈的负为交换左方和右方的选择得到的博弈。(或者把反转博弈对应的图中，标 L 的边改为标 R，标 R 的边改为标 L。)

更形式化地，对于一个博弈 $G = \{G^L \mid G^R\}$，定义

$$-G = \{-G^R \mid -G^L\}$$

其中，$-G^R$ 表示将 G^R 中的每一个局势分别取负得到的若干个局势。

显然，有 $-(-G) = G$。

由于本次讲课涉及的博弈都是有限的，通过上述递归定义的博弈的负是良定义的。

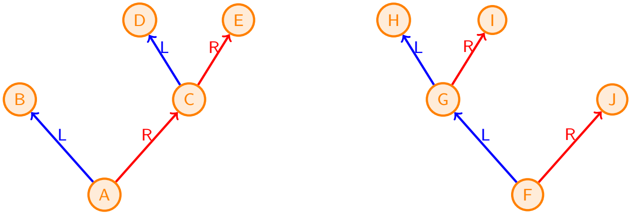

Figure 3: $F = -A$

零博弈

设 G_0 是一个初始局势下双方都不能行动的博弈。

对于任意的博弈 H，有 $G_0 + H = H$，因此可以认为 G_0 类似 0 的性质。

G_0 属于“后手获胜”类的博弈，那么“后手获胜”类的博弈是否都具有这样的性质？

零博弈

设 G_0 是一个初始局势下双方都不能行动的博弈。

对于任意的博弈 H，有 $G_0 + H = H$，因此可以认为 G_0 类似 0 的性质。

G_0 属于“后手获胜”类的博弈，那么“后手获胜”类的博弈是否都具有这样的性质？

设 G 是一个“后手获胜”的博弈。

对于任意的博弈 H，$G + H$ 和 H 的结局相同。

也就是说，指定先手后，在 H 中能获胜的一方在 $G + H$ 中仍然能获胜。

在 H 中能获胜的一方可以采取以下策略在 $G + H$ 中获胜：

- 如果对方上次行动是在 G 中进行的，在 G 中行动一次。
- 否则（对方上次行动是在 H 中进行的，或者这是 $G + H$ 的第一次行动），在 H 中行动一次。

定义 $G \equiv 0$ 当且仅当在 G 中，后手能获胜。

博弈的相等

定义两个博弈 G, H **相等，当且仅当** $G+(-H)\equiv 0$ **（或** $G-H\equiv 0$**）。**

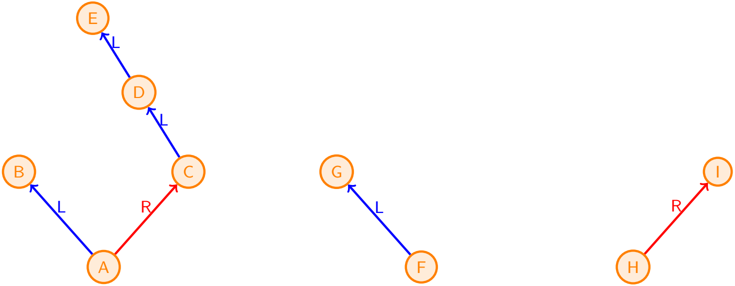

Figure 4: $H=-F \wedge A+H\equiv 0 \implies A\equiv F$

验证 “=”,“0”,“−” 的性质

“≡” 是等价关系。

- 对任意的博弈 A，有 $A \equiv A$:
  - 只需要说明在 $A + (-A)$ 中，后手总是有取胜的策略。
  - 不妨设先手为左方，且左方在 A 中走到某个 $B \in A^L$，右方可以 $-A = \{-A^R \mid -A^L\}$ 中走到 $-B \in -A^L$，此时总博弈为 $B + (-B)$，右方仍然有取胜策略。

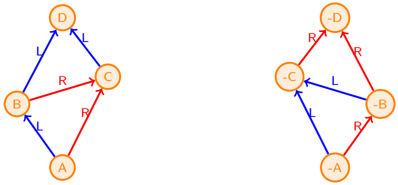

Figure 5: A 与 $-A$

验证 “$=$”,“0”,“$-$” 的性质

“$\equiv$” 是等价关系。

- 对任意的博弈 A，有 $A \equiv A$:
  - 只需要说明在 $A + (-A)$ 中，后手总是有取胜的策略。
  - 不妨设先手为左方，且左方在 A 中走到某个 $B \in A^L$，右方可以 $-A = \{-A^R \mid -A^L\}$ 中走到 $-B \in -A^L$，此时总博弈为 $B + (-B)$，右方仍然有取胜策略。

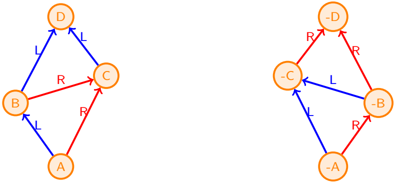

Figure 5: A 与 $-A$

- 若 $A \equiv B$，则 $B \equiv A$。
  - 令 $D = A - B$，只需要说明若 $D \equiv 0$，则 $-D \equiv 0$。
  - 交换左方和右方的选择，不会改变一个博弈是否是“后手获胜”的。

验证 "$=$","0","$-$" 的性质

"$\equiv$" 是等价关系。

- 对任意的博弈 A，有 $A \equiv A$:
  - 只需要说明在 $A+(-A)$ 中，后手总是有取胜的策略。
  - 不妨设先手为左方，且左方在 A 中走到某个 $B \in A^L$，右方可以 $-A=\{-A^R \mid -A^L\}$ 中走到 $-B \in -A^L$，此时总博弈为 $B+(-B)$，右方仍然有取胜策略。

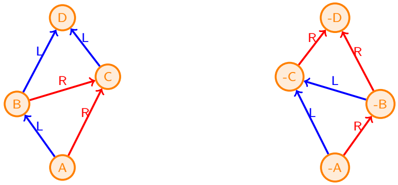

Figure 5: A 与 $-A$

- 若 $A \equiv B$，则 $B \equiv A$。
  - 令 $D=A-B$，只需要说明若 $D \equiv 0$，则 $-D \equiv 0$。
  - 交换左方和右方的选择，不会改变一个博弈是否是 "后手获胜" 的。
- 若 $A \equiv B, B \equiv C$，则 $A \equiv C$。
  - 令 $D=A-B, E=B-C$，只需要说明若 $D \equiv 0, E \equiv 0$，则 $D+E \equiv 0$。
  - D, E 均是 "后手获胜" 的。加上一个 "后手获胜" 的博弈，不会改变一个博弈的结局。

验证 “=”,“0”,“−” 的性质

在该等价关系下，加法、负、根据选择构造博弈仍然能进行。

- 若 $A \equiv A', B \equiv B'$，则 $A + B \equiv A' + B'$。
  - $(A - A') + (B - B') \equiv 0.$

验证 "="，"0"，"−" 的性质

在该等价关系下，加法、负、根据选择构造博弈仍然能进行。

- 若 $A \equiv A', B \equiv B'$，则 $A + B \equiv A' + B'$。
  - $(A - A') + (B - B') \equiv 0.$
- 若 $A \equiv A'$，则 $-A \equiv -A'$。
  - $-A - (-A') \equiv -(A - A') \equiv 0.$

验证 “=”,“0”,“−” 的性质

在该等价关系下，加法、负、根据选择构造博弈仍然能进行。

- 若 $A \equiv A', B \equiv B'$，则 $A + B \equiv A' + B'$。
  - $(A - A') + (B - B') \equiv 0.$
- 若 $A \equiv A'$，则 $-A \equiv -A'$。
  - $-A - (-A') \equiv -(A - A') \equiv 0.$
- 若 $A \equiv A', B \equiv B', C \equiv C', \cdots, D \equiv D', E \equiv E', F \equiv F', \cdots$，则 $\{A, B, C, \cdots \mid D, E, F, \cdots\} \equiv \{A', B', C', \cdots \mid D', E', F', \cdots\}$。
  - 在博弈 $\{A, B, C, \cdots \mid D, E, F, \cdots\} - \{A', B', C', \cdots \mid D', E', F', \cdots\}$ 中，后手只要走到不同于先手第一步选择分支中，与先手的选择等价的选择就能获胜。

验证 “$=$”,“0”,“$-$” 的性质

用 0 表示一个双方都不能进行任何行动的博弈，即 $0 = \{\,|\,\}$。
容易验证 0 是一个 “后手获胜” 的博弈，且 “$\equiv 0$” 的含义不变。
对于任意的博弈 G，有 $G + 0 \equiv G$。

- $G + 0 - G \equiv (G - G) + 0 \equiv 0.$

验证 “$=$”,“0”,“$-$” 的性质

用 0 表示一个双方都不能进行任何行动的博弈，即 $0 = \{\,|\,\}$。

容易验证 0 是一个 “后手获胜” 的博弈，且 “$\equiv 0$” 的含义不变。

对于任意的博弈 G，有 $G + 0 \equiv G$。

- $G + 0 - G \equiv (G - G) + 0 \equiv 0.$

对于任意的博弈 G，有 $G + (-G) \equiv 0$。

- $G + (-G) + 0 \equiv (G - G) + 0 \equiv 0.$

从现在开始，用 “$=$” 表示两个博弈相等。

1 基础

2 数

3 一些无穷小量

4 总结

只有一方能行动的博弈

为了寻找快速计算（满足一定条件的）博弈的和的方法，先从最简单的情况入手。

考虑类似下图展示的博弈，在这样的博弈中只有（至多）一方能行动。

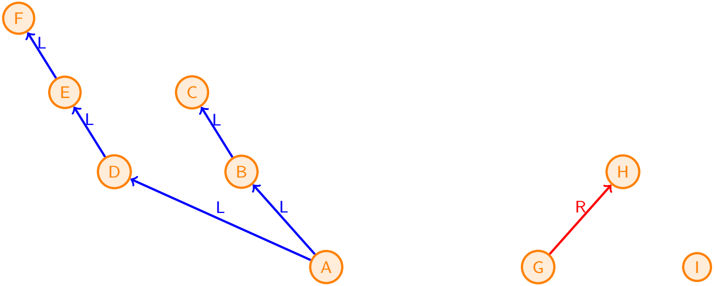

Figure 6: 在 A, G, I 中，只有一方能行动

在博弈 $A + G + I$ 中，无论谁先行动，左方总是能获胜。

这是因为左方能沿着 $A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F$ 走 3 步，而右方只能沿着 $G \rightarrow H$ 走 1 步。

这启发我们用数表示一个博弈带给一方的优势。

用整数表示自由步

我们希望用 1 表示左方的一个自由步，用 -1 表示右方的一个自由步。

定义 1 为只能由左方行动一次的博弈，即 $1 = \{0 \mid \}$。

根据定义，有 $-1 = \{ \mid -0\} = \{ \mid 0\}$。

用整数表示自由步

我们希望用 1 表示左方的一个自由步，用 -1 表示右方的一个自由步。

定义 1 为只能由左方行动一次的博弈，即 $1 = \{0 \mid \}$。

根据定义，有 $-1 = \{\mid -0\} = \{\mid 0\}$。

可以把 1 相加得到更大的数：$2 = 1 + 1 = \{1 + 0, 0 + 1 \mid \} = \{1 \mid \}$，$3 = 2 + 1 = \{2 + 0, 1 + 1 \mid \} = \{2 \mid \}$。

一般地，对于任意的正整数 n，有 $n + 1 = \{n \mid \}, -(n + 1) = \{\mid -n\}$。

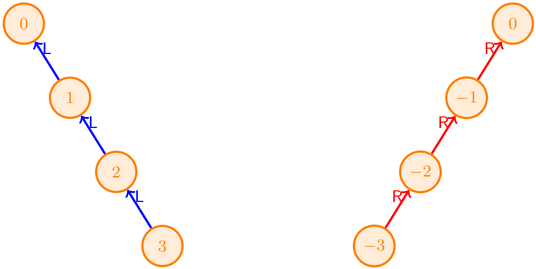

Figure 7: 整数值

用整数表示自由步

当一方有多个选择时，能为自己留下最多的自由步的选择是最优的。

Example 1

在 $\{1,2\,|\,\}$ 中，左方应该选择 2 而不是 1，因此 $\{1,2\,|\,\}=\{2\,|\,\}=3$。

一般地，对于非负整数 $a,b,c,\cdots$，有
$\{a,b,c,\cdots\,|\,\}=\{\max\{a,b,c,\cdots\}\,|\,\}=\max\{a,b,c,\cdots\}+1$。

可以用后面提到的“删除被优超的选择”更严谨地说明。

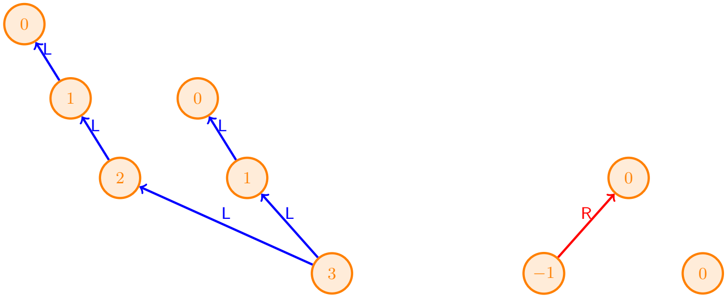

Figure 8: $3=\{1,2\,|\,\},-1=\{\,|\,0\},0=\{\,|\,\}$

正、负、零、模糊

用 $G > 0$ 表示在 G 中，无论谁先走，左方都能获胜。

用 $G < 0$ 表示在 G 中，无论谁先走，右方都能获胜。

容易验证 $1, 2, 3, \cdots > 0$，$-1, -2, -3, \cdots < 0$。

如果在 G 中，先走的玩家总是能获胜，则称 G 是模糊 (fuzzy) 的，记作 $G \parallel 0$ (G 混淆于 (confused with) 0)。

		左方先走	
		左方获胜	右方获胜
右方先走	左方获胜	$G > 0$	$G = 0$
	右方获胜	$G \parallel 0$	$G < 0$

Table 2: 用符号表示博弈 G 的结局

博弈之和的结果

如果 $G \geq 0, H \geq 0$，那么 $G + H \geq 0$。

- $G \geq 0, H \geq 0$ 即为：在 G, H 中，右方先手时，左方获胜。
- 在 $G + H$ 中，右方先手时，左方每次在右方上次行动的分支中行动，即可获胜。

博弈之和的结果

如果 $G \geq 0, H \geq 0$，那么 $G + H \geq 0$。

- $G \geq 0, H \geq 0$ 即为：在 G, H 中，右方先手时，左方获胜。
- 在 $G + H$ 中，右方先手时，左方每次在右方上次行动的分支中行动，即可获胜。

如果 $G \rhd 0, H \geq 0$，那么 $G + H \rhd 0$（$G \rhd 0$ 表示 $G > 0$ 或 $G \parallel 0$）。

- $G \rhd 0$ 即为：在 G 中，左方先手时，左方获胜。
- 在 $G + H$ 中，左方先手时，首先在 G 中行动，之后，左方每次在右方上次行动的分支中行动，即可获胜。

博弈之和的结果

如果 $G \geq 0, H \geq 0$，那么 $G + H \geq 0$。

- $G \geq 0, H \geq 0$ 即为：在 G, H 中，右方先手时，左方获胜。
- 在 $G + H$ 中，右方先手时，左方每次在右方上次行动的分支中行动，即可获胜。

如果 $G \mathrel{|\!\triangleright} 0, H \geq 0$，那么 $G + H \mathrel{|\!\triangleright} 0$（$G \mathrel{|\!\triangleright} 0$ 表示 $G > 0$ 或 $G \parallel 0$）。

- $G \mathrel{|\!\triangleright} 0$ 即为：在 G 中，左方先手时，左方获胜。
- 在 $G + H$ 中，左方先手时，首先在 G 中行动，之后，左方每次在右方上次行动的分支中行动，即可获胜。

整理之前的结果，可以得到以下这张表：显然，若 $G > 0, H > 0$，则 $G + H \neq 0$。

	$H = 0$	$H > 0$	$H < 0$	$H \parallel 0$
$G = 0$	$G + H = 0$	$G + H > 0$	$G + H < 0$	$G + H \parallel 0$
$G > 0$	$G + H > 0$	$G + H > 0$	$G + H \,?\, 0$	$G + H \mathrel{|\!\triangleright} 0$
$G < 0$	$G + H < 0$	$G + H \,?\, 0$	$G + H < 0$	$G + H \mathrel{\triangleleft\!|} 0$
$G \parallel 0$	$G + H \parallel 0$	$G + H \mathrel{|\!\triangleright} 0$	$G + H \mathrel{\triangleleft\!|} 0$	$G + H \,?\, 0$

Table 3: $G + H$ 的结局

左方选择中的负值

考虑计算 $\{-3\mid\}$。如果试图套用之前的规则，会得到 $-2<0$。

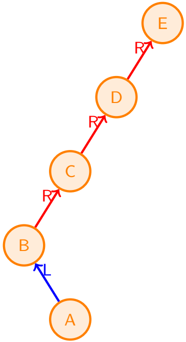

Figure 9: $\{-3\mid\}$

事实上，因为 $\{-3\mid\}$ 是“后手获胜”的，所以 $\{-3\mid\}=0$。

当 $a,b,c,\cdots<0$ 时，$\{a,b,c,\cdots\mid\}$ 是“后手获胜”的，即 $\{a,b,c,\cdots\mid\}=0$。

与之前的情况合并，可得 $\{a,b,c,\cdots\mid\}=\max\{\max\{a,b,c,\cdots\}+1,0\}$。

化简博弈：删除被优超的选择 (deleting dominated options)

定义 $A \geq B$ **当且仅当** $A - B \geq 0$，$A \leq B$ **当且仅当** $A - B \leq 0$。

在博弈 $G = \{A, B, C, \cdots \mid D, E, F, \cdots\}$ **中，如果有左方选择** $A \geq B$，**则** $G = \{A, C, \cdots \mid D, E, F, \cdots\}$。

只需要说明 $\{A, B, C, \cdots \mid D, E, F, \cdots\} - \{A, C, \cdots \mid D, E, F, \cdots\} = 0$：

化简博弈：删除被优超的选择 (deleting dominated options)

定义 $A \geq B$ 当且仅当 $A - B \geq 0$，$A \leq B$ 当且仅当 $A - B \leq 0$。

在博弈 $G = \{A, B, C, \cdots \mid D, E, F, \cdots\}$ 中，如果有左方选择 $A \geq B$，则 $G = \{A, C, \cdots \mid D, E, F, \cdots\}$。

只需要说明 $\{A, B, C, \cdots \mid D, E, F, \cdots\} - \{A, C, \cdots \mid D, E, F, \cdots\} = 0$：

- 如果先手的选择不是 B，后手只要在相反的分支中做出对应的选择即可获胜。
- 如果先手（左方）的选择是 B，后手只要在相反的分支中选择 A，博弈的值就会变为 $B - A \leq 0$，后手（右方）仍然能获胜。

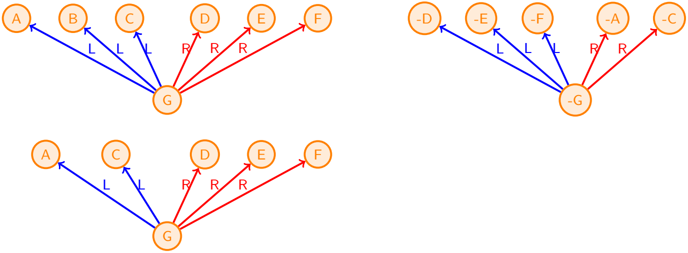

Figure 10: 删除被优超的选择

同理，如果有右方选择 $D \geq E$，则 $G = \{A, B, C, \cdots \mid D, F, \cdots\}$。

化简博弈：删除被优超的选择 (deleting dominated options)

如果博弈的选择都是数，那么博弈可以被化简到左右两方分别至多有 1 个选择。

Example 2

$\{\,|\,-15,-12,-9\} = \{\,|\,-15\}(=-16)$.
$\{1,2\,|\,5,7,9\} = \{2\,|\,5\}(=3)$.
$\{-9,-8,-2\,|\,-10,-7,-1\} = \{-2\,|\,-10\}$（不是数）.

双方选择都是整数的博弈

对于整数 a, b，考虑计算 $\{a \mid b\}$ 的值。

$a \geq b$ 的情况较为困难，因此先考虑 $a < b$ 的情况。

在具有整数值的博弈中，一方的行动总是会“消耗”自己的优势，因此左方的选择应该对左方更不利，即值更小。

如果 $a < 0 < b$，博弈 $\{a \mid b\}$ 是“后手获胜”的，因此 $\{a \mid b\} = 0$。

如果 $b \leq 0$，可以通过 $\{a \mid b\} = -\{-b \mid -a\}$ 转化为 $a \geq 0$ 的情况。

双方选择都是整数的博弈

对于整数 a, b，考虑计算 $\{a \mid b\}$ 的值。

$a \geq b$ 的情况较为困难，因此先考虑 $a < b$ 的情况。

在具有整数值的博弈中，一方的行动总是会“消耗”自己的优势，因此左方的选择应该对左方更不利，即值更小。

如果 $a < 0 < b$，博弈 $\{a \mid b\}$ 是“后手获胜”的，因此 $\{a \mid b\} = 0$。

如果 $b \leq 0$，可以通过 $\{a \mid b\} = -\{-b \mid -a\}$ 转化为 $a \geq 0$ 的情况。

如果 $0 \leq a < b$，博弈 $\{a \mid b\}$ 是“左方获胜”的。猜测 $\{a \mid b\}$ 可能是正整数。

设 $\{a \mid b\} = n$，其中 n 是正整数，那么 $\{a \mid b\} - n$ 是“后手获胜”的：

- 左方先手，选择 $\{a \mid b\} \to a$：由右方获胜，可得 $a - n < 0$。
- 右方先手，选择 $\{a \mid b\} \to b$：由左方获胜，可得 $b - n > 0$。
- 右方先手，选择 $-n \to -(n-1)$，博弈变为 $\{a \mid b\} - n + 1$：
  - 左方选择 $\{a \mid b\} \to a$：由左方获胜，可得 $a - n + 1 \geq 0$。

因此，$a < n \leq a + 1, n < b$。

- 当 $b - a \geq 2$ 时，$\{a \mid b\} = a + 1$。此时 $\{a \mid b\} = \{a \mid \}$，$b$ 可以看作没有用的右方选择。
- 当 $b - a = 1$ 时，$\{a \mid b\}$ 的值不是整数。

$\{0 \mid 1\} = ?$

目前值未知的博弈中，最简单的是 $\{0 \mid 1\}$。

有 $0 < \{0 \mid 1\} < 1$。

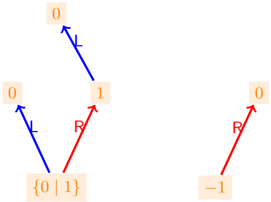

Figure 11: $\{0 \mid 1\} > 0, \{0 \mid 1\} - 1 < 0$

$\{0 \mid 1\} = ?$

目前值未知的博弈中，最简单的是 $\{0 \mid 1\}$。

有 $0 < \{0 \mid 1\} < 1$。

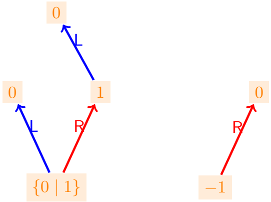

Figure 11: $\{0 \mid 1\} > 0, \{0 \mid 1\} - 1 < 0$

猜测 $\{0 \mid 1\}$ 可能与 $\frac{1}{2}$ 有相似的性质，可以发现 $\{0 \mid 1\} + \{0 \mid 1\} - 1 = 0$。

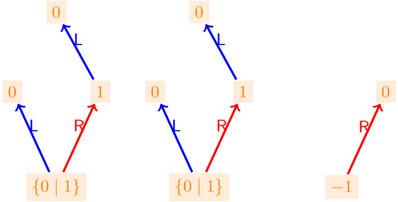

Figure 12: $\{0 \mid 1\} + \{0 \mid 1\} - 1 = 0$

$\{0 \mid 1\} = \frac{1}{2}$

定义 $\frac{1}{2} = \{0 \mid 1\}$。取负可得 $-\frac{1}{2} = \{-1 \mid 0\}$。

通过加法，可以得到 $\cdots, -\frac{5}{2}, 2, -\frac{3}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \cdots$。

Example 3

$\frac{5}{2} = 5 \cdot \frac{1}{2} = \{0 + 4 \cdot \frac{1}{2} \mid 1 + 4 \cdot \frac{1}{2}\} = \{2 \mid 3\}.$
$-\frac{3}{2} = 3 \cdot (-\frac{1}{2}) = \{-1 + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) \mid 0 + 2 \cdot (-\frac{1}{2})\} = \{-2 \mid -1\}.$
$\frac{6}{2} = 6 \cdot \frac{1}{2} = \{0 + 5 \cdot \frac{1}{2} \mid 1 + 5 \cdot \frac{1}{2}\} = \{\frac{5}{2} \mid \frac{7}{2}\}.$

一个数可以有不同形式 $\{2 \mid \}, \{\frac{5}{2} \mid \frac{7}{2}\}$ 是 3 的不同形式。
$\{\mid\}, \{-1 \mid 1\}, \{-\frac{1}{2} \mid \frac{1}{2}\}$ 是 0 的不同形式。

$\{0 \mid 1\} = \frac{1}{2}$

定义 $\frac{1}{2} = \{0 \mid 1\}$。取负可得 $-\frac{1}{2} = \{-1 \mid 0\}$。

通过加法，可以得到 $\cdots, -\frac{5}{2}, 2, -\frac{3}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \cdots$。

Example 3

$\frac{5}{2} = 5 \cdot \frac{1}{2} = \{0 + 4 \cdot \frac{1}{2} \mid 1 + 4 \cdot \frac{1}{2}\} = \{2 \mid 3\}.$
$-\frac{3}{2} = 3 \cdot (-\frac{1}{2}) = \{-1 + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) \mid 0 + 2 \cdot (-\frac{1}{2})\} = \{-2 \mid -1\}.$
$\frac{6}{2} = 6 \cdot \frac{1}{2} = \{0 + 5 \cdot \frac{1}{2} \mid 1 + 5 \cdot \frac{1}{2}\} = \{\frac{5}{2} \mid \frac{7}{2}\}.$

一个数可以有不同形式 $\{2 \mid \}, \{\frac{5}{2} \mid \frac{7}{2}\}$ 是 3 的不同形式。
$\{\mid\}, \{-1 \mid 1\}, \{-\frac{1}{2} \mid \frac{1}{2}\}$ 是 0 的不同形式。

一般地，有 $\frac{n}{2} = \{\frac{n-1}{2} \mid \frac{n+1}{2}\}$，其中 n 为任意整数。

现在，$\{n \mid n+1\} = n + \frac{1}{2}$ 已经得到了解决。

也就是说，对于所有整数 a, b $(a < b)$，$\{a \mid b\}$ 的值都已知。

双方选择是 $\frac{1}{2}$ 的倍数的博弈

考虑计算 $\{a \mid b\}$，其中 a, b 均为 $\frac{1}{2}$ 的倍数（存在整数 a', b'，使得 $a = \frac{a'}{2}, b = \frac{b'}{2}$）。

与分析“双方选择是整数的博弈”时类似，我们同样只需要讨论 $0 \leq a < b$ 的情况。

首先，检查 $\{a \mid b\}$ 是不是正整数：

- 之前的分析并没有用到“双方选择是整数”的性质，可以直接套用之前的结果。
- 如果存在正整数 n，满足 $a < n \leq a + 1, n < b$，那么 $\{a \mid b\} = n$。
- 换句话说，如果 $\lfloor a \rfloor + 1 < b$，那么 $\{a \mid b\} = \lfloor a \rfloor + 1$。

双方选择是 $\frac{1}{2}$ 的倍数的博弈

考虑计算 $\{a \mid b\}$，其中 a, b 均为 $\frac{1}{2}$ 的倍数（存在整数 a', b'，使得 $a = \frac{a'}{2}, b = \frac{b'}{2}$）。

与分析“双方选择是整数的博弈”时类似，我们同样只需要讨论 $0 \leq a < b$ 的情况。

首先，检查 $\{a \mid b\}$ 是不是正整数：

- 之前的分析并没有用到“双方选择是整数”的性质，可以直接套用之前的结果。
- 如果存在正整数 n，满足 $a < n \leq a + 1, n < b$，那么 $\{a \mid b\} = n$。
- 换句话说，如果 $\lfloor a \rfloor + 1 < b$，那么 $\{a \mid b\} = \lfloor a \rfloor + 1$。

如果 $\{a \mid b\}$ 不是正整数，假设 $\{a \mid b\} = c$，其中 c 是 $\frac{1}{2}$ 的倍数。

根据 $\{a \mid b\} - c$ 是“后手获胜”的，可得：

- 左方选择 $-c \to -c - \frac{1}{2}$：
  - 右方选择 $-c - \frac{1}{2} \to -c$：
    - 左方选择 $-c \to -c - \frac{1}{2} \cdots\cdots$

分析失败。

双方选择是 $\frac{1}{2}$ 的倍数的博弈

因为之前已经得到了“博弈是某个整数”的条件，所以不用考虑 c 是整数的情况。

可以利用 c 不是整数的性质进行分析。显然，$c+\frac{1}{2}, c-\frac{1}{2}$ 是整数。

双方选择是 $\frac{1}{2}$ 的倍数的博弈

因为之前已经得到了“博弈是某个整数”的条件，所以不用考虑 c 是整数的情况。

可以利用 c 不是整数的性质进行分析。显然，$c+\frac{1}{2}, c-\frac{1}{2}$ 是整数。

根据 $\{a \mid b\} - c$ 是“后手获胜”的，可得:

- 左方选择 $-c \to -c-\frac{1}{2}$:
  - 右方选择 $-c-\frac{1}{2} \to -c+\frac{1}{2}$ (因为 $-c-\frac{1}{2} = \{-c-\frac{3}{2} \mid -c+\frac{1}{2}\}$)，由于 $\{a \mid b\} - c + \frac{1}{2} > \{a \mid b\} - c = 0$，右方不可能通过这个选择获胜。
  - 右方选择 $\{a \mid b\} \to b$，由右方获胜，$b-c-\frac{1}{2} \leq 0$。
- 左方选择 $\{a \mid b\} \to a$，由右方获胜，$a-c<0$。
- 右方选择 $-c \to -c+\frac{1}{2}$:
  - 左方选择 $-c+\frac{1}{2} \to -c-\frac{1}{2}$ (因为 $-c+\frac{1}{2} = \{-c-\frac{1}{2} \mid -c+\frac{3}{2}\}$)，由于 $\{a \mid b\} - c - \frac{1}{2} < \{a \mid b\} - c = 0$，左方不可能通过这个选择获胜。
  - 左方选择 $\{a \mid b\} \to a$，由左方获胜，$a-c+\frac{1}{2} \geq 0$。
- 右方选择 $\{a \mid b\} \to b$，由左方获胜，$b-c>0$。

因此，$c-\frac{1}{2} \leq a < c < b \leq c+\frac{1}{2}$。

双方选择是 $\frac{1}{2}$ 的倍数的博弈

因为之前已经得到了“博弈是某个整数”的条件，所以不用考虑 c 是整数的情况。

可以利用 c 不是整数的性质进行分析。显然，$c+\frac{1}{2}, c-\frac{1}{2}$ 是整数。

根据 $\{a \mid b\}-c$ 是“后手获胜”的，可得：

- 左方选择 $-c \to -c-\frac{1}{2}$：
  - 右方选择 $-c-\frac{1}{2} \to -c+\frac{1}{2}$（因为 $-c-\frac{1}{2}=\{-c-\frac{3}{2} \mid -c+\frac{1}{2}\}$），由于 $\{a \mid b\}-c+\frac{1}{2} > \{a \mid b\}-c=0$，右方不可能通过这个选择获胜。
  - 右方选择 $\{a \mid b\} \to b$，由右方获胜，$b-c-\frac{1}{2} \leq 0$。
- 左方选择 $\{a \mid b\} \to a$，由右方获胜，$a-c<0$。
- 右方选择 $-c \to -c+\frac{1}{2}$：
  - 左方选择 $-c+\frac{1}{2} \to -c-\frac{1}{2}$（因为 $-c+\frac{1}{2}=\{-c-\frac{1}{2} \mid -c+\frac{3}{2}\}$），由于 $\{a \mid b\}-c-\frac{1}{2} < \{a \mid b\}-c=0$，左方不可能通过这个选择获胜。
  - 左方选择 $\{a \mid b\} \to a$，由左方获胜，$a-c+\frac{1}{2} \geq 0$。
- 右方选择 $\{a \mid b\} \to b$，由左方获胜，$b-c>0$。

因此，$c-\frac{1}{2} \leq a < c < b \leq c+\frac{1}{2}$。

换句话说，如果开区间 (a,b) 中不含整数，但是含有 $\frac{1}{2}$ 的倍数，那么 $\{a \mid b\}$ 就等于该 $\frac{1}{2}$ 的倍数（显然唯一）。

又一次，我们遇到了类似的问题：无法计算 $\{0 \mid \frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2} \mid 1\}, \{1 \mid \frac{3}{2}\}, \cdots$ 的值。

$\{0 \mid \frac{1}{2}\} = \frac{1}{4}$

可以发现 $\{0 \mid \frac{1}{2}\} + \{0 \mid \frac{1}{2}\} - \frac{1}{2} = 0$。

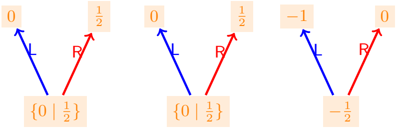

Figure 13: $\{0 \mid \frac{1}{2}\} + \{0 \mid \frac{1}{2}\} - \frac{1}{2} = 0$

定义 $\frac{1}{4} = \{0 \mid \frac{1}{2}\}$，可以得到所有 $\frac{1}{4}$ 的倍数。

$\{0 \mid \frac{1}{2}\} = \frac{1}{4}$

可以发现 $\{0 \mid \frac{1}{2}\} + \{0 \mid \frac{1}{2}\} - \frac{1}{2} = 0$。

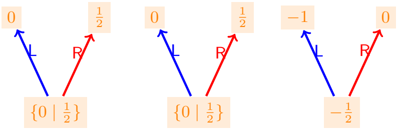

Figure 13: $\{0 \mid \frac{1}{2}\} + \{0 \mid \frac{1}{2}\} - \frac{1}{2} = 0$

定义 $\frac{1}{4} = \{0 \mid \frac{1}{2}\}$，可以得到所有 $\frac{1}{4}$ 的倍数。

再次考虑计算 $\{a \mid b\}$。

同理可得，如果 $\{a \mid b\} = c$，其中 c 是 $\frac{1}{4}$ 的奇数倍，那么 $c - \frac{1}{4} \le a < c < b \le c + \frac{1}{4}$。

换句话说，如果开区间 (a, b) 中不含 $\frac{1}{2}$ 的倍数，但是含有 $\frac{1}{4}$ 的倍数，那么 $\{a \mid b\}$ 就等于该 $\frac{1}{4}$ 的倍数。

是否有 $\{0 \mid \frac{1}{4}\} = \frac{1}{8}, \{0 \mid \frac{1}{8}\} = \frac{1}{16}, \cdots$?

$\{0 \mid \frac{1}{2^k}\} = \frac{1}{2^{k+1}}$

对于非负整数 k，有 $\{0 \mid \frac{1}{2^k}\} + \{0 \mid \frac{1}{2^k}\} = \frac{1}{2^k}$。

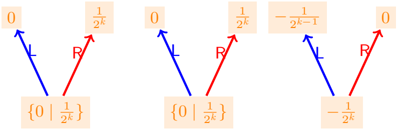

Figure 14: $\{0 \mid \frac{1}{2^k}\} + \{0 \mid \frac{1}{2^k}\} - \frac{1}{2^k} = 0$ $(k \geq 1)$

定义 $\frac{1}{2^{k+1}} = \{0 \mid \frac{1}{2^k}\}$，其中 k 为非负整数。

将若干个 $\frac{1}{2^k}$ 相加可得 $\frac{p}{2^k} = \{\frac{p-1}{2^k} \mid \frac{p+1}{2^k}\}$。

对于正整数 k，如果 $\{a \mid b\} = c$，其中 c 是 $\frac{1}{2^k}$ 的奇数倍，那么 $c - \frac{1}{2^k} \leq a < c < b \leq c + \frac{1}{2^k}$。

要计算一个 $\{a \mid b\}$ $(a < b)$，首先检查该值是否为整数，然后依次检查该值是否为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$ 的倍数。

简单性法则、数的最简形

简单性法则 (The Simplicity Rule)

$\{a \mid b\}$ 的值是开区间 (a, b) 中“最简单”的数。
其中数从“简单”到“复杂”依次为：$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots$，$\frac{1}{2}$ 的奇数倍、$\frac{1}{4}$ 的奇数倍、$\frac{1}{8}$ 的奇数倍$\cdots\cdots$

Example 4

$\{-1.75 \mid 3.25\} = 0.$
$\{\mid -3.125\} = -4.$
$\{2.71875 \mid 3.140625\} = 3.$
$\{1.125 \mid 1.625\} = 1.5.$
$\{1.5 \mid 1.765625\} = 1.75.$

数的最简形

以下 n, k 为正整数，p 为整数。之后会说明为什么它们是“最简单”的形式。
$0 = \{\mid\}.$
$n = \{n-1 \mid\}, -n = \{\mid -(n-1)\}.$
$\frac{2p+1}{2^k} = \{\frac{p}{2^{k-1}} \mid \frac{p+1}{2^{k-1}}\}.$

Example 5

$-4 = \{\mid -3\}.$
$7 = \{6 \mid\}.$
$-\frac{5}{2} = \{-3 \mid -2\}.$
$\frac{3}{8} = \{\frac{1}{4} \mid \frac{1}{2}\}.$

目前进展

目前，我们能用数表示满足以下条件的博弈 $G = \{A, B, C, \cdots \mid D, E, F, \cdots\}$ 的值：

- $A, B, C, \cdots, D, E, F, \cdots$ 都是已知的数。
- $\max\{A, B, C, \cdots\} < \min\{D, E, F, \cdots\}$。

1 基础

2 数

3 一些无穷小量

4 总结

$\{0 \mid 0\}$

在 $G^L < G^R$ 的条件下，我们已经能用数表示所有博弈。

接下来，我们允许 $G^L \not< G^R$。

首先，探究 $\{0 \mid 0\}$ 的性质。

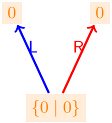

Figure 15: $\{0 \mid 0\}$

$\{0 \mid 0\}$

在 $G^L < G^R$ 的条件下，我们已经能用数表示所有博弈。

接下来，我们允许 $G^L \not< G^R$。

首先，探究 $\{0 \mid 0\}$ 的性质。

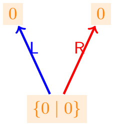

Figure 15: $\{0 \mid 0\}$

$\{0 \mid 0\}$ 是“先手获胜”的，即 $\{0 \mid 0\} \parallel 0$。

显然 $\{0 \mid 0\}$ 不等于任何数，因此我们需要引入一个符号表示 $\{0 \mid 0\}$。

$\{0 \mid 0\}$

在 $G^L < G^R$ 的条件下，我们已经能用数表示所有博弈。

接下来，我们允许 $G^L \nless G^R$。

首先，探究 $\{0 \mid 0\}$ 的性质。

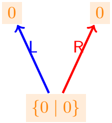

Figure 15: $\{0 \mid 0\}$

$\{0 \mid 0\}$ 是“先手获胜”的，即 $\{0 \mid 0\} \parallel 0$。

显然 $\{0 \mid 0\}$ 不等于任何数，因此我们需要引入一个符号表示 $\{0 \mid 0\}$。

定义 $* = \{0 \mid 0\}$ （$*$ 读作星 (star)）。

$*$ 可以和数相加，记 $*$ 与数 x 的和为 $x*$。

$*$ 有多大？

把 $*$ 和一个正数 x 进行比较，即计算 $* - x$ 的结局：

- 左方 $* \to 0$，博弈变为 $-x < 0$，右方获胜。
- 左方 $-x \to (-x)^L$：
  - 右方 $* \to 0$，博弈变为 $(-x)^L < -x < 0$，右方获胜。
- 右方 $* \to 0$，博弈变为 $-x < 0$，右方获胜。

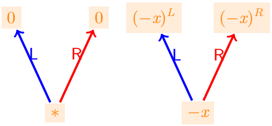

Figure 16: $* - x$

因此 $* < x$，即 $*$ **小于任何正数**。同理，$*$ **大于任何负数**。可以认为 $*$ 是一个无穷小量。

由加法的定义，可得 $x* = \{x, x^L + * \mid x, x^R + *\}$。

因为 $x > x^L + *, x < x^R + *$，可以用“删除被优超的选择”的方法化简博弈，从而 $x* = \{x \mid x\}$。

$* + *, \{* \mid *\}$

$* + *$ 是“后手获胜”的，所以 $* + * = 0$。

把一个 $*$ 移到等式的右边，可得 $* = -*$。

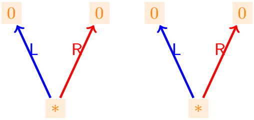

Figure 17: $* + *$

$\{* \mid *\}$ 同样是“后手获胜”的，所以 $\{* \mid *\} = 0$。

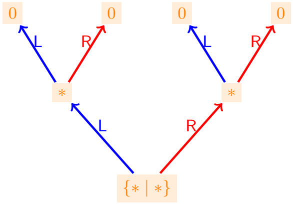

Figure 18: $\{* \mid *\}$

目前，我们已知的值相加得到的结果都可以表示成 x 或者 $x*$。

$\{0 \mid *\}$

读者可以自行验证：对于任意整数 x，都有 $0 < \{0 \mid *\} < x$。

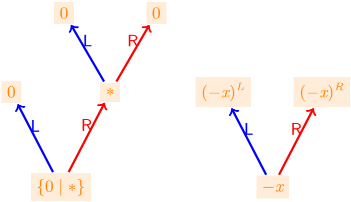

Figure 19: $\{0 \mid *\} > 0, \{0 \mid *\} - x < 0$

$\{0 \mid *\}$

读者可以自行验证：对于任意整数 x，都有 $0 < \{0 \mid *\} < x$。

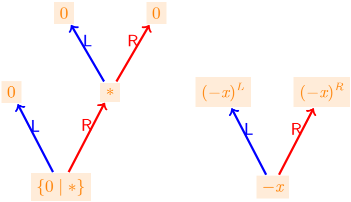

Figure 19: $\{0 \mid *\} > 0, \{0 \mid *\} - x < 0$

定义 $\uparrow = \{0 \mid *\}, \downarrow = -\uparrow = \{* \mid 0\}$（$\uparrow$ 读作上 (up)，$\downarrow$ 读作下 (down)）。

记录 $\uparrow, \downarrow$ 与 $*$ 的和时，可以把 $*$ 写在后面并省略加号。例如，可以把 $\uparrow + *$ 写作 $\uparrow *$。

同样可以认为 $\uparrow, \downarrow$ 是无穷小量。

$2 \cdot \uparrow, 3 \cdot \uparrow, \cdots ; 2 \cdot \downarrow, 3 \cdot \downarrow, \cdots$ 也都是无穷小量。

$\{0 \mid *\}$

读者可以自行验证：对于任意整数 x，都有 $0 < \{0 \mid *\} < x$。

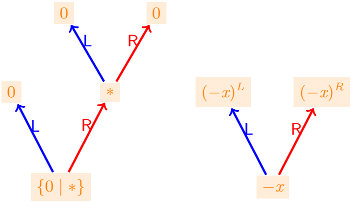

Figure 19: $\{0 \mid *\} > 0, \{0 \mid *\} - x < 0$

定义 $\uparrow = \{0 \mid *\}, \downarrow = -\uparrow = \{* \mid 0\}$（$\uparrow$ 读作上 (up)，$\downarrow$ 读作下 (down)）。

记录 $\uparrow, \downarrow$ 与 $*$ 的和时，可以把 $*$ 写在后面并省略加号。例如，可以把 $\uparrow + *$ 写作 $\uparrow *$。

同样可以认为 $\uparrow, \downarrow$ 是无穷小量。

$2 \cdot \uparrow, 3 \cdot \uparrow, \cdots ; 2 \cdot \downarrow, 3 \cdot \downarrow, \cdots$ 也都是无穷小量。

通过加法，可得 $\uparrow + \uparrow = \{\uparrow \mid \uparrow *\}$。这是 $2 \cdot \uparrow$ 的最简形吗？

更一般地，如何求任意一个博弈的最简形？

观察 $\{0, \frac{1}{4} \mid 1\} = \frac{1}{2}$。$\frac{1}{4}$ 没有影响博弈的值，这是因为虽然 $\frac{1}{4} > 0$，但是 $(\frac{1}{4})^R = \frac{1}{2}$，也就是说，左方获得的 $\frac{1}{4}$ 的“收益”会被右方“撤销”。利用这种思想，可以得到另一种化简博弈的方法。

化简博弈：绕开可逆行动 (bypassing reversible move)

对于博弈 $G=\{A,B,\cdots\mid C,D,\cdots\}$ 的一个右方选择 C，若存在 C 的某个左方选择 H 满足 $H\geq G$，则称右方到 C 的行动是**可逆的**。

此时，有 $G=\{A,B,\cdots\mid H^R,D,\cdots\}$。

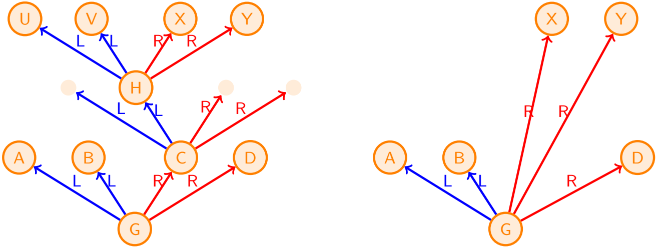

Figure 20: $G=\{A,B,\cdots\mid H^R,D,\cdots\}$

同理，如果对于一个左方选择 A，若存在 A 的右方选择 $F\leq G$，则称左方到 A 的行动是**可逆的**。

此时，有 $G=\{F^L,B,\cdots\mid C,D,\cdots\}$。

化简博弈：绕开可逆行动 (bypassing reversible move)

读者可以自行验证 $G - \{A, B, \cdots \mid H^R, D, \cdots\} = 0$。

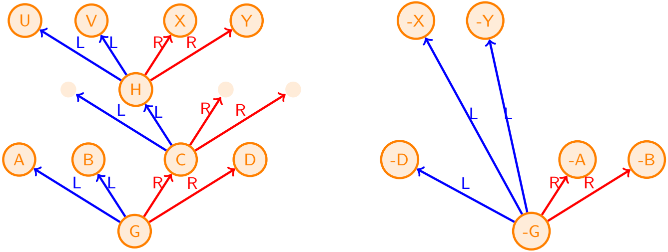

Figure 21: $G - \{A, B, \cdots \mid H^R, D, \cdots\}$

提示：

化简博弈：绕开可逆行动 (bypassing reversible move)

读者可以自行验证 $G - \{A, B, \cdots \mid H^R, D, \cdots\} = 0$。

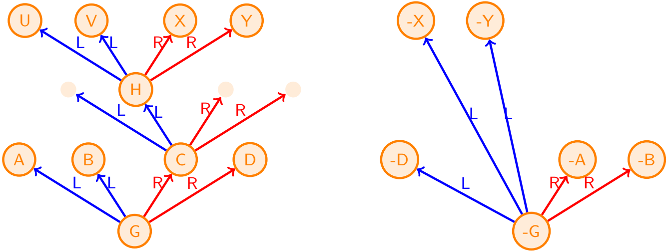

Figure 21: $G - \{A, B, \cdots \mid H^R, D, \cdots\}$

提示:

1. $H - G \geq 0.$
2. $H - X \lhd\!| \, 0.$

化简博弈：绕开可逆行动 (bypassing reversible move)

读者可以自行验证 $G - \{A, B, \cdots \mid H^R, D, \cdots\} = 0$。

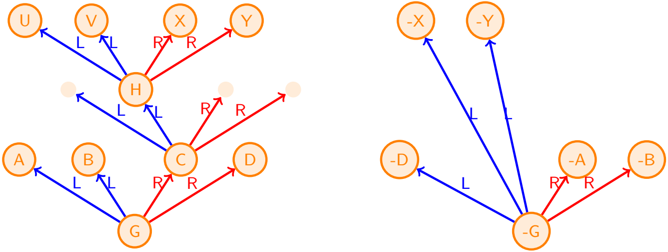

Figure 21: $G - \{A, B, \cdots \mid H^R, D, \cdots\}$

提示：

1. $H - G \geq 0$.
2. $H - X \lhd\!| \; 0$.
3. $G - X \lhd\!| \; 0$.

博弈的最简形

对一个博弈不断执行**删除被优超的选择**和**绕开可逆行动**，最后总能得到该博弈的**唯一**最简形。

博弈的最简形

对一个博弈不断执行**删除被优超的选择**和**绕开可逆行动**，最后总能得到该博弈的**唯一**最简形。

证明

假设有两个不能再执行**删除被优超的选择**或**绕开可逆行动**的博弈 $G = H$。
由于 $G = H$，$G - H$ 中后手有取胜的策略。不妨设先手为左方，且第一次行动在 G 中进行。
后手第一次行动一定在不同于先手第一次行动的分支中进行。

- 否则，有先手执行 $G \to A$，后手执行 $A \to B$，由于后手能获胜，有 $B - H \leq 0$，即 $B \leq G$，因此 A 为**可逆**行动，与假设矛盾。

博弈的最简形

对一个博弈不断执行**删除被优超的选择**和**绕开可逆行动**，最后总能得到该博弈的**唯一**最简形。

证明

假设有两个不能再执行**删除被优超的选择**或**绕开可逆行动**的博弈 $G=H$。
由于 $G=H$，$G-H$ 中后手有取胜的策略。不妨设先手为左方，且第一次行动在 G 中进行。
后手第一次行动一定在不同于先手第一次行动的分支中进行。

- 否则，有先手执行 $G\to A$，后手执行 $A\to B$，由于后手能获胜，有 $B-H\le 0$，即 $B\le G$，因此 A 为**可逆**行动，与假设矛盾。

因此，若先手执行 $G\to A\ (A\in G^L)$，后手会执行 $-H\to -B\ (B\in H^L)$，由于后手能取胜，$A-B\le 0$，即 $A\le B$。
也就是说，对于 G 中的每个左方选择，都存在 H 中的一个左方选择大于等于该 G 中的左方选择。交换 G 和 H，该命题仍然成立。
取 $A\in G^L$，再取 $B\in H^L, B\ge A$，以及 $C\in G^L, C\ge B$，有 $A\le B\le C$。
由于 G^L 中没有被**优超**的选择，$A=C$，故 $A=B=C$。
所以，G 中的每个左方选择都在 H 的左方选择中存在，即 $G^L\subseteq H^L$。同理 $H^L\subseteq G^L$，因此 $G^L=H^L$。
对应地，有 $G^R=H^R$。
综上所述，$G^L=H^L$，$G^R=H^R$，即 G 和 H 的形式相同。

化简一些博弈

Example 6

$2\cdot \uparrow = \{\uparrow | \uparrow *\}$

$\uparrow * = \{*, \uparrow | 0, \uparrow\}$

$\{* \mid 1\}$

化简一些博弈

Example 6

$2\cdot\uparrow = \{\uparrow \mid \uparrow *\}$
$\uparrow * = \{*, \uparrow \mid 0, \uparrow\}$
$\{* \mid 1\}$

Answer

$2\cdot\uparrow = \{0 \mid \uparrow *\}$
$\uparrow * = \{0, * \mid 0\}$
$\{* \mid 1\} = 0$

Nimber

定义 $*n = \{*0, *1, \cdots, *(n-1) \mid *0, *1, \cdots, *(n-1)\}$，把这类值称作 **nimber**。直观地，$*n$ 的值相当于一个大小为 n 的 nim 堆的值。

特别地，$*0 = 0, *1 = *$。$*$ 之后的数即为熟知的 **nim** 值或 **SG** 函数值。

无偏 (impartial) 博弈（双方选择总是相同的博弈）的值总是 nimber。

Nimber

定义 $*n=\{*0,*1,\cdots,*(n-1)\mid *0,*1,\cdots,*(n-1)\}$，**把这类值称作 nimber**。直观地，$*n$ 的值相当于一个大小为 n 的 nim 堆的值。

特别地，$*0=0, *1=*$。$*$ 之后的数即为熟知的 **nim** 值或 **SG** 函数值。

无偏 (impartial) 博弈（双方选择总是相同的博弈）的值总是 nimber。

设 $G=\{*a,*b,*c,\cdots\mid *a,*b,*c,\cdots\}, g=\mathrm{MEX}\{a,b,c,\cdots\}$，其中 MEX 表示一个集合中最小的未出现的**非负整数**，有 $G=*g$。

这是因为所有 nim 值大于 $>g$ 的选择都是**可逆**的：设 $*d$ 为 G 的选择且 $d>g$，$*d$ 有选择 $*g=G$，因此可以用 $*g$ 的选择（$*0,*1,\cdots,*(g-1)$）替换 $*d$。

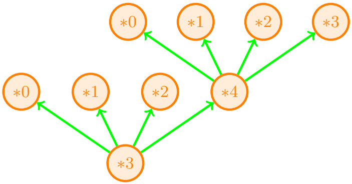

Figure 22: $\{*0,*1,*2,*4\mid *0,*1,*2,*4\}=*3$

Nimber 的加法

为了方便，用 $a \oplus b = c$ 表示 $*a + *b = *c$。显然，“$\oplus$” 运算有结合律和交换律。

已知 $n \oplus 0 = n, n \oplus n = 0$。

假设对于所有 $a, b < 2^k$，$a \oplus b$ 已知，且 $a \oplus b < 2^k$。

对于 $a < 2^k$，**有** $(2^k + a) \oplus 2^k = a$，**即** $2^k + a = 2^k \oplus a$。

- $a = 0$ 时显然成立。假设 $a < a_0$ 时成立，可以说明 $a = a_0$ 时仍然成立。
- $*(2^k + a) + *2^k$ 的选择包含 $i = 0, 1, \cdots, a - 1$：总是有选择 $*(2^k + i) + *2^k = *i$。
- $*(2^k + a) + *2^k$ 的选择不包含 a：若存在，一定会把一个博弈的 nim 值降到低于 2^k（否则为 $*(2^k + i) + *2^k = *i$，而 $i < a$）。因此有 $*x + *y = *a$，其中 $x \geq 2^k, y < 2^k, a < 2^k$，可得 $a \oplus y = x$，与假设矛盾。

Nimber 的加法

为了方便，用 $a \oplus b = c$ 表示 $*a + *b = *c$。显然，“$\oplus$” 运算有结合律和交换律。

已知 $n \oplus 0 = n, n \oplus n = 0$。

假设对于所有 $a, b < 2^k$，$a \oplus b$ 已知，且 $a \oplus b < 2^k$。

对于 $a < 2^k$，**有** $(2^k + a) \oplus 2^k = a$，**即** $2^k + a = 2^k \oplus a$。

- $a = 0$ 时显然成立。假设 $a < a_0$ 时成立，可以说明 $a = a_0$ 时仍然成立。
- $*(2^k + a) + *2^k$ 的选择包含 $i = 0, 1, \cdots, a - 1$：总是有选择 $*(2^k + i) + *2^k = *i$。
- $*(2^k + a) + *2^k$ 的选择不包含 a：若存在，一定会把一个博弈的 nim 值降到低于 2^k（否则为 $*(2^k + i) + *2^k = *i$，而 $i < a$）。因此有 $*x + *y = *a$，其中 $x \geq 2^k, y < 2^k, a < 2^k$，可得 $a \oplus y = x$，与假设矛盾。

可以发现，对于所有 $a, b < 2^{k+1}$，$a \oplus b$ 已知，且 $a \oplus b < 2^{k+1}$。

计算两个 nimber 之和时，可以根据 $2^k + a = 2^k \oplus a$ 把 nimber 拆成若干个 2 的幂，然后利用 $n \oplus n = 0$ 消去相同的 2 的幂，然后逆用 $2^k + a = 2^k \oplus a$ 把 2 的幂合并为一个 nimber。

不难发现，“$\oplus$” 就是**按位异或**。

“上”和“星”之和的最简形

$\uparrow *n = \{0 \mid *m\}$
$2\cdot\uparrow + *\, n = \{0 \mid \uparrow *m\}$
$3\cdot\uparrow + *\, n = \{0 \mid 2\cdot\uparrow + *\, m\}$
$\cdots\cdots$

其中 $n \neq 1, m = n \oplus 1$。

$\uparrow * = \{0, * \mid 0\}$
$2\cdot\uparrow +* = \{0 \mid \uparrow\}$
$3\cdot\uparrow +* = \{0 \mid 2\cdot\uparrow\}$
$\cdots\cdots$

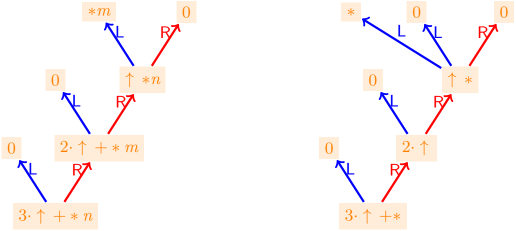

Figure 23: 最简形的可视化

“数”“上”“星”之和的结局

形如“数”“上”“星”之和的博弈，双方总是先在“上”“星”中行动，最后在“数”中行动。

Example 7

$3\uparrow * = \{3, 3* \mid 3\}$.

“数”“上”“星”之和的结局

形如“数”“上”“星”之和的博弈，双方总是先在“上”“星”中行动，最后在“数”中行动。

Example 7

$3 \uparrow * = \{3, 3* \mid 3\}.$

设 $G = a + n \cdot \uparrow + * m$。

- $a > 0$: $G > 0$.
- $a < 0$: $G < 0$.
- $a = 0$:
  - $n \geq 2$: $G > 0$.
  - $n = 1$:
    - $m = 1$: $G \parallel 0$.
    - $m \neq 1$: $G > 0$.
  - $n = 0$:
    - $m = 0$: $G = 0$.
    - $m \neq 0$: $G \parallel 0$.
  - $n = -1$:
    - $m = 1$: $G \parallel 0$.
    - $m \neq 1$: $G < 0$.
  - $n \leq -2$: $G < 0$.

1 基础

2 数

3 一些无穷小量

4 总结

更多值？

还有很多具有特殊性质的博弈。

Example 8

$\pm a = \{a \mid -a\}\ (a \geq 0).$
$+_a = \{0 \mid \{0 \mid -a\}\}\ (a \geq 0).$

很难快速计算一般的博弈之和。

回顾

- 博弈可以用 **DAG** 或**树**表示。
- 博弈 G 的结局：$G > 0$ - **左方获胜**，$G < 0$ - **右方获胜**，$G = 0$ - **后手获胜**，$G \parallel 0$ - **先手获胜**。
- 可以用**简单性法则**计算数。
- 对一个博弈不断执行**删除被优超的选择**和**绕开可逆行动**，最后总能得到该博弈的**唯一**最简形。

如果希望了解更多关于博弈的内容，可以阅读 *Winning Ways for Your Mathematical Plays*。

Thanks for listening!