

博弈理论入门

刘恒熙

宁波市镇海中学

2025 年 5 月 16 日

1 基础

2 数

3 一些无穷小量

4 总结

博弈是什么？

本次讲课涉及的博弈均满足以下条件：

- 有两位玩家，通常称为左方和右方。
- 存在有限多种**局势**，其中有一个**初始局势**。
- 有明确定义的**规则**安排每一步走法，使一个玩家从一个某一**局势**转移到他的**选择**。
- 左方和右方在整个游戏中交替行动。
- 两个玩家都知道一切情况，即有**完全信息**。
- 没有**随机行动**。
- 按照**正常游戏**规定，不能行动的玩家**输**。
- 规则保证从一个局势出发，不能经过若干次行动回到原来的局势，即游戏总是会由于某位玩家不能行动结束。

用 DAG / 树表示博弈

用 DAG 表示博弈：用节点表示局势，用标 L 的有向边表示左方选择，用标 R 的有向边表示右方选择。

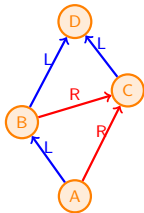


Figure 1: 用 DAG 表示一个博弈

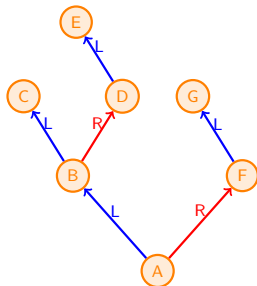


Figure 2: 用树表示一个博弈

用树表示博弈：把从不同的转移路径到达的同一个局势看作不同的局势。

例如，右图中的 C, E, G 均对应左图中的同一个局势 D，右图中的 D, F 均对应左图中的同一个局势 C。

“局势”并不包含下一步由谁进行 右图中局势 B 的左方选择不应该被看作没用的，因为它可能会在把博弈相加后起作用。

博弈的结局

给定博弈对应的 DAG，可以根据以下规则，在 DAG 上进行 DP，计算左方先走时的胜者和右方先走时的胜者。

- 对于一个局势，左方先走时能获胜，当且仅当存在一个左方选择，使得在该局势中，若右方先走，则左方获胜。
- 对于一个局势，右方先走时能获胜，当且仅当存在一个右方选择，使得在该局势中，若左方先走，则右方获胜。

博弈的结局

给定博弈对应的 DAG，可以根据以下规则，在 DAG 上进行 DP，计算左方先走时的胜者和右方先走时的胜者。

- 对于一个局势，左方先走时能获胜，当且仅当存在一个左方选择，使得在该局势中，若右方先走，则左方获胜。
- 对于一个局势，右方先走时能获胜，当且仅当存在一个右方选择，使得在该局势中，若左方先走，则右方获胜。

根据左方先走时的胜者和右方先走时的胜者，可以将博弈的结局分为四类：

		左方先走	
		左方获胜	右方获胜
右方先走	左方获胜	左方获胜	后手获胜
	右方获胜	先手获胜	右方获胜

Table 1: 博弈的结局

博弈的相加

用以下记号表示局势 G 的左方选择有 A, B, C, \dots , 右方选择有 D, E, F, \dots :

$$G = \{A, B, C, \dots \mid D, E, F, \dots\}$$

把 G 的左方选择记作 G^L , 右方选择记作 G^R , 有 $G = \{G^L \mid G^R\}$ 。

博弈的相加

用以下记号表示局势 G 的左方选择有 A, B, C, \dots , 右方选择有 D, E, F, \dots :

$$G = \{A, B, C, \dots \mid D, E, F, \dots\}$$

把 G 的左方选择记作 G^L , 右方选择记作 G^R , 有 $G = \{G^L \mid G^R\}$ 。

两个博弈的和, 就是同时进行两个博弈, 玩家每一步需要在两个博弈之一行动一次。

更形式化地, 定义两个博弈 G, H 的和

$$G + H = \{G^L + H, G + H^L \mid G^R + H, G + H^R\}$$

其中, $G^L + H$ 表示将 G^L 中的每一个局势分别和 H 相加得到的若干个局势。
 G, H 称作 $G + H$ 的分支。

博弈的相加

用以下记号表示局势 G 的左方选择有 A, B, C, \dots , 右方选择有 D, E, F, \dots :

$$G = \{A, B, C, \dots \mid D, E, F, \dots\}$$

把 G 的左方选择记作 G^L , 右方选择记作 G^R , 有 $G = \{G^L \mid G^R\}$ 。

两个博弈的和, 就是同时进行两个博弈, 玩家每一步需要在两个博弈之一行动一次。

更形式化地, 定义两个博弈 G, H 的和

$$G + H = \{G^L + H, G + H^L \mid G^R + H, G + H^R\}$$

其中, $G^L + H$ 表示将 G^L 中的每一个局势分别和 H 相加得到的若干个局势。
 G, H 称作 $G + H$ 的分支。

例如, 若 $G = \{A \mid B, C\}$, $H = \{D, E \mid F\}$, 则
 $G + H = \{A + H, G + D, G + E \mid B + H, C + H, G + F\}$ 。

根据博弈相加的意义, 博弈的加法显然满足结合律和交换律。

如果把两个分别含有 $\Theta(n)$ 个局势的博弈相加, 局势数量可以达到 $\Theta(n^2)$;
而如果有 m 个相加, 局势数量可以达到 $\Theta(n^m)$ 。

因此我们需要寻找快速计算 (满足一定条件的) 博弈的和的方法。

寻找等价关系

两个分别含有 $\Theta(n)$ 个局势的博弈相加，局势数量确实是 $\Theta(n^2)$ 的，但是通常我们只关心一个博弈的性质，例如某一方先走时的胜者。所以，可以尝试用更简洁的“等价”博弈来代替原来的博弈。

如何定义两个博弈“等价”？

寻找等价关系

两个分别含有 $\Theta(n)$ 个局势的博弈相加，局势数量确实是 $\Theta(n^2)$ 的，但是通常我们只关心一个博弈的性质，例如某一方先走时的胜者。所以，可以尝试用更简洁的“等价”博弈来代替原来的博弈。

如何定义两个博弈“等价”？

两个实数 x, y 相等，当且仅当 $x + (-y) = 0$ （或者写作 $x - y = 0$ ）。

类似地，可以定义两个博弈相等。在定义相等之前，需要先定义博弈的负，以及一个博弈是否“= 0”。

寻找等价关系

两个分别含有 $\Theta(n)$ 个局势的博弈相加，局势数量确实是 $\Theta(n^2)$ 的，但是通常我们只关心一个博弈的性质，例如某一方先走时的胜者。所以，可以尝试用更简洁的“等价”博弈来代替原来的博弈。

如何定义两个博弈“等价”？

两个实数 x, y 相等，当且仅当 $x + (-y) = 0$ （或者写作 $x - y = 0$ ）。

类似地，可以定义两个博弈相等。在定义相等之前，需要先定义博弈的负，以及一个博弈是否“= 0”。

原来的“=”表示两个博弈的所有局势可以一一对应，或者说两个博弈对应的树相同。

在完成定义和验证定义的合理性之前，先将博弈“等价”记作“ \equiv ”，而博弈完全相同仍然记作“=”。

博弈的负

定义一个博弈的负为交换左方和右方的选择得到的博弈。(或者把博弈对应的图中，标 L 的边改为标 R，标 R 的边改为标 L。)

更形式化地，对于一个博弈 $G = \{G^L \mid G^R\}$ ，定义

$$-G = \{-G^R \mid -G^L\}$$

其中， $-G^R$ 表示将 G^R 中的每一个局势分别取负得到的若干个局势。

显然，有 $-(-G) = G$ 。

由于本次讲课涉及的博弈都是有限的，通过上述递归定义的博弈的负是良定义的。

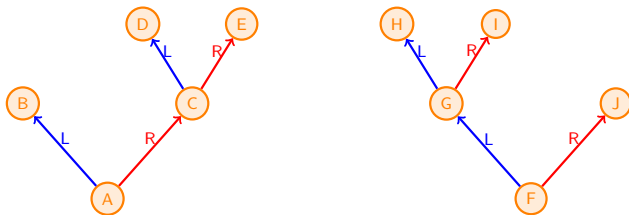


Figure 3: $F = -A$

零博弈

设 G_0 是一个初始局势下双方都不能行动的博弈。

对于任意的博弈 H , 有 $G_0 + H = H$, 因此可以认为 G_0 类似 0 的性质。

G_0 属于“后手获胜”类的博弈, 那么“后手获胜”类的博弈是否都具有这样的性质?

零博弈

设 G_0 是一个初始局势下双方都不能行动的博弈。

对于任意的博弈 H , 有 $G_0 + H = H$, 因此可以认为 G_0 类似 0 的性质。

G_0 属于“后手获胜”类的博弈, 那么“后手获胜”类的博弈是否都具有这样的性质?

设 G 是一个“后手获胜”的博弈。

对于任意的博弈 H , $G + H$ 和 H 的结局相同。

也就是说, 指定先手后, 在 H 中能获胜的一方在 $G + H$ 中仍然能获胜。

在 H 中能获胜的一方可以采取以下策略在 $G + H$ 中获胜:

- 如果对方上次行动是在 G 中进行的, 在 G 中行动一次。
- 否则 (对方上次行动是在 H 中进行的, 或者这是 $G + H$ 的第一次行动), 在 H 中行动一次。

定义 $G \equiv 0$ 当且仅当在 G 中, 后手能获胜。

博弈的相等

定义两个博弈 G, H 相等, 当且仅当 $G + (-H) \equiv 0$ (或 $G - H \equiv 0$)。

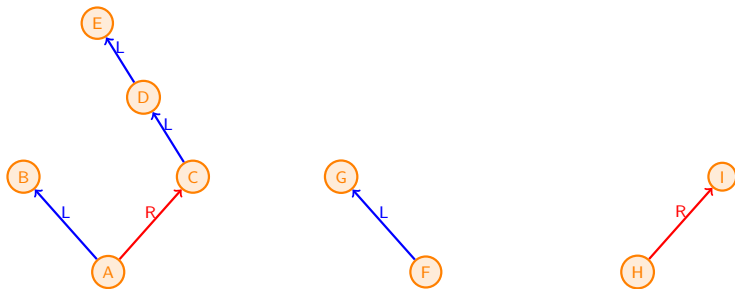


Figure 4: $H = -F \wedge A + H \equiv 0 \implies A \equiv F$

验证 “=”, “0”, “-” 的性质

“ \equiv ” 是等价关系。

■ 对任意的博弈 A , 有 $A \equiv A$:

- 只需要说明在 $A + (-A)$ 中, 后手总是有取胜的策略。
- 不妨设先手为左方, 且左方在 A 中走到某个 $B \in A^L$, 右方可以 $-A = \{-A^R \mid -A^L\}$ 中走到 $-B \in -A^L$, 此时总博弈为 $B + (-B)$, 右方仍然有取胜策略。



Figure 5: A 与 $-A$

验证 “=”, “0”, “-” 的性质

“ \equiv ” 是等价关系。

■ 对任意的博弈 A , 有 $A \equiv A$:

- 只需要说明在 $A + (-A)$ 中, 后手总是有取胜的策略。
- 不妨设先手为左方, 且左方在 A 中走到某个 $B \in A^L$, 右方可以 $-A = \{-A^R \mid -A^L\}$ 中走到 $-B \in -A^L$, 此时总博弈为 $B + (-B)$, 右方仍然有取胜策略。



Figure 5: A 与 $-A$

■ 若 $A \equiv B$, 则 $B \equiv A$ 。

- 令 $D = A - B$, 只需要说明若 $D \equiv 0$, 则 $-D \equiv 0$ 。
- 交换左方和右方的选择, 不会改变一个博弈是否是“后手获胜”的。

验证 “=”, “0”, “-” 的性质

“ \equiv ” 是等价关系。

■ 对任意的博弈 A , 有 $A \equiv A$:

- 只需要说明在 $A + (-A)$ 中, 后手总是有取胜的策略。
- 不妨设先手为左方, 且左方在 A 中走到某个 $B \in A^L$, 右方可以 $-A = \{-A^R \mid -A^L\}$ 中走到 $-B \in -A^L$, 此时总博弈为 $B + (-B)$, 右方仍然有取胜策略。

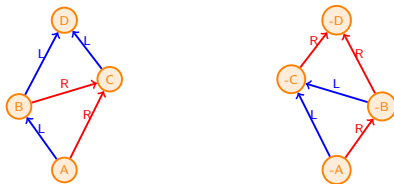


Figure 5: A 与 $-A$

■ 若 $A \equiv B$, 则 $B \equiv A$ 。

- 令 $D = A - B$, 只需要说明若 $D \equiv 0$, 则 $-D \equiv 0$ 。
- 交换左方和右方的选择, 不会改变一个博弈是否是“后手获胜”的。

■ 若 $A \equiv B, B \equiv C$, 则 $A \equiv C$ 。

- 令 $D = A - B, E = B - C$, 只需要说明若 $D \equiv 0, E \equiv 0$, 则 $D + E \equiv 0$ 。
- D, E 均是“后手获胜”的。加上一个“后手获胜”的博弈, 不会改变一个博弈的结局。

验证 “=”, “0”, “-” 的性质

在该等价关系下，加法、负、根据选择构造博弈仍然能进行。

- 若 $A \equiv A', B \equiv B'$ ，则 $A + B \equiv A' + B'$ 。
- $(A - A') + (B - B') \equiv 0$ 。

验证 “=”, “0”, “-” 的性质

在该等价关系下，加法、负、根据选择构造博弈仍然能进行。

- 若 $A \equiv A', B \equiv B'$ ，则 $A + B \equiv A' + B'$ 。
 - $(A - A') + (B - B') \equiv 0$.
- 若 $A \equiv A'$ ，则 $-A \equiv -A'$ 。
 - $-A - (-A') \equiv -(A - A') \equiv 0$.

验证 “=”, “0”, “-” 的性质

在该等价关系下，加法、负、根据选择构造博弈仍然能进行。

- 若 $A \equiv A', B \equiv B'$ ，则 $A + B \equiv A' + B'$ 。
 - $(A - A') + (B - B') \equiv 0$.
- 若 $A \equiv A'$ ，则 $-A \equiv -A'$ 。
 - $-A - (-A') \equiv -(A - A') \equiv 0$.
- 若 $A \equiv A', B \equiv B', C \equiv C', \dots, D \equiv D', E \equiv E', F \equiv F', \dots$ ，则 $\{A, B, C, \dots \mid D, E, F, \dots\} \equiv \{A', B', C', \dots \mid D', E', F', \dots\}$ 。
 - 在博弈 $\{A, B, C, \dots \mid D, E, F, \dots\} - \{A', B', C', \dots \mid D', E', F', \dots\}$ 中，后手只要走到不同于先手第一步选择分支中，与先手的选择等价的选择就能获胜。

验证 “=”, “0”, “-” 的性质

用 0 表示一个双方都不能进行任何行动的博弈，即 $0 = \{|\}$ 。

容易验证 0 是一个“后手获胜”的博弈，且 “ $\equiv 0$ ” 的含义不变。

对于任意的博弈 G ，有 $G + 0 \equiv G$ 。

- $G + 0 - G \equiv (G - G) + 0 \equiv 0.$

验证 “=”, “0”, “-” 的性质

用 0 表示一个双方都不能进行任何行动的博弈，即 $0 = \{|\}$ 。

容易验证 0 是一个“后手获胜”的博弈，且 “ $\equiv 0$ ” 的含义不变。

对于任意的博弈 G ，有 $G + 0 \equiv G$ 。

$$\blacksquare G + 0 - G \equiv (G - G) + 0 \equiv 0.$$

对于任意的博弈 G ，有 $G + (-G) \equiv 0$ 。

$$\blacksquare G + (-G) + 0 \equiv (G - G) + 0 \equiv 0.$$

从现在开始，用 “=” 表示两个博弈相等。

1 基础

2 数

3 一些无穷小量

4 总结

只有一方能行动的博弈

为了寻找快速计算（满足一定条件的）博弈的和的方法，先从最简单的情况入手。

考虑类似下图展示的博弈，在这样的博弈中只有（至多）一方能行动。

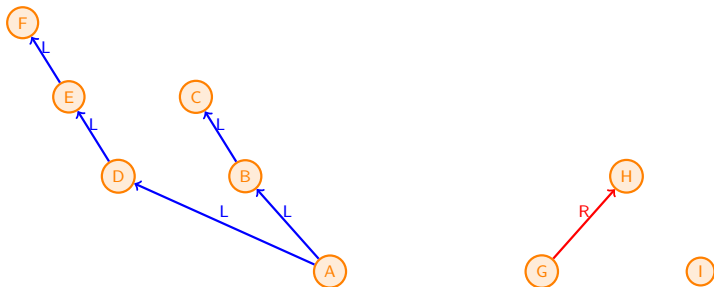


Figure 6: 在 A, G, I 中，只有一方能行动

在博弈 $A + G + I$ 中，无论谁先行动，左方总是能获胜。

这是因为左方能沿着 $A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F$ 走 3 步，而右方只能沿着 $G \rightarrow H$ 走 1 步。

这启发我们用数表示一个博弈带给一方的优势。

用整数表示自由步

我们希望用 1 表示左方的一个自由步，用 -1 表示右方的一个自由步。

定义 1 为只能由左方行动一次的博弈，即 $1 = \{0 \mid \}$ 。

根据定义，有 $-1 = \{ \mid -0 \} = \{ \mid 0 \}$ 。

用整数表示自由步

我们希望用 1 表示左方的一个自由步，用 -1 表示右方的一个自由步。

定义 1 为只能由左方行动一次的博弈，即 $1 = \{0 \mid\}$ 。

根据定义，有 $-1 = \{\mid -0\} = \{\mid 0\}$ 。

可以把 1 相加得到更大的数： $2 = 1 + 1 = \{1 + 0, 0 + 1 \mid\} = \{1 \mid\}$,

$3 = 2 + 1 = \{2 + 0, 1 + 1 \mid\} = \{2 \mid\}$ 。

一般地，对于任意的正整数 n ，有 $n + 1 = \{n \mid\}$, $-(n + 1) = \{\mid -n\}$ 。

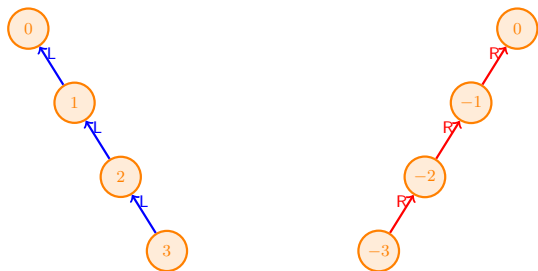


Figure 7: 整数值

用整数表示自由步

当一方有多个选择时，能为自己留下最多的自由步的选择是最优的。

Example 1

在 $\{1, 2 \mid\}$ 中，左方应该选择 2 而不是 1，因此 $\{1, 2 \mid\} = \{2 \mid\} = 3$ 。

一般地，对于非负整数 a, b, c, \dots ，有

$$\{a, b, c, \dots \mid\} = \{\max\{a, b, c, \dots\} \mid\} = \max\{a, b, c, \dots\} + 1.$$

可以用后面提到的“删除被优越的选择”更严谨地说明。

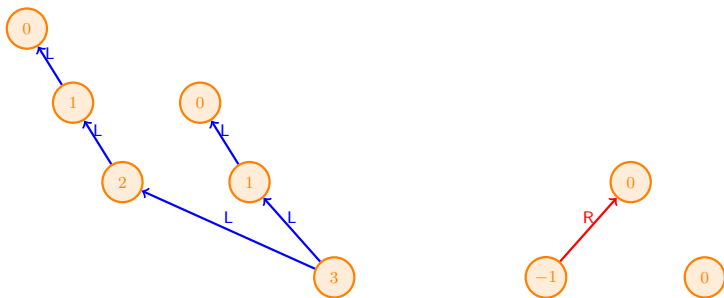


Figure 8: $3 = \{1, 2 \mid\}$, $-1 = \{\mid 0\}$, $0 = \{\mid\}$

正、负、零、模糊

用 $G > 0$ 表示在 G 中, 无论谁先走, 左方都能获胜。

用 $G < 0$ 表示在 G 中, 无论谁先走, 右方都能获胜。

容易验证 $1, 2, 3, \dots > 0$, $-1, -2, -3, \dots < 0$ 。

如果在 G 中, 先走的玩家总是能获胜, 则称 G 是模糊 (fuzzy) 的, 记作 $G \parallel 0$ (G 混淆于 (confused with) 0)。

		左方先走	
		左方获胜	右方获胜
右方先走	左方获胜	$G > 0$	$G = 0$
	右方获胜	$G \parallel 0$	$G < 0$

Table 2: 用符号表示博弈 G 的结局

博弈之和的结果

如果 $G \geq 0, H \geq 0$, 那么 $G + H \geq 0$ 。

- $G \geq 0, H \geq 0$ 即为：在 G, H 中，右方先手时，左方获胜。
- 在 $G + H$ 中，右方先手时，左方每次在右方上次行动的分支中行动，即可获胜。

博弈之和的结果

如果 $G \geq 0, H \geq 0$, 那么 $G + H \geq 0$ 。

- $G \geq 0, H \geq 0$ 即为：在 G, H 中，右方先手时，左方获胜。
- 在 $G + H$ 中，右方先手时，左方每次在右方上次行动的分支中行动，即可获胜。

如果 $G \triangleright 0, H \geq 0$, 那么 $G + H \triangleright 0$ ($G \triangleright 0$ 表示 $G > 0$ 或 $G \parallel 0$)。

- $G \triangleright 0$ 即为：在 G 中，左方先手时，左方获胜。
- 在 $G + H$ 中，左方先手时，首先在 G 中行动，之后，左方每次在右方上次行动的分支中行动，即可获胜。

博弈之和的结果

如果 $G \geq 0, H \geq 0$, 那么 $G + H \geq 0$ 。

- $G \geq 0, H \geq 0$ 即为: 在 G, H 中, 右方先手时, 左方获胜。
- 在 $G + H$ 中, 右方先手时, 左方每次在右方上次行动的分支中行动, 即可获胜。

如果 $G \triangleright 0, H \geq 0$, 那么 $G + H \triangleright 0$ ($G \triangleright 0$ 表示 $G > 0$ 或 $G \parallel 0$)。

- $G \triangleright 0$ 即为: 在 G 中, 左方先手时, 左方获胜。
- 在 $G + H$ 中, 左方先手时, 首先在 G 中行动, 之后, 左方每次在右方上次行动的分支中行动, 即可获胜。

整理之前的结果, 可以得到以下这张表: 显然, 若 $G > 0, H > 0$, 则 $G + H \neq 0$ 。

	$H = 0$	$H > 0$	$H < 0$	$H \parallel 0$
$G = 0$	$G + H = 0$	$G + H > 0$	$G + H < 0$	$G + H \parallel 0$
$G > 0$	$G + H > 0$	$G + H > 0$	$G + H ? 0$	$G + H \triangleright 0$
$G < 0$	$G + H < 0$	$G + H ? 0$	$G + H < 0$	$G + H \triangleleft 0$
$G \parallel 0$	$G + H \parallel 0$	$G + H \triangleright 0$	$G + H \triangleleft 0$	$G + H ? 0$

Table 3: $G + H$ 的结局

左方选择中的负值

考虑计算 $\{-3 \mid\}$ 。如果试图套用之前的规则，会得到 $-2 < 0$ 。

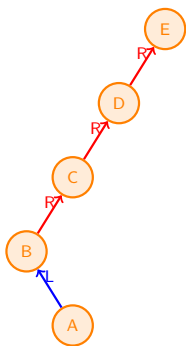


Figure 9: $\{-3 \mid\}$

事实上，因为 $\{-3 \mid\}$ 是“后手获胜”的，所以 $\{-3 \mid\} = 0$ 。

当 $a, b, c, \dots < 0$ 时， $\{a, b, c, \dots \mid\}$ 是“后手获胜”的，即 $\{a, b, c, \dots \mid\} = 0$ 。

与之前的情况合并，可得 $\{a, b, c, \dots \mid\} = \max\{\max\{a, b, c, \dots\} + 1, 0\}$ 。

化简博弈：删除被优越的选择 (deleting dominated options)

定义 $A \geq B$ 当且仅当 $A - B \geq 0$, $A \leq B$ 当且仅当 $A - B \leq 0$ 。

在博弈 $G = \{A, B, C, \dots \mid D, E, F, \dots\}$ 中, 如果有左方选择 $A \geq B$, 则 $G = \{A, C, \dots \mid D, E, F, \dots\}$ 。

只需要说明 $\{A, B, C, \dots \mid D, E, F, \dots\} - \{A, C, \dots \mid D, E, F, \dots\} = 0$:

化简博弈：删除被优越的选择 (deleting dominated options)

定义 $A \geq B$ 当且仅当 $A - B \geq 0$, $A \leq B$ 当且仅当 $A - B \leq 0$ 。

在博弈 $G = \{A, B, C, \dots \mid D, E, F, \dots\}$ 中, 如果有左方选择 $A \geq B$, 则 $G = \{A, C, \dots \mid D, E, F, \dots\}$ 。

只需要说明 $\{A, B, C, \dots \mid D, E, F, \dots\} - \{A, C, \dots \mid D, E, F, \dots\} = 0$:

- 如果先手的选择不是 B , 后手只要在相反的分支中做出对应的选择即可获胜。
- 如果先手 (左方) 的选择是 B , 后手只要在相反的分支中选择 A , 博弈的值就会变为 $B - A \leq 0$, 后手 (右方) 仍然能获胜。

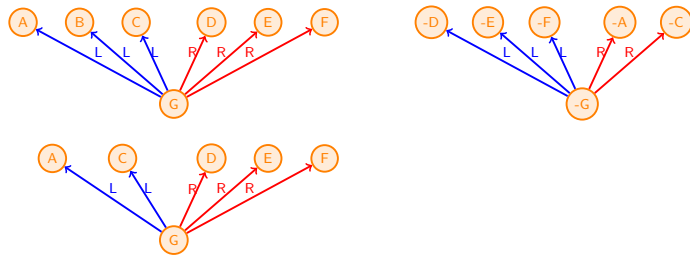


Figure 10: 删除被优越的选择

同理, 如果有右方选择 $D \leq E$, 则 $G = \{A, B, C, \dots \mid D, F, \dots\}$ 。

化简博弈：删除被优越的选择 (deleting dominated options)

如果博弈的选择都是数，那么博弈可以被化简到左右两方分别至多有 1 个选择。

Example 2

$$\{ | -15, -12, -9 \} = \{ | -15 \} (= -16).$$

$$\{ 1, 2 \mid 5, 7, 9 \} = \{ 2 \mid 5 \} (= 3).$$

$$\{ -9, -8, -2 \mid -10, -7, -1 \} = \{ -2 \mid -10 \} \text{ (不是数) }.$$

双方选择都是整数的博弈

对于整数 a, b , 考虑计算 $\{a \mid b\}$ 的值。

$a \geq b$ 的情况较为困难, 因此先考虑 $a < b$ 的情况。

在具有整数值的博弈中, 一方的行动总是会“消耗”自己的优势, 因此左方的选择应该对左方更不利, 即值更小。

如果 $a < 0 < b$, 博弈 $\{a \mid b\}$ 是“后手获胜”的, 因此 $\{a \mid b\} = 0$ 。

如果 $b \leq 0$, 可以通过 $\{a \mid b\} = -\{-b \mid -a\}$ 转化为 $a \geq 0$ 的情况。

双方选择都是整数的博弈

对于整数 a, b ，考虑计算 $\{a \mid b\}$ 的值。

$a \geq b$ 的情况较为困难，因此先考虑 $a < b$ 的情况。

在具有整数值的博弈中，一方的行动总是会“消耗”自己的优势，因此左方的选择应该对左方更不利，即值更小。

如果 $a < 0 < b$ ，博弈 $\{a \mid b\}$ 是“后手获胜”的，因此 $\{a \mid b\} = 0$ 。

如果 $b \leq 0$ ，可以通过 $\{a \mid b\} = -\{-b \mid -a\}$ 转化为 $a \geq 0$ 的情况。

如果 $0 \leq a < b$ ，博弈 $\{a \mid b\}$ 是“左方获胜”的。猜测 $\{a \mid b\}$ 可能是正整数。

设 $\{a \mid b\} = n$ ，其中 n 是正整数，那么 $\{a \mid b\} - n$ 是“后手获胜”的：

- 左方先手，选择 $\{a \mid b\} \rightarrow a$ ：由右方获胜，可得 $a - n < 0$ 。
- 右方先手，选择 $\{a \mid b\} \rightarrow b$ ：由左方获胜，可得 $b - n > 0$ 。
- 右方先手，选择 $-n \rightarrow -(n-1)$ ，博弈变为 $\{a \mid b\} - n + 1$ ：
 - 左方选择 $\{a \mid b\} \rightarrow a$ ：由左方获胜，可得 $a - n + 1 \geq 0$ 。

因此， $a < n \leq a + 1, n < b$ 。

- 当 $b - a \geq 2$ 时， $\{a \mid b\} = a + 1$ 。此时 $\{a \mid b\} = \{a \mid \}$ ， b 可以看作没有用的右方选择。
- 当 $b - a = 1$ 时， $\{a \mid b\}$ 的值不是整数。

$$\{0 \mid 1\} = ?$$

目前值未知的博弈中，最简单的是 $\{0 \mid 1\}$ 。

有 $0 < \{0 \mid 1\} < 1$ 。

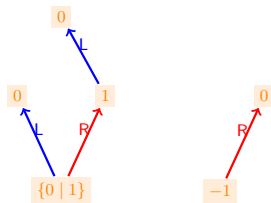


Figure 11: $\{0 \mid 1\} > 0, \{0 \mid 1\} - 1 < 0$

$$\{0 \mid 1\} = ?$$

目前值未知的博弈中，最简单的是 $\{0 \mid 1\}$ 。

有 $0 < \{0 \mid 1\} < 1$ 。

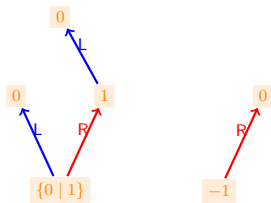


Figure 11: $\{0 \mid 1\} > 0, \{0 \mid 1\} - 1 < 0$

猜测 $\{0 \mid 1\}$ 可能与 $\frac{1}{2}$ 有相似的性质，可以发现 $\{0 \mid 1\} + \{0 \mid 1\} - 1 = 0$ 。

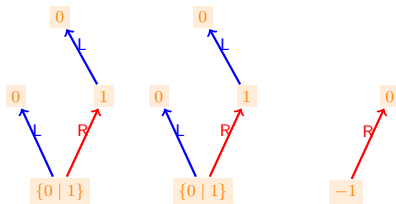


Figure 12: $\{0 \mid 1\} + \{0 \mid 1\} - 1 = 0$

$$\{0 \mid 1\} = \frac{1}{2}$$

定义 $\frac{1}{2} = \{0 \mid 1\}$ 。取负可得 $-\frac{1}{2} = \{-1 \mid 0\}$ 。

通过加法，可以得到 $\dots, -\frac{5}{2}, 2, -\frac{3}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$ 。

Example 3

$$\frac{5}{2} = 5 \cdot \frac{1}{2} = \{0 + 4 \cdot \frac{1}{2} \mid 1 + 4 \cdot \frac{1}{2}\} = \{2 \mid 3\}.$$

$$-\frac{3}{2} = 3 \cdot (-\frac{1}{2}) = \{-1 + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) \mid 0 + 2 \cdot (-\frac{1}{2})\} = \{-2 \mid -1\}.$$

$$\frac{6}{2} = 6 \cdot \frac{1}{2} = \{0 + 5 \cdot \frac{1}{2} \mid 1 + 5 \cdot \frac{1}{2}\} = \{\frac{5}{2} \mid \frac{7}{2}\}.$$

一个数可以有不同形式 $\{2 \mid \}, \{\frac{5}{2} \mid \frac{7}{2}\}$ 是 3 的不同形式。

$\{ \mid \}, \{-1 \mid 1\}, \{-\frac{1}{2} \mid \frac{1}{2}\}$ 是 0 的不同形式。

$$\{0 \mid 1\} = \frac{1}{2}$$

定义 $\frac{1}{2} = \{0 \mid 1\}$ 。取负可得 $-\frac{1}{2} = \{-1 \mid 0\}$ 。

通过加法, 可以得到 $\cdots, -\frac{5}{2}, 2, -\frac{3}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \cdots$ 。

Example 3

$$\frac{5}{2} = 5 \cdot \frac{1}{2} = \{0 + 4 \cdot \frac{1}{2} \mid 1 + 4 \cdot \frac{1}{2}\} = \{2 \mid 3\}.$$

$$-\frac{3}{2} = 3 \cdot (-\frac{1}{2}) = \{-1 + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) \mid 0 + 2 \cdot (-\frac{1}{2})\} = \{-2 \mid -1\}.$$

$$\frac{6}{2} = 6 \cdot \frac{1}{2} = \{0 + 5 \cdot \frac{1}{2} \mid 1 + 5 \cdot \frac{1}{2}\} = \{\frac{5}{2} \mid \frac{7}{2}\}.$$

一个数可以有不同形式 $\{2 \mid\}, \{\frac{5}{2} \mid \frac{7}{2}\}$ 是 3 的不同形式。

$\{ \mid\}, \{-1 \mid 1\}, \{-\frac{1}{2} \mid \frac{1}{2}\}$ 是 0 的不同形式。

一般地, 有 $\frac{n}{2} = \{\frac{n-1}{2} \mid \frac{n+1}{2}\}$, 其中 n 为任意整数。

现在, $\{n \mid n+1\} = n + \frac{1}{2}$ 已经得到了解决。

也就是说, 对于所有整数 a, b ($a < b$), $\{a \mid b\}$ 的值都已知。

双方选择是 $\frac{1}{2}$ 的倍数的博弈

考虑计算 $\{a \mid b\}$, 其中 a, b 均为 $\frac{1}{2}$ 的倍数 (存在整数 a', b' , 使得 $a = \frac{a'}{2}, b = \frac{b'}{2}$)。

与分析“双方选择是整数的博弈”时类似, 我们同样只需要讨论 $0 \leq a < b$ 的情况。

首先, 检查 $\{a \mid b\}$ 是不是正整数:

- 之前的分析并没有用到“双方选择是整数”的性质, 可以直接套用之前的结果。
- 如果存在正整数 n , 满足 $a < n \leq a + 1, n < b$, 那么 $\{a \mid b\} = n$ 。
- 换句话说, 如果 $\lfloor a \rfloor + 1 < b$, 那么 $\{a \mid b\} = \lfloor a \rfloor + 1$ 。

双方选择是 $\frac{1}{2}$ 的倍数的博弈

考虑计算 $\{a \mid b\}$, 其中 a, b 均为 $\frac{1}{2}$ 的倍数 (存在整数 a', b' , 使得 $a = \frac{a'}{2}, b = \frac{b'}{2}$)。

与分析“双方选择是整数的博弈”时类似, 我们同样只需要讨论 $0 \leq a < b$ 的情况。

首先, 检查 $\{a \mid b\}$ 是不是正整数:

- 之前的分析并没有用到“双方选择是整数”的性质, 可以直接套用之前的结果。
- 如果存在正整数 n , 满足 $a < n \leq a + 1, n < b$, 那么 $\{a \mid b\} = n$ 。
- 换句话说, 如果 $\lfloor a \rfloor + 1 < b$, 那么 $\{a \mid b\} = \lfloor a \rfloor + 1$ 。

如果 $\{a \mid b\}$ 不是正整数, 假设 $\{a \mid b\} = c$, 其中 c 是 $\frac{1}{2}$ 的倍数。

根据 $\{a \mid b\} - c$ 是“后手获胜”的, 可得:

- 左方选择 $-c \rightarrow -c - \frac{1}{2}$:
 - 右方选择 $-c - \frac{1}{2} \rightarrow -c$:
 - 左方选择 $-c \rightarrow -c - \frac{1}{2} \dots\dots$

分析失败。

双方选择是 $\frac{1}{2}$ 的倍数的博弈

因为之前已经得到了“博弈是某个整数”的条件，所以不用考虑 c 是整数的情况。

可以利用 c 不是整数的性质进行分析。显然， $c + \frac{1}{2}, c - \frac{1}{2}$ 是整数。

双方选择是 $\frac{1}{2}$ 的倍数的博弈

因为之前已经得到了“博弈是某个整数”的条件，所以不用考虑 c 是整数的情况。

可以利用 c 不是整数的性质进行分析。显然， $c + \frac{1}{2}, c - \frac{1}{2}$ 是整数。

根据 $\{a \mid b\} - c$ 是“后手获胜”的，可得：

- 左方选择 $-c \rightarrow -c - \frac{1}{2}$ ：
 - 右方选择 $-c - \frac{1}{2} \rightarrow -c + \frac{1}{2}$ （因为 $-c - \frac{1}{2} = \{-c - \frac{3}{2} \mid -c + \frac{1}{2}\}$ ），
由于 $\{a \mid b\} - c + \frac{1}{2} > \{a \mid b\} - c = 0$ ，右方不可能通过这个选择获胜。
 - 右方选择 $\{a \mid b\} \rightarrow b$ ，由右方获胜， $b - c - \frac{1}{2} \leq 0$ 。
- 左方选择 $\{a \mid b\} \rightarrow a$ ，由右方获胜， $a - c < 0$ 。
- 右方选择 $-c \rightarrow -c + \frac{1}{2}$ ：
 - 左方选择 $-c + \frac{1}{2} \rightarrow -c - \frac{1}{2}$ （因为 $-c + \frac{1}{2} = \{-c - \frac{1}{2} \mid -c + \frac{3}{2}\}$ ），
由于 $\{a \mid b\} - c - \frac{1}{2} < \{a \mid b\} - c = 0$ ，左方不可能通过这个选择获胜。
 - 左方选择 $\{a \mid b\} \rightarrow a$ ，由左方获胜， $a - c + \frac{1}{2} \geq 0$ 。
- 右方选择 $\{a \mid b\} \rightarrow b$ ，由左方获胜， $b - c > 0$ 。

因此， $c - \frac{1}{2} \leq a < c < b \leq c + \frac{1}{2}$ 。

双方选择是 $\frac{1}{2}$ 的倍数的博弈

因为之前已经得到了“博弈是某个整数”的条件，所以不用考虑 c 是整数的情况。

可以利用 c 不是整数的性质进行分析。显然， $c + \frac{1}{2}, c - \frac{1}{2}$ 是整数。

根据 $\{a | b\} - c$ 是“后手获胜”的，可得：

- 左方选择 $-c \rightarrow -c - \frac{1}{2}$ ：
 - 右方选择 $-c - \frac{1}{2} \rightarrow -c + \frac{1}{2}$ （因为 $-c - \frac{1}{2} = \{-c - \frac{3}{2} | -c + \frac{1}{2}\}$ ），
由于 $\{a | b\} - c + \frac{1}{2} > \{a | b\} - c = 0$ ，右方不可能通过这个选择获胜。
 - 右方选择 $\{a | b\} \rightarrow b$ ，由右方获胜， $b - c - \frac{1}{2} \leq 0$ 。
- 左方选择 $\{a | b\} \rightarrow a$ ，由右方获胜， $a - c < 0$ 。
- 右方选择 $-c \rightarrow -c + \frac{1}{2}$ ：
 - 左方选择 $-c + \frac{1}{2} \rightarrow -c - \frac{1}{2}$ （因为 $-c + \frac{1}{2} = \{-c - \frac{1}{2} | -c + \frac{3}{2}\}$ ），
由于 $\{a | b\} - c - \frac{1}{2} < \{a | b\} - c = 0$ ，左方不可能通过这个选择获胜。
 - 左方选择 $\{a | b\} \rightarrow a$ ，由左方获胜， $a - c + \frac{1}{2} \geq 0$ 。
- 右方选择 $\{a | b\} \rightarrow b$ ，由左方获胜， $b - c > 0$ 。

因此， $c - \frac{1}{2} \leq a < c < b \leq c + \frac{1}{2}$ 。

换句话说，如果开区间 (a, b) 中不含整数，但是含有 $\frac{1}{2}$ 的倍数，那么 $\{a | b\}$ 就等于该 $\frac{1}{2}$ 的倍数（显然唯一）。

又一次，我们遇到了类似的问题：无法计算 $\{0 | \frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{2} | 1\}, \{1 | \frac{3}{2}\}, \dots$ 的值。

$$\{0 \mid \frac{1}{2}\} = \frac{1}{4}$$

可以发现 $\{0 \mid \frac{1}{2}\} + \{0 \mid \frac{1}{2}\} - \frac{1}{2} = 0$ 。

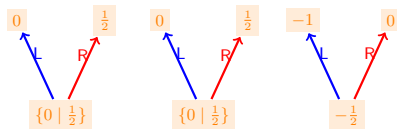


Figure 13: $\{0 \mid \frac{1}{2}\} + \{0 \mid \frac{1}{2}\} - \frac{1}{2} = 0$

定义 $\frac{1}{4} = \{0 \mid \frac{1}{2}\}$ ，可以得到所有 $\frac{1}{4}$ 的倍数。

$$\{0 \mid \frac{1}{2}\} = \frac{1}{4}$$

可以发现 $\{0 \mid \frac{1}{2}\} + \{0 \mid \frac{1}{2}\} - \frac{1}{2} = 0$ 。

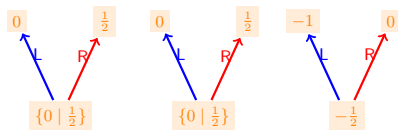


Figure 13: $\{0 \mid \frac{1}{2}\} + \{0 \mid \frac{1}{2}\} - \frac{1}{2} = 0$

定义 $\frac{1}{4} = \{0 \mid \frac{1}{2}\}$ ，可以得到所有 $\frac{1}{4}$ 的倍数。

再次考虑计算 $\{a \mid b\}$ 。

同理可得，如果 $\{a \mid b\} = c$ ，其中 c 是 $\frac{1}{4}$ 的奇数倍，那么 $c - \frac{1}{4} \leq a < c < b \leq c + \frac{1}{4}$ 。

换句话说，如果开区间 (a, b) 中不含 $\frac{1}{2}$ 的倍数，但是含有 $\frac{1}{4}$ 的倍数，那么 $\{a \mid b\}$ 就等于该 $\frac{1}{4}$ 的倍数。

是否有 $\{0 \mid \frac{1}{4}\} = \frac{1}{8}, \{0 \mid \frac{1}{8}\} = \frac{1}{16}, \dots$?

$$\{0 \mid \frac{1}{2^k}\} = \frac{1}{2^{k+1}}$$

对于非负整数 k , 有 $\{0 \mid \frac{1}{2^k}\} + \{0 \mid \frac{1}{2^k}\} = \frac{1}{2^k}$ 。

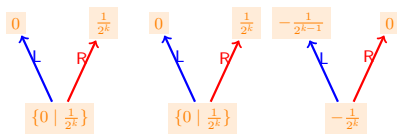


Figure 14: $\{0 \mid \frac{1}{2^k}\} + \{0 \mid \frac{1}{2^k}\} - \frac{1}{2^k} = 0$ ($k \geq 1$)

定义 $\frac{1}{2^{k+1}} = \{0 \mid \frac{1}{2^k}\}$, 其中 k 为非负整数。

将若干个 $\frac{1}{2^k}$ 相加可得 $\frac{p}{2^k} = \{\frac{p-1}{2^k} \mid \frac{p+1}{2^k}\}$ 。

对于正整数 k , 如果 $\{a \mid b\} = c$, 其中 c 是 $\frac{1}{2^k}$ 的奇数倍, 那么 $c - \frac{1}{2^k} \leq a < c < b \leq c + \frac{1}{2^k}$ 。

要计算一个 $\{a \mid b\}$ ($a < b$), 首先检查该值是否为整数, 然后依次检查该值是否为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ 的倍数。

简单性法则、数的最简形

简单性法则 (The Simplicity Rule)

$\{a \mid b\}$ 的值是开区间 (a, b) 中 “最简单” 的数。

其中数从 “简单” 到 “复杂” 依次为: $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots, \frac{1}{2}$ 的奇数倍、 $\frac{1}{4}$ 的奇数倍、 $\frac{1}{8}$ 的奇数倍……

Example 4

$$\{-1.75 \mid 3.25\} = 0.$$

$$\{\mid -3.125\} = -4.$$

$$\{2.71875 \mid 3.140625\} = 3.$$

$$\{1.125 \mid 1.625\} = 1.5.$$

$$\{1.5 \mid 1.765625\} = 1.75.$$

数的最简形

以下 n, k 为正整数, p 为整数。之后会说明为什么它们是 “最简单” 的形式。

$$0 = \{\mid\}.$$

$$n = \{n-1 \mid\}, -n = \{\mid -(n-1)\}.$$

$$\frac{2p+1}{2^k} = \{\frac{p}{2^{k-1}} \mid \frac{p+1}{2^{k-1}}\}.$$

Example 5

$$-4 = \{\mid -3\}.$$

$$7 = \{6 \mid\}.$$

$$-\frac{5}{2} = \{-3 \mid -2\}.$$

$$\frac{3}{8} = \{\frac{1}{4} \mid \frac{1}{2}\}.$$

目前进展

目前，我们能表示满足以下条件的博弈 $G = \{A, B, C, \dots \mid D, E, F, \dots\}$ 的值：

- $A, B, C, \dots, D, E, F, \dots$ 都是已知的数。
- $\max\{A, B, C, \dots\} < \min\{D, E, F, \dots\}$ 。

1 基础

2 数

3 一些无穷小量

4 总结

$$\{0 \mid 0\}$$

在 $G^L < G^R$ 的条件下，我们已经能用数表示所有博弈。

接下来，我们允许 $G^L \not< G^R$ 。

首先，探究 $\{0 \mid 0\}$ 的性质。

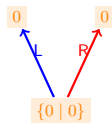


Figure 15: $\{0 \mid 0\}$

$$\{0 \mid 0\}$$

在 $G^L < G^R$ 的条件下，我们已经能用数表示所有博弈。

接下来，我们允许 $G^L \not< G^R$ 。

首先，探究 $\{0 \mid 0\}$ 的性质。

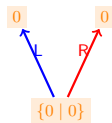


Figure 15: $\{0 \mid 0\}$

$\{0 \mid 0\}$ 是“先手获胜”的，即 $\{0 \mid 0\} \parallel 0$ 。

显然 $\{0 \mid 0\}$ 不等于任何数，因此我们需要引入一个符号表示 $\{0 \mid 0\}$ 。

$$\{0 \mid 0\}$$

在 $G^L < G^R$ 的条件下，我们已经能用数表示所有博弈。

接下来，我们允许 $G^L \not< G^R$ 。

首先，探究 $\{0 \mid 0\}$ 的性质。

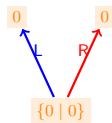


Figure 15: $\{0 \mid 0\}$

$\{0 \mid 0\}$ 是“先手获胜”的，即 $\{0 \mid 0\} \parallel 0$ 。

显然 $\{0 \mid 0\}$ 不等于任何数，因此我们需要引入一个符号表示 $\{0 \mid 0\}$ 。

定义 $*$ $= \{0 \mid 0\}$ ($*$ 读作星 (star))。

$*$ 可以和数相加，记 $*$ 与数 x 的和为 $x*$ 。

* 有多大？

把 $*$ 和一个正数 x 进行比较，即计算 $* - x$ 的结局：

- 左方 $* \rightarrow 0$ ，博弈变为 $-x < 0$ ，右方获胜。
- 左方 $-x \rightarrow (-x)^L$ ：
 - 右方 $* \rightarrow 0$ ，博弈变为 $(-x)^L < -x < 0$ ，右方获胜。
- 右方 $* \rightarrow 0$ ，博弈变为 $-x < 0$ ，右方获胜。

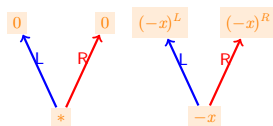


Figure 16: $* - x$

因此 $* < x$ ，即 $*$ 小于任何正数。同理， $*$ 大于任何负数。可以认为 $*$ 是一个无穷小量。

由加法的定义，可得 $x* = \{x, x^L + * \mid x, x^R + *\}$ 。

因为 $x > x^L + *, x < x^R + *$ ，可以用“删除被优越的选择”的方法化简博弈，从而 $x* = \{x \mid x\}$ 。

$$* + *, \{ * \mid * \}$$

$* + *$ 是“后手获胜”的，所以 $* + * = 0$ 。

把一个 $*$ 移到等式的右边，可得 $* = -*$ 。

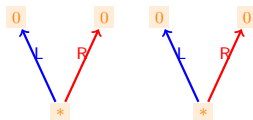


Figure 17: $* + *$

$\{ * \mid * \}$ 同样是“后手获胜”的，所以 $\{ * \mid * \} = 0$ 。

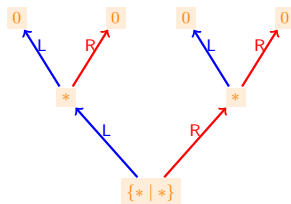


Figure 18: $\{ * \mid * \}$

目前，我们已知的值相加得到的结果都可以表示成 x 或者 $x*$ 。

$\{0 \mid *\}$

读者可以自行验证：对于任意正数 x ，都有 $0 < \{0 \mid *\} < x$ 。

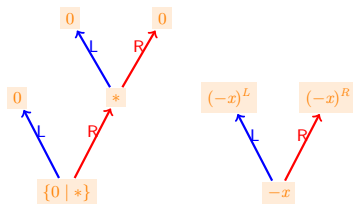


Figure 19: $\{0 \mid *\} > 0, \{0 \mid *\} - x < 0$

$\{0 \mid *\}$

读者可以自行验证：对于任意正数 x ，都有 $0 < \{0 \mid *\} < x$ 。

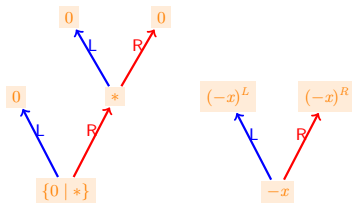


Figure 19: $\{0 \mid *\} > 0, \{0 \mid *\} - x < 0$

定义 $\uparrow = \{0 \mid *\}$, $\downarrow = -\uparrow = \{*\mid 0\}$ (\uparrow 读作上 (up), \downarrow 读作下 (down))。

记录 \uparrow, \downarrow 与 $*$ 的和时，可以把 $*$ 写在后面并省略加号。例如，可以把 $\uparrow + *$ 写作 $\uparrow *$ 。

同样可以认为 \uparrow, \downarrow 是**无穷小量**。

$2 \cdot \uparrow, 3 \cdot \uparrow, \dots; 2 \cdot \downarrow, 3 \cdot \downarrow, \dots$ 也都是**无穷小量**。

$\{0 \mid *\}$

读者可以自行验证：对于任意正数 x ，都有 $0 < \{0 \mid *\} < x$ 。

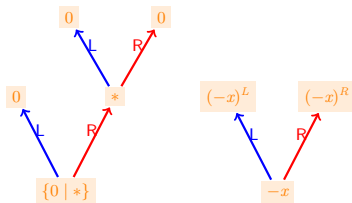


Figure 19: $\{0 \mid *\} > 0, \{0 \mid *\} - x < 0$

定义 $\uparrow = \{0 \mid *\}$, $\downarrow = -\uparrow = \{*\mid 0\}$ (\uparrow 读作上 (up), \downarrow 读作下 (down))。

记录 \uparrow, \downarrow 与 $*$ 的和时，可以把 $*$ 写在后面并省略加号。例如，可以把 $\uparrow + *$ 写作 $\uparrow *$ 。

同样可以认为 \uparrow, \downarrow 是**无穷小量**。

$2 \cdot \uparrow, 3 \cdot \uparrow, \dots; 2 \cdot \downarrow, 3 \cdot \downarrow, \dots$ 也都是**无穷小量**。

通过加法，可得 $\uparrow + \uparrow = \{\uparrow \mid \uparrow *\}$ 。这是 $2 \cdot \uparrow$ 的最简形吗？

更一般地，如何求任意一个博弈的最简形？

观察 $\{0, \frac{1}{4} \mid 1\} = \frac{1}{2}$ 。 $\frac{1}{4}$ 没有影响博弈的值，这是因为虽然 $\frac{1}{4} > 0$ ，但是 $(\frac{1}{4})^R = \frac{1}{2}$ ，也就是说，左方获得的 $\frac{1}{4}$ 的“收益”会被右方“撤销”。利用这种思想，可以得到另一种化简博弈的方法。

化简博弈：绕开可逆行动 (bypassing reversible move)

对于博弈 $G = \{A, B, \dots \mid C, D, \dots\}$ 的一个右方选择 C ，若存在 C 的某个左方选择 H 满足 $H \geq G$ ，则称右方到 C 的行动是可逆的。

此时，有 $G = \{A, B, \dots \mid H^R, D, \dots\}$ 。

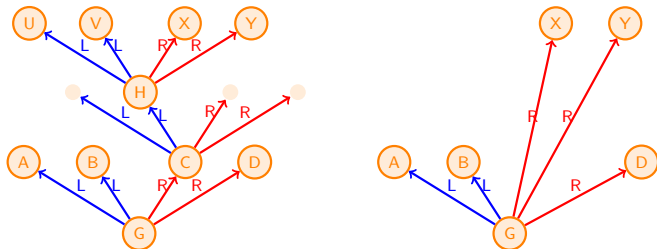


Figure 20: $G = \{A, B, \dots \mid H^R, D, \dots\}$

同理，如果对于一个左方选择 A ，若存在 A 的右方选择 $F \leq G$ ，则称左方到 A 的行动是可逆的。

此时，有 $G = \{F^L, B, \dots \mid C, D, \dots\}$ 。

化简博弈：绕开可逆行动 (bypassing reversible move)

读者可以自行验证 $G - \{A, B, \dots \mid H^R, D, \dots\} = 0$ 。

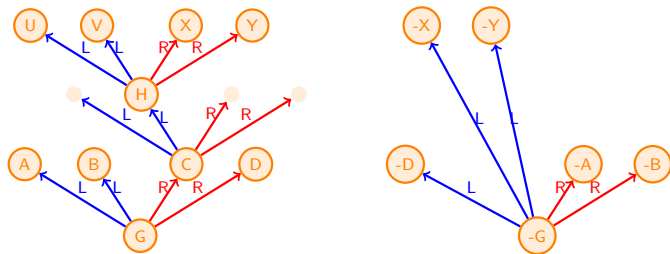


Figure 21: $G - \{A, B, \dots \mid H^R, D, \dots\}$

提示：

化简博弈：绕开可逆行动 (bypassing reversible move)

读者可以自行验证 $G - \{A, B, \dots \mid H^R, D, \dots\} = 0$ 。

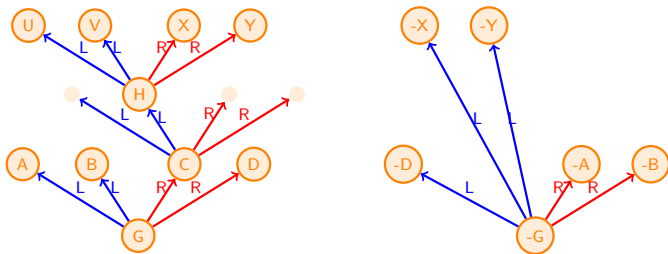


Figure 21: $G - \{A, B, \dots \mid H^R, D, \dots\}$

提示：

- 1 $H - G \geq 0$.
- 2 $H - X \leq 0$.

化简博弈：绕开可逆行动 (bypassing reversible move)

读者可以自行验证 $G - \{A, B, \dots \mid H^R, D, \dots\} = 0$ 。

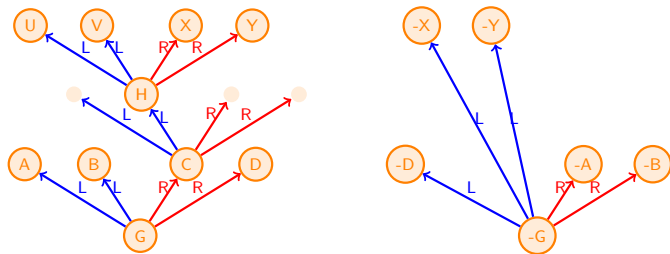


Figure 21: $G - \{A, B, \dots \mid H^R, D, \dots\}$

提示：

- 1 $H - G \geq 0$.
- 2 $H - X \triangleleft 0$.
- 3 $G - X \triangleleft 0$.

博弈的最简形

对一个博弈不断执行删除被优越的选择和绕开可逆行动，最后总能得到该博弈的**唯一**最简形。

博弈的最简形

对一个博弈不断执行删除被优越的选择和绕开可逆行动，最后总能得到该博弈的**唯一最简形**。

证明

假设有两个不能再执行删除被优越的选择或绕开可逆行动的博弈 $G = H$ 。

由于 $G = H$ ， $G - H$ 中后手有取胜的策略。不妨设先手为左方，且第一次行动在 G 中进行。

后手第一次行动一定在不同于先手第一次行动的分支中进行。

- 否则，有先手执行 $G \rightarrow A$ ，后手执行 $A \rightarrow B$ ，由于后手能获胜，有 $B - H \leq 0$ ，即 $B \leq G$ ，因此 A 为可逆行动，与假设矛盾。

博弈的最简形

对一个博弈不断执行删除被优超的选择和绕开可逆行动，最后总能得到该博弈的**唯一最简形**。

证明

假设有两个不能再执行删除被优超的选择或绕开可逆行动的博弈 $G = H$ 。
由于 $G = H$ ， $G - H$ 中后手有取胜的策略。不妨设先手为左方，且第一次行动在 G 中进行。

后手第一次行动一定在不同于先手第一次行动的分支中进行。

- 否则，有先手执行 $G \rightarrow A$ ，后手执行 $A \rightarrow B$ ，由于后手能获胜，有 $B - H \leq 0$ ，即 $B \leq G$ ，因此 A 为可逆行动，与假设矛盾。

因此，若先手执行 $G \rightarrow A$ ($A \in G^L$)，后手会执行 $-H \rightarrow -B$ ($B \in H^L$)，由于后手能取胜， $A - B \leq 0$ ，即 $A \leq B$ 。

也就是说，对于 G 中的每个左方选择，都存在 H 中的一个左方选择大于等于该 G 中的左方选择。交换 G 和 H ，该命题仍然成立。

取 $A \in G^L$ ，再取 $B \in H^L, B \geq A$ ，以及 $C \in G^L, C \geq B$ ，有 $A \leq B \leq C$ 。

由于 G^L 中没有被优超的选择， $A = C$ ，故 $A = B = C$ 。

所以， G 中的每个左方选择都在 H 的左方选择中存在，即 $G^L \subseteq H^L$ 。同理 $H^L \subseteq G^L$ ，因此 $G^L = H^L$ 。

对应地，有 $G^R = H^R$ 。

综上所述， $G^L = H^L, G^R = H^R$ ，即 G 和 H 的形式相同。

化简一些博弈

Example 6

$$2 \cdot \uparrow = \{\uparrow \mid \uparrow \cdot *\}$$

$$\uparrow \cdot * = \{*, \uparrow \mid 0, \uparrow\}$$

$$\{* \mid 1\}$$

化简一些博弈

Example 6

$$2 \cdot \uparrow = \{\uparrow \mid \uparrow * \}$$

$$\uparrow * = \{*, \uparrow \mid 0, \uparrow\}$$

$$\{* \mid 1\}$$

Answer

$$2 \cdot \uparrow = \{0 \mid \uparrow * \}$$

$$\uparrow * = \{0, * \mid 0\}$$

$$\{* \mid 1\} = 0$$

Nimber

定义 $*n = \{ *0, *1, \dots, *(n-1) \mid *0, *1, \dots, *(n-1) \}$, 把这类值称作 **nimber**。直观地, $*n$ 的值相当于一个大小为 n 的 nim 堆的值。

特别地, $*0 = 0, *1 = *$ 。* 之后的数即为熟知的 **nim 值** 或 **SG 函数值**。

无偏 (impartial) 博弈 (双方选择总是相同的博弈) 的值总是 nimber。

Nimber

定义 $*n = \{ *0, *1, \dots, *(n-1) \mid *0, *1, \dots, *(n-1) \}$, 把这类值称作 **nimber**。直观地, $*n$ 的值相当于一个大小为 n 的 nim 堆的值。

特别地, $*0 = 0, *1 = *$ 。 $*$ 之后的数即为熟知的 nim 值或 SG 函数值。

无偏 (impartial) 博弈 (双方选择总是相同的博弈) 的值总是 nimber。

设 $G = \{ *a, *b, *c, \dots \mid *a, *b, *c, \dots \}$, $g = \text{MEX}\{a, b, c, \dots\}$, 其中 MEX 表示一个集合中最小的未出现的非负整数, 有 $G = *g$ 。

这是因为所有 nim 值大于 $> g$ 的选择都是可逆的: 设 $*d$ 为 G 的选择且 $d > g$, $*d$ 有选择 $*g = G$, 因此可以用 $*g$ 的选择 $(*0, *1, \dots, *(g-1))$ 替换 $*d$ 。

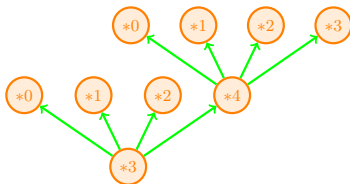


Figure 22: $\{ *0, *1, *2, *4 \mid *0, *1, *2, *4 \} = *3$

Nimber 的加法

为了方便, 用 $a \oplus b = c$ 表示 $*a + *b = *c$ 。显然, “ \oplus ” 运算有结合律和交换律。

已知 $n \oplus 0 = n, n \oplus n = 0$ 。

假设对于所有 $a, b < 2^k$, $a \oplus b$ 已知, 且 $a \oplus b < 2^k$ 。

对于 $a < 2^k$, 有 $(2^k + a) \oplus 2^k = a$, 即 $2^k + a = 2^k \oplus a$ 。

- $a = 0$ 时显然成立。假设 $a < a_0$ 时成立, 可以说明 $a = a_0$ 时仍然成立。
- $*(2^k + a) + *2^k$ 的选择包含 $i = 0, 1, \dots, a - 1$: 总是有选择 $*(2^k + i) + *2^k = *i$ 。
- $*(2^k + a) + *2^k$ 的选择不包含 a : 若存在, 一定会把一个博弈的 nim 值降低于 2^k (否则为 $*(2^k + i) + *2^k = *i$, 而 $i < a$)。因此有 $*x + *y = *a$, 其中 $x \geq 2^k, y < 2^k, a < 2^k$, 可得 $a \oplus y = x$, 与假设矛盾。

Nimber 的加法

为了方便, 用 $a \oplus b = c$ 表示 $*a + *b = *c$ 。显然, “ \oplus ” 运算有结合律和交换律。

已知 $n \oplus 0 = n, n \oplus n = 0$ 。

假设对于所有 $a, b < 2^k$, $a \oplus b$ 已知, 且 $a \oplus b < 2^k$ 。

对于 $a < 2^k$, 有 $(2^k + a) \oplus 2^k = a$, 即 $2^k + a = 2^k \oplus a$ 。

- $a = 0$ 时显然成立。假设 $a < a_0$ 时成立, 可以说明 $a = a_0$ 时仍然成立。
- $*(2^k + a) + *2^k$ 的选择包含 $i = 0, 1, \dots, a - 1$: 总是有选择 $*(2^k + i) + *2^k = *i$ 。
- $*(2^k + a) + *2^k$ 的选择不包含 a : 若存在, 一定会把一个博弈的 nim 值降低到低于 2^k (否则为 $*(2^k + i) + *2^k = *i$, 而 $i < a$)。因此有 $*x + *y = *a$, 其中 $x \geq 2^k, y < 2^k, a < 2^k$, 可得 $a \oplus y = x$, 与假设矛盾。

可以发现, 对于所有 $a, b < 2^{k+1}$, $a \oplus b$ 已知, 且 $a \oplus b < 2^{k+1}$ 。

计算两个 nimber 之和时, 可以根据 $2^k + a = 2^k \oplus a$ 把 nimber 拆成若干个 2 的幂, 然后利用 $n \oplus n = 0$ 消去相同的 2 的幂, 然后逆用 $2^k + a = 2^k \oplus a$ 把 2 的幂合并为一个 nimber。

不难发现, “ \oplus ” 就是按位异或。

“上”和“星”之和的最简形

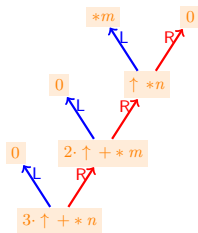
$$\uparrow * n = \{0 \mid *m\}$$

$$2 \cdot \uparrow + * n = \{0 \mid \uparrow * m\}$$

$$3 \cdot \uparrow + * n = \{0 \mid 2 \cdot \uparrow + * m\}$$

.....

其中 $n \neq 1, m = n \oplus 1$ 。



$$\uparrow * = \{0, * \mid 0\}$$

$$2 \cdot \uparrow + * = \{0 \mid \uparrow\}$$

$$3 \cdot \uparrow + * = \{0 \mid 2 \cdot \uparrow\}$$

.....

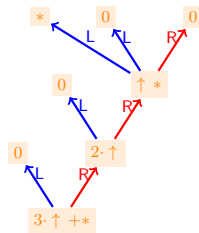


Figure 23: 最简形的可视化

“数”“上”“星”之和的结局

形如“数”“上”“星”之和的博弈，双方总是先在“上”“星”中行动，最后在“数”中行动。

Example 7

$$3 \uparrow * = \{3, 3* \mid 3\}.$$

“数” “上” “星” 之和的结局

形如“数” “上” “星” 之和的博弈，双方总是先在“上” “星” 中行动，最后在“数” 中行动。

Example 7

$$3 \uparrow * = \{3, 3* \mid 3\}.$$

设 $G = a + n \cdot \uparrow + * m$ 。

- $a > 0$: $G > 0$.
- $a < 0$: $G < 0$.
- $a = 0$:
 - $n \geq 2$: $G > 0$.
 - $n = 1$:
 - $m = 1$: $G \parallel 0$.
 - $m \neq 1$: $G > 0$.
 - $n = 0$:
 - $m = 0$: $G = 0$.
 - $m \neq 0$: $G \parallel 0$.
 - $n = -1$:
 - $m = 1$: $G \parallel 0$.
 - $m \neq 1$: $G < 0$.
 - $n \leq -2$: $G < 0$.

1 基础

2 数

3 一些无穷小量

4 总结

更多值？

还有很多具有特殊性质的博弈。

Example 8

$$\pm a = \{a \mid -a\} \quad (a \geq 0).$$

$$+_a = \{0 \mid \{0 \mid -a\}\} \quad (a \geq 0).$$

很难快速计算一般的博弈之和。

回顾

博弈可以用 **DAG** 或树表示。

博弈 G 的结局: $G > 0$ - 左方获胜, $G < 0$ - 右方获胜, $G = 0$ - 后手获胜, $G \parallel 0$ - 先手获胜。

可以用简单性法则计算数。

对一个博弈不断执行删除被优越的选择和绕开可逆行动, 最后总能得到该博弈的**唯一最简形**。

如果希望了解更多关于博弈的内容，可以阅读 *Winning Ways for Your Mathematical Plays*。

Thanks for listening!