

Team: Rebekka Axthelm,  
NN  
NN

### Sachverhalt:

Ein Student lernt jeden Tag 3 Seiten und vergisst dann über Nacht wieder 1% von dem bereits Erlernten.

- Frage 1: Wieviel Seiten hat er nach 5 Tagen gelernt?  
Frage 2: Wann (Tag, Uhrzeit) hat er 20 Seiten gelernt?  
Frage 3: Wieviel kann er maximal lernen?  
Frage 4: Was hätte ihm Vorwissen gebracht?

Zeigen Sie auch graphisch die Lernentwicklung

Prozessentwicklung führt auf eine implizite Folge:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 + 3 - (a_0 + 3) \frac{1}{100} \\ a_2 &= a_1 + 3 - (a_1 + 3) \frac{1}{100} \\ &\vdots \\ a_{n+1} &= a_n + 3 - (a_n + 3) \frac{1}{100} \end{aligned}$$

Implementierung in einer for-Schleife, die nach 5 Tagen abbricht:

```
a=0;
for n=1:5
    a = a + 3;
    a = a-0.01*a;
    fprintf("nach %d Tagen %.2f Seiten\n",n,a);
end
```

Ausgabe:

```
nach 1 Tagen 2.97 Seiten
nach 2 Tagen 5.91 Seiten
nach 3 Tagen 8.82 Seiten
nach 4 Tagen 11.70 Seiten
nach 5 Tagen 14.56 Seiten
```

Antwort1: Nach 5 Tagen wurden 14.56 Seiten gelernt.

Implementierung in einer While-Schleife, die abbricht wenn 20 Seiten erlernt wurden:

```
a=0;
while a<20
    n = n+1;
    a = a + 3;
    a = a-0.01*a;
    fprintf("nach %d Tagen %.2f Seiten\n",n,a);
end
```

Ausgabe:

```
nach 1 Tagen 2.97 Seiten
nach 2 Tagen 5.91 Seiten
nach 3 Tagen 8.82 Seiten
nach 4 Tagen 11.70 Seiten
nach 5 Tagen 14.56 Seiten
nach 6 Tagen 17.38 Seiten
nach 7 Tagen 20.18 Seiten
```

Irgendwann im Laufe des 7-ten Tages sind 20 Seiten gelernt worden. Wenn man die Antwort genauer haben will müssen wir  $a_n=20$  nach  $n$  auflösen. Dazu muss  $a_n$  explizit gegeben sein.

Formulierung von impliziter nach expliziter Darstellung:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 3 - (a_n + 3) \frac{1}{100} \\ &= \frac{99}{100} a_n + 2.97 \\ &= \frac{99}{100} \left( \frac{99}{100} a_{n-1} + 2.97 \right) + 2.97 \\ &= \frac{99}{100} \left( \frac{99}{100} \left( \frac{99}{100} a_{n-2} + 2.97 \right) + 2.97 \right) + 2.97 \\ &= \left( \frac{99}{100} \right)^3 a_{n-2} + \left( \frac{99}{100} \right)^2 2.97 + \left( \frac{99}{100} \right)^1 2.97 + \left( \frac{99}{100} \right)^0 2.97 \\ &= \left( \frac{99}{100} \right)^3 a_{n-2} + 2.97 \sum_{l=0}^2 \left( \frac{99}{100} \right)^l \\ &\vdots \text{ nach } k \text{ Schritten} \\ &= \left( \frac{99}{100} \right)^{k+1} a_{n-k} + 2.97 \sum_{l=0}^k \left( \frac{99}{100} \right)^l \\ &\vdots k = n \\ &= \left( \frac{99}{100} \right)^{n+1} a_0 + 2.97 \sum_{l=0}^n \left( \frac{99}{100} \right)^l \\ &= 2.97 \sum_{l=0}^n \left( \frac{99}{100} \right)^l \\ &= 2.97 \frac{1 - \left( \frac{99}{100} \right)^{n+1}}{1 - \frac{99}{100}} \\ &= 2.97 \left( 100 - 100 \left( \frac{99}{100} \right)^{n+1} \right) \end{aligned}$$

Antwort 4: Wenn  $a_0$  nicht 0 wäre stünde hier nach ein Summand, der aber so oder so im Unendlichen verschwindet.

Insgesamt also:

$$a_n = 297 \left( 1 - \left( \frac{99}{100} \right)^n \right)$$

Wann sind  $S$  Seiten gelernt worden?

$$297 \left( 1 - \left( \frac{99}{100} \right)^n \right) = S$$

nach  $S$  auflösen liefert

$$n = \frac{\ln(297 - S) - \ln 297}{\ln 99 - \ln 100}.$$

Implementierung:

```
S = 20;
fprintf("%.2f Seiten sind nach %.2f Tagen erlernt worden, \n",S,Days(S));
```

```
%%
function xn=Days(Seiten)
    xn = log(297-Seiten)-log(297);
    xn = xn/(log(99)-log(100));
end
```

Ausgabe:

20.00 Seiten sind nach 6.94 Tagen erlernt worden

Die 6.94 Tage dröseln wir jetzt noch in Stunde, Minute und Sekunde auf:

```
xn = Days(S);
tt = TimeOfDay(xn);
fprintf("das ist am %d-ten Tag um %d:%d Uhr und %d Sekunden\n",...
    tt(1)+1,tt(2),tt(3),tt(4));
```

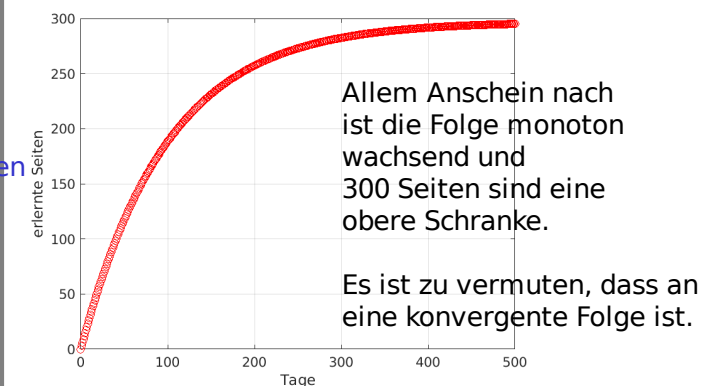
```
%%
function tt=TimeOfDay(xt)
    day = floor(xt); % ganze Tage
    xh = (xt-day)*24; % in Stunden
    hour = floor(xh); % ganze Stunden
    xm = (xh-hour)*60; % Minuten
    minute = floor(xm); % ganze Minuten
    second = floor(xm-minute); % ganze Sekunden

    tt = [day, hour, minute, second];
end
```

Antwort 2:

das ist am 7-ten Tag um 22:28 Uhr und 0 Sekunder

Entwicklung des Prozesses auf lange Sicht graphisch



und rechnerisch ermittelt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 297 \left( 1 - \underbrace{\left( \frac{99}{100} \right)^n}_{\rightarrow 0} \right) = 297$$

Antwort 3: Der Student wird maximal 297 Seiten gelernt haben. So sehr er sich auch bemüht....