HTWG Hochschule Konstanz
Technik, Wirtschaft und Gestaltung

Probeprüfung Mathematik 2 / Analysis

Datum	0.0.0000	Zeit, Dauer	00:00-00:00 Uhr, 90 min.
Dozentin	R. Axthelm	Ort	

Matrikelnummer	Punkte	Note

Theorieteil: 3 aus 5					Laborteil: 1 aus 2		
1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
X	20	X	20	20	X	30	90

Folgende Hilfsmittel sind erlaubt:

1. Das vorlesungseigene Kurzskript (mit Markierungen, ohne Notizen)
2. 3 DIN A4 Blätter (6 Seiten) eigenhändisch geschriebener Notizen
3. Einen nicht graphikfähigen Taschenrechner (Grundrechenfunktionen zur Kontrolle)

Theorieteil: Wählen Sie 3 Aufgaben aus den gestellten 5 aus. Streichen Sie in der Tabelle die Aufgabe, die nicht bewertet werden soll. Geben Sie mehr als drei Aufgaben ab ohne Kennzeichnung so werden die ersten drei Aufgaben in Ihrer Niederschrift gewertet. Notieren Sie Ihre Lösungen auf separatem Papier. Geben Sie Aufgaben zusammenhängend ab. Starten Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

Denken Sie bei der etwaigen Benutzung des Taschenrechners daran, dass immer **alle Zwischenresultate** anzugeben sind. Des weiteren ist **gut leserlich** zu schreiben!

Geben Sie die Aufgabenzettel und Ihre Lösungsblätter zusammen ab. Notieren Sie bei Zeiten (nicht erst bei Abgabe!!!) auf allen abzugebenden Blättern Ihre Matrikelnummer. Achten Sie auf gute Lesbarkeit, um Verwechslungen zu vermeiden.

Alle Ergebnisterme müssen so weit wie möglich **vereinfacht** werden. Sie müssen die Ergebnisse nicht in Dezimalzahlen ausdrücken. Es darf zum Beispiel $\sqrt{2}$ oder $\frac{e}{3}$ so als Ergebnis stehen bleiben.

Laborteil: Wählen Sie eine der beiden gestellten Aufgaben. Tragen Sie die Antworten in die dafür vorgesehenen Abschnitte auf dem Aufgabenzettel ein. Code-Zeilen können in Pseudo-Code formuliert sein, d.h. die Programmiersprache, in der Sie arbeiten spielt keine Rolle. **Sie dürfen den Rechner einschalten sobald Sie den Theorieteil abgegeben haben.** Es gilt dann open-Book. Kommunikationen mit anderen Personen und ChatGPT, sowie jegliche Software zur Lösung mathematischer Probleme ist strikt verboten. Bei Zuwiderhandlung muss sofort abgegeben werden und die Prüfung wird mit der Note 5 quittiert.

Geben Sie **Fließkommazahlen** stets in **Exponentialdarstellung** mit 2 Nachkommastellen an. Zum Beispiel: 0.003145 $\approx 3.15 \cdot 10^{-3}$ auch geschrieben als `3.15e-03`

Theorieteil

Aufgabe 1: (Folgen, 20 Punkte)

(a) Wie lautet jeweils der Limes $\lim_{n\to\infty}$ der Folge

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{3\,n+2}\,,\; b_n = \ln\sqrt[n]{n}$$

(b) Gegeben sei die Folge

$$x_1 = \frac{1}{2}\,,\; x_{n+1} = 2\,x_n - x_n^2\,.$$

Untersuchen Sie die Folge auf ihre Eigenschaften wie Monotonie, Beschränktheit und Grenzwert - unter der Annahme, dass sie konvergent ist.

Aufgabe 2: (Definitionsbereich, Grenzwert, Differentiation 20 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \left(a - \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}}\right)^2\,.$$

(a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ der Funktion f.

(b) Für welchen Wert von a ist f stetig fortsetzbar?

(c) Berechnen Sie einen kritischen Punkt von f.

Aufgabe 3: (Umkehrabbildung, Ableitung, 20 Punkte)

Es sei für Paramter $\beta\,,\;\gamma \in \mathbb{R}_0^+$ die Funktion

$$f(x) = \frac{\gamma^2}{\sqrt{\beta^2+x^2}}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Parameter γ und β, so dass f im Punkt $(1,\sqrt{3})$ einen Wendepunkt besitzt.

(b) Berechnen Sie Umkehrabbildungen $f_1^{-1}(x)$ und $f_2^{-1}(x)$ von $f_1(x) := f(x)\big|_{\mathbb{D}_{f_1}}$ und $f_2(x) := f(x)\big|_{\mathbb{D}_{f_2}}$. Geben Sie dabei alle Definitionsbereiche $\mathbb{D}_{f_1}$, $\mathbb{D}_{f_2}$, $\mathbb{D}_{f_1^{-1}}$ und $\mathbb{D}_{f_2}^{-1}$ an.

(c) Skizzieren Sie die Situation und bennenen Sie f_1, f_2 und f_1^{-1}, f_2^{-1} in der Skizze.

Aufgabe 4: (Integration & Taylorpolynom, 20 Punkte)

Gegeben ist die Funtkion

$$f(x) = x\,\sin x\,.$$

(a) Berechnen Sie eine Stammfunktion $F(x) = \int x\,\sin x\,dx$ mit Hilfe der partiellen Integration. (Zwischenergebnis: $F(x) = \sin x - x\,\cos x$)

(b) Berechnen Sie nun das bestimmte Integral

$$\int_0^{\pi} x\,\sin x\,dx\,.$$

(c) Statt des exakten Wertes vom Integral aus (b) genügt Ihnen eine Näherung durch das Integral über das Taylorpolynom von f vom Grad 2:

$$\int_0^{\pi} T_{f,2}(x, x_0)\,dx$$

Für welchen Entwicklungspunkt x_0 entscheiden Sie sich am besten?

(d) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_{f,2}(x, x_0)$ mit dem von Ihnen gewählten Entwicklungspunkt x_0 aus (c).

(e) Berechnen Sie nun das bestimmte Integral über das Taylorpolynom aus (d) und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe 5: (Ableitung multivariat, 20 Punkte)

(a) Gegeben ist die Funktion

$$u(x, y) = 5\,x^2 + 2\,x\,y^2 + 2\,y + 3\,.$$

(i) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster Ordnung von u.

(ii) Stellen Sie den Gradienten auf und werten Sie diesen im Punkt $P = (1, -2)$ aus.

(b) Die Funktion

$$u(x, y) = x^y$$

besitzt einen kritischen Punkt. Berechnen Sie diesen.

(c) Es sei $v = (1, 1)$. Berechnen Sie die Richtungsableitung g_v mit

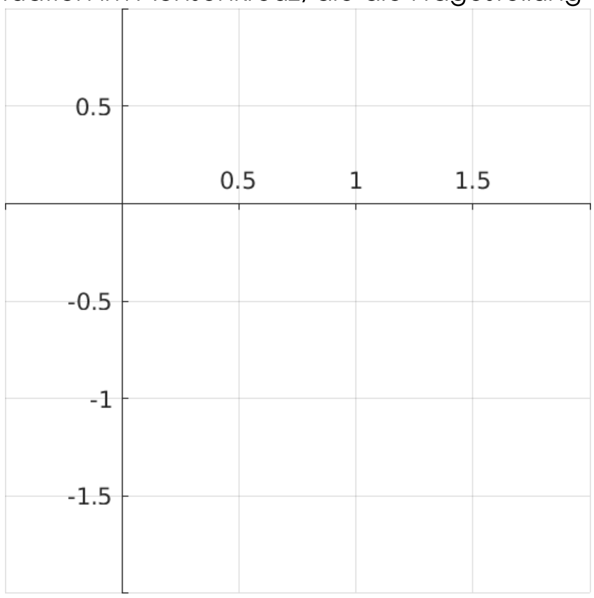
$$g(x) = \sin x + x^2\,\cos y\,.$$

Laborteil

Aufgabe 6: ______________________________ (Laboraufgabe: Newton, 30 Punkte)

Gesucht ist der Punkt auf dem Graphen $\ln x$, der dem Ursprung am nächsten ist.

(a) Skizzieren Sie die Situation im Achsenkreuz, die die Fragestellung darstellt.



(b) Formulieren Sie Ihr Optimierungsproblem mathematisch.

(c) Die Funktion $f(x)$, deren Nullstelle gesucht ist lautet

$f(x) =$

(d) Berechnen Sie eine Näherung der gesuchten Größe mit dem Newton-Verfahren. Verwenden Sie als Startwert $x_0 = 1$ und als Toleranz für $|f(x)|$ den Wert $TOL = 10^{-08}$.

Geben Sie Ihre Ergebnisse an:

`x` $\approx$	`Iterationen:`	`|f(x)|` $\approx$

Skizzieren Sie Ihre Lösung in das Achsenkreuz in (a).

Welches ist die gesuchte Größe in der Fragestellung (mit Wertangabe).

Wie lautet Ihr Newton-Verfahren mit Startwert, Toleranzabfrage und den konkreten Funktionen `f` und `df`:

(e) Was passiert mit Startwert $x_0 = 2$? Berechnen Sie den maximalen Bereich, der sinnvolle Startwerte enthält.

Aufgabe 7: ______________________ (Laboraufgabe: Diskrete Ableitung, 30 Punkte)

Schätzen Sie optimale Parameter α, β und γ, so dass die Funktion

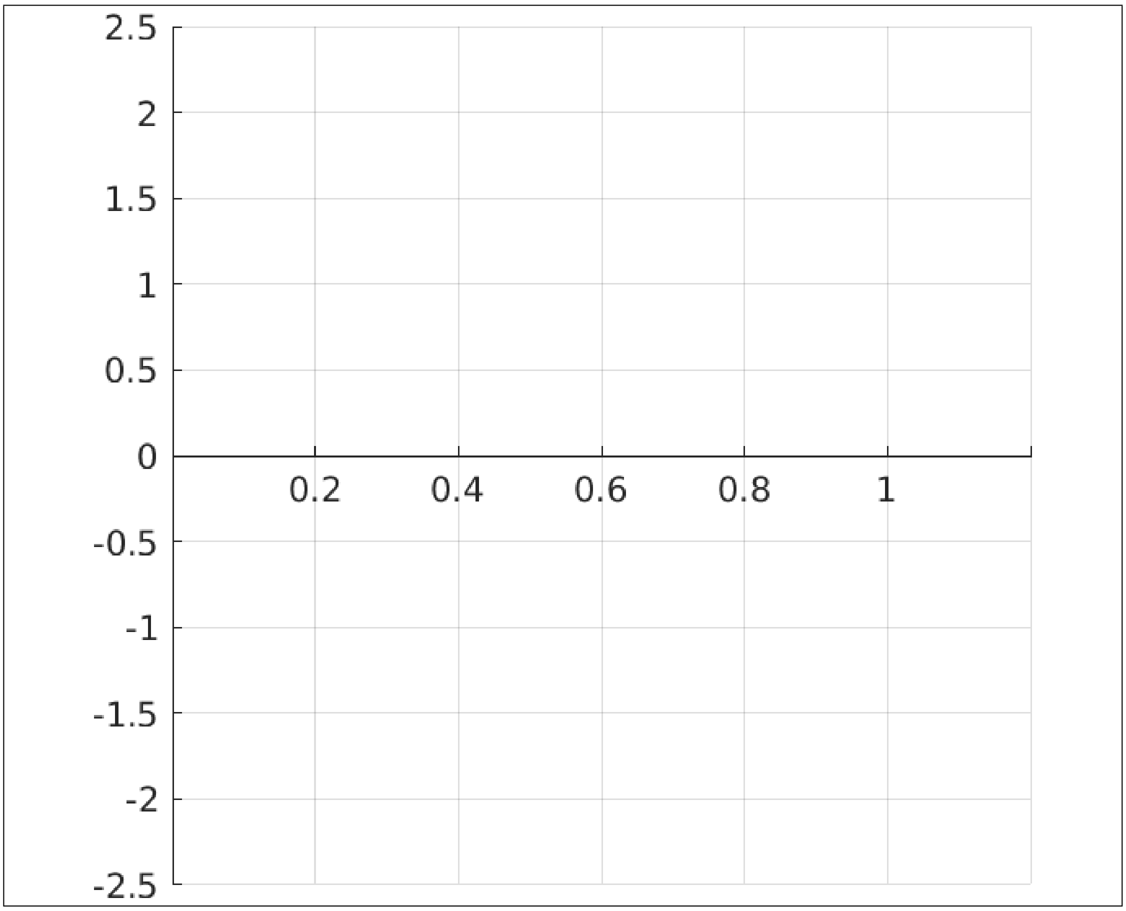
$$f(x) = \ln(\alpha\,(x-\beta)^2 + \gamma)$$

augenscheinlich gut in den Datensatz

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1 & 1.2 \\ 0.25 & -0.25 & -0.63 & -0.63 & -0.25 & 0.25 & 0.71 \end{pmatrix}$$

passt.

(a) Skizze der Daten und des späteren Ergebnisses



(b) Berechnen Sie die erste diskrete, gemittelte Ableitung `d1P` der Daten `P(:,2)` und zeichnen Sie die Werte in's Achsenkreuz in (a).

(c) Berechnen Sie die zweite (Gauß) diskrete Ableitung der Datenpunkte. Ignorieren Sie spezielle Randsituationen. Eine Glättung der Daten ist nicht nötig. Notieren Sie Werte und zugehörige x-Koordinaten direkt vor und nach vermuteten Nullstellen von P, $d1P$

und $d2P$. Wählen Sie (x, y)-Koordinaten für je eine Nullstelle (x_N), einen Extremwert (x_E) und einen Wendepunkt (x_W) basierend auf diesen Ergebnissen.

`x(   ) =`	`P(   ,2)=`		
		$x_N \approx$	$f(x_N) =$
`x(   ) =`	`P(   ,2)=`		
`x(   ) =`	`d1P(   )=`		
		$x_E \approx$	$f'(x_E) =$
`x(   ) =`	`d1P(   )=`		
`x(   ) =`	`d2P(   )=`		
		$x_W \approx$	$f''(x_W) =$
`x(   ) =`	`d2P(   )=`		

(d) Berechnen Sie analytisch oder symbolisch mit Matlab erste und zweite Ableitung von f.

$f'(x) =$

$f''(x) =$

(e) Welches sind Bedingungen an die Parameter damit $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$ erfüllt ist?

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$f(x_{\min}) = f_{\min} \Leftrightarrow$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow$

(f) Belegen Sie nun die Parameter α, β und γ und geben Sie sie samt Rechenweg (your choice: analytisch oder mit Maltab) an:

$\alpha =$ $\beta =$ $\gamma =$

(g) Wie lautet nur Ihre Funktion mit den ermittelten Parametern? Skizzieren Sie den Graphen in das Achsenkreuz aus Teil (a).

$f(x) =$