Kurzskript Mathematik II

Dieses Kurzskript enthält alle in der Vorlesung besprochenen Definitionen, Sätze und Formeln. Der besseren Übersicht wegen sind Beweise, Prosa und Beispielrechnungen entfernt worden. Die etwas schnöde wirkende Farblosigkeit diene dem sparsameren Ausdruck. :-)

Dieses Kurzskript darf in der Semesterendprüfung verwendet werden sofern dies in der entsprechenden Kursvereinbarung auch so festgelegt wurde.

Es dürfen Stellen im Dokument markiert werden (Neon-Marker oder Unterstreichungen) aber es dürfen

keine Notizen

eingefügt werden.

Folgen

1

Definition 1.1 (Folge) *Es sei M eine Menge. Eine Folge ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach M:*

$$a_n \ : \ \mathbb{N} \to M$$

Die geordnete Menge aller Werte der Folge bezeichnen wir mit

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \overbrace{(a_1, \underbrace{a_2}_{\text{Folgenglied}}, a_3, \ldots, a_{\underbrace{k}_{\text{Index}}}, \ldots)}^{\text{Folge}} .$$

Notation: Wir schreiben auch kurz

$$(a_n)_n := (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Definition 1.2 (Konvergenz und Grenzwert einer Folge) *Für eine Folge $(a_n)_n$ heißt a* Grenzwert der Folge*:$\Leftrightarrow$*

$$\forall\epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ : \ |a_n - a| < \epsilon$$

Besitzt eine Folge einen Grenzwert so heißt sie konvergente Folge*.*
Notation: Wir schreiben auch

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{oder} \quad a_n \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} a \quad \text{und auch} \quad a_n \to a \quad (n \to \infty) .$$

Eine Folge, die nicht konvergent ist heißt divergente Folge*.*

Eine Folge heißt bestimmt divergiert*, wenn der Limes entweder $+\infty$ oder $-\infty$ liefert. Damit wird ausgedrückt, dass man weiß "wohin die Folge läuft". Wir nennen dann auch $+\infty$, bzw. $-\infty$ - je nachdem - einen* uneigentlichen Grenzwert*.*
Eine Folge heißt unbestimmt divergent*, wenn der Limes unaufhörlich zwischen Werten hin- und herspringt.*

Satz 1.3 Rechenregeln für den Limes *Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergente Folgen mit*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b\,.$$

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \pm \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = a \pm b$$
$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = a \cdot b$$

Folgerung: *Sind die Voraussetzungen von Satz 1.3 erfüllt so gilt auch:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}\,, \quad \text{falls } b \neq 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(a_n^{b_n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{(\lim_{n\to\infty} b_n)} = a^b\,, \quad \text{falls } a, b \neq 0$$

Definition 1.4 (Monotonie & Beschränktheit) *Eine Folge $(a_n)_n$ heißt nach oben (nach unten)* beschänkt, *falls gilt:*

$$\exists C\ \forall n \in \mathbb{N}\ :\ a_n < \ (>)\ C$$

Eine Folge heißt beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.
Die Folge heißt monoton *wachsend (fallend), falls gilt:*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ :\ a_n \leq\ (\geq)\ a_{n+1}$$

Im Falle von $<$ $(>)$ statt $\leq$ $(\geq)$ sprechen wir von streng monoton *wachsend (fallend).*

Eigenschaften von Folgen:

- Eine konvergente Folge besitzt genau einen Grenzwert.
- Monoton wachsende und nach oben beschränkte Folgen sind konvergent.
- Monoton fallende und nach unten beschränkte Folgen sind konvergent.
- Konvergente Folgen sind beschränkt.

Definition 1.5 (Häufungspunkte) *Für eine Folge $(a_n)_n$ heißt a Häufungspunkt*:$\Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n > N \ : \ |a_n - a| < \epsilon$$

Eigenschaften von Folgen:

- Jede beschränkte Folge besitzt (mindestens) eine konvergente Teilfolge.
- Eine Folge kann mehrere Häufungspunkte haben aber nicht mehr als einen Grenzwert.

Definition 1.6 ((implizite/rekursive) Folge) *Eine implizite oder auch rekursive Folge ist eine Folge, deren $n+1$-tes Folgenglied von davorliegenden Folgengliedern abhängt.*

Spezielle implizite Folgen mit Startwert a_1:

geometrische Folge	$a_{n+1} = q\, a_n$
arithmetsiche Folge	$a_{n+1} = c + a_n$

Funktionen 2

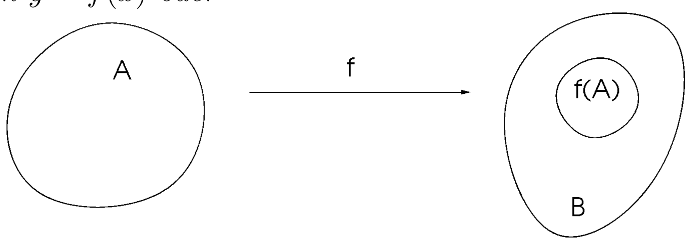
Definition 2.1 (Elementare Funktion) *Unter den elementaren Funktionen verstehen wir grundlegende Funktionen, aus denen mittels Operationen wie Addition/Substraktion, Multiplikation/Division, Zusammensetzung, Verkettung und Umkehrung alle anderen existierenden Funktionenarten erzeugt werden können.*

$p(x) = x^r$	$u(x) = a^x$	$v(x) = \sin x$
Potenzfunktionen	*Exponentialfunktionen*	*Sinusfunktionen*

2.1 Definition einer Funktion

Definition 2.2 (Funktionen) *Seien A, B Mengen. Eine Funktion oder Abbildung von A nach B ist eine Teilmenge f der Produktmenge $A \times B$ derart, dass zu jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ existiert mit $(x, y) \in f$.*
Statt $(x, y) \in f$ schreibt man auch $y = f(x)$ oder

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto y\ . \end{aligned}$$



Schreibweise	Definition/Sprechweise
$y = f(x)$	heißt *Funktionswert von f an der Stelle x.*
A	heißt *Definitionsbereich von f* (auch $\mathbb{D}_f$).

B	heißt *Wertebereich* von f.
Für $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$	heißt
$f(A')$	$:= \{y \in B \mid \exists x \in A' \text{ mit } y = f(x)\}$
	Bild (–menge) von A'(unter f).
$f^{-1}(B')$	$:= \{x \in A \mid f(x) \in B'\}$
	Urbild (–menge) von B'(unter f).

Definition 2.3 (Gleichheit von Funktionen) *Zwei Funktionen $f : A \to B$ und $g : C \to D$ sind gleich, genau dann wenn sowohl die Abbildungsvorschriften von f und g gleich sind und jeweils Definitions– und Bildbereiche übereinstimmen. Das heißt:*

$$(f = g) :\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} A & = & C\,, & \\ B & = & D & \text{und} \\ f(x) & = & g(x) & \forall x \in A\,. \end{array} \right.$$

Man sagt auch die Funktionen sind identisch gleich *: $f \equiv g$*

Definition 2.4 (Definitionsbereich/Wertebereich)
Ist der Definitionsbereich einer Funktion nicht angegeben, ist verabredungsgemäß der größtmögliche Definitionsbereich in $\mathbb{R}$ gemeint.
Ist der Wertebereich einer Funktion nicht angegeben, ist verabredungsgemäß die Bildmenge $f(\mathbb{D}_f)$ des Definitionsbereichs gemeint.

2.2 Untersuchung von Definitionslücken

Definition 2.5 (Grenzwert von Funktionen) *Es sei f eine Funktion. Dann heißt die Zahl c mit $|c| < \infty$, bzw. d mit $|d| < \infty$ und*

$c = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$	*linksseitiger Grenzwert von f für x gegen a*
$d = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$	*rechtsseitiger Grenzwert von f für x gegen a.*
$c = d \quad \Rightarrow \quad c = \lim\limits_{x\to a} f(x)\,,$	*Grenzwert von f für x gegen a, das heißt, dass der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert übereinstimmen:* $$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$$

Für eine Funktion $f : \mathbb{R}\setminus\{a\} \to \mathbb{R}$ sagen wir f existiert am Punkt a, wenn es einen Grenzwert gibt und

$$\lim_{x\to a} f(x) \neq \pm\infty$$

gilt.

Notationen:

$$\lim_{x\nearrow a} f(x) := \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\searrow a} f(x) := \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$$

Definition 2.6 (Stetigkeit einer Funktion) *$f : I \to \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in I$, falls*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

- *Falls x_0 ein Randpunkt von I ist, so ist der Grenzwert nur einseitig zu verstehen.*
- *Die Funktion f heißt auf I stetig, wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in I$ stetig ist.*

Die Menge der aller stetigen Funktionen auf Ω bezeichnen wir mit:

$$C^0(\Omega) := \{f \;:\; \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig auf } \Omega\}$$

Sind zwei Funktionen stetig so sind es auch ihre Summe, Produkt und ihr Quotient, sofern der Nenner nicht verschwindet. Dafür sorgen die Rechenregelen für Grenzwerte:

Die Rechenregeln für Grenzwerte sind die gleichen wie die für Grenzwerte bei Folgen (siehe Satz 1.3 auf Seite 3)

Definition 2.7 (unbestimmter Ausdruck) *Als unbestimmte Ausdrücke bezeichnen wir Limes, die von folgender Form sind:*

$$\left[\frac{0}{0}\right]\,,\; \left[\frac{\infty}{\infty}\right]\,,\; [0 \cdot \infty]\,,\; \left[0^0\right]\,,\; [1^\infty]\,,\; \left[\infty^0\right]\,,\; [\infty - \infty]$$

2.3 Umkehrabbildungen

Definition 2.8 (Monotonie von Funktionen) *Wir nennen eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ monoton wachsend (monoton fallend), falls*

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b]\; x_1 < x_2 \;:\; f(x_1) \leq (\geq) f(x_2)$$

gilt. f heißt streng monoton wachsend (streng monoton fallend), falls

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b]\; x_1 < x_2 \;:\; f(x_1) < (>) f(x_2)\,.$$

gilt. Wir nennen f streng monoton, wenn f entweder streng monoton wachsend (smw) oder streng monoton fallend (smf) ist.

Definition 2.9 (Injektiv, Surjektiv & Bijektiv) *Es seien A, B Mengen. Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt*

surjektiv	$:\Leftrightarrow$	$f(A) = B$	*(f bildet A auf B ab)*
injektiv	$:\Leftrightarrow$	$\forall x_1 \neq x_2 \; : \; f(x_1) \neq f(x_2)$	*(f ist eineindeutig)*
bijektiv	$:\Leftrightarrow$	*f ist surjektiv und injektiv*	*(f bildet eineindeutig A auf B ab)*

Satz 2.10 Umkehrfunktion : *Ist $f : A \to B$ bijektiv, dann gilt*

$$\forall x \in A \; \exists! \, y \in B \; : \; f(x) = y \quad \wedge \quad \forall y \in B \; \exists! \, x \in A \; : \; f(x) = y$$

$\Rightarrow$

$$\exists \; f^{-1} : B \to A \text{ mit } f^{-1}(y) = x \text{ wenn } f(x) = y$$

$f^{-1} : B \to A$ ist ebenfalls bijektiv und

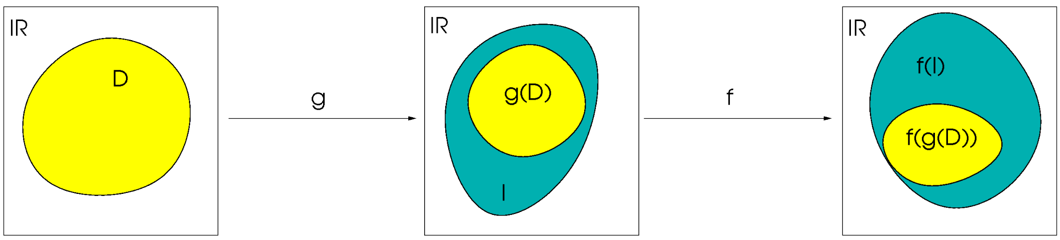
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

Die Verkettung von f und f^{-1} bildet die Identität. Hier gilt dann auch

$$(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = Id(x) = x$$

Definition 2.11 (Komposition/Verkettung von Funktionen) *Durch $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ mit $g(D) \subseteq I$ kann man die Komposition/Verkettung $f \circ g : D \to \mathbb{R}$ bilden. Sie ist definiert durch*

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)) \, .$$



Rechenregeln für Exponential– und Logarithmusfunktionen: Es seien $a, b > 0$:
Exponentialfunktion:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \qquad a^{-x} = \tfrac{1}{a^x} \qquad a^0 = 1$$

$$p \cdot a^x + q \cdot a^x = (p+q) \cdot a^x \qquad \tfrac{a^x}{b^x} = \left(\tfrac{a}{b}\right)^x \qquad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

Logarithmusfunktion:

$$\log_a(b^n) = n \log_a(b) \quad \Rightarrow \quad \log_a \tfrac{1}{b} = -\log_a(b)$$

$$\log_a(bc) = \log_a(b) + \log_a(c) \quad \Rightarrow \quad \log_a \tfrac{b}{c} = \log_a(b) - \log_a(c)$$

Basiswechsel:

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$$

Notation:

$$\log b := \log_{10} b \quad \text{und} \quad \ln b := \log_e b$$

Definition 2.12 (Arkusfunktionen) *Die Abbildungen*

$$\begin{aligned} \sin &: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] \quad && \cos : [0, \pi] \to [-1, 1] \\ \tan &: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} && \cot : (0, \pi) \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

sind bijektiv. Die Umkehrfunktionen der Trigonometrischen Funktionen heißen Arkusfunktionen und lauten

$$\begin{aligned} \arcsin &: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad && \arccos : [-1, 1] \to [0, \pi] \\ \arctan &: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) && \operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi) \end{aligned}$$

Differenzieren ... ist ein Handwerk

3

Definition 3.1 (Differenzierbarkeit) *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar, wenn der Grenzwert*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert. Diesen Grenzwert bezeichnen wir als die Ableitung von f im Punkt x. Notation:

$$f'(x)\,,\ \underbrace{\frac{d}{dx} f(x)\,,\ \frac{df}{dx}(x)\,,\ \frac{df}{dx}}_{\text{Leibnizsche Symbolik}}$$

3.1 Differentiation von univariaten Funktionen

3.1.1 Potenzfunktionen und Linearität

Satz 3.2 (Ableitung von Potenzfunktionen)

$$(x^r)' = r\,x^{r-1}$$

Satz 3.3 (Linearität des Ableitungsoperators) *Der Ableitungsoperator ist linear, d.h. es gilt für Funktionen $f \in C^1(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ und Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*

$$(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))' = \alpha\, f'(x) + \beta\, g'(x)$$

3.1.2 Sinusfunktionen und Produkt-/Quotientenregel

Satz 3.4 (Ableitung der Sinusfunktion)

$$\sin' x = \cos x$$

$$\cos' x = -\sin x$$

Satz 3.5 (Produktregel)

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Satz 3.6 (Quotientenregel)

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

3.1.3 Kettenregel und Ableitung der Umkehrabbildung

Satz 3.7 (Kettenregel)

$$(f \circ g)'(x) = f(g(x))' = f'(g(x))\, g'(x)$$

Wir nennen f' die äußere Ableitung *und g' die* innere Ableitung*. Wir sprechen beim Term g' auch vom* Nachdifferenzieren*.*

Folgerung: Kettenregel bei mehrfacher Verkettung *Es sei $\tilde{f}$ die Verkettung der n Funktionen $f_1, \ldots, f_n$:*

$$\tilde{f}(x) = \left(\bigcirc_{k=1}^{n} f_k \right)(x) = (f_1 \circ \cdots \circ f_n)(x)$$

Dann gilt

$$\frac{d\tilde{f}}{dx} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{df_k}{df_{k+1}} \frac{df_n}{dx} = \frac{df_1}{df_2} \frac{df_2}{df_3} \cdots \frac{df_{n-1}}{df_n} \frac{df_n}{dx}$$

Satz 3.8 (Ableitung der Umkehrabbildung)

$$f^{-1}(x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

3.1.4 Exponential- und Logarithmusfunktionen

Satz 3.9 (Ableitung der Exponential- und Logarithmusfunktion)

$$(a^x)' = a^x \, \ln a$$

$$\log_a x' = \frac{1}{x \, \ln a}$$

Definition 3.10 (Ableitungen höherer Ordnung) *Die Ableitung n-ter Ordnung erhalten wir durch die Ableitung $n-1$-ter Ordnung, diese wiederum durch die Ableitung $n-2$-ter Ordnung, usw. Der Prozess wird sukkzessive fortgeführt bist zur ersten Ableitung:*

$$\frac{d^n f}{d^n x} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{d^{n-1} x}\right), \quad n \geq 1$$

Bei Ableitungen ab der dritten Ordnung werden auch bei nicht Leibnizscher Notation keine Striche mehr verwendet:

$$f'''(x) = f^{(3)}(x) = \frac{d^3 f}{d^3 x}(x)$$

Zusammenfassung

Potenzfunktion		Spezialfälle	
$(x^r)' = r\,x^{r-1}$		$\left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \frac{p}{q}\,x^{\frac{p-q}{q}}$ $(1)' = 0$	
Exponential- und Logarithmusfunktion			
$(a^x)' = a^x\,\ln a$	$\log_a' x = \frac{1}{x\,lna}$	$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$	$\ln' x = \frac{1}{x}$
trigonometrische Funktion			
$\sin' x = \cos x$	$\cos' x = -\sin x$	$\tan' x = 1 + \tan^2 x$	

Linearität der Ableitung
$(\alpha\,f(x) + \beta\,g(x))' = \alpha\,f'(x) + \beta\,g'(x)$
Produktregel
$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$
Quotientenregel
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$
Ableitung der Umkehrabbildung
$f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
Kettenregel
$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$

3.2 Anwendungen

3.2.1 Nullstellen berechnen mit Newton

Definition 3.11 (Nullstellen) $x \in \mathbb{R}$ *mit*

$$f(x) = 0$$

heißt Nullstelle *von* f.

(Mitternachtsformel) Nullstellen der Funktion

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

sind gegeben durch

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}\,.$$

(Newton-Verfahren) Für $f \in C^1$ beschreibt zu gegebene, x_0 die implizite Folge

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\,.$$

das *Newton-Verfahren*. x_k ist eine Näherung an die Nullstelle von f, sofern die Folge konvergiert. Dabei muss stets $f'(x_k) \neq 0$ erfüllt sein. Versteht sich.

```
f  = @(x) log(x);
df = @(x) 1/x;

TOL = 1.0e-08;
x  = 2; it = 0; Res = abs(f(x));
fprintf("x_%d = %.2f,  Res = |f(x_%d)| = %.2e\n",it,x,it,Res);
while Res>TOL
    x   = x - f(x)/df(x);
    it  = it+1;
    Res = abs(f(x));
    fprintf("x_%d = %.2f,  Res = |f(x_%d)| = %.2e\n",it,x,it,Res);
end
```

Source/NewtonVerfahren.m

Definition 3.12 (kritischer Punkt) *Unter einem* kritischen Punkt *einer Funktion f verstehen wir die Stelle x, bei der $f'(x) = 0$ gilt. Kritische oder auch stationäre Punkte von f sind Kandidaten von Extremalstellen.*

3.2.2 Funktionsapproximation mit Taylor

Definition 3.13 (Taylorpolynom) *Für eine in $x_0 \in I$ n–mal differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt das Polynom*

$$T_{f,n}(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

das Taylorpolynom *der Ordnung n von f an der Stelle x_0.*

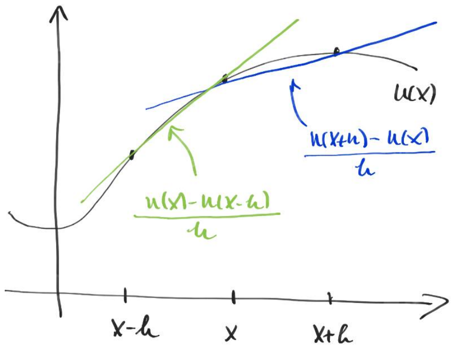
Definition 3.14 (Taylorreihe) *Sei $f \in C^\infty(I)$. Dann heißt die Potenzreihe*

$$T_f(x, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k$$

die Taylorreihe *der Funktion f im Entwicklungspunkt x_0. Wir sagen die Funktion ist* taylorentwickelbar, *wenn $f(x) = T_f(x, x_0)$ gilt.*

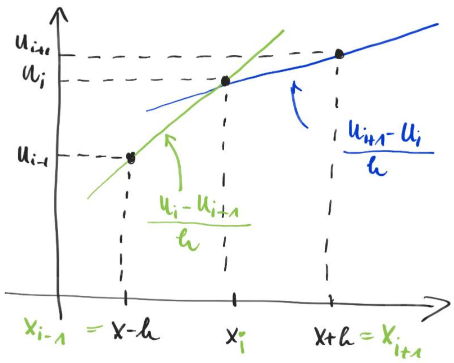
3.3 Differentiation von diskreten Funktionen

Differenzenquotient für die erste Ableitung:



$$
\begin{aligned}
u'(x) &\approx \frac{u(x+h)-u(x)}{h} && \text{vorwärst}\\
&\approx \frac{u(x)-u(x-h)}{h} && \text{rückwärst}\\
&\approx \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2\,h} && \text{gemittelt}
\end{aligned}
$$

angewandt auf diskrete Funktionen:



$$
\begin{aligned}
u_i' &\approx \frac{u_{i+1}-u_i}{h} && \text{vorwärst}\\
&\approx \frac{u_i-u_{i-1}}{h} && \text{rückwärst}\\
&\approx \frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\,h} && \text{gemittelt}
\end{aligned}
$$

Filterschreibweise:

$$
\begin{aligned}
F^{1,v} &= [0,-1,1]\,\frac{1}{h} \;\Rightarrow\; && u_i' \approx u_{i-1}\,F_1^{1,v} + u_i\,F_2^{1,v} + u_{i+1}\,F_3^{1,v} && \text{vorwärst}\\
F^{1,r} &= [-1,1,0]\,\frac{1}{h} \;\Rightarrow\; && u_i' \approx u_{i-1}\,F_1^{1,r} + u_i\,F_2^{1,r} + u_{i+1}\,F_3^{1,r} && \text{rückwärts}\\
F^{1,m} &= [-1,0,1]\,\frac{1}{2\,h} \;\Rightarrow\; && u_i' \approx u_{i-1}\,F_1^{1,m} + u_i\,F_2^{1,m} + u_{i+1}\,F_3^{1,m} && \text{gemittelt}
\end{aligned}
$$

Differenzenquotient für die zweite Ableitung:

$$
\begin{aligned}
u''(x) &\approx \frac{u'(x+h)-u'(x)}{h} && \text{Vorwärtsdifferenzenquotient}\\
&\approx \frac{\frac{u(x+h)-u(x)}{h} - \frac{u(x)-u(x-h)}{h}}{h} && \text{Rückwärtsdifferenzenquotient}\\
&= \frac{1}{h^2}\,(u(x+h) - 2\,u(x) + u(x-h))
\end{aligned}
$$

angewandt auf diskrete Funktionen

$$u_i'' = \frac{1}{h^2}\,(u_{i+1} - 2\,u_i + u_{i-1})$$

Filterschreibweise:

$$F^{2,vr} = [1, -2, 1]\frac{1}{h^2} \;\Rightarrow\; u_i'' \approx u_{i-1}\,F_1^{2,vr} + u_i\,F_2^{2,vr} + u_{i+1}\,F_3^{2,vr}$$

```
function du=diskdiff(u,F)

N = length(u);
% Filterbreite: LL*2+1 sollte ungerade sein
LL=(length(F)-1)/2;

for j=1:N
    for k=-LL:LL
        % Daten ausserhalb konstant fortsetzen
        kk = min(max(1,j+k),N);
        % u-Ausschnitt in Filtergroesse
        uu(k+1+LL) = u(kk);
    end
    % "Faltung" des u-Ausschnitts mit dem Filter
    % oder nennen Sie es "Anwendung des Filters"
    du(j) = sum(uu.*F);
end

end
```
Source/src/DiskDiff.m

3.4 Anwendung: verrauschte Daten glätten

$$u^0 = \text{Startkurve}$$
$$u^{k+1} = u^k + \delta\, u^{k\prime\prime}$$

```
% betrachtete Zeitspanne
t = linspace(1,M,M);
% Daten mit Rauschen
u = sin(T*2*pi/120)'...
  +(rand(M,1)-0.5);

plot(t,r,'bo-')
hold on
for k=1:LOOP
    % zweite Ableitung von u
    d2u = Diff(u,(1,-2,1)/h^2,1);
    u = u + 0.1*d2u;
end
plot(t,u,'ro-')
```

Source/src/Smooth.m

3.5 Differentiation von multivariaten Funktionen

Definition 3.15 (partielle Ableitung) *Die partiellen Ableitungen von u am Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sind gegeben durch*

$$\frac{\partial}{\partial x}\,u(x,y) := \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\,u(x,y) := \lim_{h\to 0}\frac{u(x,y+h)-u(x,y)}{h}$$

Notation:

$$\frac{\partial}{\partial x}\,u\,,\ \frac{\partial u}{\partial x}\,,\ u_x\,,\ u_{,x} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\,u\,,\ \frac{\partial u}{\partial y}\,,\ u_y\,,\ u_{,y}$$

Definition 3.16 (Gradient) *Der Gradient einer Funktion u ist gegeben durch*

$$\operatorname{grad}(u)^T = \nabla u := \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ \vdots \\ u_{x_n} \end{pmatrix}.$$

∇ *heißt Nabla-Operator .*

Satz 3.17 *Für alle Konstanten $c \in \mathbb{R}$ und Skalarfelder $u, v:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt:*

$$\nabla\, c = 0$$

Linearität

$$\nabla\,(c\,u) = c\,\nabla\,u$$
$$\nabla\,(u+v) = \nabla\,u + \nabla\,v$$

Produktregel

$$\nabla\,(u\,v) = u\ \nabla\,v + v\ \nabla\,u$$
$$\nabla\,(u^n) = n\,u^{n-1}\ \nabla\,u \quad \textit{für} \quad n \neq 0$$

Definition 3.18 **($C^k(D)$)** *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt auf D* k-mal stetig differenzierbar*, falls alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k existieren und stetig sind. Wir schreiben*

$$f \in C^k(D) := \{f : D \to \mathbb{R} \mid f^{(m)} \in C^0(D)\,,\ m \leq k\}$$

Satz 3.19 **(Satz von Schwarz)** *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f \in C^2(D)$, dann gilt*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \qquad \forall 1 \leq i, j \leq n\,.$$

3.6 Anwendung: Regression als multivariates Optimierungsproblem

```
% Hauptprgramm: RegNonLin.m (moodle)
global P
P=[[0 0]; [1 2]; [2 1]; [3 5]];
c0=[0 0];
c = lsqnonlin(@Residuum,c0);
```

```
function y=Residuum(c) global P
y = P(:,2)-Ansatzfunktion(P(:,1),c);
end
```

```
function y=AnsatzFunktion(x,c)
y = c(1)*exp(c(2)*x);
end
```

Integrieren
... ist eine Kunst

4

4.1 unbestimmte Integration (Ableitung umkehren)

4.1.1 Einführung und Stammfunktionen von Potenzfunktionen

Definition 4.1 (Stammfunktion & unbestimmtes Integral) *F heißt Stammfunktion zu f auf dem Intervall I, wenn $\forall\, x \in I$:*

$$F'(x) = f(x)\,.$$

Wir sagen auch F ist ein unbestimmtes Integral von f auf I. In Leibnizscher Symbolik schreiben wir für das unebstimmte Integral

$$\int f(x)\ dx \quad oder \quad \int f\ dx\,.$$

Wir sagen Integral f von $x\,dx$ oder Integral $f\,dx$. f bezeichnen wir als Integranden und x als Integrationsvariable.

Satz 4.2 (Stammfunktionen von Potenzfunktionen :)

$$\begin{aligned}
\int x^n\ dx &= \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + C \quad && n \in \mathbb{N} \\
\int x^{\frac{p}{q}}\ dx &= \frac{q}{p+q}\,x^{\frac{p+q}{q}} + C \quad && p \in \mathbb{Z}\,,\ q \in \mathbb{N}\,,\ p \neq -q \\
\int \frac{1}{x}\ dx &= \ln|x| + C && x \neq 0
\end{aligned}$$

Satz 4.3 Regeln der unbestimmten Integration: (Linearität des unbestimmten Integrals)
Das integral ist linear, das heißt für α, $\beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int (\alpha f + \beta g)\ dx = \alpha \int f\ dx + \beta \int g\ dx\,.$$

4.1.2 Partielle Integration und Stammfunktionen von Exponentialfunktionen

Satz 4.4 Regeln der unbestimmten Integration: (Partielle Integration)

$$\int u(x)v'(x)\ dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\ dx$$

Satz 4.5 Stammfunktionen von Exponential- und Logarithmusfunktionen :

$$\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$
$$\int \log_a x\ dx = \frac{x\,(\ln x - 1)}{\ln a} + C$$
$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\ dx = \ln |g(x)| + C$$

4.1.3 Stammfunktionen von trigonometrischen Funtkionen

Satz 4.6 Stammfunktionen von Trigonometrischen Funktionen :

$$
\begin{aligned}
&\int \sin x \ dx = -\cos x + C && \int \arcsin x \ dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \\
&\int \cos x \ dx = \sin x + C && \int \arccos x \ dx = x \ \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C \\
&\int \tan x \ dx = -\ln|\cos x| + C && \int \arctan x \ dx = x \ \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \\
&\int \cot x \ dx = \ln|\sin x| + C && \int \operatorname{arccot} x \ dx = x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C
\end{aligned}
$$

4.2 bestimmte Integration (Riemann-Integral)

4.2.1 Einführung über Flächen unter Graphen

Definition 4.7 (Riemann-Integral) *Für die Funktion $f : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ und die Zerlegung des Intervalls*

$$[x_0, x_n] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}]$$

seien mit

$$(m_i, M_i) := (\min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x), \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x))$$

die Folgen "Obersumme S_n" und "Untersumme s_n"

$$S_n := (M_0 + \cdots + M_{n-1})\, h\,,\ \ s_n := (m_0 + \cdots + m_{n-1})\, h$$

gegeben. Haben die Summen S_n und s_n einen gemeinsamen Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} s_n = A$$

so heißt f Riemann–integrierbar oder R–integrierbar und das bestimmte Integral der Funktion f von a bis b

$$A = \int_a^b f(x)\ dx$$

heißt Riemann–Integral.

Satz 4.8 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)) *Ist $F(x)$ eine Stammfunktion der stetigen Funktion $f(x)$, also gilt $F(x)' = f(x)$, so gilt*

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)\,.$$

Weitere Schreibweisen sind durch

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)\Big|_a^b$$

gegeben.

Satz 4.9 Regeln der bestimmten Integration: (Zerlegung des Integrals) *Das Integral auf* $[x_0, x_n]$ *läßt sich in die Summe von n Integralen auf nicht notwendigerweise äquidistante Teilintervalle* $[x_i, x_{i+1}]$, $(i = 0, \ldots, n-1)$ *mit* $[x_0, x_n] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}]$ *zerlegen:*

$$\int\limits_{x_0}^{x_n} f(x)\ dx = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\ dx + \cdots + \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\ dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\ dx$$

Satz 4.10 Regeln der bestimmten Integration: (Linearität des bestimmten Integrals)
Das bestimmte Integral ist linear, das heißt für $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)\ dx = \alpha \int\limits_a^b f\ dx + \beta \int\limits_a^b g\ dx\,.$$

Satz 4.11 Regeln der bestimmten Integration: (Partielle Integration)
Für $g, f \in C^1((a, b))$ *gilt*

$$\int\limits_a^b f'(x) \cdot g(x)\ dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f(x)g'(x)\ dx\,.$$

4.2.2 uneigentliche Integrale

Definition 4.12 (uneigentliches Integral)

1. *Sei* $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ *eine Funktion, die über jedem Intervall* $[a, R]$, $a < R < \infty$ *Riemann–integrierbar ist. Falls der Grenzwert* $\lim_{R\to\infty} \int\limits_a^R f(x)\ dx$ *existiert, heißt das Integral*
$$\int\limits_a^\infty f(x)\ dx := \lim_{R\to\infty} \int\limits_a^R f(x)\ dx$$
konvergent. *Analog definiert man das Integral für* $f :]-\infty, a] \to \mathbb{R}$.

2. *Sei* $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ *eine Funktion, die über jedem Teilintervall* $[a+\epsilon, b]$, $a < a + \epsilon < b$, *Riemann–integrierbar ist. Falls der Grenzwert* $\lim_{\epsilon\searrow 0} \int\limits_{a+\epsilon}^b f(x)\ dx$ *existiert, so heißt das Integral*
$$\int\limits_a^b f(x)\ dx := \lim_{\epsilon\searrow 0} \int\limits_{a+\epsilon}^b f(x)\ dx$$
konvergent. *Analog definiert man das Integral für* $f : [a, b[\to \mathbb{R}$.

3. *Sei* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *eine Funktion, die über jedem Teilintervall* $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$ *Riemann–integrierbar ist und sei* $c \in]a, b[$ *beliebig. Falls die beiden uneigentlichen Integrale*
$$\int\limits_a^c f(x)\ dx = \lim_{\alpha\searrow a} \int\limits_\alpha^c f(x)\ dx$$
und
$$\int\limits_c^b f(x)\ dx = \lim_{\beta\nearrow b} \int\limits_c^\beta f(x)\ dx$$
existieren, heißt das Integral
$$\int\limits_a^b f(x)\ dx := \int\limits_a^c f(x)\ dx + \int\limits_c^b f(x)\ dx$$
konvergent. *Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von* $c \in]a, b[$.

4.3 Zusammenfassung für Stammfunktionen

Potenzfunktion	Spezialfälle
$\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}\,x^{r+1} + C$	$\int 1\,dx = x + C$ $\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\,\sqrt{x}^3 + C$
Exponential- und Logarithmusfunktion	
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $\int \log_a x\,dx = \frac{x\,(\ln x - 1)}{\ln a} + C$	$\int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x + C$ $\int \ln x\,dx = x\,(\ln x - 1) + C$
trigonometrische Funktion	
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ $\int \tan x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$ $\int \cot x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	$\int \arcsin x\,dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$ $\int \arccos x\,dx = x\,\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$ $\int \arctan x\,dx = x\,\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$ $\int \operatorname{arccot} x\,dx = x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$
Linearität der Integration	
$\int \alpha\,f(x) + \beta\,g(x)\,dx = \alpha\,\int f(x)\,dx + \beta\,\int g(x)\,dx$	
partielle Integration	
$\int f'(x)\cdot g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx$	
Substitution/Transformationsformel	
$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + C\,,\quad F'(x) = f(x)$	
HDI: Hauptsatz der Differentiation und Integration	
$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,,\quad F'(x) = f(x)$	