Blatt 4: Funktionen

Mittelwert Ihrer Selbsteinschätzung:
-1: "hab nicht mal die Aufgabe gelesen"
0: "weiß nicht wie ich anfangen soll"
1: "habe begonnen, bin dann aber hängen geblieben"
2: "konnte alles rechnen, bin aber unsicher, ob es stimmt"
3: "alles klar hier"

Definitionsbereich, Grenzwert, Stetigkeit und erste, grobe Skizzen von Funktionen

Aufgabe 1:

Gegeben sind folgende Funktionen

(a)	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$	(b)	$f(x) = \sqrt{(x-1)\,(4-x)}$
(c)	$f(x) = \ln x$	(d)	$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(x^2-4)}$
(e)	$f(x) = \dfrac{(x-1)\,(x-3)}{(x-1)\,(x-2)}$	(f)	$f(x) = \dfrac{x^3+3}{(3\,x-1)(x+3)}$
(g)	$f(x) = \dfrac{x^2\,(x-4)}{2\,x-2\,x^3}$	(h)	$f(x) = \dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}$
(i)	$f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$	(j)	$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{-1}{\cos x}}$
(k)	$f(x) = \dfrac{\sin x}{x\,\mathrm{e}^{2-\frac{1}{x}}}$	(l)	$f(x) = \dfrac{\sqrt{x\,(4-x)}}{\log_2\left(\lvert 2\,x+3\rvert - \lvert x-5\rvert\right)}$

Untersuchen Sie die Funktionen jeweils auf folgende Eigenschaften und fertigen Sie aus den gewonnenen Informationen eine Skizze der Funktion an.

(i) Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$

(ii) Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs (Definitionsbereich, offene Intervallränder und im Undendlichen)

(iii) Schnitt mit den Achsen.

(iv) Skizze

Welche Informationen fehlen uns noch, um eine bessere Skizze anfertigen zu können?

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 4

Aufgabe 2:

Um eine reelle Zahl x in Vorzeichen, Vor- und Nachkommastellen aufzuteilen, werden die Funktionen “Signum” (Vorzeichen) und “Gaußklammer” (ganzer Teil, “Entier”) durch

$$\mathrm{sig} x = \begin{cases} +1\,, & x > 0 \\ 0\,, & x = 0 \\ -1\,, & x < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \lfloor x \rfloor = z \in \mathbb{Z}\,,\ z \le x < z+1$$

eingeführt. Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen:

(a) $f(x) = \mathrm{sig} x$ (b) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (c) $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$
(d) $f(x) = \mathrm{sig}\lfloor |x| \rfloor$ (e) $f(x) = |x - \mathrm{sig}\lfloor |x| \rfloor|$

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 15

Umkehrabbildungen

Aufgabe 3:

Gegeben sind folgende Funktionen:

(a) $f(x) = 2\,x - 1$ (b) $f(x) = x^2 + 12\,x - 4$
(c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (d) $f(x) = \dfrac{x+3}{2\,x}$
(e) $f(x) = |x|$ (f) $f(x) = \sqrt{x}$
(g) $f(x) = 1 - 2\,a^{x-2}$ (h) $f(x) = \ln(2\,x^2 + 3\,x - 4)$

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen den Definitionsbereich in $\mathbb{R}$ und Teilmengen A auf die eingeschränkt die Funktion umkehrbar ist und das entsprechende Bild B, so dass $f : A \to B$ bijektiv ist. Berechnen Sie die Umkehrfunktionen und geben Sie jeweils Definitionsmenge und Bilder an. Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 16

Komposition

Aufgabe 4:

(a) Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = 2\,x - 1\,, \quad g(x) = x^3 \quad \text{und} \quad h(x) = |x| + 1\,.$$

Berechnen Sie

(i)	$(f \circ g)(2)$	(ii)	$(g \circ h)(-3)$
(iii)	$(f \circ f)(4)$	(iv)	$(h \circ g \circ f)(3)$

(b) Zerlegen Sie folgende Funktionen in Kompositionen und Linearkombinationen aus nahezu elementaren Funktionen (Potenzfunktionen/Polynome, trigonometrische Funktionen, Exponential-/Logarithmusfunktionen):

(i)	$u(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x+3}}$	(ii)	$u(x) = (5\,x)^2 - 1$
(iii)	$u(x) = \|7\,x + 2\| + 5$	(iv)	$u(x) = \dfrac{1}{(3\,x^7 + 1)^{\frac{1}{7}}}$
(v)	$u(x) = \cos\left(\tan^2\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2-x}\right)\right)$	(vi)	$u(x) = \dfrac{\log_a\left(\left(\mathrm{e}^x + 2\,x^2\right)^2 - 1\right)}{\sqrt[13]{x^4}}$

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 18

Lösung 1

(a)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

(i) Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$:

Der Nenner im Bruch darf nicht verschwinden, d.h. $\sqrt{x+2} \neq 0$ muss erfüllt sein und $x + 2 \geq 0$ muss gelten, da das Argument der Wurzel nicht negativ sein darf. Zusammen muss $x > -2$ gelten. Damit erhalten wir den Definitionsbereich

$$\mathbb{D}_f = (-2, \infty)$$

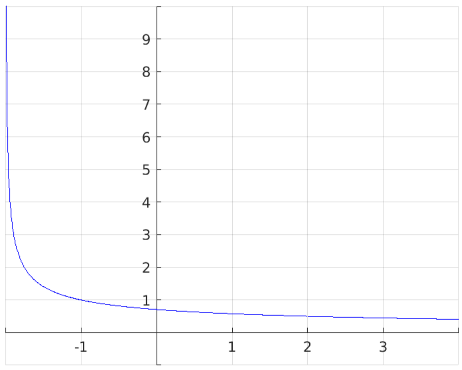
(ii) Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs:

$$\lim_{x \searrow -2} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x+2}}_{>0}} = \infty\,, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x+2}} = 0$$

(iii) Schnitt mit den Achsen:

y-Achse: $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71$ x-Achse: nicht vorhanden

(iv) Skizze:



(b)

$$f(x) = \sqrt{(x-1)(4-x)}$$

(i) Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$:

Das Argument der Wurzel darf nicht negativ sein. Ein Produkt ist immer dann nicht negativ, wenn beide Faktoren nicht negativ oder beide Faktoren nicht positiv sind, d.h. wenn

$$\begin{array}{lllll} & (x-1\geq 0 & \wedge\ 4-x\geq 0) & \vee & (x-1<0\ \wedge\ 4-x<0) \\ \Leftrightarrow & (x\geq 1 & \wedge\ x\leq 4) & \vee & (x<1\ \wedge\ x>4) \\ \Leftrightarrow & x\in[1,\infty)\cap(-\infty,4] & & \cup & \emptyset \\ & \Rightarrow & & & \end{array}$$

$$\mathbb{D}_f = [1,4]$$

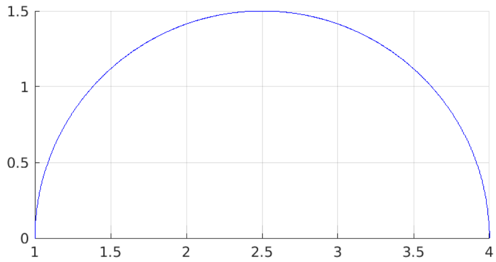
(ii) Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs:

Es gibt keine Definitionslücken und der Definitionsbereich ist sogar ein abgeschlossenes Intervall. Da gibt es nichts zu untersuchen.

(iii) Schnitt mit den Achsen:

y-Achse: nicht vorhanden da $x = 0 \notin \mathbb{D}_f$. x-Achse: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1, 4\}$

(iv) Skizze:



(c)

$$f(x) = \ln x$$

(i) Definitionsbereich $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$

(ii) Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs:

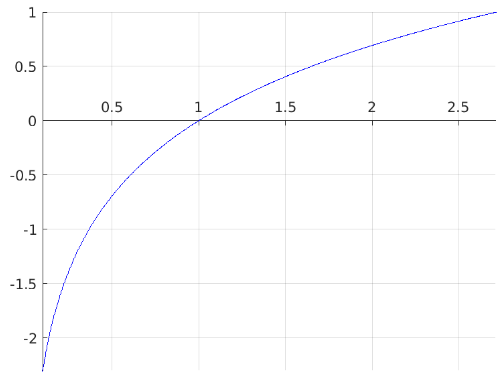
$$\lim_{x\searrow 0} \ln x = -\infty\,, \quad \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$

(iii) Schnitt mit den Achsen:

y-Achse: nicht vorhanden

x-Achse: $f(1) = 0$

(iv) Skizze:



(d)

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln(x^2-4)}$$

(i) Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$: Das Argument in der Wurzel im Zähler muss nicht negativ sein UND das Argument des Logarithmus muss positiv sein UND der Logarithmus darf nicht verschwinden, d.h. sein Argument darf nicht eins sein.

$$\begin{array}{rcccc} & x \geq 0 & \wedge & x^2 - 4 > 0 & \wedge & x^2 - 4 \neq 1 \\ \Leftrightarrow & x \in \mathbb{R}_0^+ & \wedge & |x| > 2 & \wedge & |x| \neq \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow & x \in \mathbb{R}_0^+ & \cap & (\mathbb{R} \setminus [-2,2]) & \cap & (\mathbb{R} \setminus \left\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right\}) \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{D}_f = (2, \infty) \setminus \left\{\sqrt{5}\right\}$$

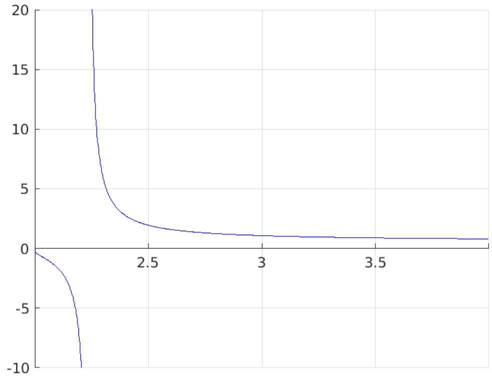
(ii) Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs:

$$\lim_{x \searrow 2} \frac{\overbrace{\sqrt{x}}^{>0}}{\underbrace{\ln(\underbrace{x^2-4}_{<1})}_{<0}} = -\infty \qquad \lim_{x \searrow \sqrt{5}} \frac{\sqrt{x}}{\underbrace{\ln(\underbrace{x^2-4}_{>1})}_{>0}} = +\infty$$

$$\lim_{x \nearrow \sqrt{5}} \frac{\sqrt{x}}{\underbrace{\ln(\underbrace{x^2-4}_{<1})}_{<0}} = -\infty \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}}{\underbrace{\ln(x^2-4)}_{\text{sehr langsam}}} = \infty$$

(iii) Schnitt mit den Achsen: Da $x \notin \mathbb{D}_f$ gibt es auch keine Schnitte mit den Achsen.

(iv) Skizze:



(e)

$$f(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)}$$

(i) Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$: Hier muss man nur darauf achten, dass der Nenner nicht verschwindet, also:

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$$

(ii) Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{(x-1)}(x-3)}{\cancel{(x-1)}(x-2)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-3}{x-2} = 1$$

$$\lim_{x\searrow 1} \frac{x-3}{x-2} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$\lim_{x\nearrow 1} \frac{x-3}{x-2} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$\lim_{x\searrow 2} \frac{\overbrace{x-3}^{<0}}{\underbrace{x-2}_{>0}} = -\infty$$

$$\lim_{x\nearrow 2} \frac{\overbrace{x-3}^{<0}}{\underbrace{x-2}_{<0}} = +\infty$$

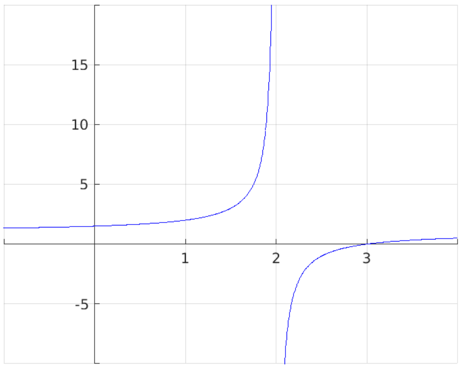
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-3}{x-2} = 1$$

(iii) Schnitt mit den Achsen:

y-Achse: $(0, f(0)) = \left(0, \frac{3}{2}\right)$

x-Achse: $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$

(iv) Skizze:



(f)

$$f(x) = \frac{x^3+3}{(3x-1)(x+3)}$$

(i) Definitionsbereich $\mathbb{D}_f = I\!R \setminus \{-3, \frac{1}{3}\}$

(ii) Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs:

$$\lim_{x\to-\infty} = \frac{x^3+3}{(3x-1)(x+3)} = -\infty$$

$$\lim_{x\nearrow-3} = \frac{\overbrace{x^3+3}^{<0}}{\underbrace{(3x-1)}_{<0}\underbrace{(x+3)}_{<0}} = -\infty$$

$$\lim_{x\searrow-3} = \frac{\overbrace{x^3+3}^{<0}}{\underbrace{(3x-1)}_{<0}\underbrace{(x+3)}_{>0}} = +\infty$$

$$\lim_{x\nearrow\frac{1}{3}} = \frac{\overbrace{x^3+3}^{>0}}{\underbrace{(3x-1)}_{<0}\underbrace{(x+3)}_{>0}} = -\infty$$

$$\lim_{x\searrow\frac{1}{3}} = \frac{\overbrace{x^3+3}^{>0}}{\underbrace{(3x-1)}_{>0}\underbrace{(x+3)}_{>0}} = +\infty$$

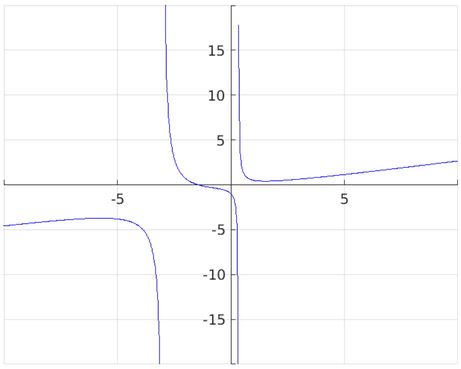
$$\lim_{x\to\infty} = \frac{x^3+3}{(3x-1)(x+3)} = \infty$$

(iii) Schnitt mit den Achsen:

y-Achse: $f(0) = \frac{3}{-3} = -1$

x-Achse: $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\sqrt[3]{3} \approx -1.44$

(iv) Skizze:



(g)

$$f(x) = \frac{x^2\,(x-4)}{2\,x - 2\,x^3}$$

(i) Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$: Der Nenner darf nicht Null werden.

$$2\,x\,(1-x^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{-1,0,1\} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$$

(ii) Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs:

$$\lim_{x\to-\infty} = \frac{\cancel{x^3}\,\left(1 - 4\,\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x^3}\,\left(-2 + 2\,\frac{1}{x}\right)} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\nearrow-1} = \frac{\overbrace{x}^{<0}\;\overbrace{(x-4)}^{<0}}{2\;\underbrace{(1-x^2)}_{<0}} = -\infty$$

$$\lim_{x\searrow-1} = \frac{\overbrace{x}^{<0}\;\overbrace{(x-4)}^{<0}}{2\;\underbrace{(1-x^2)}_{>0}} = \infty$$

$$\lim_{x\nearrow 0} = \frac{x\,(x-4)}{2\,(1-x^2)} = 0$$

$$\lim_{x\searrow 0} = \frac{x\,(x-4)}{2\,(1-x^2)} = 0$$

$$\lim_{x\nearrow 1} = \frac{\overbrace{x}^{>0}\;\overbrace{(x-4)}^{<0}}{2\;\underbrace{(1-x^2)}_{>0}} = -\infty$$

$$\lim_{x\searrow 1} = \frac{\overbrace{x}^{>0}\;\overbrace{(x-4)}^{<0}}{2\;\underbrace{(1-x^2)}_{<0}} = \infty$$

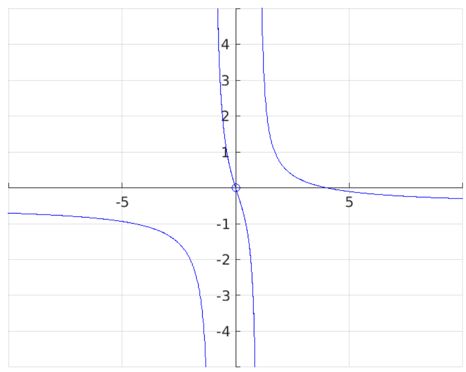
$$\lim_{x\to\infty} = \frac{\cancel{x^3}\,\left(1 - 4\,\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x^3}\,\left(-2 + 2\,\frac{1}{x}\right)} = -\frac{1}{2}$$

(iii) Schnitt mit den Achsen:

y-Achse: nicht vorhanden

x-Achse: $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$

(iv) Skizze:



(h)

$$f(x) = \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$$

(i) Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$: x unter der Wurzel muss positiv sein UND der Nenner darf nicht verschwinden. Also:

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$$

(ii) Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs:

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{\cancel{(1-\sqrt{x})}\,(1+\sqrt{x})}{\cancel{(1-\sqrt{x})}} = 1$$

$$\lim_{x\nearrow 1}(1+\sqrt{x}) = 2$$

$$\lim_{x\searrow 1}(1+\sqrt{x}) = 2$$

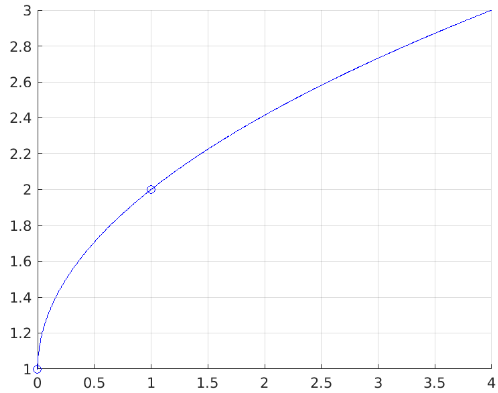
$$\lim_{x\to\infty}(1+\sqrt{x}) = \infty$$

(iii) Schnitt mit den Achsen:

y-Achse: $f(0) = 1$

x-Achse: nicht vorhanden. Zähler wird Null bei $x = 1 \notin \mathbb{D}_f$

(iv) Skizze:



(i)

$$f(x) = \frac{1}{\sin x}$$

(i) Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$:

$$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k\,\pi \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = k\,\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

(ii) Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs: Wegen der Periodizität genügt die Untersuchung auf dem Intervall $\mathbb{D}_f \cap [0, 2\,\pi] = (0, \pi) \cup (\pi, 2\,\pi)$.

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{1}{\sin x} = \infty \qquad \lim_{x \searrow \pi} \frac{1}{\sin x} = -\infty$$

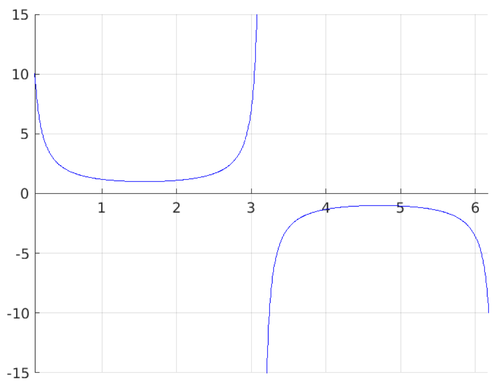
$$\lim_{x \nearrow \pi} \frac{1}{\sin x} = \infty \qquad \lim_{x \nearrow 2\,\pi} \frac{1}{\sin x} = -\infty$$

(iii) Schnitt mit den Achsen:

y-Achse: nicht vorhanden

x-Achse: nicht vorhanden

(iv) Skizze:



(j)

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{-1}{\cos x}}$$

(i) Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$:

$$\cos x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2\,k+1}{2}\,\pi \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \,\middle|\, x = \frac{2\,k+1}{2}\,,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(ii) Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs: Wegen der Periodizität genügt die Untersuchung auf $\mathbb{D}_f \cap \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$.

$$\lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\overbrace{\frac{-1}{\underbrace{\cos x}_{<0}}}} = \infty \qquad \lim_{x \searrow \frac{3\pi}{2}} \mathrm{e}^{\overbrace{\frac{-1}{\underbrace{\cos x}_{>0}}}^{-\infty}} = 0$$

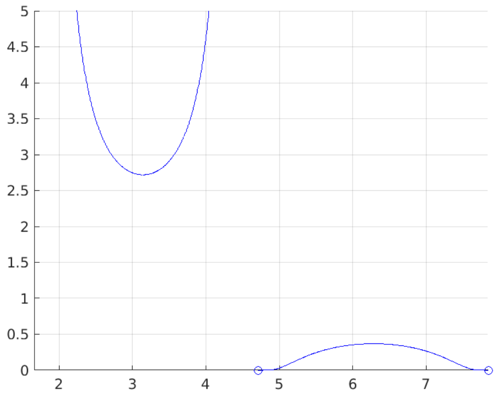
$$\lim_{x \nearrow \frac{3\pi}{2}} \mathrm{e}^{\frac{-1}{\underbrace{\cos x}_{<0}}} = \infty \qquad \lim_{x \nearrow \frac{5\pi}{2}} \mathrm{e}^{\frac{-1}{\underbrace{\cos x}_{>0}}} = 0$$

(iii) Schnitt mit den Achsen:

y-Achse: $f(0) = \frac{1}{\mathrm{e}}$

x-Achse: nicht vorhanden

(iv) Skizze:



(k)

$$f(x) = \frac{\sin x}{x\, \mathrm{e}^{2-\frac{1}{x}}}$$

(i) Definitionsbereich $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(ii) Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{\sin x}^{\in[-1,1]}}{x\,\underbrace{\mathrm{e}^{2-\frac{1}{x}}}_{\to 2}} = 0$$

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{\sin x}{x\,\mathrm{e}^{2-\frac{1}{x}}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\searrow 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \frac{1}{\mathrm{e}^{\underbrace{2-\frac{1}{x}}_{<0}}} = \infty$$

$$\lim_{x\nearrow 0} \frac{\sin x}{x\,\mathrm{e}^{2-\frac{1}{x}}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\nearrow 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \frac{1}{\mathrm{e}^{\underbrace{2-\frac{1}{x}}_{>0}}} = 0$$

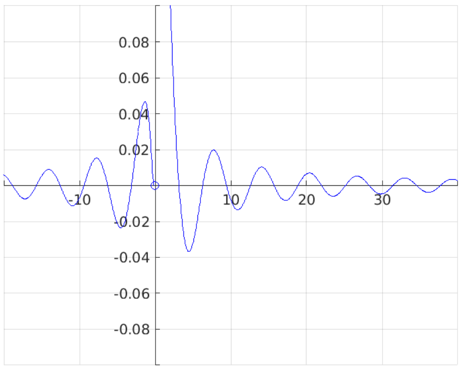
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{\sin x}^{\in[-1,1]}}{x\,\underbrace{\mathrm{e}^{2-\frac{1}{x}}}_{\to 2}} = 0$$

(iii) Schnitt mit den Achsen:

y-Achse: nicht vorhanden

x-Achse: $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{x \mid x = k\,\pi\,,\; k \in \mathbb{Z}\}$

(iv) Skizze:



(l)

$$f(x) = \frac{\sqrt{x\,(4-x)}}{\log_2\left(|2\,x+3| - |x-5|\right)}$$

(i) Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$: Hier stückeln wir das Problem und betrachten Zähler und Nenner getrennt. Erst der Zähler:

Das Argument der Wurzel darf nicht negativ sein, also muss

$$x\,(4-x) \geq 0$$

gelten, was gerade für $x \in [0,4] =: \mathbb{L}_Z$ erfüllt ist.

Jetzt der Nenner: Das Argument des Logarithmus muss positiv sein:

$$|2\,x+3| > |x-5|$$

Der 1. Fall: $2\,x+3 \geq 0$ und $x-5 \geq 0$ liefert die Lösungesmenge $\mathbb{L}_1 = [5,\infty)$.
Der 2. Fall: $2\,x+3 \geq 0$ und $x-5 < 0$ liefert die Lösungesmenge $\mathbb{L}_2 = \left(\frac{2}{3},5\right)$.
Der 3. Fall: $2\,x+3 < 0$ und $x-5 \geq 0$ liefert die Lösungesmenge $\mathbb{L}_3 = \emptyset$.
Der 4. Fall: $2\,x+3 < 0$ und $x-5 < 0$ liefert die Lösungesmenge $\mathbb{L}_4 = (-\infty,-8)$.

Wir erhalten damit die Lösungsmenge der Betragsungleichung

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 \cup \mathbb{L}_4 = \mathbb{R} \setminus \left[-8, \frac{2}{3}\right] .$$

Für $x \in \mathbb{L}$ ist also das Argument des Logarithmus positiv. Da dieser aber im Nenner des Bruchs steht darf auch sein Wert nicht 0 sein, d.h. das Argument darf nicht 1 sein. Kurzum: Es muss

$$|2\,x+3| - |x-5| \neq 1$$

gelten, wozu abermals eine Fallunterscheidung nötig ist. Jaja. ;) Wann ist der Asudruck gleich 1? Wir greifen die Fälle von oben wieder auf:

Der 1. Fall: $2\,x+3 \geq 0$ und $x-5 \geq 0$: $x = -7 \notin \mathbb{L}_1$
Der 2. Fall: $2\,x+3 \geq 0$ und $x-5 < 0$: $x = 1 \in \mathbb{L}_2$
Der 4. Fall: $2\,x+3 < 0$ und $x-5 < 0$: $x = -9 \in \mathbb{L}_4$

Die Werte $x \in \{-9,1\}$ müssen ausgeschlossen werden. Damit ergibt sich der Definitionsbereich für eins durch den Nenner

$$\mathbb{D}_N = \mathbb{L} \setminus \{-9,1\} = \mathbb{R} \setminus \left(\left[-8, \frac{2}{3}\right] \cup \{-9,1\} \right) .$$

Insgesamt ist dann der Definitionsbereich für f alles was im Zähler UND alles was im Nenner erlaubt ist und da UND mengentheoretisch immer einen Schnitt der Mengen bedeutet führt uns das auf folgendes Endergebnis:

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{D}_N \cap \mathbb{D}_Z = [0,4] \cap \left(\mathbb{R} \setminus \left(\left[-8, \frac{2}{3}\right] \cup \{-9,1\} \right) \right) = \left(\frac{2}{3}, 4 \right] \setminus \{1\}$$

(ii) Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs:

$$\lim_{x\searrow\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{x\,(4-x)}}{\log_2\left(|2\,x+3|-|x-5|\right)} = \lim_{x\searrow\frac{2}{3}} \frac{\frac{1}{3}\sqrt{20}}{\log_2\left(2\,x+3+x-5\right)} = 0$$

$$\lim_{x\nearrow 1} \frac{\sqrt{x\,(4-x)}}{\log_2\left(|2\,x+3|-|x-5|\right)} = \lim_{x\nearrow 1} \frac{\sqrt{3}}{\log_2\left(2\,x+3+x-5\right)}$$

$$= \lim_{x\nearrow 1} \frac{\sqrt{3}}{\underbrace{\log_2\left(\underbrace{3\,x-2}_{<1}\right)}_{<0}} = -\infty$$

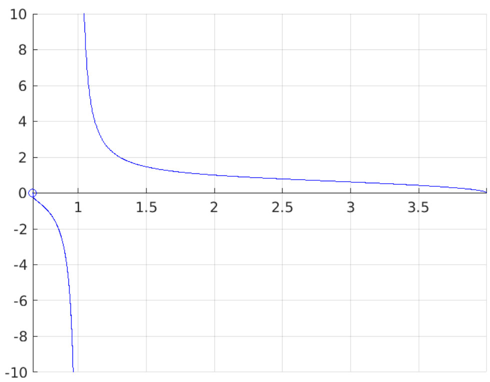
$$\lim_{x\searrow 1} \frac{\sqrt{x\,(4-x)}}{\log_2\left(|2\,x+3|-|x-5|\right)} = \lim_{x\searrow 1} \frac{\sqrt{3}}{\underbrace{\log_2\left(\underbrace{3\,x-2}_{>1}\right)}_{>0}} = \infty$$

(iii) Schnitt mit den Achsen:

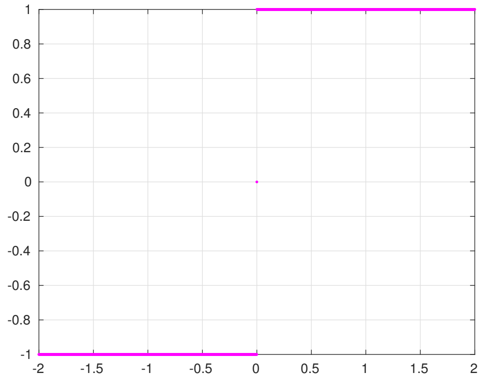
y-Achse: nicht vorhanden, da $x = 0 \notin \mathbb{D}_f$

x-Achse: $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$

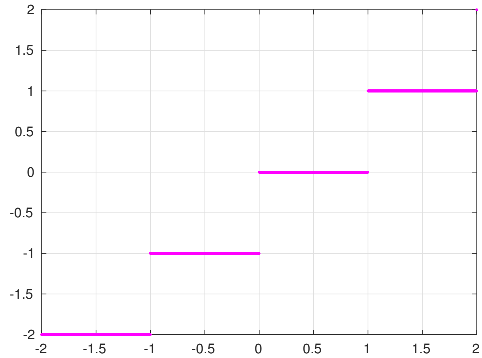
(iv) Skizze:



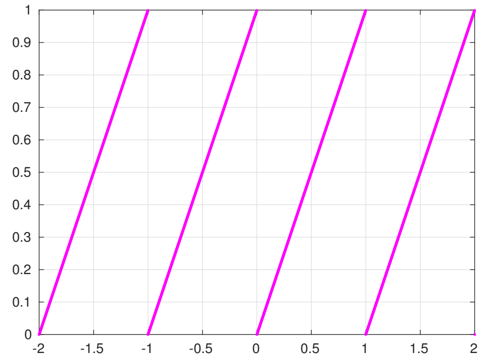
Lösung 2



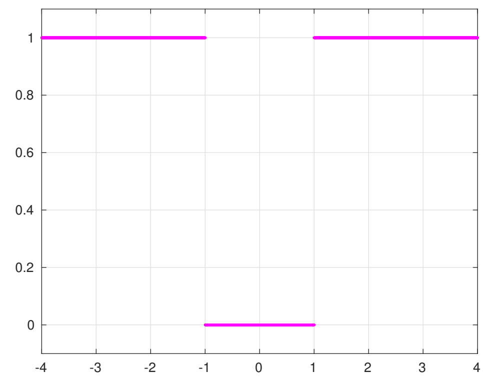
(a)



(b)



(c)



(d)

(e)

Lösung 3

(a)

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}\,, \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x+1)\,, \quad \mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

(b)

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}\,, \quad \mathbb{D}_{f_1} := (-\infty, -6]\,, \quad \mathbb{D}_{f_2} := [-6, \infty)$$
$$f_1^{-1}(x) = -\sqrt{x+40} - 6\,, \quad f_2^{-1}(x) = \sqrt{x+40} - 6$$
$$\mathbb{D}_{f_1^{-1}} = [-40, \infty)\,, \quad \mathbb{D}_{f_2^{-1}} = [-40, \infty)$$

(c)

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}\,, \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{x}\,, \quad \mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(d)

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}\,, \quad f^{-1}(x) = \frac{3}{2\,x - 1}\,, \quad \mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

(e)

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}\,, \quad \mathbb{D}_{f_1} := \mathbb{R}_0^-\,, \quad \mathbb{D}_{f_2} := \mathbb{R}_0^+$$
$$f_1^{-1}(x) = -x\,, \quad f_2^{-1}(x) = x$$
$$\mathbb{D}_{f_1^{-1}} = \mathbb{R}_0^+\,, \quad \mathbb{D}_{f_2^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$$

(f)

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+\,, \quad f^{-1}(x) = x^2\,, \quad \mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

(g)

$$y = 1 - 2\,a^{x-2} \qquad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \quad 2 + \log_a\left(\frac{1}{2}\,(1-y)\right) = x$$
$$\Rightarrow \quad f^{-1}(x) = 2 + \log_a\left(\frac{1}{2}\,(1-x)\right) \qquad \mathbb{D}_{f^{-1}} = (-\infty, 1)$$

(h)

$$y = \ln\left(2\,x^2 + 3\,x - 4\right) \qquad \mathbb{D}_f = \left[-\frac{\sqrt{41}+3}{4}, \frac{\sqrt{41}-3}{3}\right]$$
$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^y = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}\,x - 2\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^y = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{41}{16}$$
$$\Leftrightarrow \quad \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^y + \frac{41}{8}\right)} - \frac{3}{4} = x$$
$$\Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \frac{41}{8}\right)} - \frac{3}{4} \quad \mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

Lösung 4

(a)

$$
\begin{aligned}
(i) \qquad & (f\circ g)(2) = f(g(x))\big|_{x=2} = 2\,g(x)-1\big|_{x=2} = 2\,x^3-1\big|_{x=2} = 15\\
(ii) \qquad & (g\circ h)(-3) = g(h(x))\big|_{x=-3} = h(x)^3\big|_{x=-3} = (|x|+1)^3\big|_{x=-3} = 64\\
(iii) \qquad & (f\circ f)(4) = f(f(x))\big|_{x=4} = 2\,f(x)-1\big|_{x=4} = 2\,(2\,x-1)-1\big|_{x=4}\\
& = 4\,x-3\big|_{x=4} = 13\\
(iv) \qquad & (h\circ g\circ f)(3) = (h(g(f(x))))\big|_{x=3} = |g(f(x))|+1\big|_{x=3} = |f(x)^3|+1\big|_{x=3}
\end{aligned}
$$

(b) (Die Lösungen sind nicht eindeutig!)

(i)

$$h(x) = x+3\,,\quad g(x) = \frac{1}{x}\,,\quad f(x) = \sqrt{x}$$

(ii)

$$f(x) = 5\,x\,,\quad h(x) = x^2\,,\quad g(x) = x-1$$

(iii)

$$f(x) = 7\,x+2\,,\quad g(x) = x^2\,,\quad h(x) = \sqrt{x}\,,\quad l(x) = x+5$$

(iv)

$$g(x) = 3\,x^7+1\,,\quad f(x) = \frac{1}{x}\,,\quad h(x) = \sqrt[7]{x}$$

(v)

$$f(x) = \cos\left(\tan^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2-x}\right)\right)$$

Definiere:

$$
\begin{aligned}
s(x) &= \sin x\,, & v(x) &= \sqrt{x}\,, & w(x) &= 2-x\\
g(x) &= x+\frac{\pi}{2}\,, & u(x) &= \cos x = (s\circ g)(x)\,, & q(x) &= x^2
\end{aligned}
$$

Dann gilt

$$\cos\left(\tan^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2-x}\right)\right) = \left(s\circ g\circ q\circ \frac{s\circ \frac{v}{w}}{s\circ g\circ \frac{v}{w}}\right)(x)$$

(vi)

$$f(x) = \frac{\log_a\left((\mathrm{e}^x+2\,x^2)^2-1\right)}{\sqrt[13]{x^4}}$$

Definiere:

$$\begin{aligned} g(x) &= x^{\frac{4}{13}}\,, & p(x) &= 2\,x^2\,, & v(x) &= \mathrm{e}^x \\ b(x) &= x^2\,, & c(x) &= x-1\,, & u(x) &= a^x \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\frac{\log_a\left(\left(\mathrm{e}^x + 2\,x^2\right)^2 - 1\right)}{\sqrt[13]{x^4}} = \left(\frac{u^{-1}\circ c\circ b\circ(v+p)}{g}\right)(x)$$