

Probepprüfung

Mathe II

Datum	0.0.0000	Zeit, Dauer	00:00-00:00 Uhr, 90 min.
Dozentin	R. Axthelm	Ort	

Matrikelnummer	Punkte	Note

Theorieteil: 3 aus 5					Laborteil: 2 aus 2		
1	2	3	4	5	6	7	Σ
X	5	X	5	5	5	5	25

Folgende Hilfsmittel sind erlaubt:

1. Das vorlesungseigene Kurzschrift (mit Markierungen, ohne Notizen)
2. 3 DIN A4 Blätter (6 Seiten) eigenhändig geschriebener Notizen
3. Einen nicht graphikfähigen Taschenrechner (Grundrechenfunktionen zur Kontrolle)

Theorieteil: Wählen Sie 3 Aufgaben aus den gestellten 5 aus. Streichen Sie in der Tabelle die Aufgabe, die nicht bewertet werden soll. Geben Sie mehr als drei Aufgaben ab ohne Kennzeichnung so werden die ersten drei Aufgaben in Ihrer Niederschrift gewertet. Notieren Sie Ihre Lösungen auf separatem Papier. Geben Sie Aufgaben zusammenhängend ab. Starten Sie jede Aufgabe auf einer neuen Papier.

Denken Sie bei der etwaigen Benutzung des Taschenrechners daran, dass immer **alle Zwischenresultate** anzugeben sind. Des weiteren ist **gut leserlich** zu schreiben!

Geben Sie die Aufgabenzettel und Ihre Lösungsblätter zusammen ab. Notieren Sie bei Zeiten (nicht erst bei Abgabe!!!) auf allen abzugebenden Blättern Ihre Matrikelnummer. Achten Sie auf gute Lesbarkeit, um Verwechslungen zu vermeiden.

Die gelösten Aufgaben bitte zusammenhängend und in der richtigen Reihenfolge sortiert abgeben. Geben Sie nur eine Lösung zu jeder Aufgabe ab. Jede weitere wird nicht bewertet.

Alle Ergebnisterme müssen so weit wie möglich **vereinfacht** werden. Sie müssen die Ergebnisse nicht in Dezimalzahlen ausdrücken. Es darf zum Beispiel $\sqrt{2}$ oder $\frac{e}{3}$ so als Ergebnis stehen bleiben.

Laborteil: Tragen Sie die Antworten in die dafür vorgesehenen Abschnitte auf dem Aufgabenzettel ein. Code-Zeilen können in Pseudo-Code formuliert sein, d.h. die Programmiersprache, in der Sie arbeiten spielt keine Rolle. **Sie dürfen den Rechner einschalten sobald Sie den Theorieteil abgegeben haben.** Es gilt dann open-Book. Kommunikationen mit anderen Personen und ChatGPT, sowie jegliche Software zur Lösung mathematischer Probleme ist strikt verboten. Bei Zuwiderhandlung muss sofort abgegeben werden und die Prüfung wird mit der Note 5 quittiert.

Theorieteil

Aufgabe 1: _____ (Folgen, 5 Punkte)

(a) Wie lautet jeweils der Limes $\lim_{n \rightarrow \infty}$ der Folge

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1} + n}{3n + 2}, \quad b_n = \ln \sqrt[n]{n}$$

(b) Geben Sie die Folge

$$a_1 = 2, \quad a_n = a_{n-1} + 2n + 1$$

in expliziter Darstellung an und prüfen Sie Ihr Ergebnis auf Korrektheit.

Tipp: $\sum_{k=0}^n k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Aufgabe 2: _____ (Definitionsbereich, Grenzwert, Differentiation 5 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \left(a - \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} \right)^2.$$

(a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich \mathbb{D}_f der Funktion f .

(b) Für welchen Wert von a ist f stetig fortsetzbar?

(c) Berechnen Sie einen kritischen Punkt von f .

Aufgabe 3: _____ (Umkehrabbildung, Ableitung, 5 Punkte)

Es sei für Parameter $\beta, \gamma \in \mathbb{R}_0^+$ die Funktion

$$f(x) = \frac{\gamma^2}{\sqrt{\beta^2 + x^2}}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Parameter γ und β , so dass f im Punkt $(1, \sqrt{3})$ einen Wendepunkt besitzt.

(b) Berechnen Sie Umkehrabbildungen $f_1^{-1}(x)$ und $f_2^{-1}(x)$ von $f_1(x) := f(x)|_{\mathbb{D}_{f_1}}$ und $f_2(x) := f(x)|_{\mathbb{D}_{f_2}}$. Geben Sie dabei alle Definitionsbereiche \mathbb{D}_{f_1} , \mathbb{D}_{f_2} , $\mathbb{D}_{f_1^{-1}}$ und $\mathbb{D}_{f_2^{-1}}$ an.

(c) Skizzieren Sie die Situation und benennen Sie f_1 , f_2 und f_1^{-1} , f_2^{-1} in der Skizze.

Aufgabe 4: _____ (Integration, 5 Punkte)

(a) Wir betrachten das Integral

$$A = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx$$

- (i) Berechnen Sie die Stammfunktion F des Integranden mit Hilfe der partiellen Integration.
- (ii) Überprüfen Sie Ihre Lösung in (i): Gilt $F'(x) = f(x)$?
- (iii) Um welche Art Integral handelt es sich hierbei?

☐ bestimmtes Integral ☐ unbestimmtes Integral ☐ uneigentliches Integral

- (iv) Berechnen Sie nun A . Achten Sie auf formal korrekte Schreibweise.

Aufgabe 5: _____ (Ableitung multivariat, 5 Punkte)

(a) Gegeben ist die Funktion

$$u(x, y) = 5x^2 + 2xy^2 + 2y + 3.$$

- (i) Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix von u .
- (ii) Geben Sie den Wert von Δu im Punkt $P = (1, -2)$ an.

(b) Berechnen Sie alle Richtungen $v \in \mathbb{R}^2$, für die die Richtungsableitung $u_{,v}$ der Funktion

$$u(x, y) = x^y$$

im Punkt $P = (1, 2)$ gleich 1 ist.

(c) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von

$$f(x, y) = x^3 + x^2y - y^2 - 4y$$

und untersuchen Sie ob es sich um lokale Extremstellen handelt.

Laborteil

Geben Sie **Fließkommazahlen** stets in **Exponentialdarstellung** mit 2 Nachkommastellen an.
Zum Beispiel: $0.003145 \approx 3.15 \cdot 10^{-3}$ auch geschrieben als $3.15 \text{ e-}03$

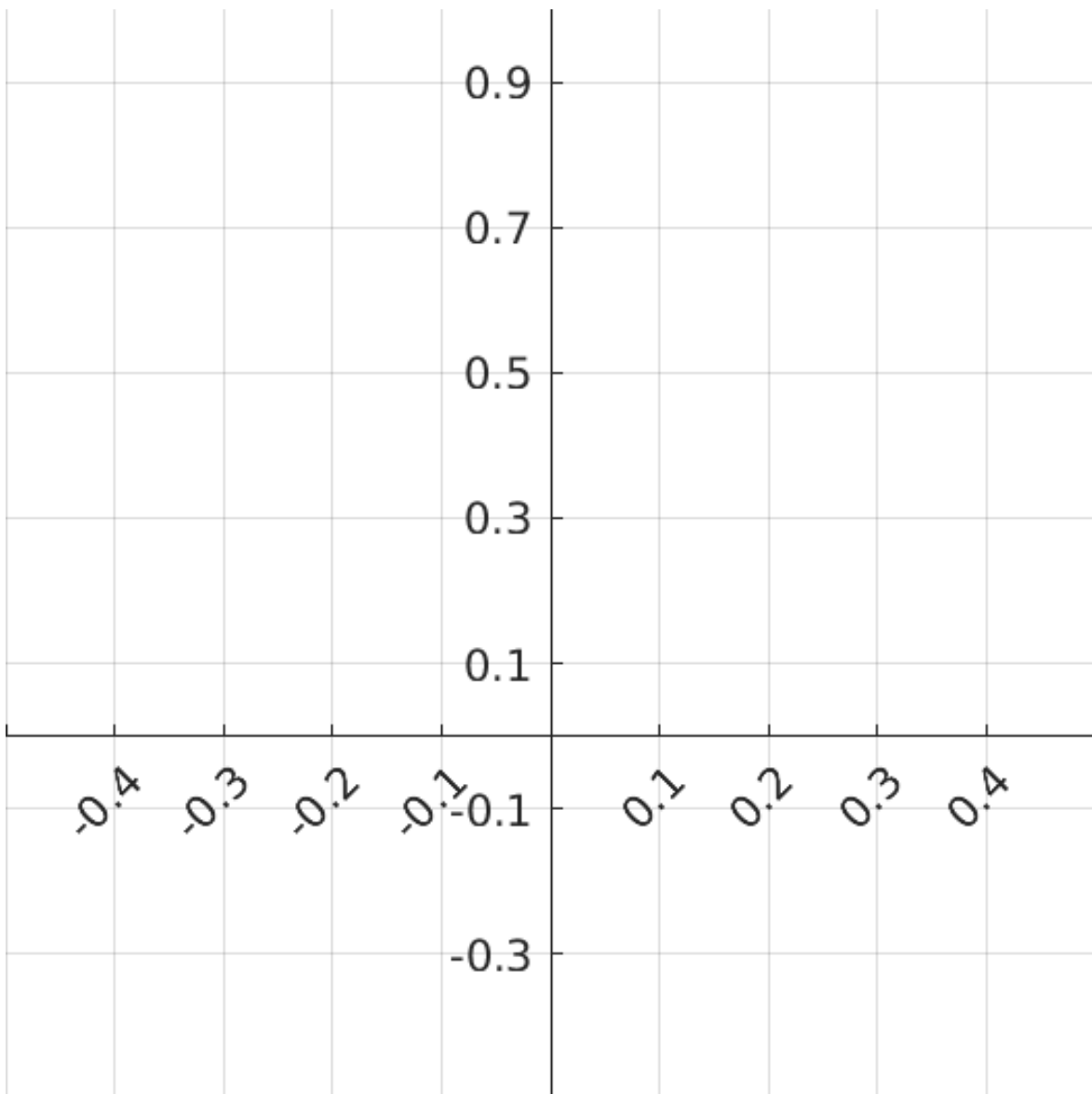
Aufgabe 6: _____ (Laboraufgabe: Taylor, 5 Punkte)

Es sei die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{1-x}, \quad \mathbb{D}_f = [-0.5, 0.5]$$

gegeben.

- (a) Berechnen Sie die Taylor-Polynome $T_{f,2}(x,0)$ und $T_{f,3}(x,0)$ auf dem Intervall $I = [-0.5, 0.5]$ mit der Funktion `Taylor(@func,x0,N,x)` und skizzieren Sie die Plots von den drei Funktionen $f, T_{f,2}, T_{f,3}$ im Achsenkreuz:



- (b) Berechnen Sie mit der Funktion `IntTaylor(@func,x0,N,x)` das Integral von $T_{f,2}(x, x_0)$ über $[0, 0.5]$.

Welchen Entwicklungspunkt wählen Sie in diesem Fall?

$$x_0 =$$

Wie lautet Ihr Ergebnis?

$$\text{IntApprox} =$$

- (c) Berechnen Sie den exakten Wert des Integrals

$$\text{IntExact} = \int_0^{0.5} f(x) dx =$$

Tip: Die Stammfunktion von $f(x)$ lautet $F(x) = -x - \ln(x - 1)$. Sie können auch das symbolische Rechnen von Matlab/Python verwenden.

Geben Sie den Fehler des approximierten Integralwerts aus (b) an:

$$|\text{IntExact} - \text{IntApprox}| =$$

- (d) Wie groß ist der kleinste Polynomgrad, so dass der Fehler $|\text{IntExact} - \text{IntApprox}|$ kleiner als 10^{-9} ist und wie groß ist dann der Fehler?

$$N = \quad , \quad |\text{IntExact} - \text{IntApprox}| =$$

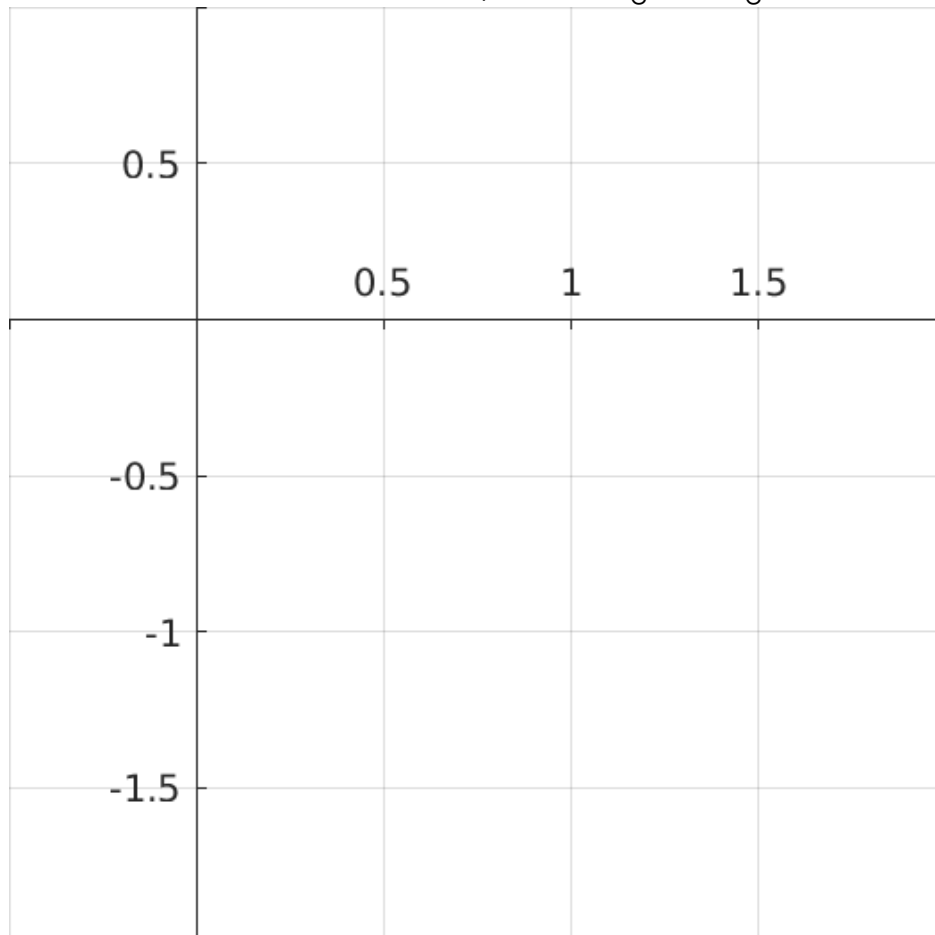
- (e) Wie haben Sie die Funktion `func` definiert? (Pseudocode genügt)

`f=func()`

Aufgabe 7: _____ (Laboraufgabe: Newton, 5 Punkte)

Gesucht ist der Punkt auf dem Graphen $\ln x$, der dem Ursprung am nächsten ist.

(a) Skizzieren Sie die Situation im Achsenkreuz, die die Fragestellung darstellt.



(b) Formulieren Sie Ihr Optimierungsproblem mathematisch.

(c) Die Funktion $f(x)$, deren Nullstelle gesucht ist lautet

$$f(x) =$$

(d) Berechnen Sie eine Näherung der gesuchten Größe mit dem Newton-Verfahren. Verwenden Sie als Startwert $x_0 = 1$ und als Toleranz für $|f(x)|$ den Wert $TOL = 10^{-08}$.

Geben Sie Ihre Ergebnisse an:

$x \approx$	Iterationen:	$ f(x) \approx$
-------------	--------------	------------------

Skizzieren Sie Ihre Lösung in das Achsenkreuz in (a).

Welches ist die gesuchte Größe in der Fragestellung (mit Wertangabe).

--

Wie lautet Ihr Newton-Verfahren mit Startwert, Toleranzabfrage und den konkreten Funktionen f und df :

--

(e) Was passiert mit Startwert $x_0 = 2$? Berechnen Sie den maximalen Bereich, der sinnvolle Startwerte enthält.



Aufgabe 8: _____ (Diskrete Ableitung, 5 Punkte)

Schätzen Sie optimale Parameter α , β und γ , so dass die Funktion

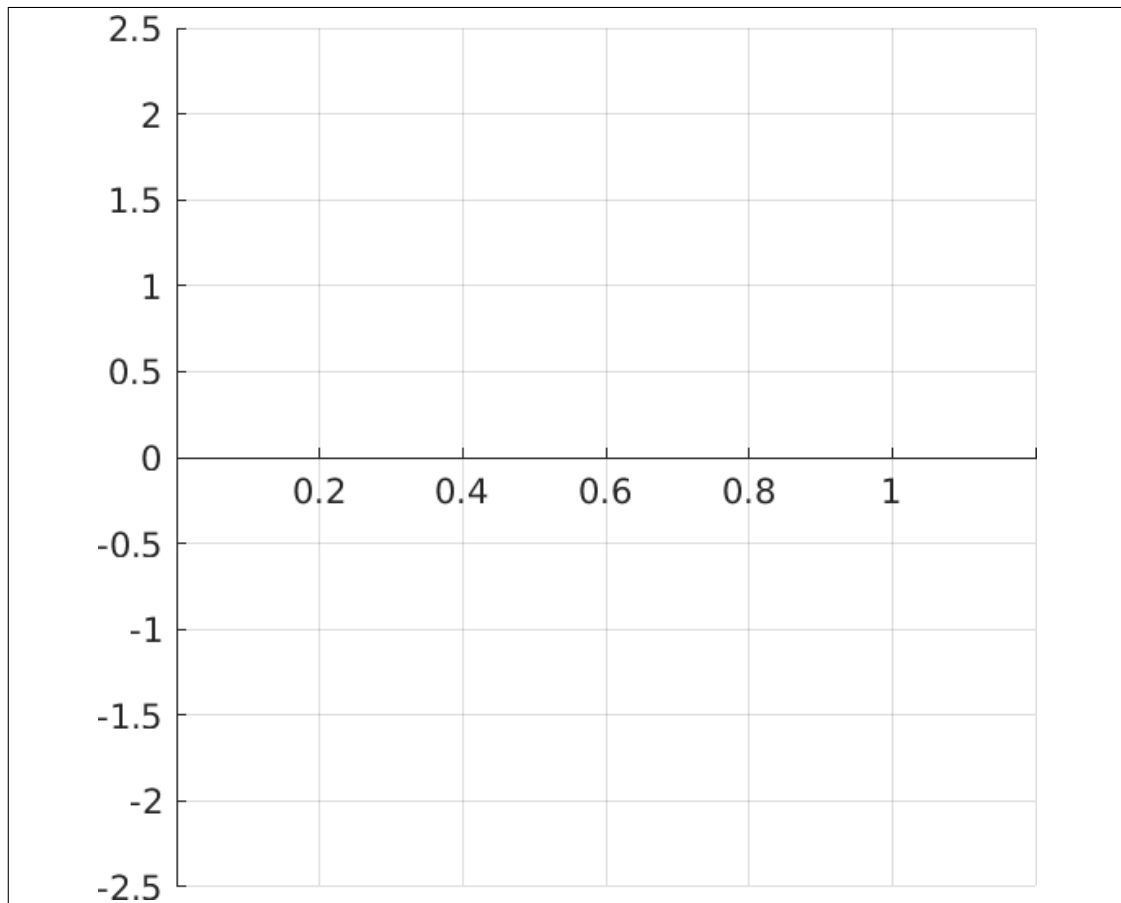
$$f(x) = \ln(\alpha (x - \beta)^2 + \gamma)$$

augenscheinlich gut in den Datensatz

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1 & 1.2 \\ 0.25 & -0.25 & -0.63 & -0.63 & -0.25 & 0.25 & 0.71 \end{pmatrix}$$

passt.

(a) Skizze der Daten und des späteren Ergebnisses



(b) Berechnen Sie die erste diskrete, gemittelte Ableitung $d1P$ der Daten $P(:, 2)$ und zeichnen Sie die Werte in's Achsenkreuz in (a).

(c) Berechnen Sie die zweite (Gauß) diskrete Ableitung der Datenpunkte. Ignorieren Sie spezielle Randsituationen. Eine Glättung der Daten ist nicht nötig. Notieren Sie Werte und zugehörige x -Koordinaten direkt vor und nach vermuteten Nullstellen von P , $d1P$

$x(\quad) =$	$P(\quad, 2) =$	$x_N \approx$	$f(x_N) =$
$x(\quad) =$	$P(\quad, 2) =$		
$x(\quad) =$	$d1P(\quad) =$		
$x(\quad) =$	$d1P(\quad) =$	$x_E \approx$	$f'(x_E) =$
$x(\quad) =$	$d2P(\quad) =$		
$x(\quad) =$	$d2P(\quad) =$	$x_W \approx$	$f''(x_W) =$

- (e) Welches sind Bedingungen an die Parameter damit $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$ erfüllt ist?

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow$$

- (f) Belegen Sie nun die Parameter α , β und γ und geben Sie sie samt Rechenweg (your choice: analytisch oder mit Matlab) an:

$\alpha =$ $\beta =$ $\gamma =$

- (g) Wie lautet nur Ihre Funktion mit den ermittelten Parametern? Skizzieren Sie den Graphen in das Achsenkreuz aus Teil (a).

$f(x) =$