Blatt 2: Folgen

Mittelwert Ihrer Selbsteinschätzung:
-1: "hab nicht mal die Aufgabe gelesen"
0: "weiß nicht wie ich anfangen soll"
1: "habe begonnen, bin dann aber hängen geblieben"
2: "konnte alles rechnen, bin aber unsicher, ob es stimmt"
3: "alles klar hier"

Fingerübung 1: Darstellung von Folgen

(a)

$$a_n = \frac{n+1}{\ln(n+1)}$$

Stellen Sie die ersten 5 Folgenglieder als geordnete Menge der Form

$$(a_n)_n = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots)$$

dar. Skizzieren Sie die Folge in ein Achsenkreuz.

(b)

$$b_n = \frac{n}{\mathrm{e}^n}$$

Stellen Sie die ersten 5 Folgenglieder als geordnete Menge der Form

$$(b_n)_n = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \dots)$$

dar. Skizzieren Sie die Folge in ein Achsenkreuz.

(c) Vergleichen Sie $(a_n)_n$ mit $(b_n)_n$. Was stellen Sie fest?

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 4

Aufgabe 2: ϵ-Kriterium

Zeigen Sie mithilfe des ϵ-Kriteriums, dass es sich bei den Folgen

$$(a)\ a_n = \frac{1}{2^n} \qquad (b)\ c_n = \frac{2}{n}\begin{pmatrix}\cos\frac{n}{2}\\ \sin\frac{n}{2}\end{pmatrix}$$

um Nullfolgen handelt.

Versuchen Sie sich auch mal an einer falschen Annahme.

Selbsteinschätzung:

Lösung auf Seite 5

Aufgabe 3: Monotonie und Beschränktheit

Untersuchen Sie Monotonie und Beschränktheit der Folge

$$a_n = \frac{1}{2^n},$$

so dass Sie eine Aussage über Konvergenz treffen können. Formulieren Sie dazu Ihre Behauptung genau!

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 5

Aufgabe 4: Eulersche Zahl

Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n = e^p$ ist. Berechnen Sie diese Limes:

$$(a)\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n \qquad (b)\quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{n}\right)^n$$

$$(c)\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5\,n}\right)^n \qquad (d)\quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$$

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 6

Aufgabe 5: Grenzwertberechnung

Bestimmen Sie jeweils nach Konvergenz/(un-) bestimmte Divergenz/Grenzwert/Häufungspunkte(n):

$$(i)\quad a_n = \frac{1}{4^n} \qquad (ii)\quad a_n = \sqrt[n]{5}$$

$$(iii)\quad a_n = \frac{3\,n^2 - 2\,n + 1}{-9\,n^2 - 20} \qquad (iv)\quad a_n = \frac{2\,n^3 + 2}{n - 10} \cdot \frac{1}{n}$$

$$(v)\quad a_n = \frac{(-1)^n\,n^2}{(2\,n+1)^2} \qquad (vi)\quad a_n = \frac{(-1)^n\,n}{(2\,n+1)^2}$$

$$(vii)\quad a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

Tipp zu (vii): $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 6

Aufgabe 6: explizite und implizite Darstellung

(a) Bilden Sie aus

$$a_n = n^3 - 3\,n^2$$

eine implizite Folge.

(b) Bilden Sie aus

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_{n+1} &= a_n + 4\,n - 2 \end{aligned}$$

eine explizite Folge.

(c) Berechnen Sie den Grenzwert der impliziten Folge

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_{n+1} &= 2 - \frac{1}{a_n} \end{aligned}$$

(d) Untersuchen Sie die Folgen aus Teil (a) und (b) auf ihr Konvergenzverhalten. Betrachten Sie dabei jeweils die explizite als auch die implizite Darstellung.

Selbsteinschätzung: Lösung auf Seite 7