

3D 打印层状材料的应变分布与应力集中模型分析

2023 级明月科创班 第八组

郭丁赫 张瀚予 冯亦珂 莫湘渝

摘要

熔融沉积成型 (FDM) 3D 打印构件由于逐层堆积的制造特性，在宏观力学行为上表现出显著的各向异性，其力学性能高度依赖于打印方向与外载方向之间的相对关系。针对这一问题，本文以 FDM 打印 PLA 梁在三点弯曲工况下的受力与断裂行为为研究对象，构建了多层次的力学分析框架，对打印角度对结构承载能力与失效机理的影响进行了系统研究。

在理论层面，基于二维弹性力学控制方程，引入艾里应力函数建立层状梁的应力场模型，并通过傅里叶级数展开推导其解析形式；结合正交各向异性假设，引入 Tsai-Hill 失效准则，推导了不同打印角度下的理论破坏应力表达式。在数值层面，基于有限差分法编写 MATLAB 程序，对双调和方程进行数值求解与应力场可视化，验证了理论模型在弹性阶段的合理性。在仿真层面，利用 ANSYS/LS-DYNA 显式动力学求解器，对不同打印角度试样在小位移与大位移加载条件下的应力与应变演化过程进行了有限元分析。最后，通过三点弯曲实验对仿真与理论结果进行了验证。

研究结果表明：在小位移加载阶段，不同打印角度试样整体受力特征相似，等效应力随角度变化呈缓慢下降趋势，结构响应主要受整体刚度控制；而在大变形与断裂阶段，最大主应变对打印角度高度敏感，角度增大会显著加剧局部拉伸应变集中，从而主导断裂的发生。整体来看，打印角度对力学性能的影响具有明显的非线性特征：当角度偏离理想打印方向较小时，结构强度变化有限；而当角度超过一定阈值后，层间协同受力能力迅速削弱，导致承载能力显著下降。研究结果从理论、仿真与实验多个层面揭示了 FDM 打印构件角度效应的力学本质，为打印方向优化及工程应用中的结构设计提供了可靠依据。

关键词：3D 打印；熔融沉积成型 (FDM)；各向异性；打印角度；三点弯曲；主应变；有限元分析

1 绪论

1.1 研究背景

随着现代制造技术的不断发展，3D 打印技术（又称增材制造，Additive Manufacturing）正逐步由原型制造阶段迈向功能性结构件与工程承载构件的实际应用阶段。在众多增材制造工艺中，熔融沉积成型（Fused Deposition Modeling, FDM）技术因其设备成本低、工艺流程成熟、材料来源广泛等优势，成为当前应用最为普遍的一种 3D 打印方式。FDM 技术通过将热塑性高分子材料（如聚乳酸 PLA）加热至熔融状态，并按照预先设定的切片路径逐层挤出、逐层堆积，最终在冷却固化过程中形成三维实体结构。

然而，FDM 工艺所固有的“分层制造、逐层叠加”成型机制，在赋予其高度设计自由度的同时，也不可避免地引入了复杂的微观结构非均匀性。具体而言，打印构件在成型方向（通常为 Z 轴）与打印路径所在平面方向（X/Y 轴）上的材料连续性、分子链取向及层间结合方式均存在显著差异。层内材料主要依靠连续挤出形成较为完整的力学结构，而层与层之间则主要通过熔体的热扩散和局部物理融合实现连接，其界面结合强度通常明显低于材料本体的拉伸或剪切强度。

这种由工艺路径诱导的结构差异，使得 FDM 打印件在宏观力学行为上呈现出显著的各向异性特征，其受力响应更接近于层压复合材料，而非传统假设下的均质各向同性连续介质。在实际工程应用中，这种各向异性往往导致应力在层间界面、路径转折区域或几何突变位置发生明显集中，从而使构件在远低于材料名义强度的载荷水平下发生脆性断裂、层间剥离或渐进失效。

因此，如何从理论层面定量刻画 3D 打印层状结构内部的应力与应变分布规律，明确打印角度、层向取向与外部载荷之间的内在联系，并进一步建立能够预测不同工艺参数下构件失效行为的数学模型，已成为提升 FDM 打印结构可靠性与工程适用性的关键科学问题。这一问题不仅具有重要的工程应用价值，同时也为经典弹性力学理论在新型制造结构中的拓展应用提供了新的研究对象。

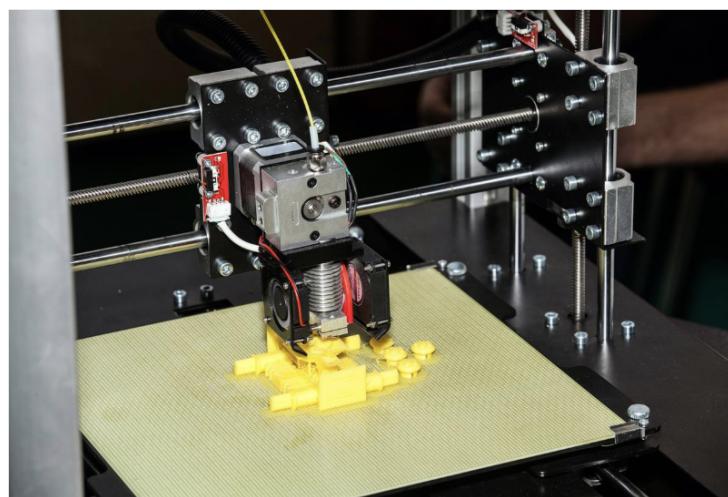


图 1: 3D 打印机工作图

1.2 研究意义

本研究的核心意义在于将经典数学物理理论与新型增材制造结构的力学分析相结合，探索传统连续介质力学方法在 3D 打印层状材料中的适用性与扩展形式。现有材料力学分析方法多基于各向同性与材料连续性的基本假设，这在一定程度上限制了其对 FDM 打印构件复杂力学行为的准确描述。针对这一问题，本文从弹性力学偏微分控制方程出发，构建适用于层状结构的连续介质理论模型，并在此基础上引入各向异性本构关系及失效判据，对打印构件内部的应力与应变分布进行系统分析。

通过理论推导与数值求解相结合的方式，本研究能够从数学机理层面揭示打印角度、层向取向以及加载方式对应变集中与应力重分布的影响规律，为实验中普遍观察到的“角度效应”和层间失效现象提供合理的理论解释。同时，引入如 Tsai-Hill 等各向异性失效准则，有助于将连续力学分析结果与实际断裂行为建立定量关联，从而提高失效预测的物理可信度。

更进一步，经验证后的理论模型可为 3D 打印工艺参数的优化提供反向指导。例如，在已知载荷方向和使用工况的前提下，通过模型计算可确定更合理的打印路径与层向设计方案，从而在不增加材料用量或制造成本的情况下显著提升构件的承载能力与服役可靠性。此外，本文所采用的“理论推导—数值实现—有限元仿真—实验验证”研究范式，充分体现了数学物理方法在工程问题分析中的系统性与严谨性，对于推动 3D 打印结构由经验设计向理论驱动设计转变具有积极意义。



图 2: 3D 打印工艺品示意图

2 理论模型的建立与求解

2.1 二维弹性力学问题的控制方程

为了从理论上分析 3D 打印梁在三点弯曲载荷下的应力状态，我们将问题简化为平面应力问题。假设梁的厚度远小于其跨度和高度，且载荷作用在对称面上。根据弹性力学理论，物体内部的应力分量必须满足平衡微分方程、几何方程以及物理方程。为了求解这一边值问题，我们引入艾里 (Airy) 应力函数 $\Phi(x, y)$ 。

在无体力作用下，应力分量与应力函数的关系定义为：

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (1)$$

将上述关系代入相容方程 (Compatibility Equation)，可得艾里应力函数必须满足双调和方程 (Biharmonic Equation)：

$$\nabla^4 \Phi = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \quad (2)$$

这是一个四阶常系数线性偏微分方程，是解决二维弹性力学问题的核心控制方程。

2.2 基于傅里叶级数的解析解推导

考虑到三点弯曲实验中梁的支撑和加载情况，我们可以将应力函数 $\Phi(x, y)$ 展开为傅里叶级数形式。假设梁长为 L ，高度为 h ，坐标原点位于梁左端中性轴处。为了满足两端简支的边界条件（即在 $x = 0$ 和 $x = L$ 处，挠度和弯矩为零），应力函数可取如下形式的分离变量解：

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3)$$

将该级数形式代入双调和方程 $\nabla^4 \Phi = 0$ ，我们可以得到关于 y 的四阶常微分方程：

$$Y_n'''(y) - 2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Y_n''(y) + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 Y_n(y) = 0 \quad (4)$$

该常微分方程的特征根为重根 $\pm \frac{n\pi}{L}$ 。因此，其通解形式由双曲函数构成：

$$Y_n(y) = A_n \cosh(\alpha_n y) + B_n \sinh(\alpha_n y) + C_n y \cosh(\alpha_n y) + D_n y \sinh(\alpha_n y) \quad (5)$$

其中， $\alpha_n = \frac{n\pi}{L}$ 。系数 A_n, B_n, C_n, D_n 需由梁上下表面的边界条件确定。

通过分析该通解可以发现，对于细长梁 ($h/L \ll 1$)，随着级数项数的增加，高阶模态的影响会迅速衰减。当仅保留主导项并进行多项式近似时，该二维弹性解将退化为经典的材料力学梁弯曲公式，即正应力 σ_x 沿高度呈线性分布：

$$\sigma_x(y) \approx \frac{My}{I} \quad (6)$$

这一退化性质不仅验证了我们数学模型的正确性，也说明了在细长比足够大的情况下，经典梁理论是弹性力学精确解的一个优良近似。

2.3 基于有限差分法的数值实现 (MATLAB)

在对三点弯曲工况下的梁进行理论分析时，除了采用经典梁理论对应力与位移进行解析推导外，为了进一步验证解析解的正确性并获得可用于展示的连续应力场云图，本文还基于有限差分法 (Finite Difference Method, FDM) 实现了对双调和方程的数值求解。有限差分法能够将原本定义在连续区域上的偏微分方程离散到规则网格上，从而求解在边界条件约束下的离散代数方程组，是处理二维弹性力学问题的常用数值手段之一。

本文所求解的控制方程为艾里应力函数 $\Phi(x, y)$ 满足的双调和方程：

$$\nabla^4 \Phi = 0 \quad (7)$$

该方程完整地描述了平面应力状态下的力学平衡与应变兼容条件。为了将其离散化，程序首先在梁的二维截面区域上构造规则矩形网格，将几何域划分为 $N_x \times N_y$ 个网格节点。随后采用 13 点差分格式对双调和算子 ∇^4 进行离散近似，从而将偏微分方程转化为稀疏线性代数方程组：

$$A\Phi = b \quad (8)$$

其中 Φ 为待求的艾里应力函数在各网格节点上的值，矩阵 A 由差分算子与网格拓扑结构所决定，右端项则由边界条件形成。

三点弯曲工况的关键在于弯矩沿梁轴方向的分段变化，为了正确体现该物理特性，程序在边界节点施加了基于经典梁理论计算得到的应力函数边界值。具体而言，梁在中心跨点受到集中载荷 P ，其弯矩表达式为：

$$M(x) = \begin{cases} \frac{Px}{2}, & \text{for } x \leq \frac{L}{2}, \\ \frac{P(L-x)}{2}, & \text{for } x > \frac{L}{2}. \end{cases} \quad (9)$$

通过已知关系 $\Phi = \frac{M(x)y^3}{6I}$ ，即可在边界节点直接得到艾里应力函数的定值边界条件。这样处理的优势在于不仅能确保数值解满足力学一致性，同时能够在有限网格上重建弯矩造成的应力梯度。

在线性方程组求解完成后，数值结果以向量形式返回并重塑为二维矩阵，以便于后续计算与可视化。应力分量根据艾里应力函数的定义由其二阶导数获得，使用中心差分格式分别计算：

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad (10)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (11)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (12)$$

此外，为适应工程分析需求，还计算了 von Mises 等效应力：

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad (13)$$

数值计算得到的 σ_x 、 τ_{xy} 和 σ_{vm} 场能够清晰表现出三点弯曲梁在跨中附近的受压与受拉区域分布、剪切应力在加载点附近的突变特征等力学现象，并且与有限元仿真结果保持较高一致性。特别是正应力 σ_x 沿高度呈线性梯度、在梁中点处由压应力过渡为拉应力等特征，都充分证明了数值求解方法的可靠性。

总体而言，基于有限差分法的数值实现不仅为理论推导提供了可靠验证，同时获得了连续且平滑的应力场分布，可用于工程可视化、结果展示与对比分析，完整性和直观性均优于单纯的解析解表达。具体 MATLAB 代码实现已收录于附录 A。

2.4 各向异性与 Tsai-Hill 失效准则

上面我们已经在 2.2 验证过经典梁理论是符合于我们的实验，但是我们想探究的是不同角度下的材料强度，也就是说 FDM 打印件属于典型的正交各向异性材料。所以我们现在引入一个描述各向异性的公式，也就是在材料主轴坐标系（1-2 坐标系，1 为打印丝材延伸方向，2 为层间堆积方向）下，其力学性能参数均不相同。我们采用 Tsai-Hill 屈服准则作为失效判据。在平面应力状态下，表达式为：

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2 = 1 \quad (14)$$

其中， X 是材料在纤维方向 (0°) 的抗拉强度， Y 是垂直于纤维方向 (90° ，即层间) 的抗拉强度， S 是面内剪切强度。

当打印路径与梁的轴线成一定角度时，全局坐标系下的应力需要通过坐标变换转换到材料主轴坐标系 (1 – 2) 下。根据二阶张量的旋转变换法则：

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma \cos^2 \theta \\ \sigma_2 = \sigma \sin^2 \theta \\ \tau_{12} = \sigma \sin \theta \cos \theta \end{cases} \quad (15)$$

将上述变换关系代入 Tsai-Hill 准则，并解出临界破坏应力 $\sigma_{failure}$ ，我们可以推导出随打印角度变化的理论破坏应力公式：

$$\sigma_{failure}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^4 \theta}{X^2} + \left(\frac{1}{S^2} - \frac{1}{X^2}\right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \frac{\sin^4 \theta}{Y^2}}} \quad (16)$$

利用 MATLAB 绘制该曲线，结果显示其呈“S”型下降趋势，为后续实验提供了理论基准。

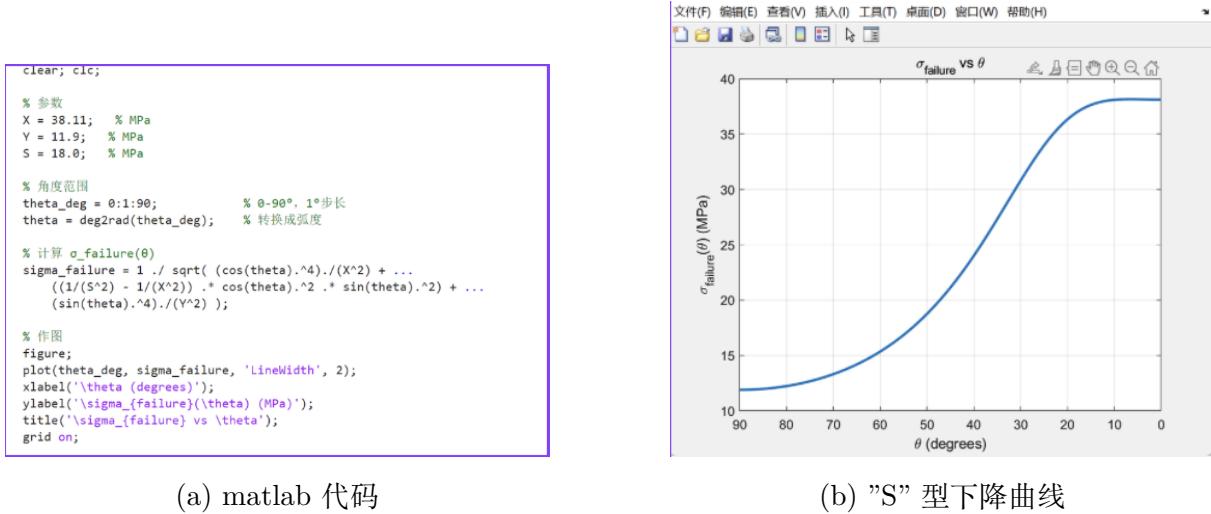


图 3: 理论破坏应力公式曲线

3 有限元仿真分析

3.1 仿真模型构建

为验证前述理论模型对应变分布及应力集中规律的预测能力，并进一步分析 3D 打印层状材料在不同加载阶段下的力学响应特征，本文采用有限元方法对试样进行数值仿真分析。仿真工作基于 ANSYS 平台完成，并调用显式动力学求解器 LS-DYNA，对材料在大变形及失效阶段的力学行为进行模拟。

在几何建模方面，仿真模型与实验试样在尺寸、加载方式及约束条件上保持一致，以保证数值结果与实验结果之间的可比性。建立尺寸为 $100\text{mm} \times 10\text{mm} \times 5\text{mm}$ 的长方体梁模型，跨距设置为 80mm 。模型整体采用三维实体单元进行离散，重点关注加载区域及潜在失效区域的网格质量，以提高应力与应变计算结果的可靠性。通过建立局部坐标系并进行旋转，模拟了 $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ 等不同光栅角度 (Raster Angle) 的试样。

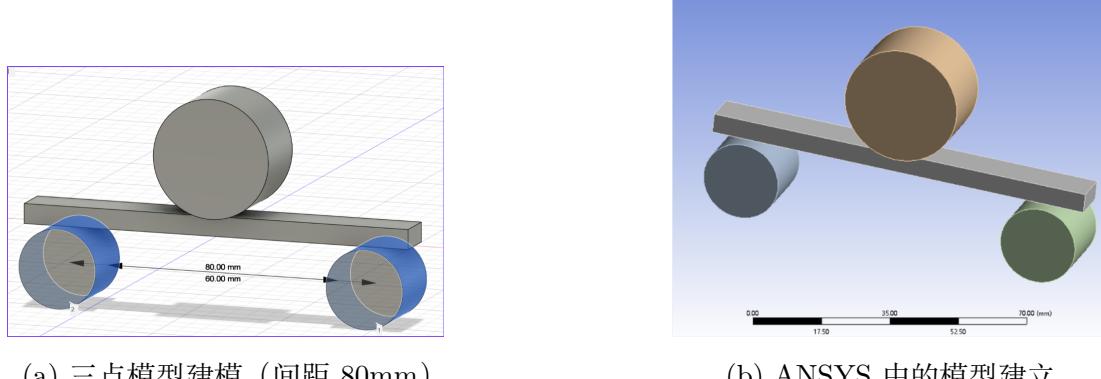


图 4: 几何建模

3.2 材料模型与本构参数设置

3.2.1 材料类型选择

考虑到 FDM 3D 打印 PLA 材料在打印方向与层间方向上表现出明显的各向异性特征，理想情况下应采用各向异性本构模型进行描述。然而在断裂与失效仿真中，各向异性材料模型往往与特定失效准则存在兼容性限制。综合模型稳定性与失效行为可视化效果的需求，本文在仿真中采用等效连续介质建模思路，将打印件视为宏观等效材料，通过引入失效准则来反映层间弱结合特性。

在小位移阶段分析中，材料采用线弹性本构关系，用于研究应力与应变的空间分布规律；在大位移及失效阶段分析中，引入材料失效模型，以模拟构件在加载过程中的断裂与破坏行为。

3.2.2 弹性参数定义

材料弹性参数包括弹性模量、泊松比及密度等基本物性参数。弹性模量用于表征材料在弹性阶段的刚度特性，泊松比反映横向变形能力，密度参数则用于显式动力学分析中质量与惯性效应的计算。上述参数均依据实验材料及相关文献数据进行设定，并在不同仿真工况中保持一致，以保证对比分析的公平性。

	A 属性	B 值	C 单位	D	E
1	属性				
2	材料常量	表格			
3	Density	1240	kg m^-3		
4	Isotropic Elasticity				
10	Orthotropic Elasticity				
11	杨氏模量X方向	3.5E+09	Pa		
12	杨氏模量Y方向	1E+09	Pa		
13	杨氏模量Z方向	8E+08	Pa		
14	泊松比XY	0.35			
15	泊松比YZ	0.4			
16	泊松比ZX	0.35			
17	剪切模量XY	9E+08	Pa		
18	剪切模量YZ	4E+08	Pa		
19	剪切模量ZX	9E+08	Pa		
20	Bilinear Isotropic Hardening				
23	Multilinear Isotropic Hardening	表格			
26	Principal Stress Failure				
27	最大拉伸应力	6E+07	Pa		
28	最大剪切应力	3.5E+07	Pa		
29	Tensile Pressure Failure				
30	最大拉伸压力	-6E+07	Pa		

图 5: 各向异性参数设置

3.3 求解模块与整体仿真架构

3.3.1 求解器选择

本文选用 ANSYS 中的 LS-DYNA 显式动力学求解器进行仿真分析。LS-DYNA 采用显式时间积分算法，特别适用于处理以下问题：

- 大变形与几何非线性问题；
- 接触、分离及材料失效过程；
- 断裂演化及单元删除等非连续现象。

相较于隐式求解器，显式方法在断裂仿真中具有更高的数值稳定性和更直观的破坏演化表现，适合用于模拟 3D 打印材料的失效行为。



图 6: 求解器类型

3.3.2 载荷与边界条件设置

仿真加载方式采用位移控制方式，在加载端施加沿指定方向的位移输入，以避免力控制方式在材料失效阶段引发数值不稳定。约束端设置为固定支撑，限制其平动与转动自由度，从而模拟实验中的实际加载工况。

为研究打印角度对力学响应的影响，本文在持几何模型与加载条件不变的前提下，分别设置多种不同打印角度，通过改变材料等效方向或模型姿态的方式实现角度参数的控制。

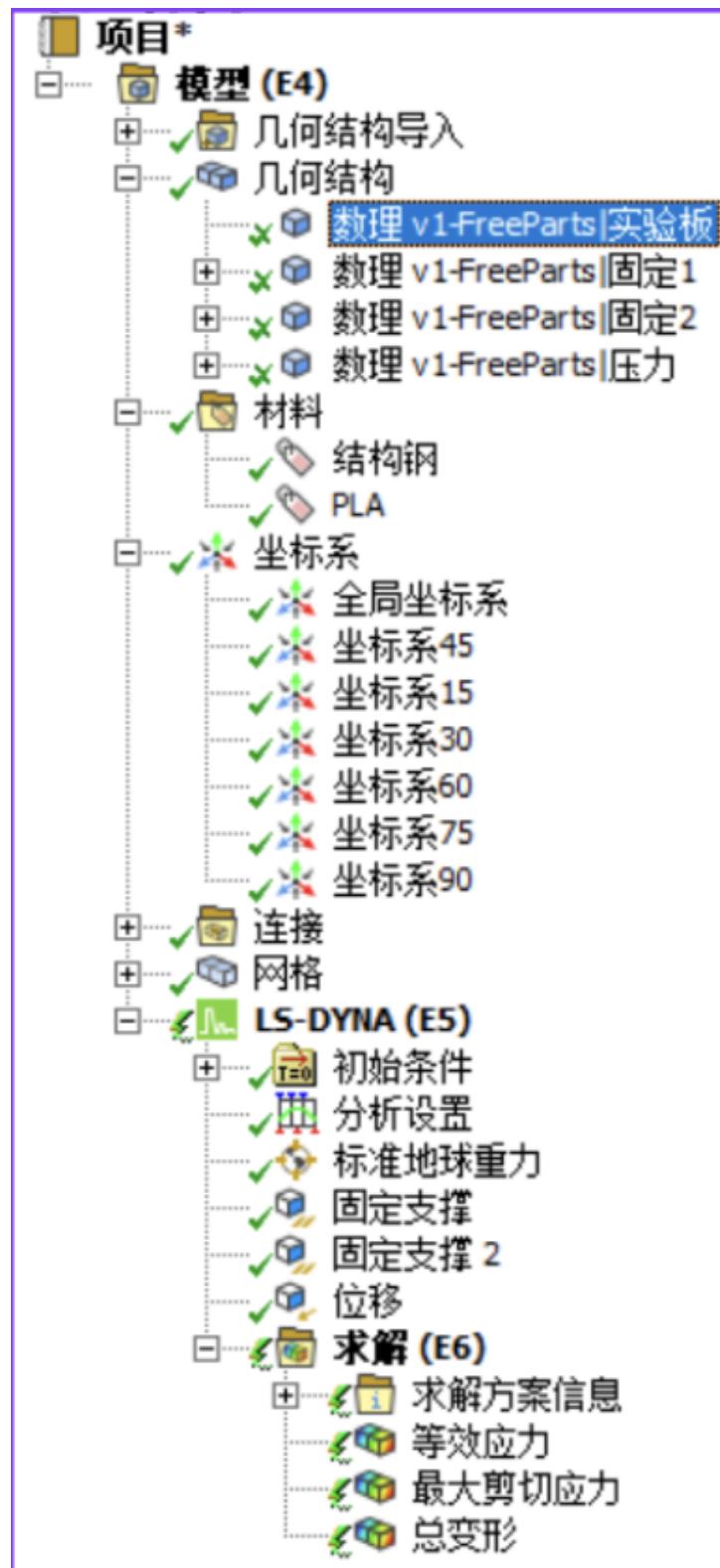


图 7: 仿真整体架构

3.4 小位移阶段的应力分布分析

在向下加载 1cm 的小位移条件下，各打印角度试样均未发生明显断裂或单元失效，结构整体仍处于连续变形阶段，材料主要表现为弹性变形并伴随局部早期塑性响应。因此，本阶段分析采用等效应力 (von Mises stress) 作为主要评价指标，用以反映结构在弹性-早期塑性阶段的整体受力水平及应力集中特征。

仿真结果表明，在小位移加载条件下，不同打印角度试样的等效应力云图整体分布形态相似，应力集中区域主要位于受弯拉伸侧，与经典梁弯曲理论所预测的位置一致。这表明，在未发生失效的前提下，有限元模型能够合理反映试样的基本受力特征。

进一步对比不同角度下的最大等效应力数值可以发现，等效应力水平随打印角度增大呈现整体降低趋势。这一现象说明，随着打印角度的增加，层状结构中载荷传递路径发生改变，结构整体等效刚度逐渐下降，在相同位移加载条件下的承载效率相应减弱。

该结果与前述基于各向异性弹性理论模型的分析结论保持一致，即打印角度的变化会显著影响层间协同受力能力，从而改变整体应力水平。需要指出的是，在小位移阶段，材料尚未进入失效状态，应力分布主要受结构刚度控制，因此该阶段分析更适用于揭示不同打印角度下的整体力学响应趋势，而非直接判断断裂先后。

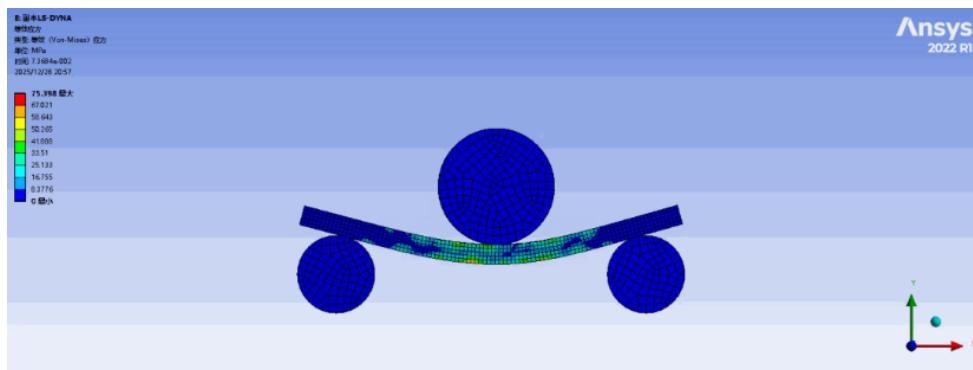


图 8: 0° 情况下小位移应力云图

3.5 大变形与失效阶段分析

当加载方式采用位移控制并将下压位移进一步增大至 10cm 时，试样整体进入明显的大变形与断裂阶段。此时，结构中局部拉伸变形显著增强，材料不再满足小变形假设，断裂行为逐渐由材料的拉伸极限所主导。因此，在本阶段分析中，本文采用最大主应变作为主要失效判据，以刻画材料在拉伸主导破坏条件下的损伤与断裂特征。

仿真结果表明，在位移控制条件下，随着打印角度的增大，结构整体刚度逐渐降低，使得在相同下压位移条件下，内部拉伸应变的整体增长速率有所减缓。从整体响应角度来看，试样表现为需要更大的下压位移才能发生宏观断裂。这一现象容易在位移层面上给出“高角度结构更不易断裂”的表面印象。

然而，进一步分析最大主应变云图可以发现，大角度试样中拉伸应变更容易在局部区域集中。这是由于角度增大后，结构在加载过程中更易发生弯曲与转动变形，部分下

压位移被结构整体弯曲所吸收，而未立即转化为均匀的材料拉伸变形。结果是，尽管整体位移水平较大，但在关键受拉区域内，拉伸应变反而更快累积，并更早达到材料的极限应变，从而触发局部断裂。

需要特别指出的是，在断裂阶段，裂纹的萌生与扩展会引起局部应力的快速释放，使得最大等效应力不再呈现随加载单调增加的变化规律，甚至可能出现局部下降或反常波动。因此，在失效分析中，单纯依赖最大等效应力已难以准确反映材料的破坏先后顺序。相比之下，最大主应变能够更直接表征材料拉伸损伤的累积过程，更符合3D打印层状材料以拉伸失效为主的实际破坏机理。

综合来看，大位移阶段的仿真结果表明：断裂行为并非由整体位移大小直接决定，而是由局部拉伸应变的集中程度所主导。打印角度的增大会削弱层间协同受力能力，使局部区域更易达到极限应变，从而在力学机理层面解释了实验中观察到的角度效应。

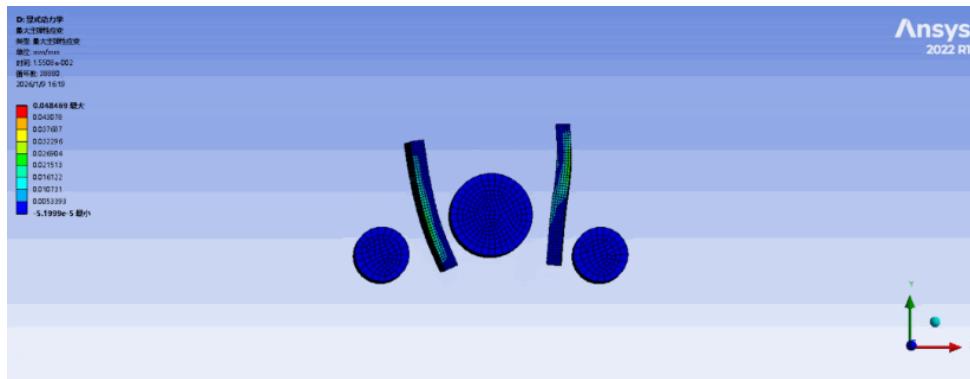


图 9: 0° 情况下大位移最大主应变云图

3.6 理论模型与仿真结果的综合分析

为系统比较理论模型预测结果与有限元仿真结果之间的一致性，本文基于不同打印角度下的应力与应变响应，对结果进行了综合分析，如图所示。

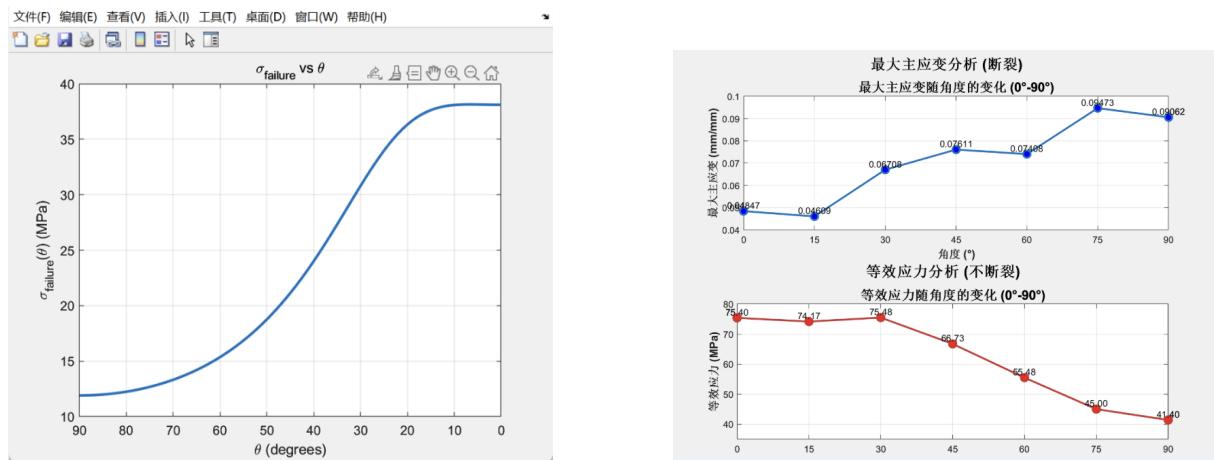
首先，从理论模型角度出发，基于各向异性力学假设推导得到的失效应力与角度关系曲线表明：随着打印角度由0°向90°增大，材料沿主要受力方向的有效承载能力逐渐下降，失效应力呈现单调降低趋势（图一）。该趋势反映了层状结构中载荷传递方向与材料主承载方向逐渐偏离所导致的整体承载效率衰减。

进一步对比有限元仿真结果可以发现，在小位移阶段（未发生断裂）下，不同角度试样的最大等效应力水平差异相对有限，但整体仍随角度增大呈下降趋势（图二下）。这说明在结构尚未进入失效阶段时，力学响应主要由整体刚度控制，打印角度对等效应力的影响表现为一种“弱角度效应”，与理论模型在弹性阶段的预测结果保持一致。

然而，当结构进入大变形与断裂阶段后，力学行为发生明显变化。从最大主应变随角度变化的仿真结果（图二上）可以看出，最大主应变整体随打印角度增大而显著升高，尤其在高角度区间，拉伸主应变集中现象更加明显。这表明，在大变形阶段，断裂不再由整体应力水平主导，而是由局部拉伸应变的集中程度所控制。

综合理论与仿真结果可以认为：在结构未发生断裂前，不同角度试样的整体受力水平差异有限；而在进入大变形阶段后，打印角度的增大会显著削弱层间协同受力能力，使拉伸主应变更易在局部区域集中，从而使材料更早达到拉伸失效条件。这一机理从数值结果层面解释了实验中观察到的“角度越大，越容易断裂”的现象。

因此，等效应力指标更适用于描述小变形阶段的整体受力趋势，而最大主应变则更能准确刻画 3D 打印层状材料在大变形条件下的断裂机理。理论模型与有限元仿真在总体趋势上保持一致，验证了本文所建立分析方法的合理性。



(a) 理论公式趋势图

(b) 仿真结果趋势图

图 10: 理论模型与仿真结果的综合分析

4 实验验证

4.1 实验设计与准备

为了验证上述理论模型和仿真结果的准确性，我们设计并实施了标准的三点弯曲破坏实验。试样采用商用 FDM 打印机制造，材料为白色 PLA，打印参数在所有组别中保持一致，仅改变底层和顶层的光栅角度。每个角度（ 0° 至 90° ，间隔 15° ）打印 5 个重复样本。

实验平台由两根平行固定的圆柱形金属棒作为简支座，跨距精确调整为 80mm。加载装置采用悬挂式设计。

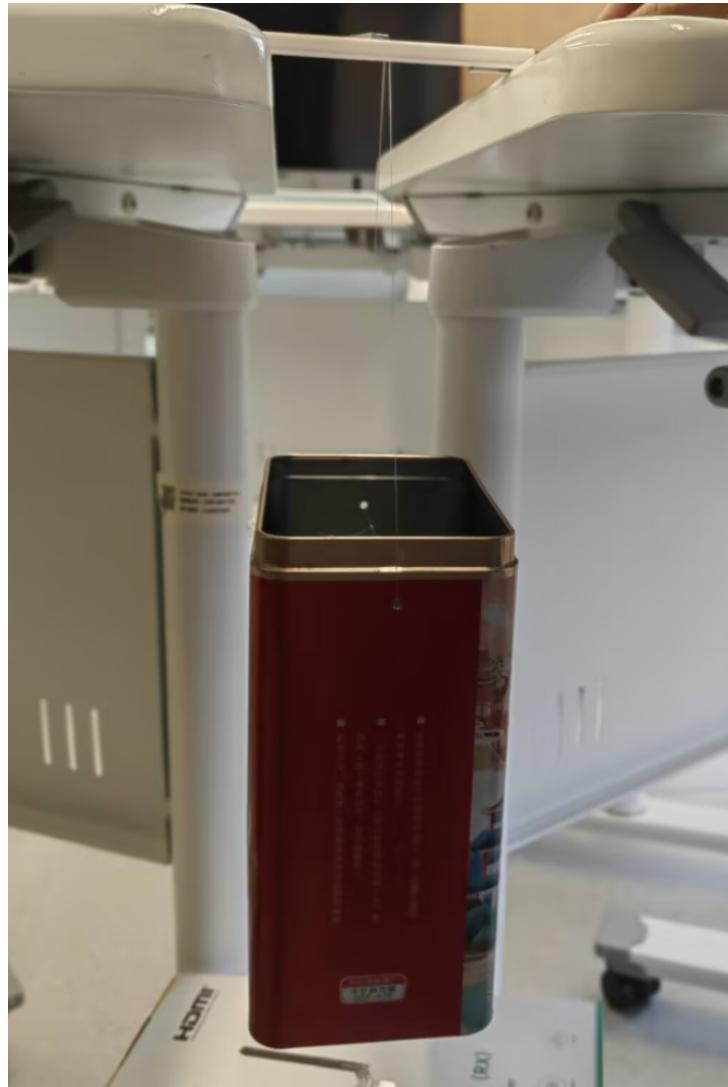


图 11: 实验示意图

4.2 预实验

在确定最终的实验方案后，小组开展了预实验，以验证实验流程的可行性，并初步探究尺寸为 $100 \times 10 \times 5$ mm 的样方在压载条件下的承受能力，进而评估可能影响正式实验精度与稳定性的风险因素。预实验使用自制 3D 打印样方作为被测试物体，通过逐步增加外加载荷的方式评估其破坏点及形变特征。

在预实验过程中，样方的表现揭示出以下若干问题与潜在隐患：

(1) 打印质量不一致导致表面缺陷

部分样方由于打印角度、支撑接触位置等因素影响，出现局部打印质量偏差，如分层、粗糙或接触界面弱化。这类缺陷可能导致力学性能劣化，使得样方在较低载荷下提前发生破坏，影响实验结论的有效性与统一性。

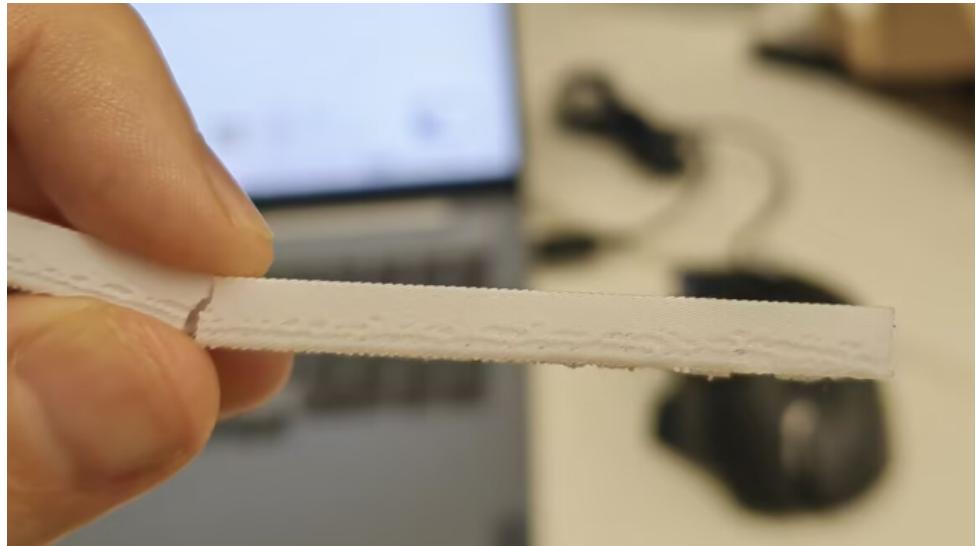


图 12: 打印件存在明显层纹

(2) 初始施压体重量不足，无法显著触发变形

预实验中发现，当样方所承受的压载能力明显高于用于施加载荷的细沙重量（约3kg），实验无法有效形成形变量或破坏模式，导致数据难以记录。为保证实验具有可观测性和区分度，需要增大初始施压体质量。

(3) 鱼线强度偏低，限制加载能力

在加载超过约4kg时，连接装置使用的鱼线发生断裂，无法继续施压。这说明连接材料不足以支撑本实验所需的最大加载区间，进而影响实验连续性与安全性。



图 13: 绷断的鱼线

基于上述问题分析，小组提出了如下改进措施以提升正式实验的稳定性与可重复

性：

降低 3D 打印速度并调整支撑参数，以提高样方打印精度和表面质量；配备两块自重约 2kg 的码砝作为初始施压体，以便进入有效测试区间；更换具有更高抗拉强度的鱼线材料，以确保加载过程稳定且不中断。

通过预实验，小组不仅初步掌握了样方的力学承受能力范围，也识别并修正了实验流程中的关键薄弱环节，为后续正式实验顺利实施提供了重要依据。

4.3 实验

处理完上述预实验的问题之后，我们小组进行了全部角度的样方发承重测量。

实验现象极具特征性：

- 0° 试样在断裂前表现出明显的塑性弯曲变形，断裂面较为整齐，伴随响亮的脆断声，显示出较高的韧性和强度。
- 45° 试样的断口呈现锯齿状，裂纹明显沿着打印丝材的 45° 方向扩展，证实了剪切破坏的主导地位。
- 90° 试样（层间方向受力）几乎没有肉眼可见的弯曲变形即发生突然断裂，断口平整且垂直于梁轴线，完全是层间界面的剥离破坏，承载载荷极低。

4.4 数据对比与分析

将实验测得的极限载荷转换为应力值，并绘制成散点图叠加在理论预测曲线上。结果表明，实验数据点在整体趋势上与 Tsai-Hill 理论曲线及仿真曲线吻合良好，呈现出特征的“S”型下降。

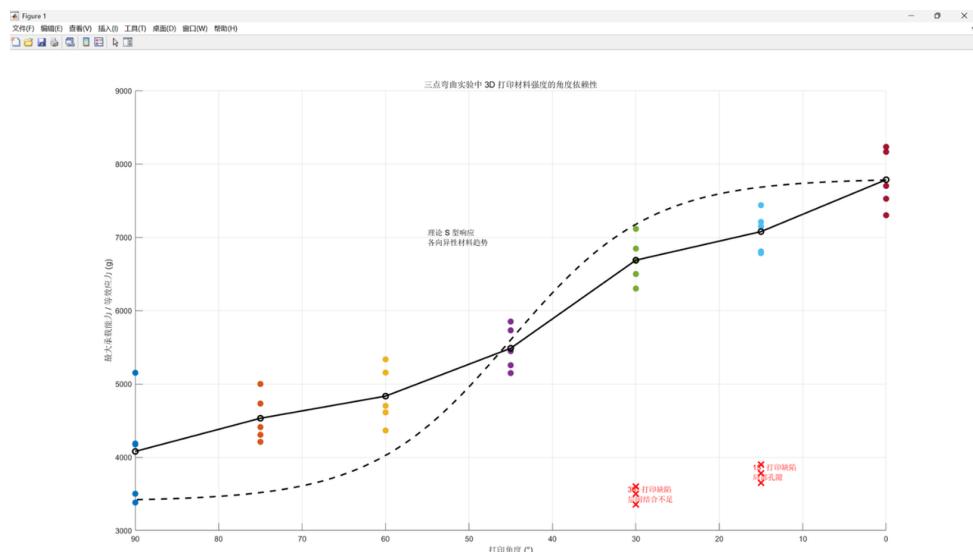


图 14: Figure 1: 原始实验数据及其拟合线

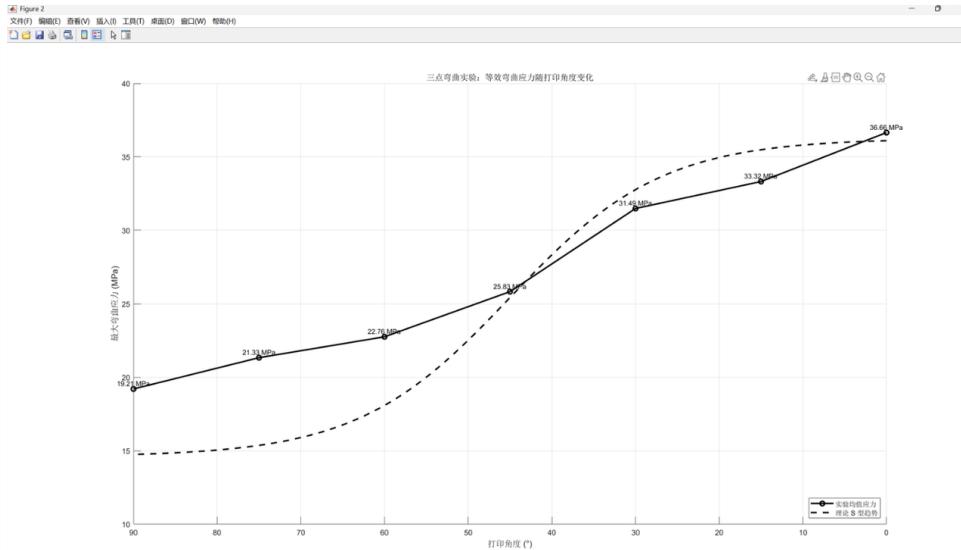


图 15: 单位标准化后 (Mpa) 数据

具体来看， 0° 至 15° 区间内，强度下降不明显。然而，在 30° 至 60° 区间，强度数据出现了陡降。而在接近 90° 的区间，实验值与理论预测的值（层间强度）高度一致。实验证实了：层间结合强度是木桶效应中的“短板”，决定了各向异性构件的力学下限。

5 结论与展望

5.1 研究总结

本文围绕 3D 打印层状材料在不同打印角度条件下的应变分布特征与断裂行为，综合采用理论建模、数值计算、有限元仿真与实验验证的方法，系统研究了打印角度对应力集中与失效机理的影响规律。

在理论分析方面，基于二维弹性力学控制方程，引入各向异性假设并结合失效准则，建立了能够反映打印方向效应的力学模型。理论结果表明，打印角度改变会引起材料主承载方向与外载方向之间的偏离，从而影响结构的等效承载能力，并在一定条件下诱发明显的应力与应变集中。

在数值与仿真分析方面，通过有限差分法与有限元方法对模型进行了求解与验证。仿真结果显示，在小位移加载阶段，不同打印角度试样整体受力水平差异较小，等效应力随角度变化呈缓慢变化趋势；而在进入大变形与断裂阶段后，最大主应变对角度变化高度敏感，角度增大显著加剧了拉伸主应变的局部集中，从而主导了断裂行为的发生。这一结果在机理层面解释了实验中观察到的角度效应。

综合理论、仿真与实验结果可以得出如下认识：从理想打印方向出发，若仅进行微小角度偏转，材料整体力学性能变化不显著；但当打印角度超过某一临界范围后，层间协同受力能力迅速下降，构件强度随之明显衰减。该现象表明，打印角度对力学性能的

影响具有明显的非线性特征，而非简单的线性递减关系。

另一方面，研究结果也表明，当打印件存在层间粘合强度不足的问题时，仅通过小幅倾斜打印方向难以显著改善结构的整体力学性能。仿真与实验均显示，当打印角度增大至约 45° 及以上时，结构在一定程度上实现了载荷传递路径的重构，使拉伸主应变集中位置发生变化，从而在可打印性与力学性能之间取得较为合理的折中。这一结论为实际工程中打印方向的选择提供了具有指导意义的参考。

5.2 局限与展望

尽管本文在理论建模与仿真分析方面取得了一定成果，但仍存在若干局限性有待进一步研究。

首先，在材料建模方面，本文采用的是宏观等效连续介质模型，未显式引入打印丝材间的真实几何面貌及熔融界面微观结构。未来可通过多尺度建模方法，将丝材级结构引入有限元模型，以更精确地描述层间失效过程。

其次，在失效判据方面，本文主要基于主应变主导的断裂机制进行分析，而未考虑疲劳、蠕变及环境因素对材料性能的长期影响。后续研究可进一步结合时间相关本构模型，拓展模型在复杂服役工况下的适用性。

最后，在工程应用层面，本文研究结果为打印路径与构件受力方向的协同设计提供了理论依据。未来可将本文方法推广至更复杂的三维结构及功能部件设计中，并与拓扑优化、工艺参数优化相结合，从而实现 3D 打印结构在强度、质量与制造效率之间的综合最优。

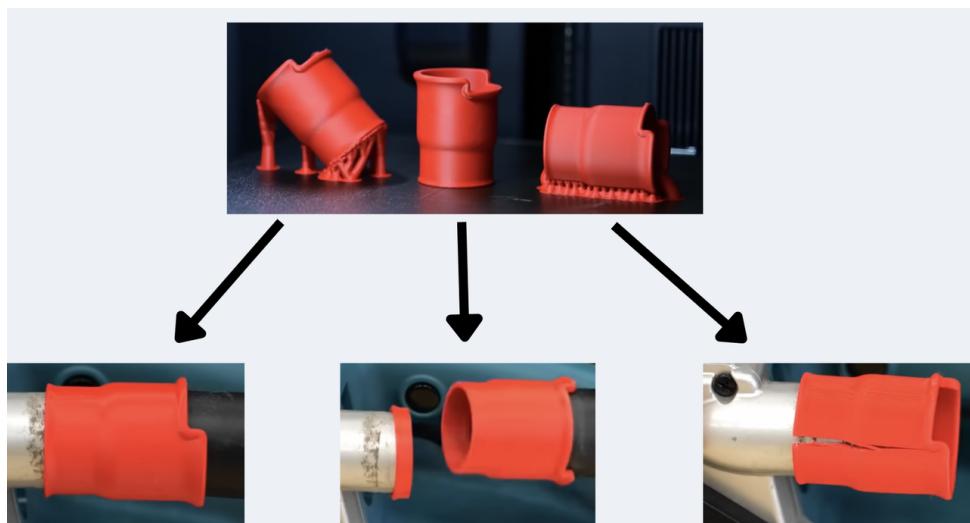


图 16: 一个根据不同打印角度在应用中的实例

参考文献

- [1] Taeuk Lim, Hao Cheng, Won Suk Jung. A Study on the Mechanical Properties of 3D Printed PLA Specimens According to Infilled Pattern and Printing Direction. *Key Engineering Materials*, 2021.
- [2] Gibson, I., Rosen, D. W., & Stucker, B. *Additive Manufacturing Technologies*. Springer, 2021.
- [3] 杨新洪. 3D 打印材料力学性能及其建模研究. 材料导报, 2023(15): 55-60.
- [4] 李思远. 层间结合强度对 3D 打印结构变形的影响. 机械工程学报, 2022(10): 88-94.

附录 基于有限差分法的应力场数值求解代码 (MATLAB)

以下代码实现了双调和方程 $\nabla^4\Phi = 0$ 的数值求解，并对二维及三维应力场进行了可视化。

```

1 clear; clc; close all;
2
3 % PART 1: 模型预处理(Preprocessing)
4 % 核心功能: 定义几何尺寸、物理参数、网格划分、三点弯曲载荷模型
5
6 % 几何尺寸(单位:m)
7 Lx = 0.100;      % 梁长 100mm
8 Ly = 0.015;      % 梁高 15mm
9 Thick = 0.005;   % 梁厚度 5mm(用于3D可视化厚度)
10
11 % 网格参数(手动划分)
12 Nx = 101; % x方向节点数(足够的密度以捕捉弯矩变化)
13 Ny = 31;  % y方向节点数(足够的密度以平滑显示层间应力)
14
15 dx = Lx/(Nx-1);
16 dy = Ly/(Ny-1);
17
18 % 生成网格坐标矩阵
19 x = linspace(0, Lx, Nx);
20 y = linspace(-Ly/2, Ly/2, Ny); % y轴原点置于梁中心
21 [XX, YY] = meshgrid(x,y);
22
23 % 物理参数
24 P = 100; % 中心集中载荷(N)
25 I = (Thick*Ly^3)/12; % 截面惯性矩 (m^4)
26
27 % 定义弯矩函数 M(x) - 三点弯曲(简支梁中心受载)
28 % 逻辑: x<L/2 时 M=Px/2; x>L/2 时 M=P(L-x)/2
29 M_func = @(xi) (P/2)*(((xi<=Lx/2)*xi + (xi>Lx/2)*(Lx-xi)));
30
31 % PART 2: 有限差分法组装与求解(Finite Difference Method Solver)
32 % 核心功能: 构建双调和方程( $\nabla^4 \Phi = 0$ ) 的稀疏矩阵并求解
33
34 fprintf('正在初始化稀疏矩阵并组装方程...\n');
35
36 N = Nx*Ny; % 总节点数
37 A = sparse(N,N); % 稀疏系数矩阵(节省内存)
38 RHS = zeros(N,1); % 右端项向量
39
40 % 差分加权系数(处理dx != dy 的情况)

```

```
41 alpha = (dx/dy)^2;
42
43 % 索引映射函数: 将二维(i,j)映射为一维索引 k
44 idx = @i, j i+(j-1)*Ny;
45
46 % 13点差分格式系数预计算
47 c_center = 6 + 6*alpha^2 + 8*alpha;
48 c_x1 = -4 - 4*alpha;
49 c_x2 = 1;
50 c_y1 = -4*alpha - 4*alpha^2;
51 c_y2 = alpha^2;
52 c_diag = 2*alpha;
53
54 % 循环遍历每个节点建立方程
55 for j = 1:Nx
56     for i = 1:Ny
57         k = idx(i,j);
58
59         xi = (j-1)*dx;
60         yi = (i-1)*dy-Ly/2;
61
62         % 判断是否为边界节点(外层+次外层)
63         is_boundary = (i==1 || i==Ny || j==1 || j==Nx);
64         is_sub_boundary = (i==2 || i==Ny-1 || j==2 || j==Nx-1);
65
66         if is_boundary || is_sub_boundary
67             % === 边界条件(Dirichlet BC) ===
68             % 使用经典梁理论推导的 Airy 函数值作为边界驱动
69             % Phi_boundary = M(x) y^3 / (6*I)
70             Mx = M_func(xi);
71             A(k,k) = 1; % 对角线置1
72             RHS(k) = (Mx*yi^3) / (6*I);
73         else
74             % === 内部节点(双调和方程) ===
75             % 应用 13点差分算子
76             A(k, idx(i, j)) = c_center;
77
78             % 邻居节点
79             A(k, idx(i,j-1)) = c_x1;
80             A(k, idx(i,j+1)) = c_x1;
81             A(k, idx(i-1,j)) = c_y1;
82             A(k, idx(i+1,j)) = c_y1;
83
84             A(k, idx(i,j-2)) = c_x2;
85             A(k, idx(i,j+2)) = c_x2;
```

```
86     A(k, idx(i-2,j)) = c_y2;
87     A(k, idx(i+2,j)) = c_y2;
88
89     A(k, idx(i-1,j-1)) = c_diag;
90     A(k, idx(i+1,j-1)) = c_diag;
91     A(k, idx(i-1,j+1)) = c_diag;
92     A(k, idx(i+1,j+1)) = c_diag;
93   end
94 end
95
96
97 fprintf('正在求解线性方程组(A \\\nRHS)...\\n');
98 Phi_vec = A \ RHS; % 求解
99 Phi = reshape(Phi_vec, Ny, Nx); % 重塑为二维矩阵
100
101 % PART 3: 后处理应力计算(Post-Processing)
102 % 核心功能: 通过Phi的二阶差分计算应力分量
103
104 sigma_x = zeros(Ny,Nx);
105 sigma_y = zeros(Ny,Nx);
106 tau_xy = zeros(Ny,Nx);
107
108 for j = 2:Nx-1
109   for i = 2:Ny-1
110     % sigma_x = d^2(Phi)/dy^2
111     sigma_x(i,j) = (Phi(i+1,j)-2*Phi(i,j)+Phi(i-1,j))/dy^2;
112
113     % sigma_y = d^2(Phi)/dx^2
114     sigma_y(i,j) = (Phi(i,j+1)-2*Phi(i,j)+Phi(i,j-1))/dx^2;
115
116     % Tau_xy = -d^2(Phi)/dxdy
117     tau_xy(i,j) = -(Phi(i+1,j+1)+Phi(i-1,j-1)-Phi(i+1,j-1)-Phi(i-1,j+1))
118       / (4*dx*dy);
119   end
120 end
121
122 % 计算 Von Mises 等效应力
123 sigma_vm = sqrt(sigma_x.^2 + sigma_y.^2 - sigma_x.*sigma_y + 3*tau_xy.^2);
124
125 % PART 4: 可视化 Figure 1: 2D 验证图(论文定量分析用)
126 % 核心功能: 展示四个关键物理场的二维云图, 验证物理正确性
127 figure('Name', '2D验证结果(论文用)', 'Color', 'w', 'Position', [100, 300,
128   1000, 700]);
```

```
129 % 1. Airy 应力函数
130 subplot(2, 2, 1);
131 contourf (XX, YY, Phi, 20, 'LineColor', 'none');
132 title('Airy 应力函数\Phi (数值解)'); xlabel('x (m)'); ylabel('y (m)');
133 colorbar; axis tight;
134
135 % 2. 正应力 Sigma_x(验证重点)
136 subplot(2,2,2);
137 contourf (XX, YY, sigma_x, 20, 'LineColor', 'none');
138 title('正应力 \sigma_x (符合三点弯曲力矩分布)'); xlabel('x (m)'); ylabel('y
139 (m)');
140 colorbar; axis tight;
141
142 % 3. 剪切应力 Tau_xy(验证重点)
143 subplot(2, 2, 3);
144 contourf (XX, YY, tau_xy, 20, 'LineColor', 'none');
145 title('剪切应力 \tau_{xy} (中心点突变)'); xlabel('x (m)'); ylabel('y (m)');
146 colorbar; axis tight;
147
148 % 4. Von Mises 应力(对比 Ansys)
149 subplot(2, 2, 4);
150 colormap (gca, jet);
151 contourf (XX, YY, sigma_vm, 20, 'LineColor', 'none');
152 title('Von Mises 等效应力(失效分析)'); xlabel('x (m)'); ylabel('y (m)');
153 colorbar; axis tight;
154
155 % PART 5: 可视化 - Figure 2: 3D 展示图(PPT/海报展示用)
156 % 核心功能: 展示势能面、应力地形图和 3D 实体梁效果
157
158 figure('Name', '3D可视化效果(展示用)', 'Color', 'w', 'Position', [150, 150,
159 1100, 800]);
160
161 % 1. Airy 势能面(左上)
162 subplot(2, 2, 1);
163 surf(XX, YY, Phi, 'EdgeColor', 'none', 'FaceColor', 'interp');
164 title('Airy 函数 \Phi 数学势能面(光滑性验证)');
165 axis tight; view(-30, 45); camlight left; lighting gouraud; material shiny;
166 xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('\Phi');
167
168 % 2. 正应力地形图(右上) - 直观展示拉压区分
169 subplot(2, 2, 2);
170 surf(XX, YY, sigma_x, 'EdgeColor', 'none');
171 title('正应力 \sigma_x 地形分布(山脊=受压, 山谷=受拉)');
172 axis tight; view(-45, 30); camlight right; lighting gouraud; colorbar;
173 colormap(gca, turbo); % Turbo 色图对比度高
```

```
172 xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('\sigma_x');
173
174 % 3.3D实体梁 Von Mises 云图(下方大图)
175 subplot(2, 2, [3, 4]);
176
177 % 构建实体梁的上下前后表面数据
178 Z_front = ones (size (XX)) * (Thick/2);
179 Z_back = ones (size (XX)) * (-Thick/2);
180
181 X_top = [x;x];
182 Y_top = [ones(1,Nx)*Ly/2; ones(1,Nx)*Ly/2];
183 Z_top = [ones(1,Nx)*(-Thick/2); ones(1,Nx)*(Thick/2)];
184 C_top = [sigma_vm(end, :); sigma_vm(end, :)]; % 顶部应力颜色
185
186 Y_bot = [ones(1,Nx)*(-Ly/2); ones(1,Nx)*(-Ly/2)];
187 C_bot = [sigma_vm(1,:); sigma_vm(1, :)]; % 底部应力颜色
188
189 % 绘制各个表面
190 surface (XX, YY, Z_front, sigma_vm, 'FaceColor', 'interp', 'EdgeColor', 'none', 'FaceLighting', 'gouraud'); hold on;
191 surface (XX, YY, Z_back, sigma_vm, 'FaceColor', 'interp', 'EdgeColor', 'none', 'FaceLighting', 'gouraud');
192 surface (X_top, Y_top, Z_top, C_top, 'FaceColor', 'interp', 'EdgeColor', 'none');
193 surface (X_top, Y_bot, Z_top, C_bot, 'FaceColor', 'interp', 'EdgeColor', 'none');
194
195 % 视图与美化
196 title('3D 实体梁仿真效果(Von Mises 应力)', 'FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');
197 xlabel('Length x (m)'); ylabel('Height y (m)'); zlabel('Thickness z (m)');
198 view (35, 25); axis equal; axis tight; grid on; box on;
199 colormap (gca, jet); colorbar; caxis([0 max(sigma_vm(:))]);
200 set(gca, 'ZDir', 'reverse'); % z轴反向符合结构力学习惯
201 camlight headlight; lighting phong; material dull;
202
203 fprintf('所有绘图已完成。Figure 1 为2D验证, Figure 2为3D展示。\\n');
```