Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2021/2022
Corso di Laurea in Bioinformatica

Esercizi per il Corso di Algebra Lineare - Soluzioni

1. (a) $\dim(U+W)$ si calcola come rango della matrice le cui colonne sono u_1, u_2, w_1, w_2. Si ottiene $\dim(U+W) = 2$.
   (b) Poichè $\dim U = \dim W = 2$, per la formula di Grassmann si ha $\dim U \cap W = 2$.

2. L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{x^2 + 4\,y^2}$ non é lineare. Ad esempio $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = 0$, ma $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}) = 1+1 = 2$.

3. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $\{u, v\}$ una base di V. Abbiamo dunque $\dim V = 2$. Per dimostrare che anche $\{u+v,\, v\}$ è una base di V, basta quindi verificare che è linearmente indipendente. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha\,(u+v) + \beta\, v = 0$. Allora si ha $\alpha\, u + (\alpha+\beta)\, v = 0$, e poichè u e v sono lineramente indipendenti per ipotesi, si conclude che $\alpha = \alpha+\beta = 0$. Da ciò segue $\alpha = \beta = 0$, come volevasi dimostrare.

4. La soluzione é $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. La soluzione é $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

6. L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{x^2 - y^2}$ non é lineare. Ad esempio $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = 0$, ma $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}) = 1+1 = 2$.

7. (a) $\dim(U+W)$ si calcola come rango della matrice le cui colonne sono u_1, u_2, w_1, w_2. Si ottiene $\dim(U+W) = 3$.
   (b) Poichè $\dim U = \dim W = 2$, per la formula di Grassmann si ha $\dim U \cap W = 1$.

8. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{10} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

9. (a) $\dim U = 3$.
   (b) Una base di U é data da $\{v_1, v_2, v_4\}$.

10. $U = \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid {x_1}^2 - {x_2}^2 = 0\}$ non é un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Ad esempio $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$, ma $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U$.

11. (a) Il polinomio caratteristico di A è
    $p_A = -x^3 + 2x^2 - x = -x\,(x-1)^2$.

    (b) L'autospazio $E_A(0)$ relativo all'autovalore 0 si ottiene come insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo dato dalla matrice

$$A \sim \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

    Quindi $\dim V_0 = 3 - 2 = 1$ e $\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ è una base di V_0.

    Analogamente, l'autospazio $E_A(1)$ relativo all'autovalore 1 si ottiene come insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo dato dalla matrice

$$A - I_3 \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

    Quindi $\dim V_1 = 3 - 1 = 2$ e V_2 ha la base $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\}$.

    (c) Si ha quindi $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

    (d) $\det A = \det D = 0$.

    (e) $A^3 = P\,D^3\,P^{-1} = P\,D\,P^{-1} = A$.

12. $L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$

13. $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$

14. $U = \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid {x_1}^4 = {x_2}^4\}$ non é un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Ad esempio, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$, ma $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U$.

15. $L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + < \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} >$

16. Il polinomio caratteristico di A è $p_A = (-1-x)(x-2)^2$.

    L'autospazio $E_A(2)$ relativo all'autovalore 2 si ottiene come insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo dato dalla matrice

$$A - 2\,I_3 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

    Quindi la molteplicità geometrica dell'autovalore 2 è $\dim V_2 = 3 - 2 = 1$, mentre la molteplicità algebrica è 2. Ció dimostra che A non é diagonalizzabile.

    Il polinomio caratteristico di B è $p_B = (x-1)(-x^2 + 2\,x - 2)$.

    La matrice B possiede quindi i tre autovalori complessi distinti 1, $1+i$, $1-i$ ed é pertanto diagonalizzabile.

17. (a) $\dim U = 2$.
    (b) Una base di U é data da $\{u_1, u_2\}$.

18. $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

19. (a) $\dim U = 3$.
    (b) Una base di U é data da $\{w_1, w_2, w_3\}$.

20. $U = \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid {x_1}^2 = 4\,{x_2}^2\}$ non é un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Ad esempio, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$, ma $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U$.

21. $L = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + < \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$

22. $\mathrm{rk}\, A = 2$

23. (a) Si ha $v_k = k\, v_1$ per ogni $1 \leq k \leq n$, quindi $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente dipendenti.

(b) $\dim < v_1, \ldots, v_n > = \dim < v_1 > = 1 < n = \dim \mathbb{R}^n$, quindi i vettori non sono un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

24. Si ha $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ quindi $U \subseteq V$ e allora $U + V = V$, per cui abbiamo $\dim (U + V) = 2$.

Argomento alternativo: Poichè $U \subseteq V$, si ha $U = U \cap V$. Inoltre $\dim U = 1$ e $\dim V = 2$. Per la formula di Grassmann concludiamo $\dim (U + V) = \dim U + \dim V - \dim (U \cap V) = 2 + 1 - 1 = 2$.

25. La matrice aumentata del sistema é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A \mid b) = 2$ e $\dim N(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0\} = 1$. Si ottiene una soluzione particolare $p = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ e il vettore $u = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ come base di $N(A)$.

Quindi $L = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$

26. (a) U_1 é un sottospazio:

Se $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_5 \end{pmatrix} \in U_1$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora

(i) $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_5 + y_5 \end{pmatrix}$ con $x_1 + y_1 = 2x_2 + 2y_2 = 2(x_2 + y_2)$, quindi $x + y \in U_1$

(ii) $\lambda\, x = \begin{pmatrix} \lambda\, x_1 \\ \vdots \\ \lambda\, x_5 \end{pmatrix}$ con $\lambda\, x_1 = 2\, \lambda\, x_2$, quindi $\lambda\, x \in U_1$.

(b) U_2 non contiene il vettore 0 e quindi non é un sottospazio.

27. (a) no, perché $\det \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 0$

(b) no, perchè 4 vettori in uno spazio vettoriale di dimensione 3 non sono mai linearmente indipendenti.

(c) sì: $\det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = 30 \neq 0$

28. (a) $\dim U = 3$, perchè il rango della matrice con le colonne v_1, v_2, v_3, v_4 é 3.

    (b) Si verifica (ad esempio calcolando il rango della matrice con le colonne v_1, v_2, v_4) che v_1, v_2, v_4 sono linearmente indipendenti. Da (a) deduciamo inoltre che $\{v_1, v_2, v_4\}$ è una base dello spazio nullo.

    (c) no, per esempio perchè $\{v_1, v_2, v_4,\ v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ è linearmente indipendente.

    Infatti la matrice con le colonne v_1, v_2, v_4 e v ha rango 4.

29. Abbiamo $10 = \dim U_2 \leq \dim (U_1 + U_2) \leq \dim V = 11$. Per la formula di Grassmann concludiamo $\dim (U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim (U_1 + U_2) \in \{13 - 10,\ 13 - 11\} = \{3,\ 2\}$.

30. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 11 & 12 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

31. (a) f_1 é lineare:

    (i) $f_1(x+y) = f_1(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (5(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) \\ (x_3 + y_3) - (x_1 + y_1)) \end{pmatrix} =$

    $\begin{pmatrix} (5x_1 - x_2 + x_3) + (5y_1 - y_2 + y_3) \\ (x_3 - x_1) + (y_3 - y_1)) \end{pmatrix} = f_1(x) + f_1(y)$

    (ii) $f_1(\lambda\, x) = f_1(\begin{pmatrix} \lambda\, x_1 \\ \lambda\, x_2 \\ \lambda\, x_3 \end{pmatrix}) = (\begin{pmatrix} 5\lambda\, x_1 - \lambda\, x_2 + \lambda\, x_3 \\ \lambda\, x_3 - \lambda\, x_1 \end{pmatrix} = \lambda\, f_1(x)$.

    (b) Invece f_2 non é lineare: Ad esempio $f_2(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = f_2(0) = 0$,

    mentre $f_2(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) + f_2(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = 1 + 1 = 2$.

32. Sappiamo che $\det A = \det A^T$, quindi per ipotesi $\det A = \det(-A)$. Poichè $-A$ é la matrice ottenuta da A moltiplicando ognuna delle n righe con lo scalare -1, la multilinearità del determinante ci da $\det(-A) = (-1)^n \det A$. Essendo n dispari, concludiamo $\det A = -\det A$ e perciò $\det A = 0$.

33. Il polinomio caratteristico di

$$A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

è $p_A = x^2 - 2\,x\cos t + 1$. La matrice possiede quindi autovalori reali se e solo se il discriminante $\Delta = \cos^2 t - 1 \geq 0$, cioè se e solo se $\cos^2 t = 1$, che equivale a dire che t è un multiplo $n\pi$ di π.

Se $t = n\pi$ con n pari, allora $A = E_2$ ha autovalore 1 e autospazio $\mathbb{R}^2$ e la moltipicazione con A è l'applicazione identica.

Se $t = n\pi$ con n dispari, allora $A = -E_2$ ha autovalore -1 e autospazio $\mathbb{R}^2$ e la moltipicazione con A è una rotazione di centro O e di angolo π, cioè 180^0.

34. (a) Il polinomio caratteristico di

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

è $p_A = x^2 - x - 1$, quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Si noti che $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$, e $\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{5}$.

L'autospazio $E_A(\lambda_i)$ relativo all'autovalore λ_i ha la base $\{\begin{pmatrix} \lambda_i - 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid i = 1, 2\}$.

Si ha quindi $P = \begin{pmatrix} \lambda_1 - 1 & \lambda_2 - 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_2 & -\lambda_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

(b) Abbiamo quindi $A = PDP^{-1}$ con $P^{-1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ -1 & -\lambda_2 \end{pmatrix}$. Dunque per $n = 1, 2, 3, \ldots$ si calcola $A^n = PD^nP^{-1}$ come

$$A^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} {\lambda_1}^{n-1} - {\lambda_2}^{n-1} & {\lambda_1}^n - {\lambda_2}^n \\ {\lambda_1}^n - {\lambda_2}^n & {\lambda_1}^{n+1} - {\lambda_2}^{n+1} \end{pmatrix}$$

(c) Per calcolare i numeri di Fibonacci $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ usiamo

$$\begin{pmatrix} y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

quindi y_n è il coefficiente di A^{n-1} con indice 2,2, cioè

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{5}}({\lambda_1}^n - {\lambda_2}^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

35. $\dfrac{1}{4+3i} = \dfrac{4}{25} - \dfrac{3}{25}\,i$ e quindi abbiamo $\dfrac{6+5\,i}{4+3i} = \dfrac{39}{25} + \dfrac{2}{25}\,i.$

36. $\dfrac{2+i}{3+i} = \frac{7}{10} + \frac{1}{10}\,i$

37. $\dfrac{1+3i}{1-i} = -1+2\,i$

38. $\dfrac{2+i}{3-i} = \frac{5}{10} + \frac{5}{10}\,i.$

39. $\frac{3}{2}\sqrt{2} + i\,\frac{3}{2}\sqrt{2} = 3\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}),$
quindi per il Teorema di De Moivre si ha $(\frac{3}{2}\sqrt{2} + i\,\frac{3}{2}\sqrt{2})^4 = -81.$

40. (a) NO: 0 è autovalore di una matrice $A \in M_{3\times 3}$ se e solo se il sistema lineare $Ax = 0$ ha una soluzione non nulla, ovvero se e solo se $\mathrm{rk}A < 3$.
    (b) NO: Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di V, allora qualsiasi vettore v_4 è combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 e quindi l'insieme $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è linearmente dipendente.
    (c) NO: La matrice associata a un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^2$ è una matrice 2×4 e quindi ha rango ≤ 2.

41. (a) NO: 0 è autovalore di una matrice $A \in M_{3\times 3}$ se e solo se il sistema lineare $Ax = 0$ ha una soluzione non nulla, ovvero se e solo se $\det A = 0$.
    (b) SI', la moltiplicazione con una matrice invertibile 3×3 è un applicazione lineare biiettiva $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$.
    (c) NO: per qualsiasi scelta di α l'insieme $\{v_1; v_2; \alpha v_2 + v_3; v_1 - v_2\}$ è linearmente dipendente poiché $v_1 - v_2$ è combinazione lineare dei rimanenti vettori.

42. (a) SI', se A è una matrice 3×3 con $\det A = 0$, allora il sistema lineare $Ax = 0$ ha una soluzione $v \neq 0$, e v è un autovettore di A relativo all'autovalore 0.
    (b) NO: Per un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$ si ha sempre che l'immagine ha dimensione ≤ 3 (ad esempio per il Teorema Nullità + Rango), quindi non può coincidere con $\mathbb{C}^4$.
    (c) NO: Se $\{v_1; v_2; v_3\}$ è una base dello spazio vettoriale V, allora $\dim V = 3$, quindi ogni insieme di generatori deve contenere almeno 3 vettori.

43. Una forma ridotta della matrice A è

$$U_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & -\alpha & 1 \\ 0 & 1-\alpha^2 & -1+\alpha^2 & 1-\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

e $A_\alpha = LU$ con

$$L_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Una base di $C(A_2)$ è data dalle prime tre colonne di A_2, perché abbiamo visto sopra che nella forma ridotta U_α le colonne dominanti sono le prime tre. Una base ortogonale di $C(A_2)$ si ottiene applicando l'Algoritmo di Gram-Schmidt:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Una base ortogonale di $N(A_0)$:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Considerando U_α vediamo che il rango della matrice data dalle prime tre colonne è sempre uguale al rango di A_α, e cioè rango 2 quando $\alpha = 0$, rango 3 altrimenti. Interpretando A_α come la matrice completa di un sistema lineare, segue dal Teorema di Rouché - Capelli che per qualsiasi valore di α il sistema ha soluzione.

44. (a) Per calcolare la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{C}^4$ possiamo procedere in due modi.

Procedimento 1: Calcoliamo le coordinate di ciascun e_i rispetto a $\mathcal{B}$, ad esempio

$e_1 = -e_3 + (e_1 + e_3)$ ha le coordinate $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$e_2 = e_3 + (e_1 + e_2) - (e_1 + e_3)$ ha le coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, ecc.

Moltiplicando A per i vettori delle coordinate così ottenuti, possiamo calcolare i vettori $f(e_i)$. Ad esempio le coordinate di $f(e_1)$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

quindi

$$f(e_1) = -e_3 + 2(e_1 + e_2) + 2(e_1 + e_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ecc.}$$

Concludiamo

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Procedimento 2: Calcoliamo

$$B = SAS^{-1}$$

dove S è la matrice del cambio di base $c_{\mathcal{B}\to\text{base canonica}}$. Determinare S è facile: le colonne sono date dalle coordinate dei vettori di $\mathcal{B}$ rispetto alla base canonica, quindi

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

B si ottiene quindi determinando l'inversa di S ed eseguendo la moltiplicazione $B = SAS^{-1}$.

(b) La dimensione dell'immagine di f è il rango di A, oppure di B, ed è pari a 3.

(c) Gli autovalori di $\mathbf{B}$ sono 4, 0, 1. L'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1, pertanto $\mathbf{B}$ non è diagonalizzabile.

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare f.

45. Il polinomio caratteristico è $p_{B_\beta} = x^2\,(x-2\beta)(x-8)$.

Se $\beta = 0$, abbiamo l'autovalore 0 di molteplicità algebrica 3 e molteplicità geometrica 2, pertanto $\mathbf{B_0}$ non è diagonalizzabile.

Se $\beta \neq 0$, abbiamo gli autovalori:

0 di molteplicità algebrica e geometrica 2,

2β e 8, entrambi di di molteplicità algebrica e geometrica 1,

quindi B_β è diagonalizzabile.

Per $\beta = 2$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di B_2.

46. Il polinomio caratteristico è $p_{B_\beta} = (1-x)\,(x^2 - x + 2\beta)$, quindi gli autovalori sono

$$1, \quad \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 2\beta}, \quad \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - 2\beta}.$$

Se $\beta \notin \{0, \frac{1}{8}\}$, abbiamo tre autovalori distinti e la matrice è diagonalizzabile.

Se $\beta = 0$, abbiamo l'autovalore 1 di molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1, pertanto $\mathbf{B_0}$ non è diagonalizzabile.

Se $\beta = \frac{1}{8}$, abbiamo l'autovalore $\frac{1}{2}$ di molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1, pertanto anche in questo caso la matrice non è diagonalizzabile.

Per $\beta = -1$ gli autovalori sono $1, 2, -1$ e

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathbb{C}^3$ formata da autovettori di B_{-1}.

47. Calcoliamo la dimensione del sottospazio U_α determinando il rango della matrice con le righe v_i^T, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Vediamo che il rango è 3 per $\alpha = 2$ e 4 altrimenti.

(a)

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

è una base ortogonale di U_2;

(b)

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

è una base ortogonale di $\mathbb{C}^4$;

(c) Il vettore $\begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 5+i \end{bmatrix}$ appartiene a U_2, perché la matrice che ha come colonne questo vettore e la base di U_2 ha determinante uguale a 0.