Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2021/2022
Corso di Laurea in Bioinformatica

Esercizi per il Corso di Algebra Lineare

1. In $\mathbb{R}^4$ si considerino $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   e i sottospazi $U =< u_1, u_2 >$ e $W =< w_1, w_2 >$.

   (a) Si determini $\dim(U + W)$.

   (b) Si determini $\dim(U \cap W)$.

2. Si decida se la seguente applicazione é lineare

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{x^2 + 4\,y^2}$$

3. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $\{u, v\}$ una base di V. Si dimostri che anche $\{u + v,\, v\}$ è una base di V.

4. Si risolva il seguente sistema lineare usando il Teorema di Cramer

$$\begin{aligned} 3\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 &= 9 \\ 2\,x_1 + x_3 &= 4 \\ 2\,x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

5. Si risolva il seguente sistema lineare usando il Teorema di Cramer

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 + x_3 &= 6 \\ 2\,x_1 + x_2 &= 5 \\ 3\,x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

6. Si decida se la seguente applicazione é lineare

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{x^2 - y^2}$$

7. In $\mathbb{R}^4$ si considerino $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

   e i sottospazi $U =< u_1, u_2 >$ e $W =< w_1, w_2 >$.

   (a) Si determini $\dim(U + W)$.

   (b) Si determini $\dim(U \cap W)$.

8. Si calcoli la matrice inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

9. In $\mathbb{R}^4$ si considerino $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

   e il sottospazio $U =< v_1, v_2, v_3, v_4 >$.

   (a) Si determini $\dim U$.

   (b) Si scelga una base di U fra i vettori v_1, v_2, v_3, v_4.

10. Si decida se il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ é anche un sottospazio:

    $\{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid {x_1}^2 - {x_2}^2 = 0\}$

11. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ -9 & 4 & 6 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Si calcoli il polinomio caratteristico di A e si verifichi che 1 e 0 sono gli unici autovalori di A.

   (b) Per ogni autovalore λ di A si determini una base dell'autospazio relativo a λ.

   (c) Si diagonalizzi A, cioè si trovino una matrice invertibile $P \in \mathbb{R}^{3\times3}$ e una matrice diagonale $D \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tali che $P^{-1}AP = D$.

   (d) Si calcoli il determinante di A.

   (e) Si calcoli A^3.

12. Si determini l'insieme L di tutte le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{array}{rcr} 2\,x_1 - 2\,x_2 + 4\,x_3 & = & 2 \\ -x_1 + x_2 - 2\,x_3 & = & -1 \end{array}$$

13. Si calcoli la matrice inversa di

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

14. Si decida se il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ é anche un sottospazio:
$\{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid {x_1}^4 = {x_2}^4\}$

15. Si determini l'insieme L di tutte le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{array}{rcr} 2\,x_1 - 2\,x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + 3\,x_3 & = & 1 \\ 2\,x_1 + 7\,x_3 & = & 2 \end{array}$$

16. Si decida se le seguenti matrici sono diagonalizzabili su $\mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

17. In $\mathbb{R}^4$ si considerino $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}$, $u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$
e il sottospazio $U =< u_1, u_2, u_3, u_4 >$.

 (a) Si determini $\dim U$.

 (b) Si scelga una base di U fra i vettori u_1, u_2, u_3, u_4.

18. Si calcoli la matrice inversa di

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

19. In $\mathbb{R}^4$ si considerino $w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$
e il sottospazio $U =< w_1, w_2, w_3, w_4 >$.

   (a) Si determini $\dim U$.

   (b) Si scelga una base di U fra i vettori w_1, w_2, w_3, w_4.

20. Si decida se il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ é anche un sottospazio:
$\{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid {x_1}^2 = 4\,{x_2}^2\}$

21. Si determini l'insieme L di tutte le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2 \\ 2\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 &= 1 \end{aligned}$$

22. Si calcoli il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

23. Sia $n \geq 2$ un numero intero. I vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix}, \ldots\ldots, \; v_n = \begin{pmatrix} n \\ n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

   (a) sono linearmente indipendenti?

   (b) sono un sistema di generatori per $\mathbb{R}^n$?

24. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

e sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato da $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si determini la dimensione di $U + V$.

25. Si determini l'insieme di tutte le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_3 &= 2 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 + 5\,x_3 &= 5 \\ 6\,x_2 + 2\,x_3 &= 2 \end{aligned}$$

26. Quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^5$ sono anche sottospazi?

$$U_1 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = 2x_2 \} \qquad U_2 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid \sum_{i=1}^5 x_i = 1 \}.$$

27. Sono linearmente indipendenti i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$?

(a) $\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$

28. In $\mathbb{R}^5$ si considerino $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$
e il sottospazio $U =< v_1, v_2, v_3, v_4 >$.

(a) Si determini $\dim U$.

(b) Si scelga una base di U fra i vettori v_1, v_2, v_3, v_4.

(c) Il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene a U?

29. Dato uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ di dimensione 11, si considerino due sottospazi U_1 e U_2 di V di dimensione $\dim U_1 = 3$ e $\dim U_2 = 10$. Si dimostri che $2 \leq \dim (U_1 \cap U_2) \leq 3$.

30. Si calcolino le matrici inverse di

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

31. Quali delle seguenti applicazioni sono lineari?

$$f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5\,x_1 - x_2 + x_3 \\ x_3 - x_1 \end{pmatrix}$$

$$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$$

32. Si dimostri: Se n é un numero intero dispari e $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é una matrice antisimmetrica, cioé se $A^T = -A$, allora det$A = 0$.

33. Si decida per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

possiede autovalori reali. In tal caso si determinino tutti gli autovalori e le basi dei relativi autospazi e si dia un'interpretazione geometrica.

34. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

(a) Si diagonalizzi A, cioè si trovino una matrice invertibile $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ e una matrice diagonale $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tali che $P^{-1}AP = D$

(b) Si usi (a) per trovare una formula per calcolare A^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(c) I numeri di Fibonacci $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$
sono definiti ricorsivamente dall'equazione

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2} \quad \text{con le condizioni iniziali} \quad y_0 = 0,\ y_1 = 1.$$

Si noti che $A \begin{pmatrix} y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$, e si utilizzi questo fatto per dimostrare

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

35. Si scriva $\frac{6+5\,i}{4+3\,i}$ in forma algebrica.

36. Si scriva il numero complesso $\frac{2+i}{3+i}$ in forma algebrica.

37. Si scriva il numero complesso $\frac{1+3i}{1-i}$ in forma algebrica.

38. Si scriva il numero complesso $\frac{2+i}{3-i}$ in forma algebrica.

39. Si calcoli $(\frac{3}{2}\sqrt{2}+i\,\frac{3}{2}\sqrt{2})^{\,4}$.

40. (a) Sia A una matrice 3×3 di rango 3. Si dica se 0 è un autovalore di A.
    (b) Sia $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base di V. Esiste un vettore v_4 tale che $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sia linearmente indipendente?
    (c) Esiste un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^2$ di rango 3?

41. (a) Sia A una matrice 3×3 con $\det A \neq 0$. Si dica se 0 è un autovalore di A.
    (b) Esistono applicazioni lineari biiettive $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$?
    (c) Sia $\{v_1; v_2; v_3\}$ un insieme linearmente indipendente nello spazio vettoriale V. Esiste uno scalare α in modo che l'insieme $\{v_1; v_2; \alpha v_2 + v_3; v_1 - v_2\}$ sia linearmente indipendente?

42. (a) Sia A una matrice 3×3 con $\det A = 0$. Si dica se 0 è un autovalore di A.
    (b) Esiste un'applicazione lineare suriettiva $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$?
    (c) Sia $\{v_1; v_2; v_3\}$ una base dello spazio vettoriale V. Esiste un vettore v_4 tale che $\{v_1; v_4\}$ sia un insieme di generatori?

43. Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & -\alpha & 1 \\ -\alpha & 1 & -1 & 1 \\ -1 & \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la P^TLU. Per $\alpha = 2$ si trovi una base ortogonale di $C(A_2)$. Per $\alpha = 0$ si trovi una base ortogonale di $N(A_0)$. Interpretando A_α come la matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α il sistema ha soluzione?

44. Sia $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathcal{B} = \{e_3; e_4; e_1+e_2; e_1+e_3\}$ su dominio e codominio (e_i sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
   (b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f.
   (c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.
   (d) Si calcoli una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare f.

45. Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$B_\beta = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta^2 & \beta \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Per $\beta = 2$ si trovi una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di B_2.

46. Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$B_\beta = \begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 \\ -1 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Per $\beta = -1$ si trovi una base di $\mathbb{C}^3$ formata da autovettori di B_{-1}.

47. Si consideri il sottospazio U_α di $\mathbb{C}^4$ generato dai vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ i \\ -1 \\ \alpha - 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1-\alpha \\ i \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} \alpha - 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ \alpha - 1 \end{bmatrix}, \quad v_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si determini per quale valore di $\alpha \in \mathbb{C}$ il sottospazio U_α ha dimensione 3 e, per questo valore,

   (a) si calcoli una base ortogonale di U_α;
   (b) si completi questa base a una base ortogonale di $\mathbb{C}^4$;
   (c) si decida se il vettore $\begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 5+i \end{bmatrix}$ appartiene a U.

Per ogni risposta é indispensabile fornire calcoli e spiegazioni !