Exercice 2.1 :

1) Système du 1er ordre :
- Tangente à l'origine non nulle (↑)
- ∄ dépassement

$u(t) \longrightarrow \boxed{G(s) = ?} \longrightarrow y(t_k)$

Laplace s : $G(s) = \dfrac{K}{1+Ts}$ $\begin{cases} K = \text{gain statique} \\ T = \text{cste de temps} \end{cases}$

AN : $\begin{cases} K = 2 \\ T = 5 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 63\% \text{ de } y(\infty) \to T \\ 95\% \text{ de } y(\infty) \to 3T \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{G(s) = \dfrac{2}{1+5s}}$

⚠ Modèle à TC : $\mathcal{M}_{TC}$ → K, T ne dépendent pas de la période d'échantillonnage.

4) Forme temporelle :

Modèle 1er ordre → $y(t) = K\left(1 - e^{-t/T}\right) \cdot \Gamma(t)$ — on connait (ici) la sol° de l'eq° différentielle.

AN : $y(t) = 2\left(1 - e^{-t/5}\right)$ et $\Gamma(t) = 1$.

Objectif :

o échantillon du vrai système (S) (mesure)

$\boxed{\times \quad \hat{y}(t) = 2\left(1 - e^{-t/5}\right)}$

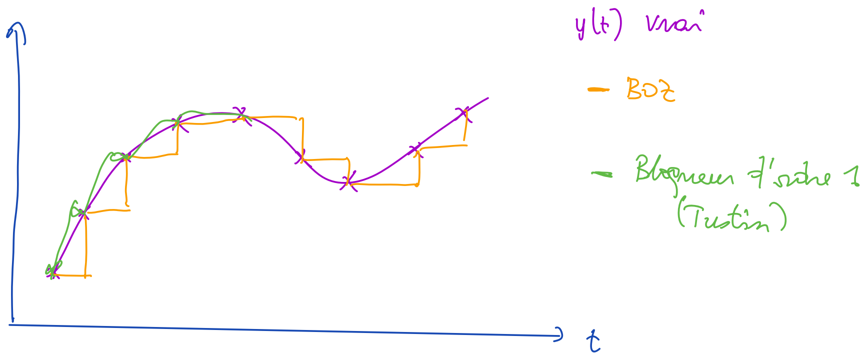
Comparaison entre données de l'énoncé (y) avec les données calculées ($y(t)$)

t_k	0	1	2	3	4	5	6	7
y (y)	0	1,2642	1,7298	1,9004	1,9634	1,9865	1,9950	1,9982
$\hat{y}$ ($\mathcal{M}_{TC}$)	0	1,2642	1,7293	1,9004	1,9634	1,9865	1,9950	1,9982

Matlab : load data_TD2_1.m → u, y, t_k, T_e

$y = 2 \times (1 - \exp(-t_k/5))$ ↵

2ème partie :

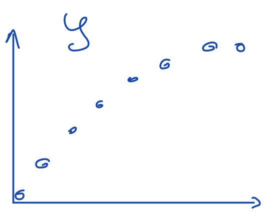


① Entrée en forme d'échelon ⟺ BOZ

$\mathcal{M}_{TD}$: $G(z^{-1}) = \dfrac{b_1 z^{-1}}{1+a_1 z^{-1}}$ avec $\begin{cases} a_1 = -e^{-T_e/T} \simeq -0{,}3679 \\ b_1 = K(1+a_1) \simeq 1{,}2642. \end{cases}$

⚠ Si T_e change : $G(z^{-1}) = \dfrac{b_1' z^{-1}}{1+a_1' z^{-1}}$ avec $a_1' \neq a_1$ et $b_1' \neq b_1$

Résumé :



données mesurées.

modèle à TC →

$\mathcal{M}_{TC}$

$G(s) = \dfrac{K}{1+Ts} = \dfrac{2}{1+5s}$

Eq° différentielle du 1er ordre

solution explicite : $y(t)$

modèle à TD →

$\mathcal{M}_{TD}$

$G(z^{-1}) = \dfrac{b_1 z^{-1}}{1+a_1 z^{-1}}$ → Eq° aux différences

④ Eq° aux différences.

$\mathcal{M}_{TC}$ $G(s)$ ⟺ éq° différentielle $\quad G(s) = \dfrac{K}{1+Ts} = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$

s = Laplace $\quad$ ⟺ $\quad K.U(s) = (1+Ts).Y(s)$

⤷ opérateur de différentiation $\quad K\,U(s) = Y(s) + T.s\,Y(s)$

$p = \dfrac{d}{dt}$ $\quad \xrightarrow[(CI \equiv 0)]{\mathcal{L}^{-1}} \quad K\,u(t) = y(t) + T.\dfrac{dy(t)}{dt}$ $\quad$ (éq° différentielle)

$$K u(t) = y(t) + T .\, p\, y(t)$$

On connait sa solution : $y(t) = k\,(1 - e^{-t/T}) . \Gamma$

$\underline{M_{TD}}$ $G(z) \Leftrightarrow$ éq° aux différences

$$G(z^{-1}) = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

z^{-1}

$\Updownarrow$

Opérateur retard $q^{-1} u(t_k) = u(t_{k-1})$

$(\Rightarrow)$ $b_1 z^{-1} . U(z^{-1}) = (1 + a_1 z^{-1})\, Y(z^{-1})$

$b_1 z^{-1} U(z^{-1}) = Y(z^{-1}) + a_1 z^{-1} . Y(z^{-1})$

temporel q^{-1}

$b_1 q^{-1} u(t_k) = y(t_k) + a_1 q^{-1} y(t_k)$

$(\Rightarrow)$ $b_1 u(t_{k-1}) = y(t_k) + a_1 y(t_{k-1})$

Eq° aux différences $\boxed{y(t_k) = b_1 u(t_{k-1}) - a_1 y(t_{k-1})}$

A.N. : $y(t_k) = 1{,}2642\, u(t_{k-1}) + 0{,}3679\, y(t_{k-1})$

$\underline{k=1}$ $y(t_1) = 1{,}2642 \times u(t_0) + \underbrace{0{,}3679\, y(t_0)}_{=0}$

$y(t_1) = 1{,}2642 .$

$\underline{k=2}$: $y(t_2) = 1{,}2642\, u(t_1) + 0{,}3679\, y(t_1)$

$= 1{,}2642 + 0{,}3679 \times 1{,}2642$

$= \dots$

$\left\{ \begin{array}{l} y(t_0) = 0 \\ u(t_0) = 1 \\ u(t_1) = 1 \\ \vdots \\ u(t_7) = 1 \end{array} \right.$

t_k	0	1	2	3	4	5	6	7
$y(y)$	0	1,2642	1,7293	1,9004	1,9634	1,9865	1,9950	1,9982
$\hat{y}\,(M_{TC})$	0	1,2642	1,7293	1,9004	1,9634	1,9865	1,9950	1,9982
$\hat{y}\,(M_{TD})$	0	1,2642	1,7293	1,9004	1,9634	1,9865	1,9950	1,9982

Matlab : $a_1 = -\exp(-1)$; $b_1 = 2 \times (1 + a_1)$

$y_0 = 0$

$y_1 = b_1$; $y_2 = b_1 - a_1 y_1$; $y_3 = b_1 - a_1 y_2$; ---

7) M_{TD} avec approximation des dérivées

M_{TC} : $\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K}{1+Tp}$

$\mathcal{L}^{-1}$ ⟶ $y(t_n) = -T \cdot \frac{dy(t)}{dt} + K\,u(t_n)$

Approximation des dérivées :

$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=t_n} = \frac{1}{T_e}\left(y(t_n) - y(t_{n-1})\right).$$

On remplace :

$$y(t_n) = -\frac{T}{T_e}\left[y(t_n) - y(t_{n-1})\right] + K\,u(t_n)$$

$$\left(1 + \frac{T}{T_e}\right) y(t_n) = \frac{T}{T_e}\, y(t_{n-1}) + K\,u(t_n)$$

éq. aux différence
(q^{-1} opérateur retard)

$$\left(1 + \frac{T}{T_e}\right) y(t_n) = \frac{T}{T_e}\, q^{-1} y(t_n) + K\,u(t_n)$$

$$\left(1 + \frac{T}{T_e} - \frac{T}{T_e}\cdot q^{-1}\right) y(t_n) = K\,u(t_n)$$

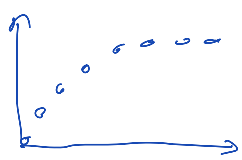
FT

$$\frac{Y(q^{-1})}{U(q^{-1})} = \frac{K}{\left(1 + \frac{T}{T_e}\right) - \frac{T}{T_e}\, q^{-1}} \iff \boxed{G(z^{-1}) = \frac{K}{\left(1 + \frac{T}{T_e}\right) - \frac{T}{T_e}\, z^{-1}}}$$

M_{TD} avec appr. dérivées

Résumé (suite) :

Données issues d'un système y



on cherche un modèle G ?

M_{TC}

$G(p) = \frac{K}{1+Tp}$

⇓

$y(t) = K(1 - e^{-t/T})\cdot\Gamma$

sol. explicite.

éq. diff.

M_{TD} (BOZ)

$G(z^{-1}) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$

↳ éq. aux différence

Pas de solution explicite

M_{TD} (appr. dérivées)

$G_2(z^{-1}) = \frac{K}{\left(1 + \frac{T}{T_e}\right) - \frac{T}{T_e}\, z^{-1}}$

↳ éq. aux différence

Simulation $y(t_n)$

$\hookrightarrow$ simulation de $y(t_n)$
($\nexists$ solution explicite)