特異点はいつもあなたのそばに（北海道数学愛好会　第１回総会講演）

もなくゎ

発表日　2020 年 2 月 19 日

はじめに

もなくぉとは……

- 北海道大学理学部数学科 3 年生.
- 東京の高専を卒業して，今年度北大に編入.
- 何やかんやあって愛好会に.
- 特異点が好き.

特異点とは……

- “まわりに比べて異質，際立っている点” のこと.
- 昔は議論の邪魔になるため，見ないふりをされることが多かったが……
  $\rightsquigarrow$ 特異点を見ると面白いことが色々！

今日僕からは，平面曲線の特異点をご紹介させていただきます.

平面曲線の特異点

Definition（平面曲線）

平面曲線とは，滑らかな写像 $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ のことである．ただし $I \subset \mathbb{R}$ は区間.

Examples

- $\gamma_1(t) := (t, 2t)$ $(t \in \mathbb{R})$ は原点を通る傾き 2 なる直線.
- $\gamma_2(t) := (\cos t, \sin t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ は原点中心なる単位円.
- $\gamma_3(t) := (t^2, t^3)$ $(t \in \mathbb{R})$ は⋯⋯？

平面曲線の特異点

Definition（平面曲線）

平面曲線とは，滑らかな写像 $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ のことである．ただし $I \subset \mathbb{R}$ は区間.

Examples

- $\gamma_1(t) := (t, 2t)$ $(t \in \mathbb{R})$ は原点を通る傾き 2 なる直線.
- $\gamma_2(t) := (\cos t, \sin t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ は原点中心なる単位円.
- $\gamma_3(t) := (t^2, t^3)$ $(t \in \mathbb{R})$ は……？

Definition（平面曲線の特異点）

$\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ を平面曲線とする．時刻 $t = c$ において $\dot{\gamma}(c) = \mathbf{0}$ (resp. $\neq \mathbf{0}$) となるとき，$t = c$ を γ の特異点（resp．正則点）と呼ぶ.

特異点はいつもあなたのそばに

例題：次の曲線たちの特異点は？

- $\gamma_4(t) := (t^2, t^3)$ ⋯ 標準的 3/2-カスプ,
- $\gamma_5(t) := (t - \sin t, 1 - \cos t)$ ⋯ サイクロイド,
- $\gamma_6(t) := (\cos^3 t, \sin^3 t)$ ⋯ アステロイド.

特異点はいつもあなたのそばに

例題：次の曲線たちの特異点は？

- $\gamma_4(t) := (t^2, t^3)$ ⋯ 標準的 3/2-カスプ,
- $\gamma_5(t) := (t - \sin t, 1 - \cos t)$ ⋯ サイクロイド,
- $\gamma_6(t) := (\cos^3 t, \sin^3 t)$ ⋯ アステロイド.

答

- $\gamma_4(t) \cdots t = 0$,
- $\gamma_5(t) \cdots t = 2n\pi \ (n \in \mathbb{Z})$,
- $\gamma_6(t) \cdots t = n\pi/2 \ (n \in \mathbb{Z})$.

特異点はいつもあなたのそばに

例題：次の曲線たちの特異点は？

- $\gamma_4(t) := (t^2, t^3)$ $\cdots$ 標準的 3/2-カスプ,
- $\gamma_5(t) := (t - \sin t, 1 - \cos t)$ $\cdots$ サイクロイド,
- $\gamma_6(t) := (\cos^3 t, \sin^3 t)$ $\cdots$ アステロイド.

答

- $\gamma_4(t)$ $\cdots$ $t = 0$,
- $\gamma_5(t)$ $\cdots$ $t = 2n\pi \ (n \in \mathbb{Z})$,
- $\gamma_6(t)$ $\cdots$ $t = n\pi/2 \ (n \in \mathbb{Z})$.

$\rightsquigarrow$ 特異点は自然に発生する対象なのだ！

特異の何が悪い？

特異点では……

- 曲率が定まってくれない．特異点ではゼロ割り！:

$$\kappa(t) = \frac{\det[\dot{\gamma}(t)\ \ddot{\gamma}(t)]}{|\dot{\gamma}(t)|^3}.$$

- 陰函数定理の適用範囲外．

※陰函数定理とは：多変数ベクトル値函数の，正則点まわりでの様相を決定づけた定理．

$\leadsto$ それで終わってしまうのか……？

特異の何が悪い！

しかし！

- 或るクラスの特異点（3/2-カスプ）には，カスプ的曲率なる量が定まる！（東工大の梅原雅顕先生が発見）：

$$\mu := \frac{\det[\ddot{\gamma}(t)\ \dddot{\gamma}(t)]}{|\ddot{\gamma}(t)|^{5/2}}.$$

- 陰函数定理が正則点の分類定理なら，特異点の分類定理を作ってしまおう！

$\rightsquigarrow$ このように，“尖った” 点にも目を向け，それらを研究するのが特異点論！

写像の特異点論

次元によって様々な性格の特異点たちが姿を見せます.

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^p$ への写像を考えるとき……

- $(n, p) = (*, 1)$ $\cdots$ Morse 理論，Thom の初等カタストロフ.
- $(n, p) = (1, 2)$ $\cdots$ 平面曲線の特異点.
- $(n, p) = (2, 3)$ $\cdots$ 空間曲面の特異点.
- $(n, p) = (2, 2)$ $\cdots$ 曲面を "視る" という写像の特異点.

現代数学ではもっと広く，多様体から多様体への写像を考えます.

- 局所的理論 $\cdots$ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ と同じ.
- 大域的理論 $\cdots$ はめ込み・埋め込み，特異点の発生数，…….

さいごに

特異点はいつもあなたのそばに.

Singularities are always with You.

参考図書

今回の内容：

- 梅原雅顕, 佐治健太郎, 山田光太郎,『特異点をもつ曲線と曲面の微分幾何学』, 丸善出版.

その他：

- J. W. Milnor, “Morse Theory”, PRINCETON UNIVERSITY PRESS.
- 泉屋周一ほか,『特異点の数理』シリーズ（全 4 巻）, 共立出版.