微分トポロジー広報
J. W. Milnor, “Topology from the Differential Viewpoint”, PUP[*1]の自分まとめ

MonaQua

更新 2020.1.13

[*1] 訳書として，蟹（右上は「羊」）江幸博訳，『微分トポロジー講義』，丸善出版も出版されています．

目次

概要

この pdf は J. W. Milnor, “Topology from the Differential Viewpoint”, PUP（以下「本書」）の勉強ノート（以下「本資料」）で，僕なりに本書を読んだまとめです．しかし残念ながら本資料では，Milnor 先生の軽快かつ鮮やかな議論を再現することはできません．むしろ自分用に少しテンポを落とし，泥臭くしてしまっています．あと著作権侵害も恐れています．興味を持たれた方はぜひとも本書を読んで Milnor 先生の微分トポロジー講義に参加し，本資料は議論を詰めたいときの補助翼にでもしていただければと思います．特に脚注がうるさかったら大変申し訳ありません．

完成時期は未定です．誤りのご指摘・内容に関するご意見・入れてほしい例などありましたら，Twitter : @Monallowtail，Gmail : monatubequa[at]gmail.com まで気軽にご連絡くださいませ（余裕のあるときに返信させていただきます）．些細な誤植のことでも構いません．

それでは，いってらっしゃい！

もなくゎ

1　Smooth Manifolds and smooth maps

1.1　扱うこと

多様体，接空間，写像の微分の定義と諸性質．なお本書では，多様体として $\mathbb{R}^k$ の部分多様体のみを考えており，それに伴って諸概念の定義も具体的になっている．

1.2　多様体の定義と例

以降 $\mathbb{R}^k$ の部分集合には，$\mathbb{R}^k$ からの相対位相が備わっているものとして考える．また，$\mathbb{R}^0$ は一点集合だと約束する．

Definition. （滑らかな写像）
$U \subset \mathbb{R}^k, V \subset \mathbb{R}^l$ をそれぞれ開集合とする．写像 $f : U \to V$ が**滑らか**であるとは，任意階数の偏導函数 $\partial^\alpha f/\partial x^\alpha$ が存在して連続なことをいう．
より一般に，$X \subset \mathbb{R}^k, Y \subset \mathbb{R}^l$ を単なる部分集合とする．このとき写像 $f : X \to Y$ が**滑らか**であるとは，各点 $x \in X$ に対して，その開近傍 $U \subset \mathbb{R}^k$ と滑らかな写像 $F : U \to \mathbb{R}^l$ が存在して，F が $U \cap X$ 上で f に一致することをいう．——

証明しないが，次の事実は重要である：滑らかな 2 つの写像 $f : X \to Y, g : Y \to Z$ があるとき，その合成 $g \circ f : X \to Z$ もまた滑らかである[*1]．
例の前に，次の概念も導入しておこう：

Definition. （微分同相）
$X \subset \mathbb{R}^k, Y \subset \mathbb{R}^l$ を部分集合，$f : X \to Y$ をその間の写像とする．f が同相写像であって，f と f^{-1} がともに滑らかなとき，f を**微分同相写像**と呼ぶ．
2 つの部分集合 $X \subset \mathbb{R}^k, Y \subset \mathbb{R}^l$ に対して，その間の微分同相写像が存在するとき，X と Y は**微分同相**であるといい，以降 $X \approx Y$ と書くことにする．——

微分同相が “図形全体の集合” 上の同値関係であることは簡単に確かめられる．
例を見ていこう．偏導関数を計算して検証してみてほしい．

- 任意の多項式函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は滑らかだが，同相写像とは限らないため微分同相写像とは限らない（例：$f(x) := x^2$ は同相写像ではない）．

[*1] C^r 級写像の合成がまた C^r 級であることを用いて，r に関する帰納法で示される．

- 写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}; f(x):=x^3$ は滑らかだし同相写像でもあるが，微分同相写像ではない．実際，逆写像 $f^{-1}(x)=x^{1/3}$ は原点で滑らかでない[*2]．
- $a\neq 0$ を実数とする．このとき，写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}; f(x):=ax$ は微分同相写像である．
- 写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{>0}; f(x):=e^x$ は微分同相写像である．

我々は「微分同相で不変な性質」に興味を持つ[*3]．“図形” を微分同相により分類し，同類な “図形” たちに共通する性質を調べたい．しかしそれを見るとき，$\mathbb{R}^k$ の部分集合全体というのは，考える “図形” の範囲が広すぎる．そこで我々は次のような “図形” のクラスを用意し，そこに調査対象を絞ることにする：

Definition. （滑らかな多様体）

$m\geqslant 0$ を整数とする．部分集合 $M\subset\mathbb{R}^k$ が m **次元の滑らかな多様体**であるとは，各点 $x\in M$ に対してその開近傍 $W\subset\mathbb{R}^k$ と開集合 $U\subset\mathbb{R}^m$ が存在して，$W\cap M\approx U$ となることをいう．また，微分同相写像 $g:U\to W\cap M$ のことを，$W\cap M$ の**パラメタづけ**と呼ぶ[*4]．——

滑らかな多様体とは，口語的には「局所的には $\mathbb{R}^m$ と見做せる[*5]空間」のことである．

部分集合 $M\subset\mathbb{R}^k$ が m 次元の滑らかな多様体であることは，「各被覆メンバーが $\mathbb{R}^m$ の開集合に微分同相であるような M の開被覆をとれる」ことと同値である．

多様体 M が m 次元であることを，M^m と書くことがある．M の m 個直積ではないので注意が必要である．

以降，滑らかな多様体を単に多様体と呼ぶ．

また例を見ていこう：

- 0 次元多様体とは，$\mathbb{R}^k$ 内の孤立した点たちが成す集合である．
- 開集合 $U\subset\mathbb{R}^k$ は k 次元多様体である．
- 単位 n 次元球面 $S^n:=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}\mid \|x\|=1\}\subset\mathbb{R}^{n+1}$ は n 次元多様体である．実際，各 $i=1,\dots,n+1$ に対して開集合

$$U_i^+:=\{x\in S^n\mid x_i>0\}, U_i^-:=\{x\in S^n\mid x_i<0\}\subset S^n$$

[*2] 逆写像のグラフを描き，原点における接線の傾きが “無限大” であることを確認せよ！

[*3] ということにしてください．

[*4] 逆写像 g^{-1} は**チャート**と呼ばれるものだが，本書では出てこない．

[*5] 「局所的に $\mathbb{R}^m$ と見做す」という写像が微分同相写像であることに注意する．微分同相で不変な性質だけに関心があることの顕れである．

を定めると，$\{U_i^\pm\}_{i=1,\ldots,n+1}$ は S^n の開被覆であるし，$U_i^\pm$ はともに射影

$$\pi : U_i^\pm \to \mathbb{R}^n; \pi(x_1,\ldots,x_{n+1}) := (x_1,\ldots,x_n)$$

により $\mathbb{R}^n$ の単位開円板 D^n と微分同相である．なお，パラメタづけは π の逆写像

$$g : D^n \to U_i^\pm; g(x_1,\ldots,x_n) := \left(x_1,\ldots,x_n,\pm\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_n^2}\right)$$

である．

- 開集合 $U \subset \mathbb{R}^k$ と，その上の滑らかな写像 $f : U \to \mathbb{R}^l$ を考える．このとき f のグラフを
$$\Gamma(f) := \{(x,f(x)) \in U \times \mathbb{R}^l \mid x \in U\} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l = \mathbb{R}^{k+l}.$$
で定義すると，これは m 次元多様体である．実際，$\Gamma(f)$ と U の間に微分同相写像 $\mathrm{pr}_1 : \Gamma(f) \to U(\subset \mathbb{R}^m); \mathrm{pr}_1(x,f(x)) := x$ が存在する（逆写像は $\mathrm{id}_U \times f$ である）．

今後特に重要な役割を演じる多様体は，0 次元多様体，コンパクト 1 次元多様体，単位 n 次元球面である．

1.3　接空間と写像の微分

本節では接空間や写像の微分を定義し，諸性質を見ていく．本書で扱う多様体が具体的なため，それに伴って接空間や写像の微分も具体的なものとして定義づけられる．

まずは，開集合の接空間・開集合間の写像の微分を定義しよう．

$U \subset \mathbb{R}^k$ を開集合とするとき，点 $x \in U$ における U の接空間を $T_xU := \mathbb{R}^k$ と定める．そして，開集合 $U \subset \mathbb{R}^k, V \subset \mathbb{R}^l$ とその間の滑らかな写像 $f : U \to \mathbb{R}^l$ に対して，点 $x \in U$ における微分を

$$df_x : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l;\ df_x(v) := \lim_{t\to 0}\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$$

で定義する（x における v-方向微分である）．微分 df_x は線型写像である．実際，任意の $u,v \in \mathbb{R}^k, \lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}
df_x(u+v) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t(u+v))-f(x)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\left\{\frac{f((x+tv)+tu)-f(x+tv)}{t}+\frac{f(x+tv))-f(x)}{t}\right\}\\
&= df_x(u)+df_x(v);
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
df_x(\lambda u) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(x+\lambda tu)-f(x)}{t} \\
&= \lambda\cdot\lim_{t\to 0}\frac{f(x+\lambda tu)-f(x)}{\lambda t} \\
&= \lambda df_x(u)
\end{aligned}
$$

が成り立つ[*6]．そしてその表現行列は，（単位ベクトルの送り先を見ることで）f の x における Jacobi 行列 $\left[\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right]_{l\times k}$ に一致することがわかる．

以上より得られる性質として次が挙げられる：開集合 $U\subset U'\subset\mathbb{R}^k, V\subset\mathbb{R}^l, W\subset\mathbb{R}^m$ と点 $x\in U$ に対して，

- 函手性その 1．滑らかな 2 つの写像 $f:U\to V, g:V\to W$ に対して，$d(g\circ f)_x = dg_{f(x)}\circ df_x$.
- 函手性その 2．包含写像 $\iota:U\hookrightarrow U'$ に対して，$d\iota_x=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^k}$.
  特に，恒等写像 $\mathrm{id}_U:U\to U$ に対して $d(\mathrm{id}_U)=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^k}$.
- 函手性より得られる性質．$f:U\to V$ が微分同相写像なら，df_x は線型同型写像．
  特に，必然的に $k=l$.
- 線型写像 $L:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^l$ に対して，$dL_x=L$.

写像の微分とは，写像の “線型化” である．写像の局所的な性質に注目すると，写像を多項式展開したときに表れる 2 次以上の項（非線型項）は微小量となって見えなくなっていき，“線型化” は自然に発生する．それに関して，たとえば次のような結果がある．証明は松本幸夫『多様体の基礎』東大出版，志賀浩二『多様体論』岩波書店などに載っている：

Fact. （逆函数定理，逆写像定理）

開集合 $U\subset\mathbb{R}^k$ とその上の滑らかな写像 $f:U\to\mathbb{R}^k$，そして点 $x\in U$ に対して，$df_x:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ が正則ならば，x の開近傍 $U'\subset U$ が，f によって $U'\approx f(U')$ となるようにとれる．——

逆写像定理は「比例函数 $y=ax$ が逆写像を持つ必要充分条件は $a\neq 0$ である」という事実の一般化である．滑らかな写像は局所的には比例函数のように見えてしまうから，df_x が正則でありさえすれば，つまり写像が少しでも “傾いて” いれば，その点のまわりで局所微分同相を与えるのである．

一方で，写像を大域的に見てしまうと，非線型項が写像のうねりを引き起こし，もちろ

[*6] 極限操作の正当化は，煩雑を避けるため省略します．

ん微分同相写像になるとは限らない．以下に例を挙げておく[*7]：

- 大域微分同相写像な例．$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) := x + x^3$.
- 原点で局所微分同相写像だが大域微分同相写像でない例 1． $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; g(x) := x - x^3$.
- 至る点で局所微分同相写像だが大域微分同相写像でない例 2．$S^1 \subset \mathbb{C}$ を単位円周とするとき，$w : S^1 \to S^1; w(z) := z^2$.
- 局所微分同相写像ですらない例．$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; h(x) := x^2$.

さて，多様体の接空間，多様体の間の写像の微分を定義しよう．

接空間　$M^m \in \mathbb{R}^k$ を多様体とし，その上の点 $x \in M$ を決める．x のまわりのパラメタづけ $g : (U, u) \to (M, x) \subset \mathbb{R}^k$ をとり，x において線型化すると $dg_u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ を得る．これを用いて，x における M の接空間を $T_xM := \mathrm{Im}\ dg_u$ で定める．接空間はベクトル空間であることに注意する．

ここで確認しなければならないのは，T_xM がパラメタづけ g の取り方に依存しないことである．これについては，次のように確認できる：x の他のパラメタづけ $h : (V, v) \to (M, x) \subset \mathbb{R}^k$ をとろう．このとき $h^{-1} \circ g : g^{-1}(g(U) \cap h(V)) \to h^{-1}(g(U) \cap h(V))$ は微分同相写像であって，$U_1 := g^{-1}(g(U) \cap h(V)), V_1 := h^{-1}(g(U) \cap h(V))$ と置くとき，左下の図式が可換となり，そこから右下の可換図式が誘導される[*8].

$$\begin{tikzcd}
(U_1, u) \arrow[rr, bend left, "h^{-1} \circ g"] \arrow[dr, "g"'] & & (V_1, v) \arrow[dl, "h"] \\
& (\mathbb{R}^k, x) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^m \arrow[rr, bend left, "d(h^{-1} \circ g)_u"] \arrow[dr, "dg_u"'] & & \mathbb{R}^m \arrow[dl, "dh_v"] \\
& \mathbb{R}^k &
\end{tikzcd}$$

これを見ると，$h^{-1} \circ g$ が微分同相写像であったことから上側の $d(h^{-1} \circ g)_u$ は線型同型写像であることがわかり，したがって

$$\mathrm{Im}\ dg_u = \mathrm{Im}\ (dh_v \circ d(h^{-1} \circ g)_u) = \mathrm{Im}\ dh_v$$

[*7] グラフを思い浮かべると，わかったようなわからないような気になる．絵は不思議なものである．

[*8] 格好つけて言っているが，各写像を微分した図式も，函手性その 1 によって可換だということである．

を得る．以上より，接空間 T_xM は，パラメタづけに依らないことがわかった．

接空間 T_xM は，m 次元ベクトル空間である．これを確かめよう．$g^{-1}: g(U) \to U$ が x において滑らかであるので，滑らかな写像の定義より，x の開近傍 $W \subset \mathbb{R}^k$ と滑らかな写像 $F: W \to U$ が，$W \cap g(U)$ 上で $F = g^{-1}$ となるようにとれる．とる．したがって，$U_0 := g^{-1}(W \cap g(U))$ と置くと左下の図式が可換で，右下の可換図式を誘導する．

$$
\begin{tikzcd}
 & (W, x) \arrow[dr, "F"] & \\
(U_0, u) \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "\iota : \text{包含写像}"] & & (\mathbb{R}^m, u)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^k \arrow[dr, "dF_x"] & \\
\mathbb{R}^m \arrow[ur, "dg_u"] \arrow[rr, "d\iota_u = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^k}"] & & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}
$$

$d\iota_u = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^k}$ が単射だから dg_u は単射である．したがって，$T_xM = \mathrm{Im}\ dg_u$ は m 次元ベクトル空間である．

写像の微分　$M^m \subset \mathbb{R}^k, N^n \subset \mathbb{R}^l$ をともに多様体とする．滑らかな写像 $f: M \to N$ の $x \in M$ における微分 $df_x: T_xM \to T_{f(x)}N$ を，次のようにして定義する．f は x において滑らかなのだから，やはり x の開近傍 $W \in \mathbb{R}^k$ と滑らかな写像 $F: W \to \mathbb{R}^l$ が，$W \cap M$ 上で $F = f$ となるようにとれる．とる．これを用いて，$df_x(v) := dF_x(v)$ $(\forall v \in T_xM)$ と定めるのである．

確認すべき事項は 2 つある．そもそも任意の $v \in T_xM$ に対して $dF_x(v) \in T_{f(x)}N$ となること，そして df_x の値が拡張 F の取り方に依存しないことである．1 つずつ確認していこう：

任意の $v \in T_xM$ に対して $dF_x(v) \in T_{f(x)}N$ となることの確認．$x \in M$ のまわりのパラメタづけ $g : (U, u) \to (M, x) \subset \mathbb{R}^k$ と $f(x) \in N$ のまわりのパラメタづけ $h: (V, v) \to (N, f(x)) \subset \mathbb{R}^l$ を $f(g(U)) \subset h(V)$ となるように[*9]とれば，左下の可換図式

[*9] これは技術的問題である．もし最初にとったときはみ出てしまっていたら，$g^{-1}(f^{-1}(f(g(U)) \cap h(V)))$ を改めて U とすればよい（収まるように縮めるということ）．

が発生して，右下の可換図式を誘導する：

$$
\begin{array}{ccc}
(W,x) & \xrightarrow{F} & (\mathbb{R}^l, f(x)) \\
g \uparrow & & \uparrow h \\
(U,u) & \xrightarrow{h^{-1}\circ f\circ g} & (V,v)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^k & \xrightarrow{dF_x} & \mathbb{R}^l \\
dg_u \uparrow & & \uparrow dh_v \\
\mathbb{R}^m & \xrightarrow{d(h^{-1}\circ f\circ g)_u} & \mathbb{R}^n
\end{array}
$$

右の図式から，dF_x は dg_u の像の元（すなわち T_xM の元！）を dh_v の像の元（すなわち $T_{f(x)}N$ の元！）に写すことが諒解される．//

df_x の値が拡張 F の取り方に依存しないことの確認．上の議論における，右の可換図式を見よう．dg_u は単射だったから，T_xM 上では逆写像 $(dg_u)^{-1}$ が定まる．したがって T_xM 上で

$$df_x = dF_x = dh_v \circ d(h^{-1}\circ f\circ g)_u \circ (dg_u)^{-1}$$

がわかり，右辺は拡張 F の取り方に依存しない形である．//

これで，多様体やその間の写像に対して接空間や微分を定義できた．すると次の性質たちが得られる．命題の形で書いておこう：

Proposition. M^m, N^n, P^p を多様体，$f : M \to N, g : N \to P$ を滑らかな写像，$x \in M$ を点とする．このとき，

(a). $d(g\circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$,

(b). $d(\mathrm{id}_M)_x = \mathrm{id}_{T_xM}$,

(c). $f : M \to N$ が微分同相写像なら，$df_x : T_xM \to T_{f(x)}N$ は線型同型写像．特に，必然的に $m = n$.

(d). M が N の部分多様体[*10]なら，$d(M \hookrightarrow N)_x = (T_xM \hookrightarrow T_{f(x)}N)$

が成り立つ．——

接空間，微分の例を挙げる．

- 単位円周 $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ の点 $(1,0)$ における接空間を求めよう．点 $(1,0)$ のまわりのパ

[*10] $M^m \subset N^n$ が $N \subset \mathbb{R}^l$ の部分多様体であるとは，各点 $x \in M$ に対してその開近傍 $W \subset \mathbb{R}^l$ と開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ が，$W \cap N \approx U$ かつこの制限として $W \cap M \approx U \cap \{x_{m+1} = \cdots = x_n = 0\}$ を充たすようにとれることをいう．

ラメタづけとして

$$g:\mathbb{R}\supset(0,1)^{*11}\to\{(\sqrt{1-y^2},y)\mid 0<y<1\}\subset S^1;\ g(y):=(\sqrt{1-y^2},y)$$

をとり，これの $0\in(0,1)$ における微分を計算すると

$$dg_0=\begin{bmatrix}-2y/\sqrt{1-y^2}\\ 1\end{bmatrix}_{y=0}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

であるから，接空間は

$$T_{(1,0)}S^1=\mathrm{Im}\ dg_0=\left\{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}v\ \middle|\ v\in\mathbb{R}\right\}=y\text{ 軸}$$

だとわかった．これは図形的には原点を通っているが，原点部が点 $(1,0)$ に合うように接空間を平行移動すると「接」空間感が滲み出てくる．接空間とは，曲線に対しては接線のことである．

- 同様の計算で，単位球面 $S^2\subset\mathbb{R}^3$ の点 $(1,0,0)$ における接空間 $T_{(1,0,0)}S^2$ は yz-平面となり，やはり原点部が点 $(1,0,0)$ に合うように接空間を平行移動すると「接」空間のイメージに合う．接空間とは，曲面に対しては接平面のことである．

1.4 正則値

本節では，同次元多様体間の写像における正則値集合が持つ性質を紹介する．まず，臨界値や正則値について復習しよう．

Definition. （臨界と正則）

M,N をそれぞれ m,n 次元の多様体とし，写像 $f:M\to N$ は滑らかであるとする．このとき，定義域や終域の点を次のように大別する[*12]：

- $x\in M$ が f の**臨界点** : $\overset{\text{def.}}{\iff}$ $\mathrm{rank}\ df_x<n$
- $x\in M$ が f の**正則点** : $\overset{\text{def.}}{\iff}$ $\mathrm{rank}\ df_x=n$
- $y\in N$ が f の**臨界値** : $\overset{\text{def.}}{\iff}$ $\exists x\in f^{-1}(y)$ [x が f の臨界点]
- $y\in N$ が f の**正則値** : $\overset{\text{def.}}{\iff}$ $\forall x\in f^{-1}(y)$ [x が f の正則点]. ——

*11 紛らわしいが，これは開区間のつもりで書いた．

*12 本文の定義の右辺で n としている箇所は，$\min\{m,n\}$ とすることもある．$m\geqslant n$ のときは違いがないが，$m<n$ のときは定義域内の総ての点が臨界点になるかどうかで違いが生じる．

f の臨界点集合を $\Sigma(f)$ で表すことにする[*13].

以降本節では，M, N を同次元の多様体とする．$f : M \to N$ を滑らかな写像とし，$y \in N$ を正則値としよう．このとき逆函数定理により，各点 $x \in f^{-1}(y)$ に対してその連結開近傍 $U \subset M$ が，f により $U \approx f(U)$ を充たすようにとれる．すると $f^{-1}(y)$ の各点が孤立するので，$f^{-1}(y)$ は離散集合となる．

ここで M にコンパクト性を課そう．すると $f^{-1}(y)$ は有限集合となる[*14]．したがって，次の写像が定義される：

$$\# f^{-1}(\cdot) : N \setminus f(\Sigma(f)) \to \mathbb{N}.$$

この写像は，実は局所定数函数になる[*15]．実際，任意に $y \in N \setminus f(\Sigma(f))$ をとったとき，次のような開近傍 $V \subset N$ をとればよい：

$$V := V_1 \cap \cdots \cap V_s \setminus f(M \setminus (U_1 \sqcup \cdots \sqcup U_s)).$$

ただし，$f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_s\}$ と書き，各点を孤立させ，かつ f による像と微分同相になるような連結開近傍 $U_1 \ni x_1, \ldots, U_s \ni x_s$ をとり，$V_i := f(U_i)$ と置いた．以下で局所定数性を検証する[*16]．局所定数性を示すには，任意の $y' \in V$ に対して写像

$$\begin{aligned} &\varphi : f^{-1}(y') \to \{1, \ldots, s\}; \\ &\varphi(x') := \text{《} x' \text{の属する } U_i \text{のラベル番号》} \end{aligned}$$

が定まり，かつ全単射であることを示せばよい．示す：

(a). 写像が定まること． 任意に $x' \in f^{-1}(y')(\subset f^{-1}(V))$ をとると，

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= f^{-1}(V_1 \cap \cdots \cap V_s) \setminus f^{-1}(f(M \setminus (U_1 \sqcup \cdots \sqcup U_s))) \\ &\subset f^{-1}(V_1 \cap \cdots \cap V_s) \setminus (M \setminus (U_1 \sqcup \cdots \sqcup U_s)) \\ &= f^{-1}(V_1 \cap \cdots \cap V_s) \cap (U_1 \sqcup \cdots \sqcup U_s) \\ &\subset U_1 \sqcup \cdots \sqcup U_s \end{aligned}$$

[*13] 本書では $C(f)$ と書いているが，特異点論の本では臨界点集合を $\Sigma(f)$，臨界値集合を $C(f)$ と書いているものが多いので，そちらに倣うことにした．ただ後者は紛らわしいので，臨界値集合は $f(\Sigma(f))$ と書くことにする．

[*14] コンパクト空間の閉集合はコンパクトであることと，コンパクト空間の離散集合は有限集合であることを思い出す．

[*15] 図を描いてみると当たり前そうに思えてしまうが，それだけではいけない．発想は図からでも，結果は論理で得なければならないのである．

[*16] ここの議論は「同じ連結成分に属する 2 つの正則値それぞれの逆像は微分同相である」という主張が正しければそれで済むのですが…….これの真偽，証明をご存じの方は教えていただけると幸いです．

より $x' \in U_1 \sqcup \cdots \sqcup U_s$.[*17]非交和故，$x'$ の属する U_i は一意に定まる．//

(b). 単射性.　$\varphi(x') = \varphi(x'') = i$ とする．このとき $y = f(x') = f(x'') \in f(U_i) = V_i$ であって，f は U_i から V_i への微分同相，特に全単射を与えていた．したがって $x' = x''$．//

(c). 全射性.　任意にラベル番号 $i \in \{1, \ldots, s\}$ をとる．$y' \in V \subset V_i = f(U_i)$ だから，微分同相 $V_i \approx U_i$ を用いれば $x' \in f^{-1}(y') \cap U_i$ の存在がわかる．//

以上より，$\# f^{-1}(\cdot) : N \setminus f(\Sigma(f)) \to \mathbb{N}$ の局所定数性が示された．

計算しやすい例と注意を残しておく．

- 円周の高さ函数 $f : S^1 \to \mathbb{R}; f(e^{i\theta}) := \sin\theta$ を考える．ただし，円周 S^1 を複素平面上の単位円周と見ている．この函数の正則値集合は

$$\mathbb{R} \setminus f(\Sigma(f)) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} = (-\infty, -1) \sqcup (-1, 1) \sqcup (1, \infty)$$

  となることが確認できるが，各連結成分における $\# f^{-1}(\cdot)$ の値は左から順に $0, 2, 0$ である．
- 上の議論で定義域の多様体 M にコンパクト性を課したのは，その上のどんな写像でも議論を行えるようにするための横着である．実際，任意の正則値の逆像が有限集合であることを示す以外に，M のコンパクト性は効いていない．したがって行儀のよい——正則値の逆像が有限集合であるような——写像なら，M はコンパクトでなくとも $\# f^{-1}(\cdot)$ は局所定数函数となる．幾つか例を紹介しておく：
  - 写像 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) := x^3 - 3x$ の正則値集合は

$$\mathbb{R} \setminus g(\Sigma(g)) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\} = (-\infty, -2) \sqcup (-2, 2) \sqcup (2, \infty)$$

    であって，各連結成分における $\# g^{-1}(\cdot)$ の値は左から順に $1, 3, 1$ である．
  - 写像 $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; h(x_1, x_2) := (x_1, x_2^2)$ の正則値集合は

$$\mathbb{R}^2 \setminus h(\Sigma(h)) = \mathbb{R}^2 \setminus \{x_2 = 0\} = \{x_2 > 0\} \sqcup \{x_2 < 0\}$$

    であって，各連結成分における $\# h^{-1}(\cdot)$ の値は左から順に $2, 0$ である．

以上のことを図でも確認してほしい．臨界値で何らかの変化——カタストロフ——が発生していることがわかると思う．

[*17] この部分に，V の定義式後半で「どの U_i からも来ていない部分を削った」ことが働いている．

1.5　代数学の基本定理

前節の事実を応用することで，微分トポロジー的に代数学の基本定理を証明しよう．

Theorem. （代数学の基本定理）

定数でない複素係数多項式写像は，少なくとも 1 つ零点を有する．——

proof. 定数でない任意の複素係数多項式写像 $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ をとる．まずはこれを $f : S^2 \to S^2$ に拡張しよう[*18]．立体射影を $\varphi^N : S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2$ と書くことにする．このとき $f : S^2 \to S^2$ を

$$f(x) := \begin{cases} (\varphi^N)^{-1} \circ P \circ \varphi^N(x) & (\text{if } x \neq (0,0,1)) \\ (0,0,1) & (\text{if } x = (0,0,1)) \end{cases}$$

で定めると，これは滑らかな写像であるが，その臨界点は有限個である．実際，f の臨界点は $(0,0,1)$ を除いて P の臨界点に対応するが，P は定数でない多項式写像だからその臨界点は有限個である．したがって，f の正則値集合は S^2 から有限個の点を取り除いたものであり，したがって連結である．すると，前節の正則値に関する結果より，f の正則値の逆像の個数は，正則値に依らず一定であることがわかる．

それでは定理を示そう．終域の点 $(0,0,-1) \in S^2$（これは P の終域の点 $0 \in \mathbb{C}$ に対応する！）が臨界値か正則値かで場合分けする．

- $(0,0,-1) \in S^2$ が臨界値なら，定義より $f(z) = (0,0,-1)$ なる $z \in S^2$ が存在することになり，$z \neq (0,0,1)$ だから，定義域の $\mathbb{C}$ で対応する点が存在する．//
- $(0,0,-1) \in S^2$ が正則値なら，正則値の逆像の個数が至るところ 0 個だと仮定して矛盾を導けばよい．導く：正則値の逆像の個数が至るところ 0 だとすると，多項式写像は連続だから，P は定数函数になってしまう．これは矛盾である．//

以上より，P は少なくとも 1 つ零点を有する．■

[*18] 射影空間や一点コンパクト化をご存じの方は，無限遠点を追加したと思ってください．

2　The theorem of Sard and Brown

2.1　扱うこと

一つ目に，Sard の定理とその系である Brown の定理について．

二つ目に，陰函数定理，正則値定理について．

三つ目に，境界つき多様体，Brouwer の不動点定理について．

2.2　Sard の定理と Brown の定理

今後何度もお世話になる大定理，Sard の定理を紹介しよう．直観的，経験的に当たり前と思われるかもしれないが，一般的な定理としてパッケージングされていることは非常にありがたい．なお，ありがたい大定理としてもうひとつ，横断性定理というものがある．それも当たり前そうな主張の定理だが，やはりありがたいことである[*19]．

Theorem.（Sard の定理）

$U \subset \mathbb{R}^m$ を開集合，$f : U \to \mathbb{R}^n$ をその上の滑らかな写像とし，

$$\Sigma(f) := \{x \in U \mid \mathrm{rank}\ df_x < n\}$$

と置く．このとき，$\Sigma(f)$ の Lebesgue 測度は零である．——

2.3　陰函数定理とその系

2.4　境界つき多様体

3　Proof of Sard's theorem

3.1　扱うこと

Sard の定理の証明を，Fubini の定理を利用して行う．

[*19] 横断性定理は Sard の定理を基に示されているので，やっぱり Sard の定理は凄い．詳しくは泉屋周一・石川剛郎『応用特異点論』共立出版，野口廣・福田拓生『初等カタストロフィー』共立出版を見ていただきたい．

3.2　Sard の定理の証明

定理をもう一度述べておこう[*20].

Theorem. （Sard の定理）
$U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合，$f : U \to \mathbb{R}^p$ をその上の滑らかな写像とし，

$$\Sigma(f) := \{x \in U \mid \mathrm{rank}\ df_x < p\}$$

と置く．このとき，$\Sigma(f)$ の Lebesgue 測度は零である．——

proof. 証明は次の 3 ステップに大別される．■

4　The degree modulo 2 of a mapping

4.1　扱うこと

5　Oriented manifolds

5.1　扱うこと

6　Vector fields and the Euler number

6.1　扱うこと

7　Framed cobordism; the Pontrjagin construction

7.1　扱うこと

参考文献

[1] J. W. Milnor, "Topology from the Differential Viewpoint", PUP(1997)（訳書：蟹（右上は「羊」）江幸博訳，『微分トポロジー講義』，丸善出版 (1998)）.

[2] 泉屋周一・石川剛郎『応用特異点論』共立出版

[*20] ここで本書では，第 2 章で述べたときと notation を変更している（m, n から n, p に）．本書を参照する方の混乱を避けるためと，僕が後者の方を好きなので，第 3 章では後者の notation で通すことにする．

[3] 野口廣・福田拓生『初等カタストロフィー』共立出版