逆写像定理のホモトピー法による証明

もなくゎ

更新：2021 年 8 月 16 日（第 1 稿）

こんにちは！

本資料では、逆写像定理のホモトピー法による証明をご紹介します。対象者は逆写像定理の証明に興味がある方で、前提知識は多変数の微分と少しの位相空間論です。

逆写像定理——それは無限小の線型・代数的な情報が局所の非線型・幾何的な情報に「ひろがる」ことを示した、滑らかな幾何学における最も基本的でかけがえのない定理の一つです。この定理自体、またそこから導かれる多くの帰結たち（陰写像定理、正則値定理、Ehresmann の補題、滑らかな写像の写像度、指数写像の微分同相性、and more...）の有用さは、多くの幾何学書で語られています [1, 2, 3, 4, 5]。

さて、逆写像定理の証明は多くの教科書（たとえば [2, 4, 5]）で目にすることができます。そこで取られている手法はどれも**逐次近似法**と呼ばれるもので、この道筋で学んだ方は少なくないでしょう。しかし逆写像定理の証明には、**ホモトピー法**と呼ばれる別な手法が存在します！そこでは常微分方程式についての或る事実を認めるのですが、逐次近似法とはまた違った幾何の風景を楽しめます。また、ホモトピー法は僕の好きな**可微分写像の特異点論**における大切な技術でもあり、本資料でご紹介する議論自体、写像の特異点論を勉強していて初めて知ったものです [1]。

前置きはこのくらいにして、詳しい話は本文に譲ります。議論の過ち・もっと分かりよい書き方・あった方が嬉しい注意などあればお近くの僕に教えていただけると嬉しいです。それでは、いってらっしゃい！

目次

記号・用語の注意

本資料で用いる記号・用語の注意をまとめておきます。

- 「可微分」、「滑らか」と言ったら C^∞ 級を意味する。
- $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合、$a \in U$ とするとき、可微分写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ の a における **Jacobi 行列**を
$$J_f(a) \coloneqq \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right]_{1\leqslant i\leqslant p, 1\leqslant j\leqslant n}$$
で定義する。ただし、$f = (f_1, \ldots, f_p)$ とし、$\mathbb{R}^n$ の座標を $(x_1, \ldots, x_n)$ とする。

1　逆写像定理のきもち

逆写像定理の声明は、以下のようなものでした。

定理 1.1 (逆写像定理)**.** $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合、$a \in U$ とし、$f : U \to \mathbb{R}^n$ を滑らかな写像とする。このとき、以下は同値である：

(1) $J_f(a)$ が正則である；
(2) f が a の充分近くで微分同相写像である。すなわち、a の開近傍 $V \subset U$ と滑らかな写像 $g : f(V) \to V$ であって、g は $f|_V$ の逆写像となるものが存在する。——

注意 1.2. (2) $\Rightarrow$ (1) は合成写像の微分法を $g \circ f|_V = \mathrm{id}_V$ に用いれば示せます。重要なのは逆の (1) $\Rightarrow$ (2)、つまり逆写像の存在性です。以降では、逆写像定理と言ったら (1) $\Rightarrow$ (2) を指すことにします。また、証明の際は f の定義域と終域を平行移動しておくことで $a = 0,\ f(a) = 0$ として構わず、本資料ではそうします。

何はなくとも、逆写像定理の例を見てみましょう。

たとえば 1.3. 計算・イメージしやすさのため、主に $n = 1$ で考えます（折角なので、前頁のスペースにでもグラフを描いてみてください）。

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x$.
$\rightsquigarrow$ これは $a = 0$ で $J_f(0) = e \neq 0$ となり、$V = \mathbb{R}$ 上で微分同相写像です。
(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - x$.
$\rightsquigarrow$ これは $a = 0$ で $J_f(0) = -1 \neq 0$ となり、開区間 $V = (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ 上に制限すると微分同相写像です。しかし、$\mathbb{R}$ 全域の上では可逆ではありません。
(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$.
$\rightsquigarrow$ これは $a = 0$ で $J_f(0) = 0$ となり、どれだけ a まわりで開近傍を狭めても、C^1 級の逆写像さえとることはできません。なぜなら、逆函数 g があるとしたら $1 = J_{g \circ f}(0) = J_g(f(0)) \cdot J_f(0) = 0$ となってしまうからです。しかし、f は $\mathbb{R}$ 全域で逆写像を持ち、滑らかではありませんが連続です。
(4) 同じく $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$ で、$a \neq 0$ ならどうでしょうか。
(5) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = (x_1, x_2^2)$ はどうでしょうか。
(6) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = (x_1, x_1 x_2 + x_2^3)$ はどうでしょうか。

さて、本節の最後に、逆写像定理が言っていることを少し考えてみます。

もし f が線型写像ならば、f はその定義域全域において微分同相となります。なぜなら、f の Jacobi 行列は f の表現行列そのものだからです。これは $n=1$ で言えば、「$y=kx$ について $k \neq 0$ ならば（グラフがちょっとでも傾いていれば）、$x=y/k$ と x について解ける」ということです。

f は一般に非線型なので上の議論は行えないわけですが、逆写像定理の声明は、

f の線型化たる Jacobi 行列が可逆なら、その可逆性は f にまで（少しだけ）持ち上がる

ということだと言えます。このような

無限小の線型・代数的な情報から、局所の非線型・幾何的な情報が得られる

という視点・姿勢[*1]はよく目にしますが、ホモトピー法のアイデアと技術にも顕れる、非常に大切なところです。

[*1] 多様体論に「局所から大域へ」というスローガンがありますが、「無限小から局所へ」は微積分のスローガンと言ってもよいかもしれません。

2　証明の準備・ホモトピー法のきもち

証明の前に、証明で用いる微分方程式の事実を証明なしに述べておきます。

事実 2.1 (常微分方程式の基本定理). $O \subset \mathbb{R}^m$ を開集合、$\boldsymbol{\xi} = (\xi_i) : O \to \mathbb{R}^m$ を滑らかな写像とし、s を独立変数とする連立常微分方程式

$$\frac{dy_i}{ds} = \xi_i(y_1, \ldots, y_m) \quad (i = 1, \ldots, m)$$

を考える。このとき、任意の $\mathbf{y} \in O$ に対して、それを初期値（$s = 0$ での値）とするような解

$$y_i(s) \quad (i = 1, \ldots, m)$$

が $s = 0$ の近くで唯一組だけ存在し、それは $s, \mathbf{y}$ に対して（$\mathbf{y}$ についてはその近くで）滑らかに依存する。——

今回はこれを認めますが、解の存在も一意性も滑らかさも、非常にありがたい結果です。

また、証明中は技術的なことに集中するために、そのお気分を事前視察しておきましょう。証明は次のような流れです：

- 仮定より $J_f(0)$ は正則なので、f を 0 まわりで Taylor 展開をすると 1 次は潰れていない。よって、2 次以上の項は 0 の充分近くで無視できるだろう。
- ということは、f はほとんど $J_f(0)$ であって、それが少し変形した程度のものだろう。少しの変形なのだから、変形後の写像を適切な微分同相写像の合成で整えてやれば、変形前に戻せるはずだ。

(!) さて、このことを検証するために、f と $J_f(0)$ を**ホモトピー（写像の大域的な連続変形）で繋いでみて**、写像が変形する様子を追ってみよう。

- 時刻を $J_f(a)$ から動かしてみる。時刻を少し進めても、微分同相写像を合成して整えることができる。まだ進めても大丈夫、まだ大丈夫……。
- f の時刻まで到着したけれど、ずっと整え続けることができた！しかも、整えると $J_f(0)$ であり、これ自体微分同相写像なのだった。つまり、f は $J_f(0)$ という微分同相写像と、適切な微分同相写像との合成だ。したがって、f は微分同相写像だ！

最初の Jacobi 行列に注目する点が､「無限小から局所へ」という意識を既に持っています。そしてその後の、(!) 部の発想がものすごく偉い点です。これが上手く行けばめでた

く逆写像定理の証明が完了します。しかし、まだこれはコンセプトであって、技術的な問題——適切な微分同相写像はどこから湧いて出るのかについては保留状態です。しかも、先ほど事実を述べた常微分方程式は一切登場していません……。

そう、ホモトピー法の偉い点はコンセプトだけに留まりません。詳しいことは証明を見なければなりませんが、適切な微分同相写像を構成する際、「うまく常微分方程式を設定し、それを積分する」という技術を用いるのです。これもまた、常微分方程式という無限小の法則から微分同相写像という局所的な現象を発生させる意味で「無限小から局所へ」なる意識に基づいていると言えます。

それでは、残るは数学的な証明です。

3　逆写像定理のホモトピー法による証明

証明. $a = f(a) = 0$ とし、(1) ⇒ (2) を示すのであった（のでそれを示す)。

Step 1（ホモトピーの構成） まず、行列倍写像 $f_0 : U \to \mathbb{R}^n,\ f_0(x) \coloneqq J_f(0)x$ と f を結ぶホモトピー

$$F : U \times [0,1] \to \mathbb{R}^n, \quad F(x,t) \coloneqq f_t(x) \coloneqq (1-t)f_0(x) + tf(x)$$

を考える。各 $t \in [0,1]$ で f_t を微分すると（行列 A 倍写像の Jacobi 行列は A なので）

$$J_{f_t}(x) = (1-t)J_f(x) + tJ_f(x) = J_f(x)$$

となる。仮定より f は U 上滑らかかつ $J_f(0)$ は正則だったので、$J_f(\text{-})$ は U 上滑らかであり、充分小さな近傍 $0 \in V \subset U$ が存在して、各 $x \in V$ で $J_{f_t}(x) = J_f(x)$ は正則である。もっと言うと、$J_{f_t}(x)^{-1}$ の各成分は $J_{f_t}(x)$ の成分たちの有理式で書かれたことから、$J_{f_t}(\text{-})^{-1}$ の各成分は V 上滑らかであることに注意しておく。

Step 2（ゴールからの逆算） ここでは、以降で設定する微分方程式の目的意識を説明する。示したいことは「時刻を t_0 から t へと少しだけ動かしても、f_t は適切な微分同相写像を合成して f_{t_0} に整えられる」ことである。つまり、0 を保つ微分同相写像たちが成す滑らかな族 $\{\Phi_t\}_{t\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)}$ であって、

$$(*) : \quad f_t \circ \Phi_t = f_{t_0}$$

なるものが欲しい。これをゴールとして逆算してみよう：左辺の写像を詳しく見るとそれぞれ

$$V \times (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon) \xrightarrow[\text{右辺は id}]{\text{左辺は}\Phi_t\times\text{id}} V \times (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon) \xrightarrow[\text{右辺は } f_{t_0}\circ \mathrm{pr}_1]{\text{左辺は } f_t} \mathbb{R}^n$$

というものであることに注意し、両辺を t で微分する。このとき、合成写像の微分法から

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(f_t \circ \Phi_t - f_{t_0}) &= (J_{f_t} \circ \Phi_t) \cdot \frac{\partial \Phi_t}{\partial t} + \left(\frac{\partial f_t}{\partial t} \circ \Phi_t\right) \cdot 1 \\ &= \left\{ J_{f_t} \cdot \left(\frac{\partial \Phi_t}{\partial t} \circ \Phi_t^{-1}\right) + \frac{\partial f_t}{\partial t} \right\} \circ \Phi_t\end{aligned}$$

を得る。この左辺が 0 なのだから、

$$(**) : \quad J_{f_t} \cdot \left(\frac{\partial \Phi_t}{\partial t} \circ \Phi_t^{-1}\right) + \frac{\partial f_t}{\partial t} = 0$$

が導かれる。これが所望の等式 $(*)$ の無限小版である。このような Φ_t を見つけるために、$(**)$ の括弧内を未知写像 $\boldsymbol{\xi} : V \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ に置き換えた方程式

$$J_{f_t} \cdot \boldsymbol{\xi} + \frac{\partial f_t}{\partial t} = 0$$

を考えることになる。気分としては、$\boldsymbol{\xi}$ を「積分」することで Φ_t が得られるということである[*2]。

Step 3（微分方程式の設定と「積分」） 等式

$$J_{f_t} \cdot \boldsymbol{\xi} + \frac{\partial f_t}{\partial t} = 0$$

を充たす写像、つまり

$$\boldsymbol{\xi} = -J_{f_t}^{-1} \cdot \frac{\partial f_t}{\partial t} \ : \ V \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$$

を考える。これを積分するため、連立微分方程式

$$(\#) : \ \frac{dx_i}{ds} = \xi_i(x_1, \ldots, x_n, t) \quad (i = 1, \ldots, n), \quad \frac{dt}{ds} = 1$$

を設定する。$\boldsymbol{\xi}$ が滑らかなことに注意すれば、常微分方程式の基本定理より次を得る：任意の $t_0 \in [0,1]$ に対して、正数 $\varepsilon > 0$ と開近傍 $\mathbf{0} \in W \subset V$ が存在して、任意の $(\boldsymbol{x}, t) \in W \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ に対して、これを初期値（$s = 0$ での値）とするような解

$$x_i(s) \ (i = 1, \ldots, n), \quad t(s)$$

が $s = 0$ の近くで唯一組存在し、それは $s, \boldsymbol{x}, t$ に対して滑らかに依存する。ここで $t(s)$ は、$t(s) = t + s$ と具体的に求められる。

この解をとり、$\Psi_{t,s}(\boldsymbol{x}) = (x_1(s), \ldots, x_n(s))$（$(\boldsymbol{x}, t)$ を初期値とする解）と置こう。これは任意の $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ と充分小さな s に対して滑らかな写像 $\Psi_{t,s} : W \to \mathbb{R}^n$ を定めている。これはまだ所望の $\{\Phi_t\}_{t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)}$ ではないが……。

Step 4（$\{\boldsymbol{\Phi_t}\}_{t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)}$ の構成と性質の確認） 各 $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ に対して

$$\Phi_t \coloneqq \Psi_{t_0, t - t_0} : W \to \mathbb{R}^n$$

[*2] 勉強の進んでいる方は、ベクトル場からフローを構成すると思ってください。

と定める。これは t まで込めて滑らかな写像であるが、さらに t を留めるごとには微分同相写像である。実際、まず次の事実を確認してみよう：$|t-t_0|, |s|, |s'|$ が充分小さいとするとき、

$$\Psi_{t+s,s'} \circ \Psi_{t,s} = \Psi_{t,s+s'}, \quad \Psi_{t,0} = \mathrm{id}$$

が成り立つ。

▶ **一つ目について**

$$\begin{aligned}\Psi_{t+s,s'} \circ \Psi_{t,s}(\boldsymbol{x}) &= \Psi_{t+s,s'}(x_1(s), \ldots, x_n(s)) \\ &\qquad \text{ただし } (x_1(0), \ldots, x_n(0)) = \boldsymbol{x},\ t(0) = t \\ &= (\widetilde{x}_1(s'), \ldots, \widetilde{x}_n(s')) \\ &\qquad \text{ただし } (\widetilde{x}_1(0), \ldots, \widetilde{x}_n(0)) = (x_1(s), \ldots, x_n(s)),\ \widetilde{t}(0) = t + s\end{aligned}$$

と計算できるが、最後のただし書きと微分方程式の解の一意性より

$$\widetilde{x}_i(s') = x_i(s+s'), \quad \widetilde{t}(s') = t(s) + s' = t + s + s'$$

が分かる（$s' = 0$ を入れるとただし書きのものに一致することを確認しよう）。故に

$$\begin{aligned}\Psi_{t+s,s'} \circ \Psi_{t,s}(\boldsymbol{x}) &= (x_1(s+s'), \ldots, x_n(s+s')) \\ &\qquad \text{ただし } (x_1(0), \ldots, x_n(0)) = \boldsymbol{x},\ t(0) = t\end{aligned}$$

であり、これは $\boldsymbol{x}, t$ を初期値（$s + s' = 0$ での値）とする解である。再び解の一意性によって $\Psi_{t+s,s'} \circ \Psi_{t,s}(\boldsymbol{x}) = \Psi_{t,s+s'}(\boldsymbol{x})$ を得る。□

▶ **二つ目について**　こちらは割と簡単である：

$$\begin{aligned}\Psi_{t,0}(\boldsymbol{x}) &= (x_1(0), \ldots, x_n(0)) \\ &\qquad \text{ただし } (x_1(0), \ldots, x_n(0)) = \boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{x}\end{aligned}$$

より OK。□

これを踏まえて、上にて $t \mapsto t_0, s \mapsto t - t_0, s' \mapsto t_0 - t$ とすることで、$\Phi_t = \Psi_{t_0, t-t_0}$ の滑らかな逆写像として $\Psi_{t, t_0 - t}$ をとれることが分かるのである[*3]。

この微分同相写像 Φ_t が所望の性質を持つこと、つまり Φ_t は $(**)$ の等式と $\Phi_t(0) = 0$ を充たすことを確認しよう。

[*3] 勉強の進んでいる人は、$\Pi_\delta = \Phi_{t_0+\delta}$ が ξ のフローとなっていることを確認してみましょう。

▶ $(**)$ **について**　$\Psi_{t,s}$ は常微分方程式 $(\#)$ の解で出来ていたので、

$$\frac{d\Psi_{t_0,s}(x)}{ds} = \xi(\Psi_{t_0,s}(x), t_0 + s),\ \text{よって}\ s = t - t_0 \text{として}\ \frac{\partial \Phi_t(x)}{\partial t} = \xi(\Phi_t(x), t)$$

が成り立っている。これにより

$$(***) : \xi(x,t) = \frac{\partial \Phi_t}{\partial t} \circ \Phi_t^{-1}(x)$$

なので、ξ の定義より

$$(**) : \quad J_{f_t} \cdot \left(\frac{\partial \Phi_t}{\partial t} \circ \Phi_t^{-1} \right) + \frac{\partial f_t}{\partial t} = 0$$

が成り立つことが分かる。□

▶ $\Phi_t(0) = 0$ **について**

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}(0) = -f_0(0) + f(0) = 0$$

なので、ξ の定義より $\xi(0,t) = 0$ である。これを先ほどの $(***)$ と併せることで

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial t} \circ \Phi_t^{-1}(0) = 0$$

を得る。一方で、包含写像の族 $\{\iota_t : W \to \mathbb{R}^n\}_{t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)}$, $\iota_t(x) = x$ についても

$$\frac{\partial \iota_t}{\partial t} \circ \iota_t^{-1}(0) = 0$$

が成り立つので、解の一意性により $\Phi_t(0) = \iota_t(0) = 0$ を得る。□

以上より Φ_t は所望の微分同相族であることが分かったことになる。ここでさらに Step 2 の計算を思い出せば、

$$\frac{\partial}{\partial t}(f_t \circ \Phi_t - f_{t_0}) = 0$$

が成り立つことも分かる。故に $f_t \circ \Phi_t - f_{t_0}$ は t について定数となるが、$t = t_0$ のときこれは 0 となる。以上までをまとめると、任意の $t_0 \in [0,1]$ に対して、或る正数 $\varepsilon > 0$ が存在し、充分小さな開近傍 $0 \in W \subset V$ 上で、各 $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ に対して

$$f_t \circ \Phi_t = f_{t_0}$$

が成り立つことになる。

Step 5(f が微分同相写像であることの証明). 締めに、Φ_t を用いて、f_0 と $f_1 = f$ を繋げよう。最後は少し位相的な議論となる。$[0, 1]$ 上の同値関係を次で定める：

$$t \sim t' \overset{\text{def.}}{:\Longleftrightarrow} 0 \in \mathbb{R}^n \text{ まわりの局所微分同相 } \sigma \text{ が存在し、} f_t \circ \sigma = f_{t'} \text{ が成り立つ。}$$

上で示されたことは、この同値関係についての同値類が $[0, 1]$ の開集合となることである。しかし、$[0, 1]$ は連結だったから、異なる同値類を複数とることはできない。これは同値類が唯一つであること、つまり $[0, 1]$ 全体になること、特に $0 \sim 1$ を意味する。このことから、$0 \in \mathbb{R}^n$ まわりの局所微分同相 σ であって、$f_0 \circ \sigma = f_1 (= f)$ なるものをとる。すると、f_0 はそもそも微分同相写像だったのだから、f_1 も微分同相写像だと分かる。以上で証明が完了した。■

4　更新記録

2021 年 8 月 16 日　第 1 稿を公開しました。

参考文献

[1] 泉屋周一・石川剛郎『応用特異点論』（共立出版）

この本では f が C^r $(2 \leqslant r \leqslant \infty)$ の場合で証明を書き下ろしています。

[2] 松本幸夫『多様体の基礎』（東大出版）

[3] John W. Milnor “Topology from the Differential Viewpoint”（Princeton University Press）

[4] 志賀浩二『多様体論』（岩波書店）

[5] 坪井俊『幾何学 I　多様体入門』（東大出版）